



T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI  
GEOMETRİ BİLİM DALI

**DUAL İNVLÖT EĞRİSİNİN ÇATILARINA GÖRE BAZI  
ÖZEL REGLE YÜZEYLER**

Yüksek Lisans Tezi

Selma PALAVAR

Danışman  
**Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ**

**SAMSUN**  
2021

T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI  
GEOMETRİ BİLİM DALI



## DUAL İNVOLÜT EĞRİSİNİN ÇATILARINA GÖRE BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER

Yüksek Lisans Tezi

**Selma PALAVAR**

Danışman

**Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ**

PYO.EGF.1904.19.005 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak Ondokuz Mayıs Üniversitesi tarafından desteklenmiştir.

SAMSUN  
2021

## TEZ KABUL VE ONAYI

Selma PALAVAR tarafından, Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ danışmanlığında hazırlanan “Dual İnvolut Eğrisinin Çatılarına Göre Bazı Özel Regle Yüzeyler ” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 22.2.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvan Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT Ordu Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye (Danışman)	Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT  
Enstitü Müdürü

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Dönem Projesi tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

İmza  
15 /03 / 2021  
Selma PALAVAR

## TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

**Tez Başlığı :** Dual İnvolut Eğrisinin Çatılarına Göre Bazı Özel Regle Yüzeyler

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 20/01/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 18  
Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

İmza  
15 /03 / 2021  
Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ

## ÖZET

### DUAL İNVOLÜT EĞRİSİNİN ÇATILARINA GÖRE BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER

Selma PALAVAR

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Ocak/2021

Danışman: Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ele alınmıştır. Kuramsal temeller bölümünde Öklid uzayında regle yüzeyler ve invaryantları ayrıca ID-Modül, ID-Modül'de 1-parametrelili uzay hareketi ve regle yüzeyler incelendi. Materyal ve yöntem bölümünde T, N, B ve C birim dual vektörlerinin oluşturdukları kapalı regle yüzeylerin invaryantları ile ilgili sonuçlar incelendi. Aynı bölümde dual involüt eğrisinin Frenet vektörleri tarafından üretilen kapalı regle yüzeyin invaryantları incelendi.

Çalışmanın son bölümünde, bir dual eğrinin dual involütünün  $\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen  $[\bar{C}]$  kapalı regle yüzeyinin integral invaryantları araştırılmıştır. Ayrıca involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve sabit pol eğrisi tarafından üretilen  $[R_1], [R_2], [R_3]$  ve  $[\bar{C}]$  kapalı regle yüzeyleri tarafından sınırlandırılan dual küresel alanlar hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar bir örnekle resmedilmiştir. Son olarak bir dual eğrinin dual involüt Blaschke vektörleri tarafından üretilen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları hesaplanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Regle yüzey, ID-Modül, Regle yüzeyin invaryantları, Dual involüt, Frenet vektör, Blaschke vektör.

## ABSTRACT

### SOME SPECIAL RULED SURFACES ACCORDING TO THE FRAMES OF THE INVOLUTE CURVE IN DUAL SPACE

Selma PALAVAR

Ondokuz Mayıs University  
Institute of Graduate Studies  
Department of Mathematics

Master, January/2021

Supervisor: Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ

This study consists of four chapters. In introduction, purpose of the study are given. In theoretical foundations chapter, ruled surfaces and invariants in Ecludian space and ID-Modul,. 1- parameter spatial motions and the ruled surfaces in ID-Modul are explained. In material and method chapter, the results related with invariants of the closed ruled surfaces generated by the unit vectors  $T$ ,  $N$ ,  $B$  and  $C$  are explained. In the same chapter, on the invariants of ruled surfaces generated by the dual involute Frenet trihedron are explained.

In the last chapter, the integral invariants of the closed ruled surface  $[\bar{C}]$  produced by the dual fixed centrode curve  $\bar{C}$  of the dual involute of a dual curve are investigated. In addition, the dual spherical areas bounded by the closed ruled surfaces  $[R_1]$ ,  $[R_2]$ ,  $[R_3]$  and  $[\bar{C}]$  produced by the Frenet vectors of the involute curve and the fixed pole curve were calculated. The results found are illustrated with an example. Finally, integral invariants of closed ruled surfaces produced by dual involute Blaschke vectors of a dual curve were calculated and some results were obtained.

Keywords: Ruled surfaces, ID-Modul, Invariants of the ruled surfaces, Dual involute and Frenet vector, Blaschke vektor.

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Akademik eğitim sürecinde yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında bilgilerini ve fikirlerini benimle paylaşan, bana her konuda yol gösteren, bu zor süreçte bana daima anlayışlı bir tutumla yaklaşan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ' ye teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimi boyunca her türlü desteğini esirgemeyen Ordu Üniversitesi'nden Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT' a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Beni bugünlere getirmek için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, PYO.EGF.1904.19.005 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak Ondokuz Mayıs Üniversitesi tarafından desteklenmiştir.

Ocak 2021. Samsun

Selma PALAVAR

<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b>	
<b>ÖZET</b> .....	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>iv</b>
<b>ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR</b> .....	<b>v</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>vii</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>viii</b>
<b>1.GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER</b> .....	<b>2</b>
2.1. Eğriler Teorisi.....	2
2.2. ID-Modül.....	16
2.2.1. Dual Sayılar .....	16
2.2.2. ID-Modül .....	18
2.3. Dual Uzayda Frenet Formülleri.....	26
2.4. ID–Modülde ve Çizgiler Uzayında 1–Parametrelili Hareketler .....	27
2.4.1. Birim Dual Küresel Hareketler .....	27
2.4.2. Regle Yüzeyler Teorisi .....	29
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>37</b>
3.1. T, N, B ve C Dual Vektörlerinin Oluşturdukları Kapalı Regle Yüzeylerin İnvaryantları .....	37
3.1.1. (T)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları.....	39
3.1.2. (N)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları .....	41
3.1.3. (B)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları.....	42
3.2. Dual İnvolut Evolüt Eğri Çiftleri.....	50
3.3. Dual İnvolut Frenet Üçlüsü Tarafından Üretilen Regle Yüzeylerin İnvaryantları .....	56
3.3.1. [R1] Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları .....	57
3.3.2. [R2] Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları .....	58
3.3.3. [R3] Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları .....	59
<b>4.BULGULAR VE TARTIŞMA</b> .....	<b>61</b>
4.1. C Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları .....	61
4.2. Blaschke Vektörler Tarafından Oluşturulan Dual İnvolut Regle Yüzeyin İnvaryantları .....	74
<b>5.SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	<b>80</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>81</b>
<b>ÖZ GEÇMİŞ</b> .....	<b>82</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$E^3$	3- boyutlu Öklid Uzayı
$ID^3$	ID Dual Sayılar Halkası Üzerinde ID-Modül
$P_X$	Dağılım Parametresi
$\vec{W}$	Darboux Vektörü
$\vec{d}$	Steiner Dönme Vektörü
$\vec{V}$	Steiner Öteleme Vektörü
$\vec{\Psi}$	Ani Dual Pfaff Vektör
$L_X$	Açılım Uzunluğu
$\lambda_X$	Açılım Açısı
$\Lambda_X$	Dual Açılım Açısı
$\kappa$	Dual Eğrilik
$\tau$	Dual Torsiyon

## ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL 2. 1 DARBOUX VEKTÖRÜ.....	3
ŞEKİL 2. 2 $E^3$ DE REGLE YÜZEY .....	5
ŞEKİL 2. 3 REGLE YÜZEYİN DRALİ.....	6
ŞEKİL 2. 4 ORTOGONAL YÖRÜNGE EĞRİSİ .....	7
ŞEKİL 2. 5 STRİKSİYON NOKTASI VE STRİKSİYON ÇİZGİSİ (HACİSALİHOĞLU, 1983B).....	8
ŞEKİL 2. 6 REGLE YÜZEYİN AÇILIM UZUNLUĞU (HACİSALİHOĞLU, 1983B).....	10
ŞEKİL 2. 7 REGLE YÜZEYİN AÇILIM AÇISI .....	10
ŞEKİL 2. 8 E. STUDY DÖNÜŞÜMÜ (HACİSALİHOĞLU, 1983A) .....	22
ŞEKİL 2. 9 . DUAL KÜRESEL EĞRİ VE KARŞILIK GELEN REGLE YÜZEY .....	30
ŞEKİL 2. 10 DUAL UZAYDA REGLE YÜZEY .....	32
ŞEKİL 3. 1 DUAL PFAFF VEKTÖRÜ (ŞENYURT, 1994).....	44
ŞEKİL 3. 2 İNVOLÜT EVOLÜT EĞRİ ÇİFTİ (ŞENYURT VD. 2015) .....	52
ŞEKİL 4. 1 $R_1$ REGLE YÜZEYİ .....	73
ŞEKİL 4. 2 $R_2$ REGLE YÜZEYİ .....	73
ŞEKİL 4. 3 $R_3 = C$ REGLE YÜZEYİ.....	74

# 1.GİRİŞ

Dual sayılar ilk olarak W. K. Clifford (1873) tarafından geometrik araştırmalarının bir aracı olarak tasarlanmıştır. Daha sonra Alman matematikçi Eduard Study (1903) dual sayıları çizgiler uzayı ve kinematik alanında yaptığı çalışmalarında kullanmıştır. Study prensibine göre birim dual kürenin dual noktaları  $IR^3$  deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir. Bu nedenle küre üzerindeki dif-bilir bir eğri çizgiler uzayında bir regle uzaya karşılık gelir (Guggenheimer 1963). Study tekabülü kullanılarak elde edilen regle yüzeylerde kaynaklardan bazıları (Gürsoy, 1990), (Gürsoy, 1992), (Sarıoğlugil vd. 2011), (Veldkamp, 1976), (Saraçoğlu ve Yaylı, 2012) şeklindeğir. şenyurt S. (1994) yüksek lisans tezinde T, N, B ve C birim dual vektörlerinin oluşturdukları kapalı regle yüzeylerin invaryantları ile ilgili sonuçlar vermiştir. Yine literatürde Senyurt, S., Bilici, M., & Caliskan, M. (2015) "Some Characterizations for the Involute Curves in Dual Space" isimli çalışmalarında dual uzayda involute-evolüt eğrileri ve dual Frenet çatısı ile Darboux vektörü arasındaki ilişkilere yer vermiştir. Bilici M. (2017) "On The Invariants of Ruled Surfaces Generated by The Dual Involute Frenet Trihedron" adlı çalışmasında dual involüt eğrisinin dual Frenet vektörleri tarafından oluşturulan kapalı regle yüzeylerin integral invaryantlarına yer vermiştir.

Bu çalışmada ise, bir dual eğrinin dual involütünün  $\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen  $[\bar{C}]$  kapalı regle yüzeyinin integral invaryantları araştırılmıştır. Ayrıca involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve sabit pol eğrisi tarafından üretilen  $[R_1], [R_2], [R_3]$  ve  $[\bar{C}]$  kapalı regle yüzeyleri tarafından sınırlandırılan dual küresel alanlar hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar bir örnekle resmedilmiştir. Son olarak bir dual eğrinin dual involüt Blaschke vektörleri tarafından üretilen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları hesaplanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Eğriler Teorisi

$I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = ((\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)))$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne  $\mathbb{R}^3$  de bir eğri denir. Bu eğrinin  $\forall s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise  $\alpha$  ya birim hızlı eğri denir ve  $s \in I$  yay parametresi olmak üzere eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri  $t(s), n(s)$  ve  $b(s)$  ile gösterilirse;

- $s$  yay parametresi ise, Frenet vektörleri;

$$t(s) = \alpha'(s)$$

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

- $s$  keyfi parametre ise, Frenet vektörleri;

$$t(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$n(s) = t(s) \wedge b(s)$$

$$b(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla  $k_1(s), k_2(s)$  ile gösterildiğinde de;

$s$  yay parametresi ise,

$$k_1(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle$$

$$k_2(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$$

$s$  keyfi parametre ise,

$$k_1(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha''(s)\|^3}$$

$$k_2(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$$

(Hacısalihoglu, 1983b).

$t(s), n(s)$  ve  $b(s)$  Frenet vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında,

$$t'(s) = k_1(s) n(s)$$

$$n'(s) = -k_1(s) t(s) + k_2(s) b(s)$$

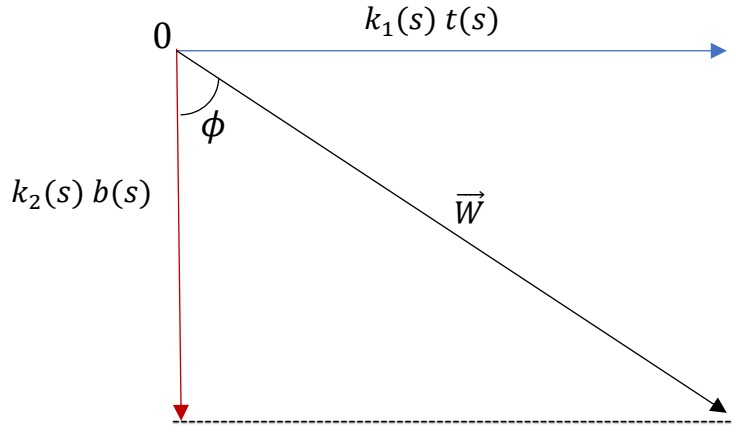
$$b'(s) = -k_2(s) n(s)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıya Frenet formülleri adı verilir (Hacısalihoglu, 1983b).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  Frenet çatısının her  $s$  anında, bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini, bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre de Darboux vektörü denir. Bu vektör  $\vec{W}(s)$  ile gösterilirse,

$$\vec{W}(s) = n(s) \wedge n'(s) \quad (2.1.)$$

şeklinde bulunur.  $b(s)$  ve  $\vec{W}(s)$  arasındaki açığı  $\phi$  ile gösterilir (Şekil 2.1.).



Şekil 2. 1 Darboux vektörü

Şekilden  $\cos \phi = \frac{k_1(s)}{\|\vec{W}(s)\|}$ ,  $\sin \phi = \frac{k_2(s)}{\|\vec{W}(s)\|}$  olur. Buna göre Darboux yönündeki birim vektör  $\vec{C}(s)$  ile gösterilirse,

$$\vec{C}(s) = \sin \phi t(s) + \cos \phi b(s) \quad (2.2.)$$

yazılır ve bu  $\vec{C}(s)$  vektörünün bir küre üzerinde çizmiş olduğu karedir. Bu vektörün birim dual küre üzerinde de bir eğri çizer (Fenchel, 1951).

$H/H'$  uzay hareketinin  $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinde  $\begin{cases} A = A(t) \\ C = C(t) \end{cases}$ , olacak şekilde bir tek reel  $t$  parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler  $H/H'$  uzay hareketine 1-parametrelili uzay hareketi denir, eğer  $\forall t \in IR$  için

$$\begin{cases} A(t + 2\pi) = A(t) \\ C(t + 2\pi) = C(t) \end{cases}$$

ise 1-parametrelili kapalı uzay hareketi denir.

Darboux dönme vektörü rolünü oynayan  $W$  vektörüne  $H/H'$  uzay hareketinin ani Pfaff vektörü denir.

$\alpha: I \rightarrow E^3$  diferensiyellenebilir kapalı bir eğri olsun.

$$d = \hat{\phi}_{(\alpha)} W \quad (2.3.)$$

vektörüne  $H/H'$  uzay hareketinin Steiner dönme vektörü denir ve bu eğriye bağlı hareket eden  $H$  hareketli uzayı  $\{E_1, E_2, E_3\}$  ortonormal sistemi temsil etmek üzere

$$dX = \sigma_1 E_1 + \sigma_2 E_2 + \sigma_3 E_3$$

şeklinde tek türlü ifade edilen vektörün  $\alpha$  eğrisi boyunca eğrisel integrali ile belirtilen

$$V = dX \quad (2.4.)$$

vektör de  $H/H'$  hareketinin Steiner öteleme vektörüdür (Hacısalıhoğlu, 1983b).

### Tanım 2.1.1.

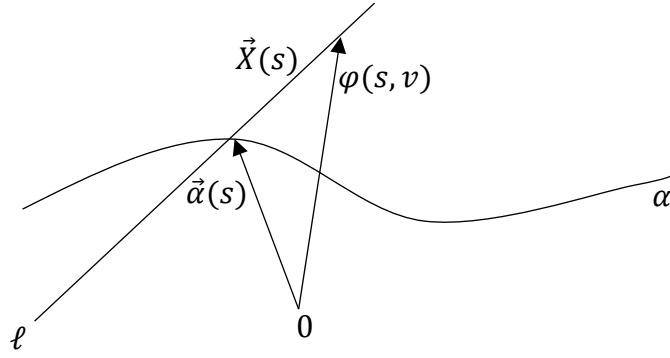
$E^3$  uzayında bir  $\ell$  doğrusunun bir  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket etmesiyle elde edilen yüzeye bir regle yüzey adı verilir.  $\alpha$  eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi,  $\ell$  doğrusuna yüzeyin bir doğrultmanı denir.  $\vec{X}(s)$  ve  $\alpha(s)$  noktasında  $\ell$  doğrusuna paralel bir tanjant vektör ise

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\vec{X}(s) \quad (2.5.)$$

eşitliği, regle yüzey için bir parametrizasyon tanımlar.  $\forall s \in I$  için

$$\varphi(s + 2\pi, v) = \varphi(s, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalı regle yüzey denir, (Hacısalıhoğlu, 1983b). Bazen,  $v$  nin bütün  $\mathbb{R}$  yerine  $\mathbb{R}$  nin bir aralığında değiştiğini varsayabiliriz. Bu durumda,  $\ell$  doğrusunun tamamı yerine bir kısmı regle yüzeyin üzerinde bulunur (Şekil 2.2.).



Şekil 2. 2  $E^3$  de regle yüzey

### Tanım 2.1.2.

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir. Anadoğrularının birim doğrultman vektörü  $\vec{X}$  olan bir regle yüzeyin dralini  $P_X$  ile gösterelim (Şekil 2.3.). Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile,  $\vec{X} \wedge \overline{X'}$  olduğundan birim vektör

$$\frac{\vec{X} \wedge \overline{X'}}{\|\vec{X}'\|}$$

dir, burada  $\overline{X'} = D_{\vec{t}}X$  dir.



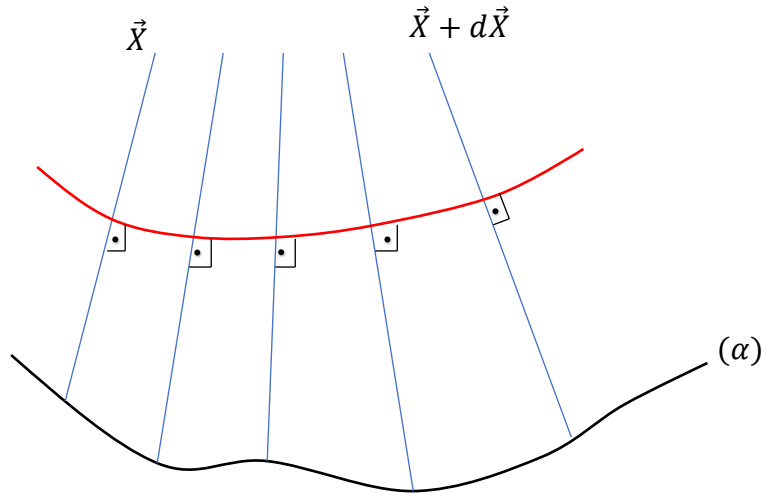
$$P_X = \frac{\det\left[\frac{d\vec{a}}{ds}, \vec{X}, \vec{X}'\right]}{\|\vec{X}'\|^2}$$

bulunur.

Bir  $\vec{\varphi}(s,v)$  regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983b)..

**Tanım 2.1.3.**

Bir regle yüzeyin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Şekil 2.4.).



Şekil 2. 4 Ortogonal yörünge eğrisi

**Teorem 2.1.1.**

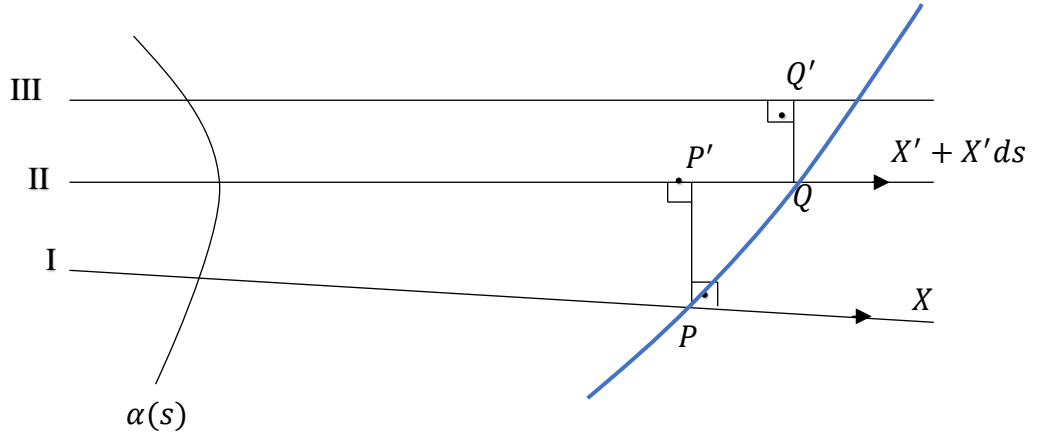
Bir regle yüzeyde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası, boğaz noktalarının geometrik yerine de striksiyon çizgisi denir (Hacısalıhoğlu, 1983b).

*İspat*

Bir  $\varphi(s, v)$  regle yüzeyinin merkez noktasının  $\vec{\alpha}$  yer vektörü dayanak eğrisinin  $\vec{\alpha}(s)$  yer vektörü,  $X(s)$  doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan  $\bar{u}$  uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(s, \bar{u}) = \alpha(s) + \bar{u}X(s) \quad (2.6.)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\bar{u}$  parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi  $\vec{X}(s)$  ve  $\vec{X}(s) + d\vec{X}(s)$  olan komşu üç anadoğrusu verilsin (Şekil 2.5.).



Şekil 2. 5 Striksiyon noktası ve Striksiyon çizgisi (Hacısalıhoğlu, 1983b)

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğrularının ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(s) \wedge (X(s) + D_t X(s) ds) = X(s) \wedge D_t X(s) ds$$

bağıntısından dolayı  $X \wedge D_t X$  vektörüne paraleldir. Limit halinde  $\overrightarrow{PQ}$  vektörü  $\overrightarrow{PP'}$  ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0, \langle X + D_t X ds, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$$

olacağından

$$\langle D_t X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \quad (2.7.)$$

elde edilir. Ayrıca (2.6.) dan dayanak eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınır ve (2.7.) den dolayı,

$$\langle D_t X, \frac{d\bar{\alpha}}{ds} \rangle = 0$$

$$\langle D_t X, t + \frac{d\bar{u}}{ds} X + \bar{u} D_t X \rangle = 0$$

$$\langle D_t X, t \rangle + \bar{u} \|D_t X\|^2 = 0$$

$$\bar{u} = - \frac{\langle D_t X, t \rangle}{\|D_t X\|^2} \quad (2.8.)$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (2.6.) den

$$\vec{\bar{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle D_t X, t \rangle}{\|D_t X\|^2} X(s)$$

elde edilir. Eğer  $\|D_t X\| = 0$  ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (2.8.) formülünde

$$\bar{u} = 0 \text{ veya } \langle D_t X, t \rangle = 0$$

alınması yeterlidir.

#### **Tanım 2.1.4.**

Regle yüzeyin anadoğrularının dik yörüngelerinin dayanak eğrisi boyunca integrali

$$L_X = \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, X \rangle = - \oint_{(\alpha)} dv$$

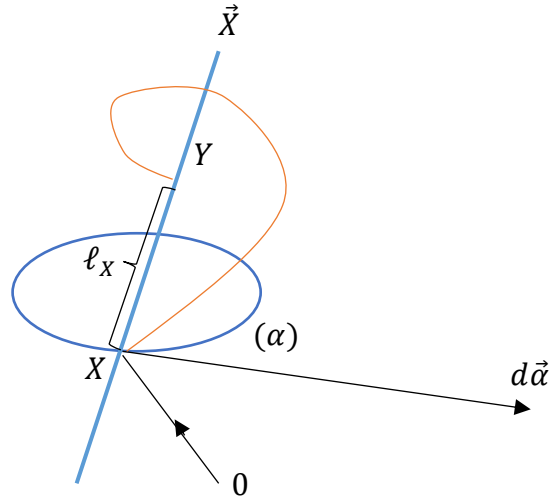
dir. Burada

$$L_X: I \rightarrow IR$$

$$v \rightarrow - \oint dv$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyondur (Hacısalıhoğlu, 1983b).

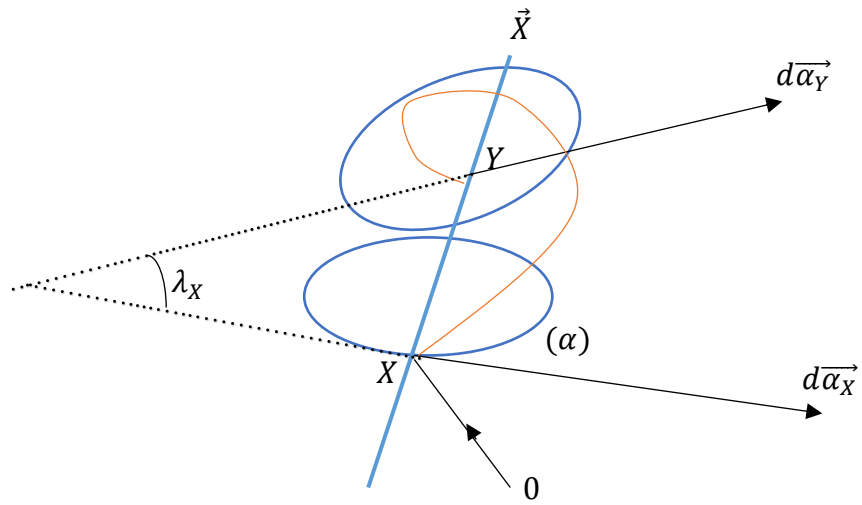
Bu fonksiyona regle yüzeyin açılım uzunluğu denir (Şekil 2.6.).



Şekil 2. 6 Regle yüzeyin açılım uzunluğu (Hacısalihoglu, 1983b)

**Tanım 2.1.5.**

Bir  $\varphi(s, v)$  regle yüzeyin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açığı regle yüzeyin açılım açısı denir ve  $\lambda_X$  ile gösterilir (Şekil 2.7.).



Şekil 2. 7 Regle yüzeyin açılım açısı

Regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca  $H/H^1$  hareketinde H hareketli uzayını  $H = S_p\{t, n, b\}$  olarak seçtiğimizde hareketin Steiner dönme vektörü

$$d = t \phi_{(\alpha)} k_2 ds + b \phi_{(\alpha)} k_1 ds \quad (2.9.)$$

dır, (Hacısalıhoğlu, 1983b). Burada t ve b, sırası ile dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı ve binormal vektör alanıdır.  $k_1$  ve  $k_2$  de dayanak eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde bir  $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in H$  doğrultusu içinde Steiner öteleme vektörü  $\vec{V} = \phi_{(\alpha)} d\vec{a}$  olduğundan,

$V = \vec{t} \phi_{(\alpha)} ds$  dır (Hacısalıhoğlu, 1983b).

### **Teorem 2.1.2.**

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü  $\vec{X}$  olan bir kapalı regle yüzeyin  $L_X$  açılım uzunluğu ve  $\lambda_X$  açılım açısı, sırası ile,  $\vec{X}$  in  $H/H^1$  uzay hareketinin Steiner öteleme vektörü  $\vec{V}$  ve Steiner dönme vektörü  $\vec{d}$  üzerindeki dik izdüşümlerine eşittir, yani

$$L_X = \langle V, X \rangle,$$

$$\lambda_X = \langle d, X \rangle.$$

Dayanak eğrisinin t, n, b Frenet vektörlerinin hareket sırasında çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları ve açılım uzunlukları sırası ile,

$$\begin{cases} \lambda_t = \phi_{(\alpha)} k_2 ds \\ \lambda_n = 0 \\ \lambda_b = \phi_{(\alpha)} k_1 ds \end{cases} \quad (2.10.)$$

$$\begin{cases} L_t = \phi_{(\alpha)} ds \\ L_n = 0 \\ L_b = 0 \end{cases} \quad (2.11.)$$

dır, (Hacısalıhoğlu, 1983b).

(2.10.) ve (2.11.) formülleri (2.9.) de yerine yazılırsa

$$d = \lambda_t t + \lambda_b b \quad (2.12.)$$

dır, (Hacısalihoglu, 1983b).

**Teorem 2.1.3.**

Kapalı bir regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca  $\{t, n, b\}$  Frenet üç ayaklısının hareketinde, hareketin Steiner dönme vektörünün bileşenleri bu üç ayaklının ayaklarının temsil ettikleri doğrunun çizdikleri regle yüzeylerin açılım açılarından ibarettir.

$H = S_p\{t, n, b\}$  uzayında tespit edilen sabit bir X doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu

$$\lambda_X = \lambda_t x_1 + \lambda_b x_3, \quad (2.13.)$$

$$L_X = x_1 L_t \quad (2.14.)$$

dır, (Hacısalihoglu, 1983b).

**Teorem 2.1.4.**

$H/H'$ uzay hareketinde H uzayında sabit bir doğrunun  $H'$  uzayında çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, asli normal doğrultusundaki bileşeninden bağımsızdır (Hacısalihoglu, 1983b).

**Teorem 2.1.5.**

Bir  $\alpha: I \rightarrow E^3$  kapalı eğrisi boyunca tanımlanan  $H/H'$ hareketinde H daki sabit bir X doğrusunun  $H'$  de çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu, hareketi belirten  $\alpha(s)$  eğrisinin, T teğetinin çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu ile X doğrusunun teğet yönündeki bileşeninin çarpımıdır (Hacısalihoglu, 1983b).

Aynı X doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için

$$P_x = \frac{\det\left[\frac{d\alpha}{ds}, x, \frac{dX}{ds}\right]}{\left\|\frac{dX}{ds}\right\|^2} \quad (2.15.)$$

drali, sıfır olmalıdır.

X doğrusu H uzayında sabit olduğundan

$$\frac{dX}{ds} = -x_2 k_1 t + (x_1 k_1 - x_3 k_2) n + x_2 k_2 b$$

dır.

$$\det\left[\frac{d\alpha}{ds}, x, \frac{dX}{ds}\right] = \langle t \wedge x, \frac{dX}{ds} \rangle$$

$$= x_2^2 k_2 - x_3(x_1 k_1 - x_3 k_2)$$

$$(x_2^2 + x_3^2)k_2 - x_1 x_3 k_1 = 0$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_3} \quad (2.16.)$$

dır.

Ayrıca  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  olduğundan

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1 - x_1^2}{x_1 x_3} \quad (2.17.)$$

bulunur.

(2.13.) ve (2.14.) deki  $x_1$  ve  $x_3$  değerleri (2.17.) da yerine yazılırsa

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{(I_t^2 - I_x^2)\lambda_b}{(\lambda_x I_t - I_x \lambda_t) I_x} \quad (2.18.)$$

elde edilir.

X doğrusu H da sabit olduğundan  $\frac{k_1}{k_2}$  oranı sabittir.

### **Teorem 2.1.6.**

$H/H'$  uzay hareketinde H da sabit bir X doğrusunun  $H'$  uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart regle yüzeyin dayanak eğrisinin harmonik eğriliği

$$H = \frac{k_1}{k_2} = \frac{(I_t^2 - I_x^2)\lambda_b}{(\lambda_x I_t - I_x \lambda_t) I_x}$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır, (Hacısalıhoğlu, 1983b).

Şimdi H hareketli uzayı temsil eden  $\{t, n, b\}$  üç ayaklısının oluşturduğu regle yüzeylerin drallerini hesaplayalım.

t ye karşılık gelen regle yüzeyin  $P_t$  drali

$$P_t = \frac{\det\left[\frac{da}{ds}, t, \frac{dt}{ds}\right]}{\left\|\frac{dt}{ds}\right\|^2},$$

$$P_t = \frac{\det\left[t, t, \frac{dt}{ds}\right]}{\left\|\frac{dt}{ds}\right\|^2},$$

$$P_t = 0 . \quad (2.19.)$$

n ye karşılık gelen regle yüzeyin  $P_n$  drali,

$$P_n = \frac{\det\left[\frac{d\alpha}{ds}, n, \frac{dn}{ds}\right]}{\left\|\frac{dn}{ds}\right\|^2},$$

$$P_n = \frac{\det[t, n, -k_1 t + k_2 b]}{\|k_1 t + k_2 b\|^2},$$

$$P_n = \frac{\langle b, -k_1 t + k_2 b \rangle}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$P_n = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (2.20.)$$

b ye karşılık gelen regle yüzeyin  $P_b$  drali

$$P_b = \frac{\det\left[\frac{d\alpha}{ds}, b, \frac{db}{ds}\right]}{\left\|\frac{db}{ds}\right\|^2},$$

$$P_b = \frac{\langle -n, -k_2 n \rangle}{k_2^2},$$

$$P_b = \frac{k_2}{k_2^2},$$

$$P_b = \frac{1}{k_2}. \quad (2.21.)$$

Ayrıca (2.20.) ifadesinin pay ve paydası  $k_2^2$  ile bölünürse

$$P_n = \frac{\frac{1}{k_2}}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 1}$$

olur. Diğer taraftan (2.38.) den

$$P_n = \frac{P_b}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 1},$$

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{P_b}{P_n} - 1 \quad (2.22.)$$

elde edilir.

### **Teorem 2.1.7.**

$H/H'$  uzay hareketinde  $(\alpha)$  eğrisinin harmonik eğriliği ile harekete iştirak eden asli normal ve binormal doğrularının  $H'$  çizdikleri regle yüzeyin dralleri arasında

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{P_b}{P_n} - 1$$

bağıntısı vardır. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{(L_t^2 - L_x^2)^2 \lambda_b^2}{(\lambda_x L_t - L_x \lambda_t)^2 L_x^2} \quad (2.23.)$$

ve (2.22.) den  $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2$  çözümlenerek (2.23.) da yerine yazılırsa

$$\frac{P_b}{P_n} = \frac{(L_t^2 - L_x^2)^2 \lambda_b^2}{(\lambda_x L_t - L_x \lambda_t)^2 L_x^2} \quad (2.24.)$$

elde edilir (Hacısalihoglu, 1983b).

### **Teorem 2.1.8.**

$H/H'$  kapalı uzay hareketinde  $H$  da sabit bir doğrunun  $H'$  de çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $H/H'$  uzay hareketine katılan  $\{X, t, n\}$  doğrularının  $H'$  de çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları ile dralleri arasında

$$\frac{P_b}{P_n} = \frac{(L_t^2 - L_x^2)^2 \lambda_b^2}{(\lambda_x L_t - L_x \lambda_t)^2 L_x^2} + 1$$

bağıntısının var olmasıdır (Hacısalihoglu, 1983b).

(C) eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve drali

$$\lambda_C = \langle d, C \rangle ,$$

$$\lambda_C = \langle t \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, \sin \phi t + \cos \phi b \rangle ,$$

$$\lambda_C = \sin \phi \oint k_2 ds + \cos \phi \oint k_1 ds . \quad (2.25.)$$

$$L_C = \oint \langle d\alpha, C \rangle ,$$

$$L_C = \oint \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \sin \phi t + \cos \phi b \right\rangle ds ,$$

$$L_C = \oint \sin \phi ds . \quad (2.26.)$$

$$P_C = \frac{\det \left[ \frac{d\alpha}{ds}, C, \frac{dC}{ds} \right]}{\left\| \frac{dC}{ds} \right\|^2} ,$$

$$P_C = - \frac{\cos \phi (k_1 \sin \phi - k_2 \cos \phi)}{\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + (k_1 \sin \phi - k_2 \cos \phi)^2} \quad (2.27.)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzeyin açılabilir olması için  $P_C = 0$  olmalıdır. Buradan

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = 0 = \text{sabit} .$$

## 2.2. ID-Modül

### 2.2.1. Dual Sayılar

$\forall a, a^* \in IR$  olmak üzere  $A = (a, a^*)$  ikilisine bir **sıralı ikili** denir ve

$ID = \{(a, a^*) | a, a^* \in IR\}$  şeklinde gösterilir.

$A = (a, a^*)$  ve  $B = (b, b^*)$  olmak üzere

$$\oplus : ID \times ID \rightarrow ID$$

$$(A, B) \rightarrow A \oplus B = (a + b, a^* + b^*)$$

ile tanımlı işleme ID de **toplama işlemi**,

$$\otimes : ID \times ID \rightarrow ID$$

$$(A, B) \rightarrow A \otimes B = (a + b, ab^* + a^*b)$$

ile tanımlı işleme de ID de **çarpma işlemi** denir ve

$a = b, a^* = b^*$  ise de A ile B **eşittir** (Hacısalihoglu, 1983a).

#### Tanım 2.2.1.

IR reel sayılar cümlesi olmak üzere  $ID = IR \times IR$  cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise ID cümlesine dual sayılar cümlesi ve  $\forall a, a^* \in ID$  elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### Teorem 2.2.1.

$(ID, \oplus, \otimes)$  üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalihoglu, 1983a).

#### Teorem 2.2.2.

ID dual sayılar halkası, IR reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoglu, 1983a).

#### Tanım 2.2.2.

$(a, 0)$  dual sayısı  $a$  reel sayısı ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### Tanım 2.2.3.

Bir  $A = (a, a^*) \in ID$  dual sayısında  $a$  reel sayısına  $A$ 'nın reel kısmı,  $a^*$  reel sayısına da  $A$ 'nın dual kısmı denir ve

$$\text{Re } A = a, \text{ Du } A = a^*$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### **Tanım 2.2.4.**

$(1,0) = 1$  dual sayısına  $ID$  deki çarpma işleminin birim elemanı veya  $ID$  deki **reel birim** denir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### **Tanım 2.2.5.**

$(0,1)$  dual sayısı kısaca  $\varepsilon$  ile gösterilir ve bu sayıya  $ID$  deki dual birim denir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### **Sonuç 2.2.1.**

Çarpma işlemi gereğince

$$\varepsilon \otimes \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0) \quad (2.28.)$$

dır.

#### **Teorem 2.2.3.**

$A = (a, a^*) \in ID$  dual sayısı  $A = a + \varepsilon a^*$  şeklindedir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### **Teorem 2.2.4.**

İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir (Hacısalihoglu, 1983a).

#### **Teorem 2.2.5.**

$A = (a, a^*)$  bir dual sayı ve  $\lambda \in IR$  ise  $\lambda$  ile  $A$ 'nın çarpımı  $\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$  dır. (Hacısalihoglu, 1983a).

#### **Tanım 2.2.6.**

$Z = (x, x^*)$  dual sayılarının bütününe **dual düzlem** denir.  $Z = x + \varepsilon x^*$  dual sayısı için  $|x|$  reel sayısına **Z'nin mutlak değeri** denir (Hacısalihoglu, 1983a). Yani  $|Z| = |x + \varepsilon x^*| = |x|$  dir.

İki dual sayının çarpımının mutlak değeri, mutlak değerleri çarpımına eşittir.  
Yani

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|.$$

### Tanım 2.2.7.

$Z = x + \varepsilon x^*$  dual sayısının eşleniği diye  $\bar{Z} = x - \varepsilon x^*$  dual sayısına denir  
(Hacısalıhoğlu, 1983a).

### Teorem 2.2.6.

1.  $Z \in ID$  ise  $\bar{\bar{Z}}$  nin dual eşleniği  $Z$  dir.

Yani

$$(\bar{\bar{Z}}) = Z,$$

2.  $Z_1, Z_2 \in ID$  için  $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ ,

3.  $Z_1, Z_2 \in ID$  için  $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$

ve

$$Z_2 \neq (0, x^*)$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}},$$

4.  $\forall Z \in ID$  için  $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$ ,

5.  $Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re} Z$ ,  $Z - \bar{Z} = 2 \operatorname{Du} Z$

ve

$$Z = \bar{Z} \text{ ise } Z \in IR$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

### 2.2.2. ID-Modül

Birimi 1 olan değişimli bir halka  $H$  olsun.  $H$  üzerinde bir modül diye bir  $S$  abel grubu üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$H \times S \rightarrow S$$

$$(a, \alpha) \rightarrow a\alpha$$

dış işlemine denir:

$a, b \in H$  ve  $\alpha, \beta \in S$  olmak üzere

1.  $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$  ,
2.  $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$  ,
3.  $(ab)\alpha = a(b\alpha)$  ,
4.  $1 \cdot \alpha = \alpha$  ,

ID dual sayılar halkası üzerinde

$$ID^3 = ID \times ID \times ID = \{(A_1, A_2, A_3) | A_1, A_2, A_3 \in ID\}$$

bir modüldür (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.8.**

$$A=(A_i) , B = (B_i) \in ID^3 \text{ için } A = B \Leftrightarrow A_i = B_i \quad 1 \leq i \leq 3 \text{ dir.}$$

$ID^3$  de toplama işlemi

$$+ : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3$$

$$(A, B) \rightarrow A + B = (A_i + B_i)$$

$ID^3$  de skalerle çarpma işlemi,  $\lambda \in ID$ ,

$$(\cdot) : ID \times ID^3 \rightarrow ID^3$$

$$(\lambda, A) \rightarrow \lambda A = (\lambda A_i), 1 \leq i \leq 3$$

(Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.7.**

$(ID^3, +)$  ikilisi bir değişmeli gruptur ve ID üzerinde bir modüldür. Bu modülü kısaca  $ID^3$  veya ID-Modül şeklinde göstereceğiz. ID-Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.8.**

$a, a^* \in IR^3$  olmak üzere ID-Modül'de her bir A dual vektörü

$$A = a + \varepsilon a^*$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.9.**

$A = a + \varepsilon a^* = (a, a^*)$  dual vektörünün  $\lambda \in ID$  skaleri ile çarpımı

$\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$  dır (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.10.**

$A = (a, a^*)$  ve  $B = (b, b^*) \in ID\text{-Modül}$  için

$A = B \Leftrightarrow a = b$  ve  $a^* = b^*$  dır (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.11.**

$IR^3$  vektör uzayı  $ID\text{-Modül}$ 'ün elemanları  $(a,0)$  şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.9.**

$(0,0) \in ID\text{-Modül}$ , dual vektörüne sıfır dual vektörü denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.10.**

$ID\text{-Modül}$  de iç çarpım

$A = a + \varepsilon a^*$ ,  $B = b + \varepsilon b^* \in ID\text{-Modül}$  olmak üzere

$f : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID$

$(A, B) \rightarrow f(A, B) = \langle A, B \rangle$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür (Hacısalihoglu, 1983a).

Vektör uzayı üzerindeki iç çarpım aksiyomlarını  $ID\text{-Modül}$  üzerinde de kabul edebiliriz. Bu aksiyomlar şunlardır:

1.  $\forall A, B \in ID - \text{Modül}$  için

$$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle ,$$

2.  $\forall A, B \in ID - \text{Modül}$  ve  $\alpha \in ID$  için

$$\langle \alpha A, B \rangle = \langle A, \alpha B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle ,$$

3.  $\forall A, B, C \in ID - \text{Modül}$  için

$$\langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle ,$$

$$\langle A, B + C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle ,$$

4.  $\forall A \in ID - \text{Modül}$  için

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Bu aksiyomlar reel ve vektör uzayındaki iç çarpım aksiyomları ile aynıdır.  
Buna göre

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle a + \varepsilon a^*, b + b^* \rangle \\ &= \langle a, b \rangle + \varepsilon[\langle a^*, b \rangle + \langle a, b^* \rangle]. \end{aligned}$$

**Tanım 2.2.11.**

$A = a + \varepsilon a^*$  dual vektörünün normu

$$\begin{aligned} \|A\| &= (\langle A, A \rangle)^{1/2} \\ &= \left( \|a\| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|} \right), a \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983a).

Bundan sonra bu dual sayı

$$a = \|a\|, a^* = \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|}$$

olmak üzere

$$\|A\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılacaktır.

**Tanım 2.2.12.**

Normu reel birime karşılık gelen dual vektöre birim dual vektör denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.12.**

$A = a + \varepsilon a^*$  birim dual vektör ise

$$\|a\| = 1, \langle a, a^* \rangle = 0 \text{ (Hacısalihoglu, 1983a).}$$

**Teorem 2.2.13.**

$A \neq (0, a^*) \in \text{ID-Modül}$  olmak üzere  $U = \frac{A}{\|A\|}$  bir birim dual vektördür (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.13.**

$$K = \{X = x + x^* \mid \|X\| = (1, 0); x, x^* \in \mathbb{R}^3\}$$

cümlesine ID-Modül de birim dual küre denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.14. (E.STUDY)**

$A \neq (0, a^*) \in \text{ID-Modül}$  olmak üzere ID-Modül'de denklemi  $\|A\| = (1,0)$  olan birim dual kürenin dual noktaları,  $\mathbb{R}^3$  deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoglu, 1983a).

**İspat**

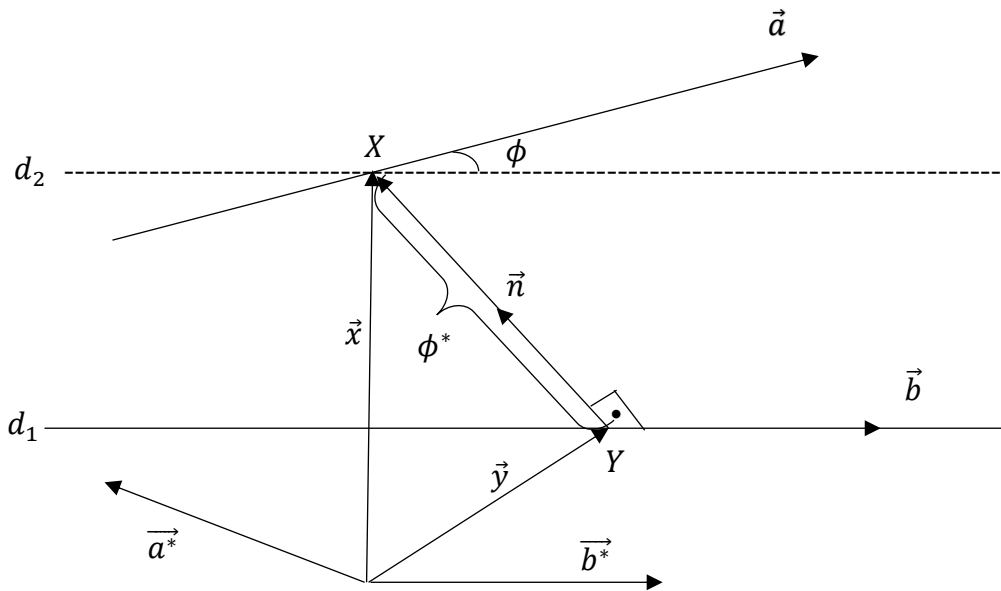
A ve B iki birim dual vektör olsun. E.STUDY Teoremine göre bu vektörler  $\mathbb{R}^3$  de iki yönlü doğru belirtirler. Bu doğrular, sırası ile  $d_1$  ve  $d_2$  olsun.  $d_1$  in yönü a, yeri  $a^*$  ve  $d_2$  nin yönü b, yeri de  $b^*$  ile belli olduğundan a ile b arasındaki açı  $\phi$  ise

$$\langle A, B \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon(\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle)$$

iç çarpımının reel kısmı

$$\langle a, b \rangle = \cos \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad \phi \in \mathbb{R} \text{ dır.}$$

Şimdi  $\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle$  ifadesinin geometrik anlamını açıklayalım (Şekil 2.8.):



Şekil 2. 8 E. Study dönüşümü (Hacısalihoglu, 1983a)

$a^*$  ve  $b^*$ , sırası ile,  $d_1$  ve  $d_2$  yönlü doğruları üzerindeki X ve Y noktalarının seçilişinden bağımsız olduklarından X ve Y noktaları  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak düşünülebilir. Bu dikme yönündeki birim vektör

$$n = \pm \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|}$$

dır.

$d_1$  ve  $d_2$  arasındaki en kısa uzaklık  $\phi^*$  ile gösterilirse

$$x - y = \pm \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|} \phi^*$$

dır.

$$a^* = x \wedge a \quad \text{ve} \quad b^* = y \wedge b$$

olduklarından

$$\langle a, b^* \rangle = \langle a, y \wedge b \rangle = -\langle y, a \wedge b \rangle$$

ve

$$\langle a^*, b \rangle = \langle x \wedge a, b \rangle = \langle x, a \wedge b \rangle$$

$$\langle a^*, b \rangle + \langle a, b^* \rangle = \langle x - y, a \wedge b \rangle$$

$$= \pm \langle \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|} \phi^*, a \wedge b \rangle,$$

$$= \pm \frac{\phi^*}{\|a \wedge b\|} \langle a \wedge b, a \wedge b \rangle,$$

$$= \pm \phi^* \|a \wedge b\|,$$

$$= \pm \phi^* \sin \phi.$$

Sonuç olarak A ile B nin iç çarpımı için

$$\langle A, B \rangle = \cos \phi \pm \varepsilon \phi^* \sin \phi$$

$$\cos \phi - \varepsilon \phi^* \sin \phi = \cos(\phi + \varepsilon \phi^*)$$

elde edilir.

$\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$  bir dual sayı olmak üzere

$$\langle A, B \rangle = \cos \Phi = \cos(\phi + \varepsilon \phi^*) \quad (2.29.)$$

dır.

**Tanım 2.2.14.**

$\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$  dual sayısına A ile B birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Eğer A ve B dual vektörleri birim değil ise bunların

$$U = \frac{A}{\|A\|} \text{ ve } V = \frac{B}{\|B\|}$$

eksenleri birim dual vektörlerdir. U ve V arasındaki dual açı  $\Phi$  olmak üzere

$$\langle U, V \rangle = \cos \Phi$$

olduğundan

$$\langle A, B \rangle = \|A\| \|B\| \cos \Phi \quad (2.30.)$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifadelerden yararlanarak  $IR^3$  deki yönlü doğruların birbirine göre durumları incelenebilir.

$$1. \langle A, B \rangle = \text{sırf dual} \Leftrightarrow \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2, \phi^* \neq 0 \text{ ise}$$

A ve B birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdırlar.

$$2. \langle A, B \rangle = \text{sırf reel} \Rightarrow \phi^* = 0 \text{ olsun.}$$

Bu durumda yönlü doğrular kesişir ve

$$\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle \geq 0$$

ifadesi bu iki doğrunun kesişme koşuludur.

$$3. \langle A, B \rangle = 0 \Rightarrow \cos \Phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \text{ ve } \phi^* = 0 :$$

Yönlü doğrular birbirini dik olarak keser.

$$4. \langle A, B \rangle = (1,0) \Rightarrow \phi = 0:$$

Yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer  $\phi^* = 0$  ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

$$5. \langle A, B \rangle = -(1,0) \Rightarrow \phi = \pi :$$

Yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer  $\phi^* = 0$  ise doğrular çakışıktır.

**Tanım 2.2.15.**

ID–Modül’de dual vektörlerin dış çarpımı

$$\wedge : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3$$

şeklinde bir işlemdir ve  $A, B \in ID\text{–Modül}$  için

$$A \wedge B = a \wedge b + \varepsilon(a \wedge b^* + a^* \wedge b)$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.15.**

$A, B \in ID\text{–Modül}$  için

$$A \wedge B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin \Phi N$$

dir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.16.**

$A, B, C \in ID\text{–Modül}$  vektörlerinin karma çarpımı

$$f : ID^3 \times ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f(A, B, C) = \langle A \wedge B, C \rangle$$

$$\langle A \wedge B, C \rangle = \langle a \wedge b, c \rangle + \varepsilon(\langle a \wedge b, c^* \rangle + \langle a \wedge b^*, c \rangle + \langle a^* \wedge b, c \rangle)$$

(2.31.)

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.17.**

$A, B, C \in ID\text{–Modül}$  has dual vektörler ve  $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in ID$  ,  $1 \leq i \leq 3$  , olmak üzere

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

için  $\forall \lambda_i = 0$  ise  $A, B, C$  vektörlerine lineer bağımsızdır denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.18.**

$A, B, C \in ID\text{–Modül}$ ,  $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in ID$  ,  $1 \leq i \leq 3$  ,  $c_i \neq 0$  için

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

için en az bir  $\lambda_i \neq 0$  ise, A, B, C vektörlerine lineer bağımlıdır denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.19.**

$A_1, A_2, A_3$  birim dual vektörlerinin  $IR^3$  de temsil ettikleri yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişiyorsa bu vektörlere ortonormal dual vektörler denir (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.16.**

$A_1, A_2, A_3$  ortonormal üç dual vektör ise  $S = \{A_1, A_2, A_3\}$  cümlesi lineer bağımsızdır (Hacısalihoglu, 1983a).

**Tanım 2.2.20.**

ID–Modül’ün bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse ID–Modül’ün bir bazı adını alır :

1. S lineer bağımsızdır.
2.  $Sp\{S\} = ID - Modül$ ’dür.

(Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.2.17.**

$A_1, A_2, A_3 \in ID-Modül$  vektörleri ortonormal ise  $S = \{A_1, A_2, A_3\}$  cümlesi  $ID - Modül$ ’ün bir bazıdır (Hacısalihoglu, 1983a).

**2.3. Dual Uzayda Frenet Formülleri**

$$\tilde{\alpha}: I \subset IR \rightarrow ID^3$$

$$s \rightarrow \tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \varepsilon \alpha^*(s)$$

$ID^3$  dual uzayında birim hızlı dual eğri olsun.  $ID^3$  dual uzayındaki  $\tilde{\alpha}(s)$  dual eğrisinin hareketli dual Frenet çatısını  $\{T, N, B\}$  ile gösterelim.  $T, N$  ve  $B$  sırasıyla dual teğet, dual asli normal ve dual binormal vektördür.

$\kappa(s) = k_1 + \varepsilon k_1^*$  ve  $\tau(s) = k_2 + \varepsilon k_2^*$  fonksiyonları  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin sırasıyla dual eğriliği ve dual burulması olmak üzere,

$\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin Frenet formülleri

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad (2.32.)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

dir. Buradan eğriliğin ve burulmanın hesaplanması

$$\kappa(s) = \sqrt{\langle T', T' \rangle}, \tau(s) = \frac{\det(T, T', T'')}{\langle T', T' \rangle} \quad (2.33.)$$

şeklindedir.

Eğer  $\alpha$  eğrisi birim hızlı değil ise, eğriliğin ve burulmanın hesaplanması

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \quad (2.34.)$$

dır.

(2.32.) formülünün reel ve dual kısımlarına ayırırsak,

$$t'(s) = k_1 n$$

$$n'(s) = -k_1 t + k_2 b \quad (2.35.)$$

$$b'(s) = -k_2 n$$

$$t^*(s) = k_1 n^* + k_1^* n$$

$$n^*(s) = -k_1 t^* - k_1^* t + k_2 b^* + k_2^* b \quad (2.36.)$$

$$b^*(s) = -k_2 n^* - k_2^* n$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

## 2.4. ID–Modülde ve Çizgiler Uzayında 1–Parametrel Hareketler

### 2.4.1. Birim Dual Küresel Hareketler

Aynı merkezli,  $K$  ve sabit  $K'$  birim dual kürelerini, sırasıyla,

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}, V_i = v_i + \varepsilon v_i^*$$

ve

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}, \quad E_i = e_i + \varepsilon e_i^*$$

$1 \leq i, j \leq 3$ , dual ortonormal sistemleriyle temsil edelim. Bu sistemler arasında,

$A = [a_{ij}(t) + \varepsilon a_{ij}^*(t)]$ ,  $t \in IR$ , bir has dual ortogonal matris olmak üzere,

$$V=AE \tag{2.37.}$$

dönüşümü vardır, (Hacısalıhoğlu, 1983a). Eğer A matrisi t-parametresine göre diferensiyellenebiliyorsa, bu dönüşüme, K dual küresinin  $K'$  dual küresine göre 1-parametrelili dual küresel (dual dönme) hareketi denir ve  $K/K'$  ile gösterilir.

Eğer

$$A(t + T) = A(t), \quad T: \text{periyot}$$

ise harekete 1-parametrelili dual küresel kapalı hareket denir.

$V=AE$  denkleminin t-parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\begin{bmatrix} dV_1 \\ dV_2 \\ dV_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1^2 & \Omega_1^3 \\ \Omega_2^1 & 0 & \Omega_2^3 \\ \Omega_3^1 & \Omega_3^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \Omega_i^j = -\Omega_j^i \tag{2.38.}$$

bulunur, (Hacısalıhoğlu, 1983a). Burada,

$$\Omega = dAA^T \tag{2.39.}$$

ile belli olan  $\Omega = [\Omega_i^j]$  matrisinin elemanlarına da dual 1-formlar veya E.CARTAN formları denir, (Hacısalıhoğlu, 1983a).

K küresinin  $K'$  sabit küresine göre 1-parametrelili hareketine çizgiler uzayında H uzayının  $H'$  uzayına göre 1-parametrelili uzay hareketi karşılık gelir.

K küresi üzerinde tespit edilmiş bir X dual noktasının  $K'$  ye göre bazı,

$$\Psi = \Omega_2^3 V_1 + \Omega_3^1 V_2 + \Omega_1^2 V_3 \tag{2.40.}$$

olmak üzere,

$$dX = \Psi \wedge X \tag{2.41.}$$

ile bellidir, (Müller,1963).

#### Tanım 2.4.1.

$K/K'$  1-parametrelili birim dual küresel hareketinin dual 1-formları

$$\Omega_i^j = -\Omega_j^i, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

olmak üzere

$$\Psi = \Omega_2^3 V_1 + \Omega_3^1 V_2 + \Omega_1^2 V_3$$

dual vektörüne hareketin ani dual Pfaff vektörü denir, (Müller, 1963).

#### **Tanım 2.4.2.**

1-parametrelili  $K/K'$  dual küresel hareketinde  $\Psi$ , ani dual Pfaff vektörü olmak üzere,

$$D = d + \varepsilon d^* = \phi \Psi \quad (2.42.)$$

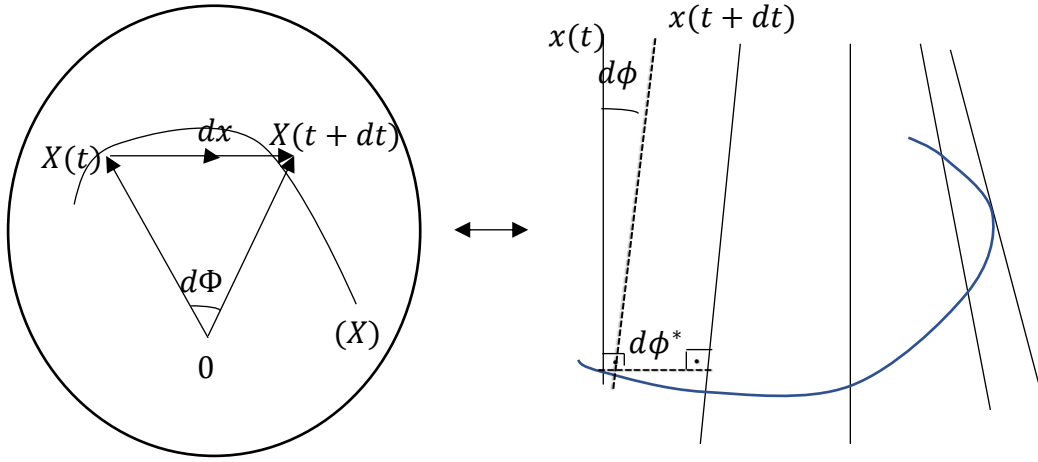
şeklinde tanımlanan  $D$  vektörüne hareketin dual Steiner vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

#### **2.4.2. Regle Yüzeyler Teorisi**

1-parametrelili  $K/K'$  dual küresel hareketinde,  $K$  da tespit edilmiş bir  $X$  dual noktası  $K'$  sabit dual küresi üzerinde  $t \in \mathbb{R}$  parametresine bağlı bir

$$X = X(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t), \quad \|X\| = 1$$

eğrisini çizer (Şekil 2.9.).  $t$ -parametresine göre diferensiyellenebilen bu dual küresel eğriye bir regle yüzey olarak bakabiliriz. Çünkü E.STUDY dönüşümüne göre, bu eğriye çizgiler uzayında 1-parametrelili bir doğru ailesi karşılık gelir. Eğer dual küresel eğri kapalı ise, karşılık gelen regle yüzey de kapalıdır.



Şekil 2. 9 . Dual küresel eğri ve karşılık gelen regle yüzey

$X = X(t)$  dual küresel eğrinin

$$d\Phi = d\phi + \varepsilon d\phi^* \quad (2.43.)$$

dual yay elementi için

$$(d\Phi)^2 = \langle dX, dX \rangle = \langle X', X' \rangle (dt)^2$$

yazılabilir. Buradan da

$$(d\phi)^2 = \langle dx, dx \rangle, \quad (2.44.)$$

$$d\phi \cdot d\phi^* = \langle dx, dx^* \rangle \quad (2.45.)$$

elde edilir.

$d\Phi$  dual büyüklüğü  $X(t)$  ve  $X(t + dt)$  komşu birim dual vektörler arasındaki dual açıdır.

$d\Phi$  nin  $d\phi$  reel ve  $d\phi^*$  dual kısımlarına,  $X(t)$  ve  $X(t + dt)$  birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki ana doğru arasındaki açı ile bu komşu iki ana doğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir.

$$\langle dX, dX \rangle = \langle dx, dx \rangle + 2\varepsilon \langle dx, dx^* \rangle$$

dual ifadesi koordinat değişimlerine göre invaryant olduğundan

$$\langle dx, dx \rangle \text{ ve } \langle dx, dx^* \rangle$$

reel büyüklükleri ve koordinat değişimlerine göre invaryanttır ve dolayısıyla bunların oranı regle yüzeyin en basit diferensiyel değişmezidir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

**Tanım 2.4.3.**

$X = X(t)$ ,  $\|X(t)\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , regle yüzeyinde  $X(t)$  ve  $X(t + dt)$  komşu anadoğruları arasındaki dual açısı,  $d\Phi = d\phi + \varepsilon d\phi^*$  olmak üzere

$$p = \frac{\langle dx, dx^* \rangle}{\langle dx, dx \rangle} = \frac{d\phi^*}{d\phi} \quad (2.46.)$$

büyükliğüne bu yüzeyin  $X(t)$  anadoğrusu boyunca dağılıma parametresi veya drali denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

**Tanım 2.4.4.**

Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya açılabilir yüzeyler denir.

Dral'in sıfır olması regle yüzeyler için bir karakteristik özelliştir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

**Tanım 2.4.5.**

$X = X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  regle yüzeyinde  $X(t)$  ve  $X(t + dt)$  komşu anadoğrularının ortak dikmesinin,  $X(t)$  anadoğrusu üzerindeki ayağına, merkez noktası veya boğaz noktası veya striksiyon noktası denir. Bu noktaların geometrik yerine ise, boğaz çizgisi veya striksiyon çizgisi denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

**Tanım 2.4.6.**

$X = X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|X(t)\| = 1$ , regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye, regle yüzeyin ortogonal yörünge eğrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Dayanak eğrisi  $a = a(t)$  denklemleri ile belli olan (C) eğrisi ve anadoğruları

$X = X(t)$  birim vektörü olan regle yüzey denklemi

$$y(t, u) = a(t) + u \cdot x(t)$$

dir. Burada

$$x^* = a \wedge x \text{ ve } x \wedge x^* = a - \langle a, x \rangle x$$

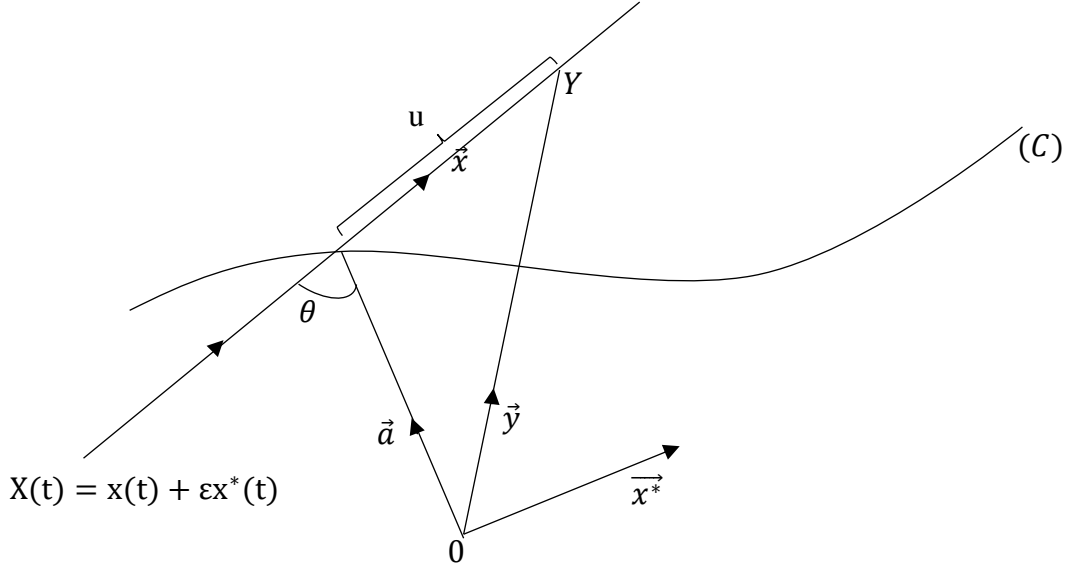
olduklarından, regle yüzeyin denklemi

$$v = u + \langle a, x \rangle$$

olmak üzere

$$y(t, v) = x(t) \wedge x^*(t) + v \cdot x(t), x^*(t) = a(t) \wedge x(t) \quad (2.47.)$$

bulunur (Şekil 2.10.).



Şekil 2. 10 Dual uzayda regle yüzey

**Tanım 2.4.7.**

$K/K'$  dual küresel hareketinde sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey  $T = T(s), s \in IR$  olsun. Ayrıca  $(N, B)$  dual düzleminde  $N$  ile

$$\Phi(s) = \phi(s) + \epsilon \phi^*(s)$$

dual açısı yapan

$$N_1 = \cos \Phi N + \sin \Phi B \quad (2.48.)$$

birim dual vektörü, regle yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir tors çizsin. Bir periyot sonra  $\Phi(s) = \phi(s) + \epsilon \phi^*(s)$  açısının toplam değişme miktarına regle yüzeyin dual açılım açısı denir ve  $\Lambda_T$  ile gösterilirse

$$\Lambda_T = \oint d\Phi \quad (2.49.)$$

dır. Burada, integral,  $T = T(s)$  kapalı eğrisi üzerinden alınan dual eğrisel integraldir, (Hacısalihoglu, 1983a).

**Teorem 2.4.1.**

1-parametrel  $K/K'$  birim dual küresel hareketinde, hareketli sisteme sıkı bir şekilde bağlı olan bir  $X = x + \varepsilon x^*$  birim dual vektörünün çizdiği kapalı regle yüzeyinin dual açısını  $\Lambda_X$  ile gösterirsek,

$$\Lambda_X = - \langle D, X \rangle \quad (2.50.)$$

dir, (Hacısalihoglu, 1983a).

(2.50.) ifadesini dual ve reel kısımlarına ayırırsak,

$$\Lambda_X = - \langle d, x \rangle - \varepsilon (\langle d, x^* \rangle + \langle d^*, x \rangle) \quad (2.51.)$$

bulunur.

**Tanım 2.4.8.**

$K/K'$  birim dual küresel hareketine, çizgiler uzayında karşılık gelen hareket  $H/H'$  ise,  $H$  da tespit edilmiş bir  $X$ -anadoğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_X = \langle d, x^* \rangle + \langle d^*, x \rangle \quad (2.52.)$$

dir, (Hacısalihoglu, 1972).

**Teorem 2.4.2.**

$ID - \text{Modül}$ 'de bir  $X = X(t)$ ,  $\|X(t)\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı bu yüzeyin reel integral invariantları cinsinden,

$$\Lambda_X = \lambda_x - \varepsilon L_x \quad (2.53.)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $L_x$  ve  $\lambda_x$  reel sayıları yüzeyin, sırasıyla, açılım uzunluğu ve açılım açısıdır, (Hacısalihoglu, 1983a).

$ID - \text{Modül}$ 'de  $X(t)$  üretici vektör olmak üzere, bir regle yüzeyin dual ortonormal sistemi

$$\begin{cases} \vec{A}_1(t) = \vec{X}(t) = \vec{a}_1(t) + \vec{a}_1^*(t) \\ \vec{A}_2(t) = \vec{a}_2(t) + \vec{a}_2^*(t) \\ \vec{A}_3(t) = \vec{a}_3(t) + \vec{a}_3^*(t) \end{cases} \quad (2.54.)$$

şeklinde alınırsa, bu sistemin  $\vec{a}_1(t), \vec{a}_2(t), \vec{a}_3(t)$  eksenleri boğaz noktasında kesişir ve bu kesişim noktası  $\vec{a}_1(t)$  eksenindedir.  $\vec{A}_3(t)$  doğrusu  $\vec{A}_1(t)$  doğrularına dik, yüzeyin boğaz noktasındaki teğettir.  $\vec{A}_2(t)$  ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir. Bu şekilde elde edilen  $\{\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t), \vec{A}_3(t)\}$  vektörlerine Blaschke vektörleri denir. Bu vektörler ile onların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} \vec{A}'_1(t) = \kappa(t)\vec{A}_2(t) \\ \vec{A}'_2(t) = -\kappa(t)\vec{A}_1(t) + \tau(t)\vec{A}_3(t) \\ \vec{A}'_3(t) = -\tau(t)\vec{A}_2(t) \end{cases} \quad (2.55.)$$

bağıntısı vardır, (Blaschke, 1949). Burada

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= k_1(t) + k_1^*(t) = \sqrt{\langle \vec{A}'_1(t), \vec{A}'_1(t) \rangle} \\ \tau(t) &= k_2(t) + k_2^*(t) = \frac{\det(\vec{A}'_1(t), \vec{A}'_1'(t), \vec{A}'_1''(t))}{\langle \vec{A}'_1(t), \vec{A}'_1(t) \rangle} \end{aligned} \quad (2.56.)$$

ifadeleri regle yüzeyin dual eğrilikleridir. (2.55.) ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} \vec{a}'_1(t) = k_1(t)\vec{a}_2(t) \\ \vec{a}'_2(t) = -k_1(t)\vec{a}_1(t) + k_2(t)\vec{a}_3(t) \\ \vec{a}'_3(t) = -k_2(t)\vec{a}_2(t) \\ \vec{a}^*_1(t) = k_1^*(t)\vec{a}_2(t) + k_1(t)\vec{a}^*_2(t) \\ \vec{a}^*_2(t) = -k_1^*(t)\vec{a}_1(t) + k_2^*(t)\vec{a}_3(t) - k_1(t)\vec{a}^*_1(t) + k_2(t)\vec{a}^*_3(t) \\ \vec{a}^*_3(t) = -k_2^*(t)\vec{a}_2(t) - k_2(t)\vec{a}^*_2(t) \end{cases} \quad (2.57.)$$

olur. (2.47.) bağıntısına göre  $(\vec{A}_1), (\vec{A}_2), (\vec{A}_3)$  regle yüzeylerinin denklemleri sırasıyla,

$$\begin{cases} \overrightarrow{y_{A_1}}(t, v) = \vec{a}_1(t) \wedge \vec{a}_1^*(t) + v\vec{a}_1(t), \vec{a}_1^*(t) = \alpha(t) \wedge \vec{a}_1(t) \\ \overrightarrow{y_{A_2}}(t, v) = \vec{a}_2(t) \wedge \vec{a}_2^*(t) + v\vec{a}_2(t), \vec{a}_2^*(t) = \alpha(t) \wedge \vec{a}_2(t) \\ \overrightarrow{y_{A_3}}(t, v) = \vec{a}_3(t) \wedge \vec{a}_3^*(t) + v\vec{a}_3(t), \vec{a}_3^*(t) = \alpha(t) \wedge \vec{a}_3(t) \end{cases}$$

şeklinde yazılır.  $\vec{a}_1^*(t), \vec{a}_2^*(t), \vec{a}_3^*(t)$  vektörel momentlerinin sırasıyla türevleri alınır;

$$\begin{cases} \vec{a}_1^{*'}(t) = k_1(t)\vec{a}_2^*(t) \\ \vec{a}_2^{*'}(t) = \vec{a}_3(t) - k_1(t)\vec{a}_1^*(t) + k_2(t)\vec{a}_3^*(t) \\ \vec{a}_3^{*'}(t) = -\vec{a}_3(t) - k_2(t)\vec{a}_3^*(t) \end{cases} \quad (2.58.)$$

olur. Böylece (2.57.) bağıntısındaki türev vektörleri ile vektörel türev momentleri arasındaki ilişki (2.58.) şeklindeki gibi olur.  $\{\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t), \vec{A}_3(t)\}$  dual ortonormal sistemi her t anında ani dual Pfaff vektörü etrafında bir dual dönme hareketi yapar. Bu vektör

$$\vec{W}(t) = \tau(t)\vec{A}_1(t) + \kappa(t)\vec{A}_3(t) \quad (2.59.)$$

denklemleri ile ifade edilir. Hareketin dual Steiner vektörü ise

$$\vec{D}(t) = \oint \vec{W}(t) = \vec{A}_1(t) \oint \tau(t) dt + \vec{A}_3(t) \oint \kappa(t) dt \quad (2.60.)$$

dır. Regle yüzeyin  $(\vec{A}_1), (\vec{A}_2), (\vec{A}_3)$  kapalı regle yüzeylerinin dual açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dağılma parametreleri sırasıyla,

$$\begin{cases} L_{A_1} = \oint k_2^*(t) dt \\ \Lambda_{A_1} = -\oint \tau(t) dt \\ P_{A_1} = \frac{k_1^*(t)}{k_1(t)} \end{cases} \quad (2.61.)$$

$$\begin{cases} L_{A_2} = 0 \\ \Lambda_{A_2} = 0 \\ P_{A_2} = \frac{k_1(t)k_1^*(t) + k_2(t)k_2^*(t)}{k_1^2(t) + k_2^2(t)} \end{cases} \quad (2.62.)$$

$$\begin{cases} L_{A_3} = \oint k_1^*(t) dt \\ \Lambda_{A_3} = -\oint \kappa(t) dt \\ P_{A_3} = \frac{k_2^*(t)}{k_2(t)} \end{cases} \quad (2.63.)$$

şeklinde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983a).

**Teorem 2.4.3.**

Bir birim dual küresel kapalı  $X = X(t)$  eğrisinin çevrelediği küresel alan, bu kapalı eğrinin E.STUDY resmi olarak kapalı regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu cinsinden,

$$\begin{aligned} F_X &= 2\pi(1 - n) + (\lambda_X - \varepsilon L_X) \\ &= 2\pi(1 - n) - \langle D, X \rangle \end{aligned} \quad (2.64.)$$

şeklinde ifade edilebilir, (Hacısalıhoğlu, 1983a).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. T, N, B ve C Dual Vektörlerinin Oluşturdukları Kapalı Regle Yüzeylerin İnvaryantları

Bir parametrelili  $K/K'$  birim dual küresel hareketinde hareketli dual ortonormal sistemini özel olarak T, N, B (dual teğet vektör, dual asli normal vektör, dual binormal vektör) seçersek küre yüzeyine çizdikleri kapalı eğrilere çizgiler uzayında kapalı regle yüzeyler karşılık gelir. Dolayısı ile bu yüzeylerin invaryantları hesaplanabilir. Bunun için önce şu hazırlıkları yapalım.

$$\begin{aligned}T &= t + \varepsilon t^*, \\ \langle T, T \rangle &= 1, \\ \langle t + \varepsilon t^*, t + \varepsilon t^* \rangle &= 1, \\ \langle t, t \rangle + 2\varepsilon \langle t, t^* \rangle &= 1, \\ \langle t, t^* \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}N &= n + \varepsilon n^*, \\ \langle N, N \rangle &\geq 1, \\ \langle n + \varepsilon n^*, n + \varepsilon n^* \rangle &= 1, \\ \langle n, n \rangle + 2\varepsilon \langle n, n^* \rangle &= 1, \\ \langle n, n^* \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}B &= b + \varepsilon b^*, \\ \langle B, B \rangle &= 1, \\ \langle b + \varepsilon b^*, b + \varepsilon b^* \rangle &= 1, \\ \langle b, b \rangle + 2\varepsilon \langle b, b^* \rangle &= 1, \\ \langle b, b^* \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\langle T, N \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \langle t + \varepsilon t^*, n + \varepsilon n^* \rangle = 0, \\
& \langle t, n \rangle + \varepsilon(\langle t, n^* \rangle + \langle t^*, n \rangle) = 0, \\
& \langle t, n^* \rangle + \langle t^*, n \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& \langle T, B \rangle = 0, \\
& \langle t + \varepsilon t^*, b + \varepsilon b^* \rangle = 0, \\
& \langle t, b^* \rangle + \langle t^*, b \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& \langle N, B \rangle = 0, \\
& \langle n + \varepsilon n^*, b + \varepsilon b^* \rangle = 0, \\
& \langle n, b^* \rangle + \langle n^*, b \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ayrıca  $\alpha$  eğrisinin dual eğriliği,

$$\kappa = k_1 + \varepsilon k_1^* \tag{3.7}$$

dual burulması

$$\tau = k_2 + \varepsilon k_2^* \tag{3.8}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

dır (Şenyurt, 1994).

$K/K'$  birim dual küresel hareketinde  $T, N, B$  dual ortonormal sistemi her  $t$  anında ani dual Pfaff vektörü etrafında bir dual dönme hareketi yapar. Ani dual Pfaff vektörünün yön ve doğrultusu

$$\Psi = \tau T + \kappa B \tag{3.10}$$

denklemleri ile bellidir. Hareketin dual Steiner vektörü,

$$d = t \phi k_2 ds + b \phi k_1 ds,$$

(3.11.)

$$d^* = t \oint k_2^* ds + t^* \oint k_2 ds + b \oint k_1^* ds + b^* \oint k_1 ds$$

olmak üzere

$$D = d + \varepsilon d^* = \oint \Psi \quad (3.12.)$$

dır.

### 3.1.1. (T)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları

Tanım 2.4.8. dan T nin oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_T = \langle d, t^* \rangle + \langle d^*, t \rangle ,$$

$$L_T = \langle t \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, t^* \rangle$$

$$+ \langle t \oint k_2^* ds + t^* \oint k_2 ds + b \oint k_1^* ds + b^* \oint k_1 ds, t \rangle ,$$

$$L_T = \langle t, t^* \rangle \oint k_2 ds + \langle b, t^* \rangle \oint k_1 ds$$

$$+ \langle t^*, t \rangle \oint k_2 ds + \langle t, t \rangle \oint k_2^* ds$$

$$+ \langle b^*, t \rangle \oint k_1 ds + \langle b, t \rangle \oint k_1^* ds ,$$

$$L_T = \langle t, t^* \rangle \oint k_2 ds + \langle t^*, t \rangle \oint k_2 ds$$

$$+ (\langle b, t^* \rangle + \langle b^*, t \rangle) \oint k_1 ds$$

$$+ \oint k_2^* ds$$

(3.1.) ve (3.5.) değerleri yerine yazılırsa

$$L_T = \oint k_2^* ds \quad (3.13.)$$

elde edilir (Şenyurt, 1994).

Teorem 2.4.1. den regle yüzeyin açılım açısı

$$\Lambda_T = -\langle D, T \rangle ,$$

$$= -\langle d + \varepsilon d^*, t + \varepsilon t^* \rangle$$

$$= -[\langle d, t \rangle + \varepsilon(\langle d, t^* \rangle + \langle d^*, t \rangle)] ,$$

$$= -[\langle t \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, t \rangle + \varepsilon \oint k_2^* ds] ,$$

$$= -(\oint k_2 ds + \varepsilon \oint k_2^* ds) ,$$

$$\Lambda_T = -\oint \tau ds. \quad (3.14.)$$

**Sonuç 3.1.1.**

$$\Lambda_T = -\oint k_2 ds - \varepsilon \oint k_2^* ds ,$$

ifadesinde (2.10.) ve (3.13.) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\Lambda_T = \lambda_T - \varepsilon L_T \quad (3.15.)$$

elde edilir.

Tanım 2.4.3. den regle yüzeyin drali

$$P_T = \frac{\langle dt, dt^* \rangle}{\langle dt, dt \rangle}$$

dır. (3.9.) dan dt ve dt\* değerleri hesaplanır ve denklemden yerine yazılırsa

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N ,$$

$$\frac{d}{ds}(t + \varepsilon t^*) = (k_1 + \varepsilon k_1^*)(n + \varepsilon n^*) ,$$

$$\frac{dt}{ds} + \varepsilon \frac{dt^*}{ds} = k_1 n + \varepsilon(k_1 n^* + k_1^* n) ,$$

$$dt = k_1 n ds ,$$

$$dt^* = (k_1 n^* + k_1^* n) ds ,$$

$$P_T = \frac{\langle (k_1 n^* + k_1^* n) ds, k_1 n ds \rangle}{\langle k_1 n ds, k_1 n ds \rangle} ,$$

$$P_T = \frac{k_1 k_1^*}{k_1^2} ,$$

$$P_T = \frac{k_1^*}{k_1} \quad (3.16.)$$

bulunur.

**Teorem 3.1.1.**

(T) nin oluşturduğu regle yüzeyin drali (3.16.) ifadesi ile verilir.

Regle yüzeyin açılabilir olması için

$$k_1^* = 0$$

olmalıdır. Bu ise dual eğrinin dual eğriliğinin sırf reel olmasıdır. Bunu da şu teorem ile verebiliriz:

**Teorem 3.1.2.**

(T) nin oluşturduğu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dual eğriliğin sırf reel olmasıdır (Şenyurt, 1994).

**3.1.2. (N)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları**

Tanım 2.4.8. dan N nin oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_N = \langle d, n^* \rangle + \langle d^*, n \rangle ,$$

$$L_N = \langle n \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, n^* \rangle$$

$$+ \langle n \oint k_2^* ds + n^* \oint k_2 ds + b \oint k_1^* ds + b^* \oint k_1 ds, n \rangle ,$$

iç çarpım yapılırsa (3.2.) ve (3.6.) değerleri yerine yazılırsa

$$L_N = 0 , \tag{3.17.}$$

bulunur (Şenyurt, 1994).

Açılım açısı,

$$\Lambda_N = -\langle D, N \rangle ,$$

$$= -\langle d + \varepsilon d^*, n + \varepsilon n^* \rangle$$

$$= -[\langle d, n \rangle + \varepsilon(\langle d, n^* \rangle + \langle d^*, n \rangle)] ,$$

$$= -[\langle t \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, n \rangle + \varepsilon.0] ,$$

$$\Lambda_N = 0 . \tag{3.18.}$$

Tanım 2.4.3. den regle yüzeyin drali

$$P_N = \frac{\langle dn, dn^* \rangle}{\langle dn, dn \rangle}$$

dır. (3.9.) dan dn ve dn\* değerleri hesaplanır ve denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$

$$\frac{d}{ds}(n + \varepsilon n^*) = -(k_1 + \varepsilon k_1^*)(t + \varepsilon t^*) + (k_2 + \varepsilon k_2^*)(b + \varepsilon b^*)$$

$$\frac{dn}{ds} + \varepsilon \frac{dn^*}{ds} = (-k_1 t + k_2 b) + \varepsilon(-k_1 t^* - k_1^* t + k_2 b^* + k_2^* b) ,$$

$$dn = (-k_1 t + k_2 b) ds ,$$

$$dn^* = (-k_1 t^* - k_1^* t + k_2 b^* + k_2^* b) ds ,$$

$$P_N = \frac{\langle (-k_1 t + k_2 b) ds, (-k_1 t^* - k_1^* t + k_2 b^* + k_2^* b) ds \rangle}{\langle (-k_1 t + k_2 b) ds, (-k_1 t + k_2 b) ds \rangle} ,$$

$$P_N = \frac{k_1 k_1^* + k_2 k_2^*}{k_1^2 + k_2^2} , \quad (3.19.)$$

bulunur (Şenyurt, 1994).

### **Teorem 3.1.3.**

(N) –nin oluşturduğu regle yüzeyin drali (3.19.) denklemi ile verilir.

Regle yüzeyin açılabilir olması için

$$k_1 \cdot k_1^* + k_2 \cdot k_2^* = 0$$

olmalıdır.

Buradan

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{k_1^*}{k_2^*} \quad (3.20.)$$

dır.

### **Teorem 3.1.4.**

(N) –nin oluşturduğu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{k_1^*}{k_2^*}$$

olmasıdır.

### **3.1.3. (B)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları**

Tanım 2.4.8. den B nin oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_B = \langle d, b^* \rangle + \langle d^*, b \rangle ,$$

$$L_B = \langle t \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, b^* \rangle$$

$$+ \langle t \phi k_2^* ds + t^* \phi k_2 ds + b \phi k_1^* ds + b^* \phi k_1 ds, b \rangle ,$$

iç çarpım yapılır (3.3.) ve (3.5.) değerleri yerine yazılırsa

$$L_B = \phi k_1^* ds \quad (3.21.)$$

bulunur.

Açılım açısı,

$$\Lambda_B = -\langle D, B \rangle$$

$$= -\langle d + \varepsilon d^*, b + \varepsilon b^* \rangle$$

$$= -[\langle d, b \rangle + \varepsilon(\langle d, b^* \rangle + \langle d^*, b \rangle)] ,$$

$$= -[\langle t \phi k_2 ds + b \phi k_1 ds, b \rangle + \varepsilon \phi k_1^* ds] ,$$

$$= -(\phi k_1 ds + \varepsilon \phi k_1^* ds)$$

$$\Lambda_B = -\phi \kappa ds . \quad (3.22.)$$

### Sonuç 3.1.2.

$$\Lambda_B = -\phi k_1 ds - \varepsilon \phi k_1^* ds ,$$

ifadesinde (2.10.) ve (3.21.) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\Lambda_B = \lambda_B - \varepsilon L_B \quad (3.23.)$$

bulunur.

Tanım 2.4.3. den regle yüzeyin drali

$$P_B = \frac{\langle db, db^* \rangle}{\langle db, db \rangle}$$

dır. (3.9.) dan db ve db\* değerleri hesaplanır ve denklemden yerine yazılırsa

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N ,$$

$$\frac{d}{ds}(b + \varepsilon b^*) = -(k_2 + \varepsilon k_2^*)(n + \varepsilon n^*) ,$$

$$\frac{db}{ds} + \varepsilon \frac{db^*}{ds} = -k_2 n - \varepsilon(k_2 n^* + k_2^* n) ,$$

$$db = -k_2 n ds ,$$

$$dn^* = -(k_2 n^* + k_2^* n) ds ,$$

$$P_B = \frac{\langle -k_2nds, -(k_2n^* + k_2^*n)ds \rangle}{\langle -k_2nds, -k_2nds \rangle},$$

$$P_B = \frac{k_2^*}{k_2}. \quad (3.24.)$$

### Teorem 3.1.5.

(B) –nin oluşturduğu regle yüzeyin drali (3.24.) denklemi ile bellidir.

Regle yüzeyin açılabilir olması için

$$k_2^* = 0$$

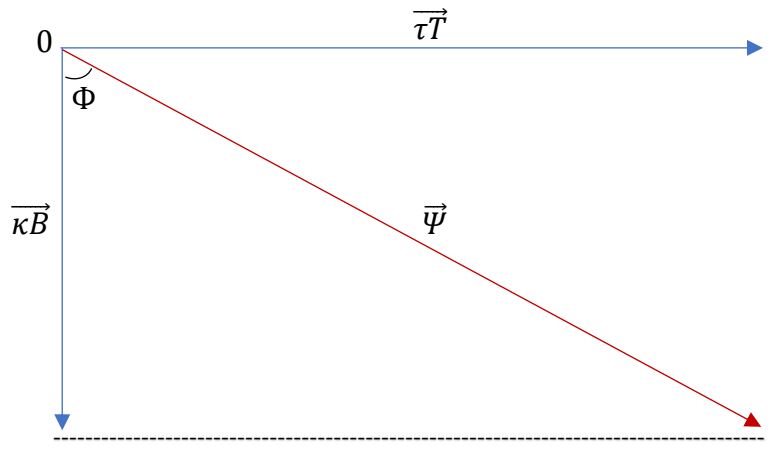
olmalıdır. Buradan şu teoremi verebiliriz:

### Teorem 3.1.6.

(B) –nin oluşturduğu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dual burulmasının sıfır reel olmasıdır.

### 3.1.4. (C)–nin Oluşturduğu Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları

$\Psi$  ani dual Pfaff vektörü ile B vektörü arasındaki açı  $\Phi = \Phi(s)$  ise (Şekil 3.1.)



Şekil 3. 1 Dual Pfaff vektörü (Şenyurt, 1994)

$$\begin{aligned}\kappa &= \|\Psi\| \cos \Phi \\ \tau &= \|\Psi\| \sin \Phi, \Phi = \phi + \varepsilon\phi^*\end{aligned}\quad (3.25.)$$

dır.

$\Psi$  ani dual Pfaff vektörü yönündeki birim dual vektör  $C = C(s) = c(s) + \varepsilon c^*(s)$  ise

$$\|\Psi\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \geq 0$$

olmak üzere

$$C = \frac{\tau}{\|\Psi\|} T + \frac{\kappa}{\|\Psi\|} B$$

elde edilir.  $\kappa$  ve  $\tau$  nin (3.25.) deki değerleri yerine yazılırsa

$$C = \sin \Phi T + \cos \Phi B \quad (3.26.)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\sin \Phi &= \sin \phi + \varepsilon\phi^* \cos \phi, \\ \cos \Phi &= \cos \phi - \varepsilon\phi^* \sin \phi,\end{aligned}\quad (3.27.)$$

değerleri (3.26.) de yerine yazılırsa

$$c = \sin \phi t + \cos \phi b, \quad (3.28.)$$

$$c^* = \sin \phi t^* + \phi^* \cos \phi t + \cos \phi b^* - \phi^* \sin \phi b$$

elde edilir.

Tanım 2.4.8. dan C nin oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_c = \langle d, c^* \rangle + \langle d^*, c \rangle$$

dır. Şimdi  $\langle d, c^* \rangle$  ve  $\langle d^*, c \rangle$  ifadesini ayrı ayrı hesap edelim:

$$\langle d, c^* \rangle = \langle t \oint k_2 ds + b \oint k_1 ds, \sin \phi t^* + \phi^* \cos \phi t + \cos \phi b^* - \phi^* \sin \phi b \rangle$$

$$= \phi^* \cos \phi \oint k_2 ds + \cos \phi \oint k_2 ds. \langle t, b^* \rangle$$

$$+ \sin \phi \oint k_1 ds. \langle b, t^* \rangle + \phi^* \sin \phi \oint k_1 ds .$$

$$\begin{aligned}
\langle d^*, c \rangle &= \langle t \phi k_2^* ds + t^* \phi k_2 ds + b \phi k_1^* ds + b^* \phi k_1 ds, \sin \phi t + \cos \phi b \rangle \\
&= \sin \phi \phi k_2^* ds + \cos \phi \phi k_2 ds. \langle t^*, b \rangle \\
&\quad + \cos \phi \phi k_1^* ds + \sin \phi \phi k_1 ds. \langle b^*, t \rangle .
\end{aligned}$$

Bu ifadeler yukarıda yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
L_C &= \sin \phi \oint k_2^* ds + \cos \phi \oint k_1^* ds \\
&\quad + \phi^* \cos \phi \phi k_2 ds - \phi^* \sin \phi \phi k_1 ds \quad (3.29.)
\end{aligned}$$

elde edilir (Şenyurt, 1994).

### **Teorem 3.1.7.**

(C) eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu (3.29.) ifadesi ile verilir (Şenyurt, 1994).

Açılım açısı

$$\begin{aligned}
\Lambda_C &= -\langle D, C \rangle , \\
&= -\langle d + \varepsilon d^*, c + \varepsilon c^* \rangle , \\
&= -[\langle d, c \rangle + \varepsilon(\langle d^*, c \rangle + \langle d, c^* \rangle)] .
\end{aligned}$$

$$\langle d, c \rangle = \langle t \phi k_2 ds + b \phi k_1 ds, \sin \phi t + \cos \phi b \rangle ,$$

$$\langle d, c \rangle = \sin \phi \phi k_2 ds + \cos \phi \phi k_1 ds ,$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_C &= -[\sin \phi \phi k_2 ds + \cos \phi \phi k_1 ds + \varepsilon \sin \phi \phi k_2^* ds + \varepsilon \cos \phi \phi k_1^* ds \\
&\quad + \varepsilon \phi^* \cos \phi \phi k_2 ds - \varepsilon \phi^* \sin \phi \phi k_1 ds] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_C &= -[\sin \phi (\phi k_2 ds + \varepsilon \phi k_2^* ds) + \cos \phi (\phi k_1 ds + \varepsilon \phi k_1^* ds)] \\
&\quad - \varepsilon[\phi^* \cos \phi \phi k_2 ds - \phi^* \sin \phi \phi k_1 ds]
\end{aligned}$$

$$\Lambda_C = -[\sin \phi \phi \tau ds + \cos \phi \phi \kappa ds] - \varepsilon[\phi^* \cos \phi \phi k_2 ds - \phi^* \sin \phi \phi k_1 ds] \quad (3.30.)$$

### **Teorem 3.1.8.**

(C) eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı (3.30.) ifadesi ile verilir (Şenyurt, 1994).

**Sonuç 3.1.3.**

$$\Lambda_C = -\sin \phi \oint \tau ds - \cos \phi \oint \kappa ds - \varepsilon \phi^* (\cos \phi \oint k_2 ds - \sin \phi \oint k_1 ds) ,$$

ifadesinde (3.14.), (3.22.) ve (2.27.) değerleri yerine yazılırsa

$$\Lambda_C = \sin \phi \Lambda_T + \cos \phi \Lambda_B - \varepsilon \phi^* (\cos \phi \lambda_T - \sin \phi \lambda_B) \quad (3.30.)$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1.4.**

$$\Lambda_C = -[\sin \phi \oint k_2 ds + \cos \phi \oint k_1 ds + \varepsilon (\sin \phi \oint k_2^* ds + \cos \phi \oint k_1^* ds + \phi^* \cos \phi \oint k_2 ds - \phi^* \sin \phi \oint k_1 ds)] ,$$

ifadesinde (2.25.) ve (3.29.) değerleri yerine yazılırsa

$$\Lambda_C = \lambda_C - \varepsilon . L_C \quad (3.31.)$$

olur.

Tanım 2.5.3. den regle yüzeyin drali

$$P_C = \frac{\langle dc, dc^* \rangle}{\langle dc, dc \rangle}$$

dır.

$$c = \sin \phi t + \cos \phi b, \phi = \phi(s)$$

olduğundan

$$dc = (\phi' \cos \phi t + \sin \phi t' + \cos \phi b' - \phi' \sin \phi b) ds$$

dir.

$$t' = k_1 n ,$$

$$b' = -k_2 n$$

değerleri yukarıdaki yerine yazılır ve kısaltmalar yapılırsa

$$dc = (\phi' \cos \phi t - \phi' \sin \phi b) ds$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle dc, dc \rangle &= \langle (\phi' \cos \phi t - \phi' \sin \phi b) ds, (\phi' \cos \phi t - \phi' \sin \phi b) ds \rangle \\ &= (\phi')^2 (ds)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$c^* = \sin \phi t^* + \phi^* \cos \phi t + \cos \phi b^* - \phi^* \sin \phi b$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{dc^*}{ds} &= \phi' \cos \phi t^* + \sin \phi (t^*)' + (\phi^*)' \cos \phi t + \phi^* \cos \phi t' - \phi^* \phi' \sin \phi t \\ &\quad - \phi' \sin \phi b^* + \cos \phi (b^*)' - (\phi^*)' \sin \phi b - \phi^* \phi' \cos \phi b - \phi^* \sin \phi (b)' \end{aligned}$$

dır.

$$(t^*)' = k_1 n^* + k_1^* n ,$$

$$t' = k_1 n ,$$

$$(b^*)' = -k_2 n^* - k_2^* n ,$$

$$b' = -k_2 n ,$$

değerleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} dc^* &= \phi' \cos \phi t^* + ((\phi^*)' \cos \phi - \phi^* \phi' \sin \phi)t \\ &\quad - \phi' \sin \phi b^* - ((\phi^*)' \sin \phi + \phi^* \phi' \cos \phi)b \\ &\quad + (\kappa^* \sin \phi + \kappa \phi^* \cos \phi - \tau^* \cos \phi + \phi^* \tau \sin \phi)n \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle dc, dc^* \rangle &= \phi' \cos \phi ((\phi^*)' \cos \phi - \phi^* \phi' \sin \phi) \\ &\quad + \phi' \sin \phi ((\phi^*)' \sin \phi + \phi^* \phi' \cos \phi)(ds)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$P_C = \frac{\phi' \cos \phi ((\phi^*)' \cos \phi - \phi^* \phi' \sin \phi) + \phi' \sin \phi ((\phi^*)' \sin \phi + \phi^* \phi' \cos \phi)}{(\phi')^2}$$
$$P_C = \frac{(\phi^*)'}{\phi'} \quad (3.32.)$$

elde edilir.

### **Teorem 3.1.9.**

(C) eğrisinin oluşturduğu kapalı regle yüzeyin drali (3.32.) ifadesi ile verilir.

Regle yüzeyin açılabilir olması için

$$(\phi^*)' = 0$$

olmalıdır. Bu ise  $\phi^* = \text{sabit}$  olması demektir (Şenyurt, 1994). Bunu da şu teorem ile verebiliriz.

**Teorem 3.1.10.**

(C) eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $\phi^* = \text{sabit}$  olmasıdır (Şenyurt, 1994).

Ayrıca

$$C = \frac{\tau}{\|\Psi\|} T + \frac{\kappa}{\|\Psi\|} B$$

vektörünün s-ye göre diferansiyeli alınır, gerekli kısaltmalar yapılır, reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$dc = \frac{(k_1^2 k_2' - k_1 k_1' k_2)t + (k_2^2 k_1' - k_1 k_2 k_2')b}{\|\Psi\|^3}$$

$$dc^* = \frac{(k_1^2 k_2' - k_1 k_1' k_2)t^* + (k_1^2 k_2^{*'} + 2k_1 k_1^* k_2' - k_1 k_2 k_1^{*'} - k_1 k_1' k_2^* - k_1^* k_2 k_1')t}{\|\Psi\|^3} + \frac{(k_2^2 k_1' - k_1 k_2 k_2')b^* + (k_2^2 k_1^{*'} + 2k_2 k_2^* k_1' - k_1 k_2 k_2^{*'} - k_1 k_2' k_2^* - k_2 k_2' k_1^*)b}{\|\Psi\|^3}$$

olur.

Buradan da

$$\langle dc, dc \rangle = \frac{(\kappa^2 \tau' - \kappa \kappa' \tau)^2 + (\tau^2 \kappa' - \kappa \tau \tau')^2}{\|\Psi\|^6}$$

ve

$$\langle dc, dc^* \rangle = \frac{(\kappa^2 \tau' - \kappa \kappa' \tau)(\kappa^2 \tau^{*'} + 2\kappa \kappa^* \tau' - \kappa \tau \kappa^{*'} - \kappa \kappa' \tau^* - \kappa^* \tau \kappa')}{\|\Psi\|^6} + \frac{(\tau^2 \kappa' - \kappa \tau \tau')(\tau^2 \kappa^{*'} + 2\tau \tau^* \kappa' - \kappa \tau \tau^{*'} - \kappa \tau' \tau^* - \tau \tau' \kappa^*)}{\|\Psi\|^6}$$

bulunur. Bu ifadeler

$$P_C = \frac{\langle dc, dc^* \rangle}{\langle dc, dc \rangle}$$

de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$P_C = \frac{(k_1^* k_2 + k_1 k_2^*)(k_1 k_1' - k_2 k_2') + (k_1^2 + k_2^2)(k_1^* k_2 - k_1 k_2^*) + 2k_2^2 k_2^* k_1' - 2k_1^2 k_1^* k_2'}{(k_1^2 + k_2^2)(k_1 k_2' - k_2 k_1')} \quad (3.33.)$$

elde edilir.

Burada

$$\frac{k_1}{k_2} \neq \frac{k_1'}{k_2'}$$

olmalıdır.

### **Teorem 3.1.11.**

(C) – nin oluşturduğu regle yüzeyin drali

$$\frac{k_1}{k_2} \neq \frac{k_1'}{k_2'}$$

olmak üzere (3.33.) ifadesi ile verilir (Şenyurt, 1994).

## **3.2. Dual İvolüt Evolüt Eğri Çiftleri**

### **Tanım 3.2.1.**

$\tilde{\alpha}: I \rightarrow ID^3$  ve  $\tilde{\beta}: I \rightarrow ID^3$  birim hızlı dual eğriler olsun. Eğer  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin teğeti ile  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin teğeti ortogonal ise,  $\tilde{\beta}$  dual eğrisi  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin involütü veya  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisi  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin evolütüdür. Tanımdan  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin teğetini  $T$ ,  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin teğetini de  $R_1$  olarak belirtirsek,

$$\langle T, R_1 \rangle = 0 \quad (3.34.)$$

yazabiliriz.

### **Teorem 3.2.1.**

$\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\beta}$  dual eğrileri verilsin. Eğer,  $\tilde{\beta}$  dual eğrisi  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin involütü ise

$$\tilde{\beta}(s) = \tilde{\alpha}(s) + [(c_1 - s) + \varepsilon c_2]T(s), \quad c_1, c_2 \in IR$$

şeklindedir (Şenyurt vd. 2015).

### İspat

Tanım (3.2.1.) gereğince bazı  $\lambda(s)$  fonksiyonları için,

$$\tilde{\beta}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \lambda T(s), \lambda(s) = \mu(s) + \varepsilon\mu^*(s). \quad (3.35.)$$

yazılabilir.

(3.34.) deki denklemin  $s$  ye göre türevini alıp (2.32.) daki Frenet formüllerini kullanırsak

$$\frac{d\tilde{\beta}}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right)T + \lambda\kappa N$$

denklemini elde ederiz.

Burada  $\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\beta}$  dual eğrilerinin parametreleri sırasıyla  $s$  ve  $s^*$  dir. Buradan

$$R_1 \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right)T + \lambda\kappa N \quad (3.36.)$$

(3.36.) denklemini ile  $T$  nin iç çarpımı

$$\frac{ds^*}{ds} \langle T, R_1 \rangle = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right) \langle T, T \rangle + \lambda \langle T, \kappa N \rangle \quad (3.37.)$$

şeklindedir.

İnvolut-evolüt eğri çiftinin tanımından

$$\langle T, R_1 \rangle = 0$$

yazabiliriz (Şekil 3.2.). Bu son eşitliği (3.37.) denkleminde yerine yazarsak ,

$$1 + \frac{d\lambda}{ds} = 0 \text{ ve } \frac{d}{ds}(\mu(s) + \varepsilon\mu^*(s)) = -1 \quad (3.38.)$$

elde ederiz. Buradan

$$\mu'(s) = -1 \text{ ve } \mu_2^*(s) = 0$$

bulunur. Son denklemlerden integralini alarak

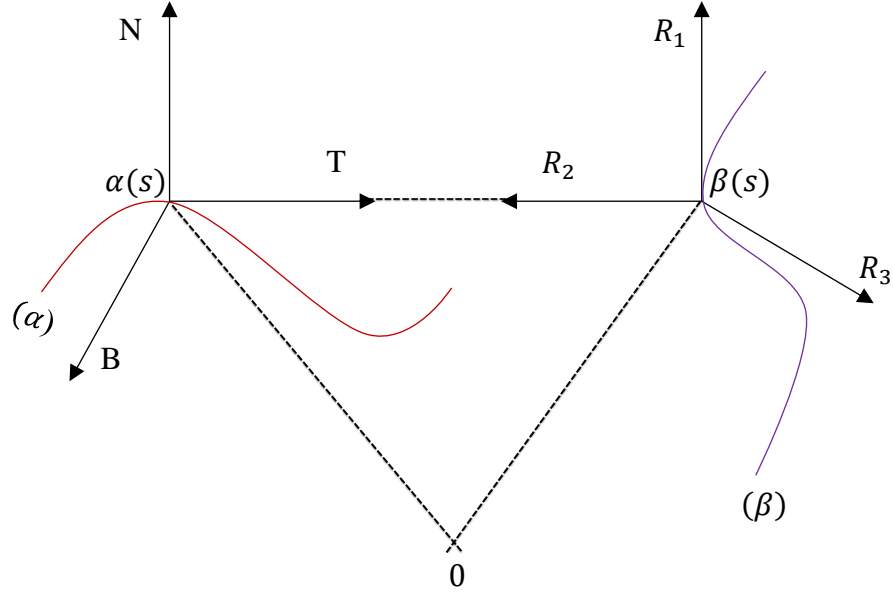
$$\mu(s) = c_1 - s \text{ ve } \mu^*(s) = c_2 \quad (3.39.)$$

elde edilir.

(3.39.) denklemini (3.35.) denkleminde yerine yazarsak,

$$\tilde{\beta}(s) - \tilde{\alpha}(s) = [(c_1 - s) + \varepsilon c_2]T(s). \quad (3.40.)$$

ispat tamamlanır.



Şekil 3. 2 İvolüt evolüt eğri çifti (Şenyurt vd. 2015)

### Sonuç 3.2.1.

$\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\beta}$  dual eğrileri arasındaki uzaklık  $|c_1 - s| \pm \varepsilon c_2$  dir.

### İspat

(3.40.) denkleminin normunu alırsak,

$$d(\tilde{\alpha}(s), \tilde{\beta}(s)) = |c_1 - s| \pm \varepsilon c_2 \quad (3.41.)$$

elde edilir.

### Teorem 3.2.2.

$\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\beta}$  dual eğriler olsun. Eğer  $\tilde{\beta}$  dual eğrisi  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin involütü ise bu durumda  $\tilde{\alpha}$  ve  $\tilde{\beta}$  dual eğrilerinin dual Frenet vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} R_1 &= N \\ R_2 &= -\cos \bar{\Phi} T + \sin \bar{\Phi} B \\ R_3 &= \sin \bar{\Phi} T + \cos \bar{\Phi} B \end{aligned} \quad (3.42.)$$

şeklindedir (Şenyurt vd. 2015).

### İspat

(3.35.) denkleminin  $s$  ye göre türevini alırsak

$$\tilde{\beta}'(s) = \lambda\kappa(s)N(s), \lambda = (c_1 - s) + \varepsilon c_2 \quad (3.43.)$$

ve

$$\|\tilde{\beta}'(s)\| = \lambda\kappa(s)$$

böylece  $\tilde{\beta}$  nın tanjant vektörü bulunur.

$$R_1 = \frac{\tilde{\beta}'(s)}{\|\tilde{\beta}'(s)\|} = \frac{\lambda\kappa(s)N(s)}{\lambda\kappa(s)}$$

Eğer denklemi düzenlersek

$$R_1 = N(s) \quad (3.44.)$$

(3.43.) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\tilde{\beta}''(s) = -\lambda\kappa^2(s)T + (\lambda\kappa' - \kappa)N + \lambda\kappa\tau B$$

elde edilir.

Eğer  $\tilde{\beta}'(s) \wedge \tilde{\beta}''(s)$  vektörel çarpımını hesaplırsak

$$\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}'' = \lambda^2\kappa^2\tau T + \lambda^2\kappa^3 B \quad (3.45.)$$

$\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''$  vektörünün normu,

$$\|\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''\| = \lambda^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad (3.46.)$$

şeklindedir.

$\tilde{\beta}$  dual eğrisinin dual binormal vektörü,

$$R_3 = \frac{\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''}{\|\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''\|}$$

formülünden (3.44.) ve (3.45.) denklemleri kullanılarak

$$R_3 = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \quad (3.47.)$$

şeklinde elde edilir.

$\tilde{\beta}$  dual eğrisinin dual asli normal vektöründen

$$R_2 = R_3 \wedge R_1$$

ve

$$R_2 = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \quad (3.48.)$$

şeklindedir.

$\tilde{\alpha}$  eğrisinin dual Darboux (ani dönme) vektörü  $W$  ve dual birim binormal vektörü  $B$  arasındaki dual açısı  $\bar{\Phi} (\bar{\Phi} = \bar{\phi} + \epsilon \bar{\phi}^*, \epsilon^2 = 0)$  olduğundan

$$\sin \bar{\Phi} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \cos \bar{\Phi} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \quad (3.49.)$$

yazabiliriz.

(3.48.) denklemini (3.45.) ve (3.46.) denklemlerinde yerine yazarsak ispat tamamlanır

$$R_1 = N$$

$$R_2 = -\cos \bar{\Phi} T + \sin \bar{\Phi} B$$

$$R_3 = \sin \bar{\Phi} T + \cos \bar{\Phi} B \quad (3.50.)$$

Vektörlerinin reel ve dual kısımlarını ayırarak yazarsak

$$r_1 = n$$

$$r_2 = -\cos \bar{\phi} t + \sin \bar{\phi} b$$

$$r_3 = \sin \bar{\phi} t + \cos \bar{\phi} b$$

$$r_1^* = n^*$$

$$r_2^* = -\cos \bar{\phi} t^* + \sin \bar{\phi} b^* + \bar{\phi}^* (\sin \bar{\phi} t + \cos \bar{\phi} b)$$

$$r_3^* = \sin \bar{\phi} t^* + \cos \bar{\phi} b^* + \bar{\phi}^* (\cos \bar{\phi} t^* - \sin \bar{\phi} b^*)$$

şeklindedir.

$$\sin \bar{\Phi} = \sin(\bar{\phi} + \epsilon \bar{\phi}^*) = \sin \bar{\phi} + \epsilon \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi}$$

$$\cos \bar{\Phi} = \cos(\bar{\phi} + \epsilon \bar{\phi}^*) = \cos \bar{\phi} - \epsilon \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer

$$\sin \bar{\Phi} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

ifadesini reel ve dual kısımlarına ayırırsak

$$\sin \bar{\phi} = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$\cos \bar{\phi} = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2k_1^* - 2k_2^2k_2^*}{\bar{\phi}(k_1^2 + k_2^2)^2}.$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\cos \bar{\Phi} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

ifadesini de reel ve dual kısımlarına ayırırsak

$$\cos \bar{\phi} = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$\sin \bar{\phi} = \frac{2k_1^2 + k_1^* + 2k_1k_2k_2^* - k_1^2k_1^* - k_2^2k_1^*}{\bar{\phi}(k_1^2 + k_2^2)^2}$$

elde edilir.

$R_1, R_2$  ve  $R_3$  ve  $R'_1, R'_2$  ve  $R'_3$  vektörleri arasındaki ilişkiler:

$$R'_1 = PR_2$$

$$R'_2 = -PR_1 + QR_3 \quad (3.51.)$$

$$R'_3 = -QR_2$$

şeklindedir.

Burada  $P = p + \varepsilon p^*$ ,  $Q = q + \varepsilon q^*$  sırasıyla  $\tilde{\beta}$  involüt eğrisinin eğriliği ve torsiyonudur. Bu son denklemin reel ve dual bileşenleri

$$r'_1 = pr_2$$

$$r'_2 = -pr_1 + qr_3$$

$$r'_3 = -qr_2$$

$$r_1^{*'} = p^*r_2 + pr_2^* \quad (3.52.)$$

$$r_2^{*'} = -p^*r_1 - pr_1^* + q^*r_3 + qr_3^*$$

$$r_3^{*'} = -q^*r_2 - qr_2^*$$

şeklindedir.

$P = \frac{\|\widetilde{\beta}' \wedge \widetilde{\beta}''\|}{\|\widetilde{\beta}'\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\mu\kappa}$  ve  $Q = \frac{\det(\widetilde{\beta}', \widetilde{\beta}'', \widetilde{\beta}''')}{\|\widetilde{\beta}' \wedge \widetilde{\beta}''\|^2} = \frac{\overline{\Phi}'}{\mu\kappa}$  şeklinde bulunur. P ve Q nun reel ve dual kısımları,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1}, \\ p^* &= \frac{k_2(k_1 k_2^* - k_1^* k_2)}{\mu k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \\ q &= \frac{\overline{\Phi}'}{\mu k_1}, \\ q^* &= \frac{k_1 \overline{\Phi}^* - k_1^* \overline{\Phi}'}{\mu k_1^2} \end{aligned} \quad (3.53.)$$

şeklindedir (Şenyurt vd. 2015).

### 3.3. Dual İvolüt Frenet Üçlüsü Tarafından Üretilen Regle Yüzeylerin İnvaryantları

Bu bölümde, (3.42.) denklemindeki  $\widetilde{\beta}$  dual involüt eğrisinin dual Frenet vektörleri tarafından oluşturulan  $[R_1]$ ,  $[R_2]$  ve  $[R_3]$  kapalı regle yüzeylerin integral invaryantlarını hesaplayacağız.

Dual küresel hareketteki,  $\{R_1, R_2, R_3\}$  dual ortonormal sistemi  $\forall t \in IR$  anında  $\overline{\Psi}$  ani dual Pfaff vektörü etrafında dual bir dönme hareketi gerçekleştirir. Ani dual Pfaff vektörünün yön ve doğrultusu

$$\overline{\Psi} = QR_1 + PR_3. \quad (3.54.)$$

ile verilir.

Dual Steiner vektörü dual involüt eğrisinin dual Frenet çatısına bağlı olarak

$$\overline{D} = R_1 \oint Q ds + R_3 \oint P ds. \quad (3.55.)$$

denklemini ile verilir.

Eğer (3.55.) denklemini reel ve dual kısımlarına ayırırsak,

$$\overline{d} = r_1 \oint q ds + r_3 \oint p ds, \quad (3.56.)$$

$$\overline{d}^* = r_1 \oint q^* ds + r_1^* \oint q ds + r_3 \oint p^* ds + r_3^* \oint p ds$$

şeklindedir.

Şimdi kapalı regle yüzeylerin integral invaryantlarını hesaplayacağız.

### 3.3.1. $[R_1]$ Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları

Teorem 2.4.1. den  $[R_1]$  kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{R_1} = -\langle \bar{D}, R_1 \rangle,$$

formülünden (3.55.) denklemini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \Lambda_{R_1} &= -\oint Q ds \\ &= -\oint q ds - \varepsilon \oint q^* ds \end{aligned} \quad (3.57.)$$

olarak elde ederiz.

(3.53.) denklemindeki  $q$  ve  $q^*$  değerleri (3.57.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Lambda_{R_1} = -\oint \frac{\bar{\Phi}'}{\mu k_1} ds - \varepsilon \oint \frac{k_1 \bar{\Phi}^{*'} - k_1^* \bar{\Phi}'}{\mu k_1^2} ds \quad (3.58.)$$

elde edilir (Bilici, 2017).

#### Sonuç 3.3.1.

(2.52.) ifadesinden  $[R_1]$  kapalı regle yüzeyinin açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla,

$$\begin{aligned} \lambda_{R_1} &= -\oint \frac{\bar{\Phi}'}{\mu k_1} ds \\ L_{R_1} &= \oint \frac{k_1 \bar{\Phi}^{*'} - k_1^* \bar{\Phi}'}{\mu k_1^2} ds. \end{aligned}$$

Tanım 2.4.3. den  $[R_1]$  kapalı regle yüzeyinin drali  $P_{R_1} = \frac{\langle dr_1, dr_1^* \rangle}{\langle dr_1, dr_1 \rangle}$ , (3.52.)

denkleminde  $dr_1$  ve  $dr_1^*$  değerleri yerine yazılırsa

$$P_{R_1} = \frac{p^*}{p}. \quad (3.59.)$$

### Sonuç 3.3.2.

$R_1$  tarafından oluşturulan  $[R_1]$  kapalı regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $p^* = 0$  olmasıdır.

(3.53.) denklemindeki  $p$  ve  $p^*$  değerleri yerine yazılırsa,

$$P_{R_1} = \frac{k_2(k_1k_2^* - k_1^*k_2)}{k_1(k_1^2 + k_2^2)} \quad (3.60.)$$

elde edilir.

### Teorem 3.3.1.

$R_1$  tarafından oluşturulan  $[R_1]$  kapalı regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek yeter şart  $k_2 = 0$  ve  $\frac{k_2^*}{k_1^*} = \frac{k_2}{k_1}$  olmasıdır (Bilici,2017).

### 3.3.2. $[R_2]$ Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları

Teorem 2.4.1. den  $[R_2]$  kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{R_2} = -\langle \bar{D}, R_2 \rangle \text{ dir.}$$

Böylece, (3.54.) denklemini kullanarak,

$$\Lambda_{R_2} = 0 \quad (3.61.)$$

elde ederiz.

### Sonuç 3.3.2.

(2.52.) ifadesinden  $[R_2]$  kapalı regle yüzeyinin açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla,

$$\lambda_{R_2} = 0 \text{ ve } L_{R_2} = 0 \text{ dir.}$$

Tanım 2.4.3. den  $[R_2]$  kapalı regle yüzeyinin drali

$$P_{R_2} = \frac{\langle dr_2, dr_2^* \rangle}{\langle dr_2, dr_2 \rangle}$$

dir.

(3.52.) denkleminde  $dr_2$  ve  $dr_2^*$  değerleri yerine yazılırsa

$$P_{R_2} = \frac{pp^* + qq^*}{p^2 + q^2}. \quad (3.62.)$$

elde edilir.

### Sonuç 3.3.3.

$\frac{q^*}{p^*} = -\frac{p}{q}$  ise  $R_2$  tarafından oluşturulan  $[R_2]$  kapalı regle yüzeyinin açılabiliridir.

(3.53.) denklemindeki  $p$ ,  $p^*$ ,  $q$  ve  $q^*$  değerleri yerine yazılırsa,

$$P_{R_2} = \frac{k_2(k_1k_2^* - k_1^*k_2) + \varphi'(k_1\bar{\phi}^{*'} - k_1^*\bar{\phi}')}{k_1(k_1^2 + k_2^2 + \bar{\phi}'^2)}. \quad (3.63.)$$

elde ederiz.

### Teorem 3.3.2.

$k_2(k_1k_2^* - k_1^*k_2) + \varphi'(k_1\bar{\phi}^{*'} - k_1^*\bar{\phi}') = 0$  ise  $R_2$  tarafından oluşturulan  $[R_2]$  kapalı regle yüzeyinin açılabiliridir (Bilici,2017).

### 3.3.3. $[R_3]$ Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları

Teorem 2.4.1. den  $[R_3]$  kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{R_3} = -\langle \bar{D}, R_3 \rangle.$$

Böylece, (3.54.) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \Lambda_{R_3} &= -\oint P ds. \\ &= -\oint p ds - \varepsilon \oint p^* ds. \end{aligned} \quad (3.64.)$$

elde ederiz.

(3.53.) deki  $q$  ve  $q^*$  değerleri (3.64.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Lambda_{R_3} = -\oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds - \varepsilon \oint \frac{k_2(k_1k_2^* - k_1^*k_2)}{\mu k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds. \quad (3.65.)$$

### Sonuç 3.3.4.

(2.52.) ifadesinden  $[R_3]$  kapalı regle yüzeyinin açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla,

$$\lambda_{R_3} = -\oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds \text{ ve } L_{R_3} = \oint \frac{k_2(k_1 k_2^* - k_1^* k_2)}{\mu k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds$$

dır. Tanım 2.4.3. den  $[R_3]$  kapalı regle yüzeyinin dralli

$$P_{R_3} = \frac{\langle dr_3, dr_3^* \rangle}{\langle dr_3, dr_3 \rangle},$$

(3.52.) denkleminde  $dr_3$  ve  $dr_3^*$  değerleri yerine yazılırsa

$$P_{R_3} = \frac{q^*}{q}. \quad (3.66.)$$

elde edilir (Bilici, 2017).

### Sonuç 3.3.5.

$R_3$  tarafından oluşturulan  $[R_3]$  kapalı regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $q^* = 0$  olmasıdır.

(3.53.) denklemindeki  $q$  ve  $q^*$  değerleri yerine yazılırsa,

$$P_{R_3} = \frac{k_1 \bar{\phi}^{*'} - k_1^* \bar{\phi}'}{k_1 \bar{\phi}'}. \quad (3.67.)$$

elde edilir.

### Teorem 3.3.3.

$R_3$  tarafından oluşturulan  $[R_3]$  kapalı regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $\frac{k_1^*}{k_1} = \frac{d\bar{\phi}^*}{d\bar{\phi}}$  olmasıdır (Bilici, 2017).

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. $\bar{C}$ Tarafından Oluşturulan Dual Regle Yüzeyin İnvaryantları

Bu bölümde,  $\tilde{\beta}$  dual involüt eğrisinin  $\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen kapalı regle yüzeyin integral invaryantlarını hesaplayacağız. Bunun için önce şu hazırlıkları yapalım.

$$R_1 = r_1 + \varepsilon r_1^*,$$

(3.50.) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \langle R_1, R_1 \rangle &= \langle N, N \rangle = 1, \\ \langle r_1 + \varepsilon r_1^*, r_1 + \varepsilon r_1^* \rangle &= 1, \\ \langle r_1, r_1 \rangle + 2\varepsilon \langle r_1, r_1^* \rangle &= 1, \\ \langle r_1, r_1 \rangle &= 1, \langle r_1, r_1^* \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.1.)$$

elde edilir.

$$R_2 = r_2 + \varepsilon r_2^*,$$

(3.50.) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \langle R_2, R_2 \rangle &= \langle -\cos \bar{\Phi} T + \sin \bar{\Phi} B, -\cos \bar{\Phi} T + \sin \bar{\Phi} B \rangle, \\ &= \langle T, T \rangle \cos^2 \bar{\Phi} - 2 \langle T, B \rangle \sin \bar{\Phi} \cos \bar{\Phi} + \langle B, B \rangle \sin^2 \bar{\Phi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle r_2 + \varepsilon r_2^*, r_2 + \varepsilon r_2^* \rangle &= 1 \\ \langle r_2, r_2 \rangle + 2\varepsilon \langle r_2, r_2^* \rangle &= 1, \\ \langle r_2, r_2 \rangle &= 1, \langle r_2, r_2^* \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.2.)$$

elde edilir.

$$R_3 = r_3 + \varepsilon r_3^*,$$

(3.50.) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \langle R_3, R_3 \rangle &= \langle \sin \bar{\Phi} T + \cos \bar{\Phi} B, \sin \bar{\Phi} T + \cos \bar{\Phi} B \rangle, \\ &= \langle T, T \rangle \sin^2 \bar{\Phi} + 2 \langle T, B \rangle \sin \bar{\Phi} \cos \bar{\Phi} + \langle B, B \rangle \cos^2 \bar{\Phi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle r_3 + \varepsilon r_3^*, r_3 + \varepsilon r_3^* \rangle &= 1 \\
\langle r_3, r_3 \rangle + 2\varepsilon \langle r_3, r_3^* \rangle &= 1, \\
\langle r_3, r_3 \rangle &= 1, \langle r_3, r_3^* \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

(3.50.) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\langle R_1, R_2 \rangle &= \langle N, -\cos \bar{\Phi} T + \sin \bar{\Phi} B \rangle, \\
&= -\langle N, T \rangle \cos \bar{\Phi} + \langle N, B \rangle \sin \bar{\Phi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle r_1 + \varepsilon r_1^*, r_2 + \varepsilon r_2^* \rangle &= 0 \\
\langle r_1, r_2 \rangle + \varepsilon(\langle r_1, r_2^* \rangle + \langle r_1^*, r_2 \rangle) &= 0, \\
\langle r_1, r_2 \rangle &= 0, \langle r_1, r_2^* \rangle + \langle r_1^*, r_2 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.

(3.50.) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\langle R_1, R_3 \rangle &= \langle N, \sin \bar{\Phi} T + \cos \bar{\Phi} B \rangle, \\
&= \langle N, T \rangle \sin \bar{\Phi} + \langle N, B \rangle \cos \bar{\Phi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle r_1 + \varepsilon r_1^*, r_3 + \varepsilon r_3^* \rangle &= 0 \\
\langle r_1, r_3 \rangle + \varepsilon(\langle r_1, r_3^* \rangle + \langle r_1^*, r_3 \rangle) &= 0, \\
\langle r_1, r_3 \rangle &= 0, \langle r_1, r_3^* \rangle + \langle r_1^*, r_3 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir.

(3.50.) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\langle R_2, R_3 \rangle &= \langle -\cos \bar{\Phi} T + \sin \bar{\Phi} B, \sin \bar{\Phi} T + \cos \bar{\Phi} B \rangle, \\
&= -\langle T, T \rangle \cos \bar{\Phi} \sin \bar{\Phi} + \langle B, B \rangle \sin \bar{\Phi} \cos \bar{\Phi} \\
&\quad -\langle T, B \rangle \cos^2 \bar{\Phi} + \langle B, T \rangle \sin^2 \bar{\Phi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\langle r_2 + \varepsilon r_2^*, r_3 + \varepsilon r_3^* \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle r_2, r_3 \rangle + \varepsilon(\langle r_2, r_3^* \rangle + \langle r_2^*, r_3 \rangle) &= 0, \\ \langle r_2, r_3 \rangle &= 0, \quad \langle r_2, r_3^* \rangle + \langle r_2^*, r_3 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.6.)$$

elde edilir.

Ayrıca  $\tilde{\beta}$  eğrisinin dual eğriliği,

$$P = p + \varepsilon p^* \quad (4.7.)$$

dual burulması

$$Q = q + \varepsilon q^* \quad (4.8.)$$

olmak üzere

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ -P & 0 & Q \\ 0 & -Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}. \quad (4.9.)$$

$\bar{\Psi}$  ani dual Pfaff vektörü ile  $R_3$  vektörü arasındaki açı  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(s)$  ise

$$P = \|\bar{\Psi}\| \cdot \cos \bar{\Phi},$$

$$Q = \|\bar{\Psi}\| \cdot \sin \bar{\Phi}, \quad \bar{\Phi} = \bar{\phi} + \varepsilon \bar{\phi}^* \quad (4.10.)$$

şeklindedir.

$\bar{\Psi}$  ani dual Pfaff vektörü yönündeki birim dual vektör  $\bar{C} = \bar{C}(s) = \bar{c}(s) + \varepsilon \bar{c}^*(s)$  ise

$$\|\bar{\Psi}\| = \sqrt{P^2 + Q^2} \geq 0$$

olmak üzere

$$\bar{C} = \frac{Q}{\|\bar{\Psi}\|} R_1 + \frac{P}{\|\bar{\Psi}\|} R_3 \quad (4.11.)$$

elde edilir. P ve Q nun (4.1.) deki değerleri yerine yazılırsa

$$\bar{C} = \sin \bar{\Phi} R_1 + \cos \bar{\Phi} R_3 \quad (4.12.)$$

bulunur.

$$\sin \bar{\Phi} = \sin \bar{\phi} + \varepsilon \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi},$$

$$\cos \bar{\Phi} = \cos \bar{\phi} - \varepsilon \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi} \quad (4.13.)$$

Theorem 2.4.1. den  $\bar{C}$  kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\bar{C}} &= -\langle \bar{D}, \bar{C} \rangle \\ &= -\langle R_1 \oint Q ds + R_3 \oint P ds, \sin \bar{\Phi} R_1 + \cos \bar{\Phi} R_3 \rangle\end{aligned}$$

İşleminde gerekli sadeleştirme ve kısaltmalar yapılarak,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\bar{C}} &= -\sin \bar{\Phi} \oint q ds - \cos \bar{\Phi} \oint p ds - \varepsilon(\bar{\Phi}^* \cos \bar{\Phi} \oint q ds + \sin \bar{\Phi} \oint q^* ds - \\ &\quad \bar{\Phi}^* \sin \bar{\Phi} \oint p ds + \cos \bar{\Phi} \oint p^* ds)\end{aligned}\quad (4.14.)$$

elde edilir.

(3.53.) deki  $p$ ,  $p^*$ ,  $q$  ve  $q^*$  değerleri (4.14.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\bar{C}} &= -\sin \bar{\Phi} \oint \frac{\bar{\Phi}'}{\mu k_1} ds - \cos \bar{\Phi} \oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds \\ &\quad - \varepsilon \left( \bar{\Phi}^* \cos \bar{\Phi} \oint \frac{\bar{\Phi}'}{\mu k_1} ds + \sin \bar{\Phi} \oint \frac{k_1 \bar{\Phi}^{*'} - k_1^* \bar{\Phi}'}{\mu k_1^2} ds - \bar{\Phi}^* \sin \bar{\Phi} \oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds \right. \\ &\quad \left. + \cos \bar{\Phi} \oint \frac{k_2(k_1 k_2^* - k_1^* k_2)}{\mu k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds \right)\end{aligned}\quad (4.15.)$$

elde edilir.

(3.31.) ifadesinden  $\Lambda_{\bar{C}} = \lambda_{\bar{C}} - \varepsilon L_{\bar{C}}$  olduğundan,  $\bar{C}$  kapalı regle yüzeyinin açılım açısı ve açılım uzunluğu (4.14.) denkleminde;

$$\lambda_{\bar{C}} = -\sin \bar{\Phi} \oint q ds - \cos \bar{\Phi} \oint p ds,$$

$$L_{\bar{C}} = \bar{\Phi}^* \cos \bar{\Phi} \oint q ds + \sin \bar{\Phi} \oint q^* ds - \bar{\Phi}^* \sin \bar{\Phi} \oint p ds + \cos \bar{\Phi} \oint p^* ds \quad (4.16.)$$

bulunur.

(3.53.) deki  $p$ ,  $p^*$ ,  $q$  ve  $q^*$  değerleri (4.16.) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{C}} &= -\sin \bar{\Phi} \oint \frac{\bar{\Phi}'}{\mu k_1} ds - \cos \bar{\Phi} \oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds, \\ L_{\bar{C}} &= \bar{\Phi}^* \cos \bar{\Phi} \oint \frac{\bar{\Phi}'}{\mu k_1} ds + \sin \bar{\Phi} \oint \frac{k_1 \bar{\Phi}^{*'} - k_1^* \bar{\Phi}'}{\mu k_1^2} ds - \bar{\Phi}^* \sin \bar{\Phi} \oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds \\ &\quad + \cos \bar{\Phi} \oint \frac{k_2(k_1 k_2^* - k_1^* k_2)}{\mu k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds\end{aligned}\quad (4.17.)$$

elde edilir. O halde, (2.64.) den bir birim dual küresel kapalı  $\bar{C} = \bar{C}(s)$  eğrisinin çevrelediği küresel alanı

$$\begin{aligned}
F_{\bar{C}} &= 2\pi(1-n) + (\lambda_{\bar{C}} - \varepsilon L_{\bar{C}}) \\
&= 2\pi(1-n) + \left( -\sin \bar{\phi} \oint \frac{\bar{\phi}'}{\mu k_1} ds - \cos \bar{\phi} \oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds \right) \\
&\quad - \varepsilon \left( \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi} \oint \frac{\bar{\phi}'}{\mu k_1} ds + \sin \bar{\phi} \oint \frac{k_1 \bar{\phi}^{*'} - k_1^* \bar{\phi}'}{\mu k_1^2} ds - \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi} \oint \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu k_1} ds \right) \\
&\quad - \varepsilon \left( + \cos \bar{\phi} \oint \frac{k_2(k_1 k_2^* - k_1^* k_2)}{\mu k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds \right) \tag{4.18.}
\end{aligned}$$

dir. Tanım 2.4.3. den  $\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen kapalı regle yüzeyin drali

$$P_{\bar{C}} = \frac{\langle d\bar{c}, d\bar{c}^* \rangle}{\langle d\bar{c}, d\bar{c} \rangle}$$

dir.

(4.12.) den  $\bar{C}$  sabit pol eğrisinin reel ve dual kısımlarını ayırırsak,

$$\bar{c} = r_1 \sin \bar{\phi} + r_3 \cos \bar{\phi}, \bar{\phi} = \bar{\phi}(s) \tag{4.19.}$$

$$\bar{c}^* = r_1 \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi} + r_1^* \sin \bar{\phi} + r_3 \cos \bar{\phi} - r_3^* \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi} \tag{4.20.}$$

elde edilir. (4.19.) deki denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$d\bar{c} = (r_1 \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} + r_1' \sin \bar{\phi} + r_3' \cos \bar{\phi} - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) ds \tag{4.21.}$$

olur.

$$r_1' = q r_2,$$

$$r_3' = -p r_2$$

değerleri (4.21.) denkleminde yerine yazılır ve (4.10) denklemlerinden elde edilen

$$q \sin \bar{\phi} = p \cos \bar{\phi}$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$d\bar{c} = (r_1 \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) ds \tag{4.22.}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\langle d\bar{c}, d\bar{c} \rangle &= \langle (r_1 \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) ds, (r_1 \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) ds \rangle \\
&= (\langle r_1, r_1 \rangle (\bar{\phi}')^2 \cos^2 \bar{\phi} + \langle r_3, r_3 \rangle (\bar{\phi}')^2 \sin^2 \bar{\phi}) (ds)^2 \\
&= (\bar{\phi}')^2 (ds)^2
\end{aligned} \tag{4.23.}$$

bulunur.

(4.20.) deki denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{c}^*}{ds} &= r_1' \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi} + r_1 (\bar{\phi}^*)' \cos \bar{\phi} - r_1 \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \sin \bar{\phi} + (r_1^*)' \sin \bar{\phi} + r_1^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} \\
&\quad + r_3' \cos \bar{\phi} - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi} - (r_3^*)' \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi} - r_3^* (\bar{\phi}^*)' \sin \bar{\phi} - r_3^* \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi}
\end{aligned} \tag{4.24.}$$

olur.

$$(r_1^*)' = qr_2^* + q^* r_2,$$

$$r_1' = qr_2,$$

$$(r_3^*)' = -p^* r_2 - pr_2^*,$$

$$r_3' = -pr_2$$

değerleri (4.24.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{c}^*}{ds} &= r_1 ((\bar{\phi}^*)' \cos \bar{\phi} - \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) + r_1^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} + r_2 (q \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi} - p \cos \bar{\phi} \\
&\quad + q^* \sin \bar{\phi} + p^* \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi}) + r_2^* (q \sin \bar{\phi} + p \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi}) - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi} \\
&\quad - r_3^* ((\bar{\phi}^*)' \sin \bar{\phi} + \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi})
\end{aligned} \tag{4.25.}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\langle d\bar{c}, d\bar{c}^* \rangle &= \langle (r_1 \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) ds, (r_1 ((\bar{\phi}^*)' \cos \bar{\phi} - \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \sin \bar{\phi}) \\
&\quad + r_1^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} + r_2 (q \bar{\phi}^* \cos \bar{\phi} - p \cos \bar{\phi} + q^* \sin \bar{\phi} \\
&\quad + p^* \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi}) + r_2^* (q \sin \bar{\phi} + p \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi}) \\
&\quad - r_3 \bar{\phi}' \sin \bar{\phi} - r_3^* ((\bar{\phi}^*)' \sin \bar{\phi} + \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi})) ds \rangle \\
&= \bar{\phi}' ((\bar{\phi}^*)' \cos^2 \bar{\phi} - \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi} - q \cos^2 \bar{\phi} \sin \bar{\phi} \\
&\quad - p \bar{\phi}^* \cos^2 \bar{\phi} \sin \bar{\phi} - q \sin^3 \bar{\phi} - p \bar{\phi}^* \sin^3 \bar{\phi} + \bar{\phi}' \sin^2 \bar{\phi}) (ds)^2
\end{aligned}$$

(4.26.)

elde edilir. (4.23.) ve (4.26.) ifadeleri

$$P_{\bar{c}} = \frac{\langle d\bar{c}, d\bar{c}^* \rangle}{\langle d\bar{c}, d\bar{c} \rangle}$$

de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{\bar{c}} &= \left( \frac{\bar{\phi}'((\bar{\phi}^*)' \cos^2 \bar{\phi} - \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi} - q \cos^2 \bar{\phi} \sin \bar{\phi})}{(\bar{\phi}')^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\phi}'(-p\bar{\phi}^* \cos^2 \bar{\phi} \sin \bar{\phi} - q \sin^3 \bar{\phi} - p\bar{\phi}^* \sin^3 \bar{\phi} + \bar{\phi}' \sin^2 \bar{\phi})}{(\bar{\phi}')^2} \right) \frac{(ds)^2}{(ds)^2} \\ &= \frac{-q \sin \bar{\phi} - p \bar{\phi}^* \sin \bar{\phi} + (\bar{\phi}^*)' \cos^2 \bar{\phi} - \bar{\phi}^* \bar{\phi}' \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi} + \bar{\phi}' \sin^2 \bar{\phi}}{\bar{\phi}'} \end{aligned} \quad (4.27.)$$

elde edilir.

#### Sonuç 4.1.1.

$\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen kapalı regle yüzeyin drali (4.27.) denkleminde verilmiştir.

Regle yüzeyin açılabilir olması için  $\bar{\phi}' \neq 0$ ,  $k_1 \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  olmak üzere  $\bar{\phi}^* = 0$  ve

$$\bar{\phi} = \arcsin \frac{1}{\mu k_1}$$

olmalıdır.

$$\|\bar{\Psi}\| = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

$$\|\bar{\Psi}\| = \sqrt{p^2 + q^2 + 2\varepsilon(pp^* + qq^*)},$$

$$\|\bar{\Psi}\|' = \frac{pp' + qq' + \varepsilon(p'p^* + pp'^* + q'q^* + qq'^*)}{\|\bar{\Psi}\|},$$

$$\bar{C} = \frac{Q}{\|\bar{\Psi}\|} R_1 + \frac{P}{\|\bar{\Psi}\|} R_3 \text{ eğrisinin } s\text{-ye göre türevi alınırsa,}$$

$$d\bar{C} = \frac{(Q'R_1 + QR'_1 + PR'_3 + P'R_3)\|\bar{\Psi}\| - \|\bar{\Psi}\|'(QR_1 + PR_2)}{\|\bar{\Psi}\|^2} ds,$$

Reel, dual kısımlarına ayrıldığında ve gerekli kısaltmalar yapıldığında,

$$d\bar{C} = \frac{p^2 q' r_1 - pp' q r_1 + q^2 p' r_3 - qq' p r_3 + \varepsilon[r_1^*(p^2 q' - pp' q) + r_3^*(q^2 p' - qq' p)]}{\|\bar{\Psi}\|^3}$$

$$\frac{+r_1(p^2q^{*'}+2pp^*q'-pp'q^*-qp'p^*-qpp^{*'})}{\|\bar{\psi}\|^3}$$

$$\frac{+r_3(q^2p^{*'}+2qq^*p'-qq'p^*-pq'q^*-pqq^{*'})}{\|\bar{\psi}\|^3}] ds$$

Son denklemi reel ve dual kısımlarına ayırırsak,

$$d\bar{c} = \frac{r_1(p^2q'-pp'q)+r_3(q^2p'-qq'p)}{\|\bar{\psi}\|^3} ds,$$

$$d\bar{c}^* = \frac{r_1^*(p^2q'-pp'q)+r_3^*(q^2p'-qq'p)+r_1(p^2q^{*'}+2pp^*q'-pp'q^*-qp'p^*-qpp^{*'})}{\|\bar{\psi}\|^3}$$

$$\frac{+r_3(q^2p^{*'}+2qq^*p'-qq'p^*-pq'q^*-pqq^{*'})}{\|\bar{\psi}\|^3} ds$$

olur. Buradan da

$$\langle d\bar{c}, d\bar{c} \rangle = \frac{(p^2q'-pp'q)^2+(q^2p'-qq'p)^2}{\|\bar{\psi}\|^6} (ds)^2,$$

$$\langle d\bar{c}, d\bar{c}^* \rangle = \frac{(p^2q'-pp'q)(p^2q^{*'}+2pp^*q'-pp'q^*-qp'p^*-qpp^{*'})}{\|\bar{\psi}\|^6}$$

$$\frac{+(q^2p'-qq'p)(q^2p^{*'}+2qq^*p'-qq'p^*-pq'q^*-pqq^{*'})}{\|\bar{\psi}\|^6} (ds)^2 \quad (4.28.)$$

elde edilir. Tanım 2.4.3. den  $\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen kapalı regle yüzeyin drali

$$P_{\bar{C}} = \frac{\langle d\bar{c}, d\bar{c}^* \rangle}{\langle d\bar{c}, d\bar{c} \rangle}$$

dir. (4.28.) ifadesindeki  $\langle d\bar{c}, d\bar{c}^* \rangle$ ,  $\langle d\bar{c}, d\bar{c} \rangle$  değerleri  $P_{\bar{C}}$  yerine yazılırsa

$$P_{\bar{C}} = \frac{(p^2+q^2)(pq^{*'}-qp^{*'})+(p^2+q^2)(p^*q'-q^*p')+ (pq'-qp')(q^*q-p^*p)}{p^2+q^2} \quad (4.29.)$$

elde edilir.

#### Sonuç 4.1.2.

$\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen kapalı regle yüzeyin drali (4.29.) ifadesi ile verilir.

Bu regle yüzeyin açılabilir olması için yeter şart

$$pq^{*'} - qp^{*'} = 0 ,$$

$$p^*q' - q^*p' = 0$$

eşitlikleriyle beraber  $pq' - qp' = 0$  veya  $q^*q - p^*p = 0$  olmasıdır.

Birinci durumda

$$\frac{p}{q} = \frac{p^*'}{q^*'} = -\frac{q^*}{p^*} = -\frac{q'}{p'}$$

elde edilir.

İkinci durumda

$$\frac{p}{q} = \frac{p^*'}{q^*'} = \frac{p^*}{q^*} = \frac{p'}{q'}$$

eşitlikleri elde edilir. Birinci veya ikinci durum sağlandığında regle yüzey açılabilir olur.

(3.53.) denklemindeki  $p$ ,  $p^*$ ,  $q$ ,  $q^*$  değerleri göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} p' &= \frac{\mu k_2(k_1 k_2' - k_1' k_2) - \mu' k_1(k_1^2 + k_2^2)}{\mu^2 k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \\ p^* &= \frac{\mu k_1^2 [k_2' k_2^* (k_1^3 + k_2^3) + (k_1 k_2 k_2^* - k_1^* k_2^2)(k_1^2 + k_2^2) + k_1^* k_2 (-2k_2' k_1^2 - 2k_2^2 k_1' \\ &\quad + k_1 k_1' k_2 + k_2^2 k_2')] + (k_1^2 + k_2^2)(k_2 k_1 k_2^* - k_1^* k_2^2)(-\mu' k_1^2 - 2\mu k_1 k_1')}{\mu^2 k_1^4 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}}, \\ q' &= \frac{\mu(\bar{\phi}'' k_1 - k_1' \bar{\phi}') - \mu' k_1 \bar{\phi}'}{\mu^2 k_1^2}, \\ q^* &= \frac{\mu(k_1^2 \bar{\phi}^{*''} - k_1 k_1' \bar{\phi}' - k_1 \bar{\phi}'' k_1^* - k_1 k_1' \bar{\phi}^{*'} + 2k_1' k_1^* \bar{\phi}') - \mu' k_1 (k_1 \bar{\phi}^{*'} - k_1^2 \bar{\phi}')}{\mu^2 k_1^3} \end{aligned} \quad (4.30.)$$

elde edilir. (4.30.) de bulunan eşitlikler (4.29.) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} P_{\bar{c}} &= \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \left[ \mu \left( k_1 (k_1 \bar{\phi}^{*''} - \bar{\phi}'' k_1^*) + \bar{\phi}' (k_1' k_1^* - k_1^* k_1) + k_1' (k_1^* \bar{\phi}' - k_1 \bar{\phi}^{*'}) \right) + \mu' k_1^2 (k_1 \bar{\phi}' - \bar{\phi}^{*'}) \right]}{\mu^3 k_1^4} \\ &\quad - \frac{\bar{\phi}' \left[ \mu k_1^2 (k_1^2 + k_2^2) \left( k_2 (k_1 k_2' - k_1^* k_2) + k_2 (k_1' k_2^* - k_1^* k_2') + k_2' (k_1 k_2^* - k_1^* k_2) \right) \right]}{\mu^3 k_1^5 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{\bar{\phi}' k_2 (k_1 k_2^* - k_1^* k_2) [\mu' k_1^2 (k_1^2 + k_2^2) + 2\mu k_1 k_1' (k_1^2 + k_2^2) + \mu k_1^2 (k_1 k_1' + k_2 k_2')]}{\mu^3 k_1^5 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{k_2 (k_1 k_2^* - k_1^* k_2) [\mu(\bar{\phi}'' k_1 - \bar{\phi}' k_1') - \mu' k_1 \bar{\phi}']}{\mu^3 k_1^4 (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}} - \frac{(k_1 \bar{\phi}^{*'} - k_1^* \bar{\phi}') [\mu k_2 (k_1 k_2' - k_1' k_2) - \mu' k_1 (k_1^2 + k_2^2)]}{\mu^3 k_1^4 (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{\left[ (k_1 \bar{\phi}^{*'} - k_1^* \bar{\phi}') \sqrt{k_1^2 + k_2^2} + k_2 (k_1 k_2^* - k_1^* k_2) \right] \left[ (k_1^2 + k_2^2)(k_1 \bar{\phi}'' - k_1' \bar{\phi}') + \bar{\phi}' k_2 (k_1' k_2 - k_1 k_2') \right]}{\mu^2 k_1^4 (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} (k_1^2 + k_2^2 + (\bar{\phi}')^2)} \end{aligned} \quad (4.31.)$$

elde edilir.

### Sonuç 4.1.3.

$(\bar{C})$  nin oluşturduğu regle yüzeyin drali (4.31.) denklemi ile verilir.

Regle yüzeyin açılabilir olması için yeter şart  $k_1 \neq 0$  ve  $\mu \neq 0$  olmak üzere

$$k_1 k_2^* - k_1^* k_2 = 0,$$

$$k_1 k_2^{*'} - k_1^{*'} k_2 = 0,$$

$$k_1' k_2^* - k_1^* k_2' = 0,$$

$$k_1 \bar{\phi}^{*'} - k_1^* \bar{\phi}' = 0,$$

$$k_1 \bar{\phi}^{*''} - \bar{\phi}'' k_1^* = 0,$$

$$k_1 \bar{\phi}' - \bar{\phi}^{*'} = 0$$

eşitlikleri sağlandığında  $P_{\bar{C}} = 0$  olmasıdır. Bu eşitliklerden yararlanarak

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1^*}{k_2^*} = \frac{k_1^{*'}}{k_2^{*'}} = \frac{k_1'}{k_2'}, \quad \frac{k_1}{k_1^*} = \frac{\bar{\phi}'}{\bar{\phi}^{*'}} = \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}^{*''}} \text{ ve } k_1 = \frac{\bar{\phi}^{*'}}{\bar{\phi}'}$$

elde edilir.

### Örnek 4.1.

Birim dual küre üzerinde birim hızlı olan

$$\tilde{\alpha}(s) = \left( \frac{1}{2} \cos s, -\sin s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right) + \varepsilon \left( \frac{1}{2} \sin s, \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$$

eğrisini alalım.

Bu eğrinin dual evolüt eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergelerine

$E^3$  de karşılık gelen regle yüzeylerini bulalım.

Öncelikle  $\tilde{\alpha}(s)$  eğrisinin birim dual teğet vektörünü hesaplayalım.

$$T = t + \varepsilon t^*$$

$$= \tilde{\alpha}'(s)$$

$$= \left( -\frac{1}{2} \sin s, -\cos s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right) + \varepsilon \left( \frac{1}{2} \cos s, -\sin s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

Yani birim dual teğet vektörünün reel ve dual bileşenleri şöyledir;

$$t = \left( -\frac{1}{2} \sin s, -\cos s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right) \text{ ve } t^* = \left( \frac{1}{2} \cos s, -\sin s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

$\tilde{\alpha}(s)$  eğrisinin yay parametresi :

$$\tilde{s} = \int_0^s \|\alpha'(s)\| + \varepsilon \int_0^s \langle t, \alpha^{*'}(s) \rangle = s, \quad \|\tilde{\alpha}'(s)\| = 1$$

dir.

İnvolut eğrisi

$$\tilde{\beta}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \lambda T, \quad \lambda = (c - s) + \varepsilon d$$

$$= \left( \frac{1}{2} \cos s + \frac{1}{2}(c - s) \sin s, -\sin s - (c - s) \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s - \frac{\sqrt{3}(c-s)}{2} \cos s \right)$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon \left( \frac{1-d}{2} \sin s + \frac{1}{2} (c-s) \cos s, (1-d) \cos s - (c-s) \sin s, \frac{\sqrt{3}(1-d)}{2} \sin s + \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{3}}{2} (c-s) \cos s \right) \\
\tilde{\beta}'(s) & = \left( -\frac{1}{2} (c-s) \cos s, (c-s) \sin s, -\frac{\sqrt{3}(c-s)}{2} \cos s \right) \\
& +\varepsilon \left( -\frac{(c-s)}{2} \sin s - \frac{d}{2} \cos s, d \sin s - (c-s) \cos s, -\frac{\sqrt{3}d}{2} \cos s - \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{3}(c-s)}{2} \sin s \right)
\end{aligned}$$

$\tilde{\beta}'(s)$  eğrisinin dual ve reel kısımları

$$\begin{aligned}
\beta'(s) & = \left( -\frac{1}{2} (c-s) \cos s, (c-s) \sin s, -\frac{\sqrt{3}(c-s)}{2} \cos s \right) \\
\beta^{*'}(s) & = \left( -\frac{(c-s)}{2} \sin s - \frac{d}{2} \cos s, d \sin s - (c-s) \cos s, -\frac{\sqrt{3}d}{2} \cos s - \right. \\
& \left. -\frac{\sqrt{3}(c-s)}{2} \sin s \right)
\end{aligned}$$

dir.

$\tilde{\beta}(s)$  eğrisinin yay parametresi  $\tilde{s} = \bar{s} + \varepsilon \bar{s}^*$  olsun.

$$\tilde{s} = \int_0^s \|\beta'(s)\| + \varepsilon \int_0^s \langle r_1, \beta^{*'}(s) \rangle = (cs - \frac{s^2}{2}) + \varepsilon ds$$

elde edilir.

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = c - s + \varepsilon d = \lambda, \lambda = (c-s) + \varepsilon d$$

$$\|\tilde{\beta}'(s)\| = (c-s) + \varepsilon d = \lambda$$

İnvolut eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergelerine  $E^3$  de karşılık gelen regle yüzeylerini bulalım.

$$\begin{aligned}
R_1 & = \frac{\tilde{\beta}'(s)}{\|\tilde{\beta}'(s)\|} \\
& = \left( -\frac{1}{2} \cos s, \sin s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right) + \varepsilon \left( -\frac{1}{2} \sin s, -\cos s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)
\end{aligned}$$

$R_1$  in reel ve dual kısımları;

$$r_1 = \left( -\frac{1}{2} \cos s, \sin s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

$$r_1^* = \left( -\frac{1}{2} \sin s, -\cos s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$$

dır.

$$R_3 = \frac{\tilde{\beta}'(s) \wedge \tilde{\beta}''(s)}{\|\tilde{\beta}'(s) \wedge \tilde{\beta}''(s)\|}$$

$$= \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) + \varepsilon \left( \frac{2\sqrt{3}d}{c-s}, 0, \frac{2d}{c-s} \right)$$

$$R_2 = R_1 \wedge R_2$$

$$= \left( \frac{1}{2} \sin s, \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right) + \varepsilon \left( -\frac{1}{2} \cos s, \sin s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

$\tilde{\beta}(s)$  eğrisinin dual eğrilik ve dual burulmasını hesaplayalım.

$$P = \frac{\|\tilde{\beta}'(s) \wedge \tilde{\beta}''(s)\|}{\|\tilde{\beta}'(s)\|^3} = \frac{1}{\lambda},$$

$$Q = \frac{\det(\tilde{\beta}'(s), \tilde{\beta}''(s), \tilde{\beta}'''(s))}{\|\tilde{\beta}'(s) \wedge \tilde{\beta}''(s)\|^2} = 0$$

dır.

$$\dot{R}_1 = P \cdot R_2 \text{ olduğundan } R_2 = \frac{dR_1}{ds} \cdot \frac{d\tilde{s}}{ds} \cdot \frac{1}{P} = \frac{dR_1}{ds} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \text{ olup } R_2 = \frac{dR_1}{ds} \text{ dir.}$$

$$\bar{C} = \frac{PR_3 + QR_1}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$= \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) + \varepsilon \left( \frac{2\sqrt{3}d}{c-s}, 0, \frac{2d}{c-s} \right)$$

elde edilir. (2.64.) denklemden birim dual küresel kapalı  $R_1 = R_1(s)$ ,  $R_2 = R_2(s)$ ,  $R_3 = R_3(s)$ ,  $\bar{C} = \bar{C}(s)$  eğrilerinin çevrelediği küresel alanları, sırasıyla, (3.57.), (3.61.), (3.64.) ve (4.18.) denklemlerinden faydalanarak,

$$F_{R_1} = 2\pi(1 - n)$$

$$F_{R_2} = 2\pi(1 - n)$$

$$F_{R_3} = 2\pi(1 - n) + \ln(c - s) - \varepsilon \left( \frac{d}{c - s} \right) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$F_{\bar{C}} = 2\pi(1 - n) + \ln(c - s) - \varepsilon \left( \frac{d}{c - s} \right) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

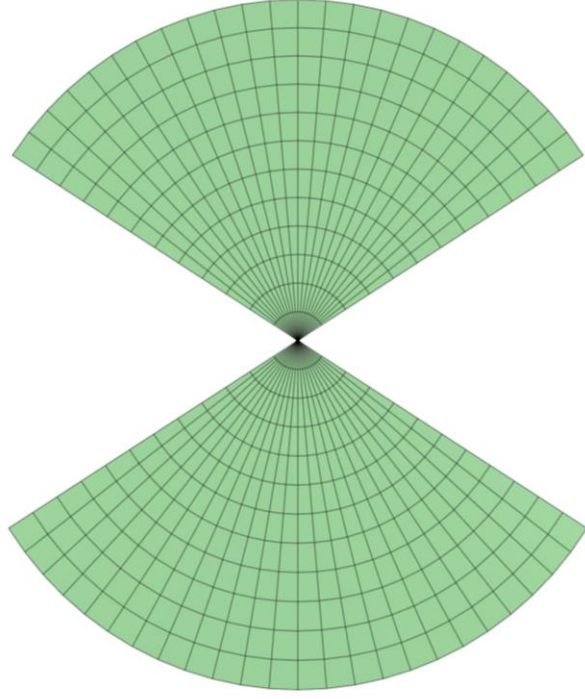
bulunur. Şimdi  $R_1, R_2, R_3$  ve  $\bar{C}$  dual involüt eğrilerinin regle yüzeylerini hesaplayalım ve resmedelim.

$$[R_1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) + v \left( -\frac{1}{2} \cos s, \sin s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

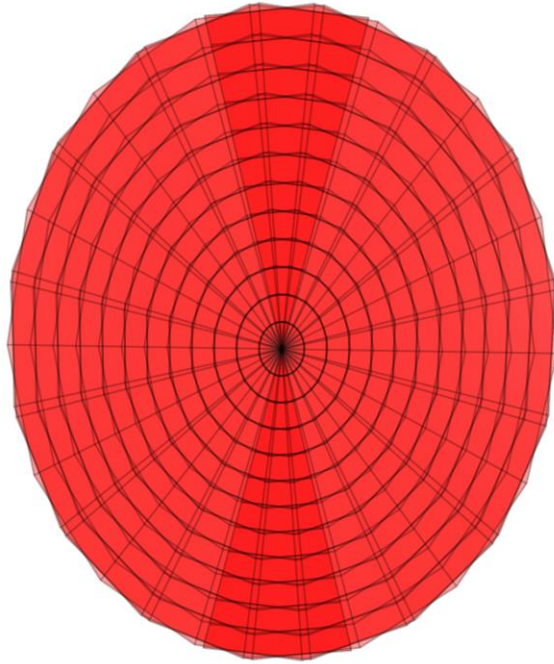
$$[R_2] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) + v \left( \frac{1}{2} \sin s, \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$$

$$[R_3] = [\bar{C}] = \left( 0, \frac{2\sqrt{3}d}{c-s}, 0 \right) + v \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

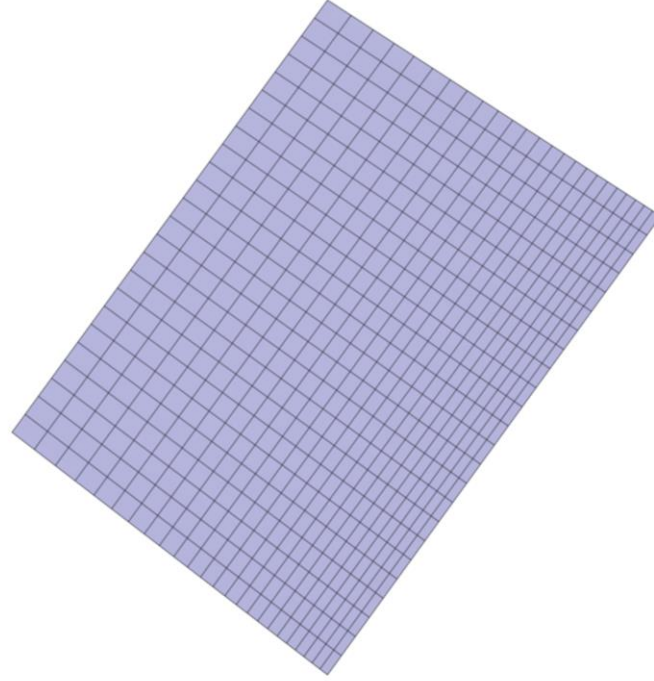
elde edilir. Burada  $-5 \leq v \leq 5$ ,  $c = d = 10$  alındığında Şekil 4.1., Şekil 4.2., ve Şekil 4.3. elde edilir



Şekil 4. 1  $[R_1]$  regle yüzeyi



Şekil 4. 2  $[R_2]$  regle yüzeyi



Şekil 4. 3  $[R_3] = [\bar{C}]$  regle yüzeyi

## 4.2. Blaschke Vektörler Tarafından Oluşturulan Dual İvolüt Regle Yüzeyin İnvaryantları

$\vec{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin birim teğet vektörü  $\vec{t}(s)$  ve vektörel momenti

$\vec{t}^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{t}(s)$  dir.

$\vec{T}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s)$  dual vektörü birim dual küre üzerinde bir dual eğri çizer. Bu eğrinin Blaschke vektörleri sırasıyla,

$$\vec{A}_1 = \vec{a}_1(s) + \varepsilon \vec{a}_1^*(s) = \vec{T}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s)$$

$$\vec{A}_2 = \vec{a}_2(s) + \varepsilon \vec{a}_2^*(s) = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}(s) = \vec{n}(s) + \varepsilon n^*(s)$$

$$\vec{A}_3 = \vec{a}_3(s) + \varepsilon \vec{a}_3^*(s) = \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2 = \vec{b}(s) + \varepsilon \vec{b}^*(s)$$

dir

**Tanım 4.2.1.**

$\tilde{\alpha}: I \rightarrow ID^3$  ve  $\tilde{\beta}: I \rightarrow ID^3$  birim hızlı dual Blaschke eğriler olsun. Eğer  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin teğeti ile  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin teğeti ortogonal ise,  $\tilde{\beta}$  dual eğrisi  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin involütü veya  $\tilde{\alpha}$  dual eğrisi  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin evolütüdür.

$\tilde{\alpha}$  dual eğrisinin teğeti  $\vec{A}_1$ ,  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin Blaschke vektörleri  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$  olmak üzere,  $\tilde{\beta}$  dual eğrisinin teğetini de  $\vec{A}_1$  olarak belirtirsek, Tanım 4.2.1. den

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_1 \rangle = 0 \text{ olur.}$$

$\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$  Blaschke vektörlerinin invaryantlarını hesaplanabilir. Bunun için önce şu ön hazırlıkları yapalım.

$$\vec{t}^* = \tilde{\alpha} \wedge \vec{t} \quad (4.32.)$$

$$\vec{n}^* = \tilde{\alpha} \wedge \vec{n} \quad (4.33.)$$

$$\vec{b}^* = \tilde{\alpha} \wedge \vec{b} \quad (4.34.)$$

$$\begin{aligned} \vec{T} \wedge \vec{T} &= (\vec{t} + \vec{t}^*) \wedge (\vec{t} + \vec{t}^*) \\ &= \vec{t} \wedge \vec{t} + \varepsilon(\vec{t} \wedge \vec{t}^* + \vec{t}^* \wedge \vec{t}) = 0 \\ &\Rightarrow \vec{t} \wedge \vec{t} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{t} \wedge \vec{t}^* + \vec{t}^* \wedge \vec{t} = 0 \end{aligned} \quad (4.35.)$$

$$\begin{aligned} \vec{T} \wedge \vec{N} &= (\vec{t} + \vec{t}^*) \wedge (\vec{n} + \vec{n}^*) \\ &= \vec{t} \wedge \vec{n} + \varepsilon(\vec{t} \wedge \vec{n}^* + \vec{t}^* \wedge \vec{n}) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \\ &\Rightarrow \vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{b} \\ &\Rightarrow \vec{t} \wedge \vec{n}^* + \vec{t}^* \wedge \vec{n} = \vec{b}^* \end{aligned} \quad (4.36.)$$

$$\begin{aligned} \vec{N} \wedge \vec{B} &= (\vec{n} + \vec{n}^*) \wedge (\vec{b} + \vec{b}^*) \\ &= \vec{n} \wedge \vec{b} + \varepsilon(\vec{n} \wedge \vec{b}^* + \vec{n}^* \wedge \vec{b}) = \vec{t} + \varepsilon \vec{t}^* \\ &\Rightarrow \vec{n} \wedge \vec{b} = \vec{t} \\ &\Rightarrow \vec{n} \wedge \vec{b}^* + \vec{n}^* \wedge \vec{b} = \vec{t}^* \end{aligned} \quad (4.37.)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} \wedge \vec{T} &= (\vec{b} + \vec{b}^*) \wedge (\vec{t} + \vec{t}^*) \\ &= \vec{b} \wedge \vec{t} + \varepsilon(\vec{b} \wedge \vec{t}^* + \vec{b}^* \wedge \vec{t}) = \vec{n} + \varepsilon \vec{n}^* \\ &\Rightarrow \vec{b} \wedge \vec{t} = \vec{n} \\ &\Rightarrow \vec{b} \wedge \vec{t}^* + \vec{b}^* \wedge \vec{t} = \vec{n}^* \end{aligned} \quad (4.38.)$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{t} \wedge \vec{t}^*, \vec{t} \rangle &= \langle \vec{t}, \vec{t} \wedge \vec{t}^* \rangle = \langle \vec{t} \wedge \vec{t}, \vec{t}^* \rangle = 0 \\
\langle \vec{t} \wedge \vec{t}^*, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{n}, \vec{t} \wedge \vec{t}^* \rangle = \langle \vec{n} \wedge \vec{t}, \vec{t}^* \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{t}^* \rangle \\
\langle \vec{t} \wedge \vec{n}^*, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{n}, \vec{t} \wedge \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{n} \wedge \vec{t}, \vec{n}^* \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{n}^* \rangle \\
\langle \vec{t} \wedge \vec{t}^*, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{b}, \vec{t} \wedge \vec{t}^* \rangle = \langle \vec{b} \wedge \vec{t}, \vec{t}^* \rangle = \langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle \\
\langle \vec{t} \wedge \vec{n}^*, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{b}, \vec{t} \wedge \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{b} \wedge \vec{t}, \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{n}, \vec{n}^* \rangle = 0 \\
\langle \vec{t} \wedge \vec{b}^*, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{n}, \vec{t} \wedge \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{n} \wedge \vec{t}, \vec{b}^* \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{b}^* \rangle = 0 \\
\langle \vec{t} \wedge \vec{b}^*, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{b}, \vec{t} \wedge \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{b} \wedge \vec{t}, \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle \\
\langle \vec{b} \wedge \vec{n}^*, \vec{t} \rangle &= \langle \vec{t}, \vec{b} \wedge \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{t} \wedge \vec{b}, \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{n}, \vec{n}^* \rangle = 0 \\
\langle \vec{b} \wedge \vec{n}^*, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{n}, \vec{b} \wedge \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{n} \wedge \vec{b}, \vec{n}^* \rangle = \langle \vec{t}, \vec{n}^* \rangle \\
\langle \vec{b} \wedge \vec{b}^*, \vec{t} \rangle &= \langle \vec{t}, \vec{b} \wedge \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{t} \wedge \vec{b}, \vec{b}^* \rangle = -\langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle \\
\langle \vec{b} \wedge \vec{b}^*, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{n}, \vec{b} \wedge \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{n} \wedge \vec{b}, \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle \\
\langle \vec{t}^* \wedge \vec{t}, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{t}^*, \vec{t} \wedge \vec{n} \rangle = \langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle \\
\langle \vec{t}^* \wedge \vec{t}, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{t}^*, \vec{t} \wedge \vec{b} \rangle = -\langle \vec{t}^*, \vec{n} \rangle \\
\langle \vec{b}^* \wedge \vec{b}, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{b}^*, \vec{b} \wedge \vec{n} \rangle = -\langle \vec{b}^*, \vec{t} \rangle \\
\langle \vec{t}^* \wedge \vec{b}, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{t}^*, \vec{b} \wedge \vec{n} \rangle = -\langle \vec{t}^*, \vec{t} \rangle = 0 \\
\langle \vec{t}^* \wedge \vec{b}, \vec{t} \rangle &= \langle \vec{t}^*, \vec{b} \wedge \vec{t} \rangle = \langle \vec{t}^*, \vec{n} \rangle \\
\langle \vec{t}^* \wedge \vec{n}, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{t}^*, \vec{n} \wedge \vec{b} \rangle = \langle \vec{t}^*, \vec{t} \rangle = 0 \\
\langle \vec{t}^* \wedge \vec{n}, \vec{t} \rangle &= \langle \vec{t}^*, \vec{n} \wedge \vec{t} \rangle = -\langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle \tag{4.39.} \\
\vec{t}' &= \kappa \vec{n}^* \tag{4.40.} \\
\vec{n}' &= \vec{b} - \kappa \vec{t}^* + \tau \vec{b}^* \tag{4.41.} \\
\vec{b}' &= -\vec{n} - \tau \vec{n}^* \tag{4.42.} \\
\vec{t}' &= \kappa \vec{n} \tag{4.43.} \\
\vec{n}' &= -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \tag{4.44.} \\
\vec{b}' &= -\tau \vec{n} \tag{4.45.}
\end{aligned}$$

$\vec{\beta}$  eğrisinin üreteç vektörü  $\vec{T} = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s)$  olsun. Teğet vektörü de  $\vec{t}$  ve vektörel momenti  $\vec{t}^*(s) = \vec{a}(s) \wedge \vec{t}(s)$  olmak üzere  $\vec{t} = \vec{n}$  ve  $\vec{t}^* = \vec{\beta} \wedge \vec{t}$  eşitliklerinden  $\vec{\beta}$  eğrisinin Blaschke vektörleri sırasıyla,

$$\vec{A}_1 = \vec{T} = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s) = \vec{a}_1 + \varepsilon \vec{a}_1^*$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} = \vec{n} + \varepsilon \vec{n}^* = \vec{a}_2 + \varepsilon \vec{a}_2^*$$

$$\vec{A}_3 = \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2 = \vec{a}_3 + \varepsilon \vec{a}_3^*$$

dır.  $\vec{\alpha}$  dual eğrisinin involüt eğrisi  $\vec{\beta}$  olmak üzere (3.35.) den,

$\vec{\beta} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{t}(s)$ ,  $\lambda = c - s + \varepsilon d$  yazılır. Türevi alındığında (4.43.) denkleminde,

$\vec{\beta}' = \lambda \kappa \vec{n}$  elde edilir ve

$$\|\vec{\beta}'\| = \lambda \kappa$$

dir.

$$\begin{aligned} \vec{t}^* &= \vec{\beta} \wedge \vec{t} \\ &= (\vec{\alpha} + \lambda \vec{t}) \wedge \vec{n} \\ &= \vec{n}^* + \lambda \vec{b} \end{aligned}$$

$$\vec{A}_1 = \vec{T} = \vec{n} + \varepsilon(\vec{n}^* + \lambda \vec{b})$$

Denklem (4.41.), (4.44.) ve (4.45.) den yaralanarak  $\vec{A}_1$  in türevi hesaplanır.

$$\vec{A}_1' = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} + \varepsilon(-\kappa \vec{t}^* + \tau \vec{b}^* - \tau \vec{n}(c - s)) \quad (4.46.)$$

$\vec{A}_1'$  türevinin normu ise

$$\|\vec{A}_1'\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad (4.47.)$$

olarak bulunur.  $\vec{A}_1'$  nün türevini bulurken (4.40.), (4.42.), (4.43.), (4.44.) ve (4.45) denklemlerinden yararlanır.

$$\begin{aligned} \vec{A}_1'' &= -\kappa' \vec{t} - \kappa^2 \vec{n} + \tau' \vec{b} - \tau^2 \vec{n} \\ &\quad + \varepsilon(\tau \kappa(c - s) \vec{t} - \tau'(c - s) \vec{n} - \tau^2(c - s) \vec{b} - \kappa' \vec{t}^* + (-\kappa^2 - \tau^2) \vec{n}^* + \tau' \vec{b}^*) \end{aligned} \quad (4.48.)$$

$\vec{A}_1''$  nün türevini hesaplamak için ise (4.40.), (4.41.), (4.42.), (4.43.), (4.44.) ve (4.45) denklemlerinden yararlanır.

$$\begin{aligned} \vec{A}_1''' &= (-\kappa'' + \kappa^3 + \kappa \tau^2) \vec{t} + (-3\kappa' \kappa - 3\tau' \tau) \vec{n} + (-\kappa^2 \tau + \tau'' - \tau^3) \vec{b} \\ &\quad + \varepsilon[(\tau \tau' \kappa(c - s) + \kappa' \tau(c - s) - \kappa \tau) \vec{t} + (c - s)(-\tau'' + \tau^3 + \tau \kappa^2) \vec{n} \\ &\quad + (-\kappa^2 - \tau \tau'(c - s)) \vec{b} + (-\kappa'' + \kappa^3 + \kappa \tau^2) \vec{t}^* \\ &\quad + (-3\kappa' \kappa - 3\tau' \tau) \vec{n}^* + (-\kappa^2 \tau + \tau'' - \tau^3) \vec{b}^*] \end{aligned} \quad (4.49.)$$

O halde  $\vec{A}_2$  vektöründeki (4.42.) ve (4.43.) denklemlerindeki eşitliklerini yerine yazarsak

$$\vec{A}_2 = \frac{-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b} + \varepsilon(-\kappa\vec{t}^* + \tau\vec{b}^* - \tau\vec{n}(c-s))}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \quad (4.50.)$$

elde edilir. (3.49.) denklemindeki eşitlikleri kullandığımızda ise ,

$$\vec{A}_2 = -\cos\bar{\Phi}\vec{t} + \sin\bar{\Phi}\vec{b} + \varepsilon(-\cos\bar{\Phi}\vec{t}^* + \sin\bar{\Phi}\vec{b}^* - \sin\bar{\Phi}\vec{n}(c-s))$$

bulunur.

$\vec{A}_3$  denkleminde ise  $\vec{A}_1 = \vec{n} + \varepsilon(\vec{n}^* + \lambda\vec{b})$  ve (4.50.) denklemindeki  $\vec{A}_2$  vektörünün eşitliği yerine yazılıp vektörel çarpımlarını incelediğimizde (4.35.), (4.36.), (4.37.) ve (4.38.) denklemlerini kullanarak

$$\vec{A}_3 = \frac{\kappa\vec{b} + \tau\vec{t} + \varepsilon(-\kappa\vec{n}\lambda)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \quad (4.51.)$$

buluruz. (3.49.) denklemindeki eşitlikleri kullandığımızda ise,

$$\vec{A}_3 = \cos\bar{\Phi}\vec{b} + \sin\bar{\Phi}\vec{t} + \varepsilon(-\cos\bar{\Phi}\vec{n}\lambda), \lambda = c - s + \varepsilon d$$

elde edilir.

Dual involüt Blaschke eğrilikleri sırasıyla  $\bar{P}$  ve  $\bar{Q}$  olmak üzere;  $\bar{P}$  eğrisi için (4.47.) denklemindeki eşitlik yazıldığında

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \|\vec{A}_1'\| \\ &= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\ &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} + \varepsilon \frac{k_1 k_1^* + k_2 k_2^*}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\ &= \bar{p} + \varepsilon \bar{p}^* \end{aligned} \quad (4.52.)$$

dir ve  $\bar{Q}$  eğrisini hesaplamak için ise (4.46.), (4.47.), (4.48.), (4.49) denklemleri yerine yazıldıktan sonra determinantını hesaplamak için de (4.35.), (4.36.), (4.37.), (4.38.), (4.39.) denklemlerindeki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{\det(\vec{A}_1', \vec{A}_1'', \vec{A}_1''')}{\|\vec{A}_1'\|^2} \\ &= 0 + \varepsilon \left[ -\kappa(\kappa^2 + \tau^2) + \kappa'\tau(c-s)(\tau - \kappa) + \frac{\tau\kappa''(c-s)(\tau' + \kappa')}{\kappa^2 + \tau^2} \right] \\ &= \bar{q} + \varepsilon \bar{q}^*, \quad (\bar{q} = 0) \end{aligned} \quad (4.53.)$$

bulunur. O halde  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$  Blaschke vektörlerinin invaryantları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$L_{\vec{A}_1} = \oint \left[ -\kappa(\kappa^2 + \tau^2) + \kappa'\tau(c-s)(\tau - \kappa) + \frac{\tau\kappa''(c-s)(\tau' + \kappa')}{\kappa^2 + \tau^2} \right] ds$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\bar{A}_1} &= -\oint \bar{Q} ds = -\varepsilon L_{\bar{A}_1} \\ P_{\bar{A}_1} &= \frac{\bar{p}^*}{\bar{p}} = \frac{k_1 k_1^* + k_2 k_2^*}{k_1^2 + k_2^2}\end{aligned}\quad (4.54.)$$

$$\begin{aligned}L_{\bar{A}_2} &= \Lambda_{\bar{A}_2} = 0 \\ P_{\bar{A}_2} &= \frac{\bar{p}\bar{p}^* + \bar{q}\bar{q}^*}{\bar{p}^2 + \bar{q}^2} = \frac{k_1 k_1^* + k_2 k_2^*}{k_1^2 + k_2^2}\end{aligned}\quad (4.55.)$$

$$L_{\bar{A}_3} = \oint \bar{p}^* ds = \oint \sqrt{k_1^2 + k_2^2} ds$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\bar{A}_3} &= -\oint \bar{P} ds = -\oint \sqrt{k_1^2 + k_2^2} + \varepsilon \frac{k_1 k_1^* + k_2 k_2^*}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} ds \\ P_{\bar{A}_3} &= \frac{\bar{q}^*}{\bar{q}}\end{aligned}\quad (4.56.)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**Sonuç 4.2.1.**

$(\bar{A}_1)$ ,  $(\bar{A}_2)$  nin oluşturdukları regle yüzeylerinin drali (4.54.) ve (4.55.) denklemleriyle verilir.

**Sonuç 4.2.2.**

$(\bar{A}_1)$ ,  $(\bar{A}_2)$  regle yüzeylerinin açılabilir olması için yeter şart  $k_1 \neq 0$  veya  $k_2 \neq 0$  olmak üzere,

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{k_1^*}{k_2^*} \text{ eşitliğinin sağlanmasıdır.}$$

**Sonuç 4.2.3.**

$(\bar{A}_1)$ ,  $(\bar{A}_2)$  nin oluşturdukları regle yüzeylerinin dralleri  $P_{\bar{A}_1} = P_{\bar{A}_2}$  olur.

**Sonuç 4.2.4.**

$(\bar{A}_3)$  nin oluşturduğu regle yüzeyin drali (4.56.) denklemi ile verilir. Regle yüzeyinin drali (4.53.) denkleminde  $\bar{q} = 0$  olduğundan tanımsızdır.

## 5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bir dual eğrinin dual involütünün  $\bar{C}$  sabit pol eğrisi tarafından üretilen  $[\bar{C}]$  kapalı regle yüzeyinin integral invaryantları araştırılmıştır. Ayrıca involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve sabit pol eğrisi tarafından üretilen  $[R_1], [R_2], [R_3]$  ve  $[\bar{C}]$  kapalı regle yüzeyleri tarafından sınırlandırılan dual küresel alanlar hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar bir örnekle resmedilmiştir. Son olarak bir dual eğrinin dual involüt Blaschke vektörleri tarafından üretilen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları hesaplanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Benzer çalışma alternatif çatılar kullanılarak da yapılabilir.

## KAYNAKLAR

- Bilici, M. (2017). ON THE INVARIANTS OF RULED SURFACES GENERATED BY THE DUAL INVOLUTE FRENET TRIHEDRON. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, 66(2).
- Blaschke, W. (1949). Diferensiyel Geometri Dersleri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, No:433, İstanbul, 399.
- Clifford, W. K. (1873). Preliminary sketch of biquaternions. *Proc. Gondon Math. Soc.* 4, 381–395.
- Fenchel, W., (1951). On The Differential Geometry of Closed Space Curves, *Bull. Amer. Math. Soc.* 57, 44-54.
- Guggenheimer, H., (1963). *Differential Geometry*, Mc Graw-Hill Book Com. New York., pp:162-168.
- Gürsoy, O., (1990). On the integral invariants of a closed ruled surface, *Journal of Geometry*, 25(2), 131-140.
- Gürsoy, O., (1992) Some results on closed ruled surfaces and closed space curves, *Mech. and Mach. Theory*.27(3), 323-330.
- Hacısalıhoğlu, H.H., (1983a). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2, 338, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., (1983b). Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen -Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2., 895, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., (1972). On the Pitch of a Closed Ruled Surface, *Mechanism and Machine Theory*, Vol.7, pp.291-305.
- Müller, H.R., (1983). Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2, Ankara.
- Sarıoğlugil, A., Şenyurt, S., Kuruoğlu, N., (2011). On the integral invariants of the closed ruled surfaces generated by a parallel p-äquidistante dual centrode curves in the line space, *Hadronic Journal* 34 (3), 34-47.
- Study, E., (1903). *Geometrie der Dynamen*. Verlag Teubner, Leibzig.
- Şenyurt, S. (1994). Dual Regle Yüzeyler. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 81, Samsun.
- Şenyurt, S., Bilici, M., & Caliskan, M. (2015). Some characterizations for the involute curves in dual space. *International J. Math. Combin.* Vol.1,113-125.
- Veldkamp, G. R., (1976). On the use of dual numbers, vectors, and matrices in instantaneous, spatial kinematics. *Mech. and Mach. Theory.* 11, 141.156.
- Saracoglu, S., Yayli, Y. 2012. Ruled Surfaces and Dual Spherical Curves. *Acta Universitatis Apulensis.* 30: 337-354.

## ÖZ GEÇMİŞ



Selma PALAVAR, 21.12.1991 tarihinde Ordu'da doğdu. Ordu Lisesi'ni bitirdikten sonra Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2015 yılında mezun oldu. ADÜ Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimi'ni 2015 yılında aldı. 2016-2017 Eğitim öğretim yılında Ordu Uğur Fen ve Anadolu Lisesi'nde çalıştı. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği'nden 2019 yılında mezun oldu. İlköğretim Matematik Öğretmeni olarak 2020 yılında MEB İstanbul/Sultangazi Şehit Hikmet Baysal Ortaokulu'na atandı ve halen çalışmaktadır. 2021 yılında OMÜ LEE Matematik Ana Bilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programını bitirdi. Temel ilgi alanları, matematik, tarih, kitap okumak, seyahat etmek ve zeka oyunlarıdır.

### İletişim Bilgileri:

E-mail: [selmapalavar52@gmail.com](mailto:selmapalavar52@gmail.com)

Telefon: 05433550804

ORCID ID: 0000-0003-2385-7173

### Yayınlar

Palavar S., Bilici M. (2019). Dual Uzayda İnvolut Eğrisinin Sabit Pol Eğrisi Tarafından Üretilen Regle Yüzeyin İnvaryantları Üzerine, 32. Ulusal Matematik Sempozyumu Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 31 Ağustos-3 Eylül, Samsun.