

$A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ Uzayı Üzerinde Öteleme Operatörünü İçeren Fonksiyonların Sürekliliği ÜzerineNilay DEĞİRMEN^{1*}, İbrahim DEĞİRMEN²¹ Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun.² Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.Sorumlu Yazar e-posta: ¹nilay.sager@omu.edu.tr, ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8192-8473>²ibrahimdgrmn01@gmail.com, ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5669-1881>

Geliş Tarihi: 29.01.2021

Kabul Tarihi: 10.05.2021

Öz

G ünimodüler yerel kompakt grup ve $p = \min\{p_1, p_2\}$ olmak üzere $w \in B_p$ olsun. Bu makalede, ilk olarak, $W \in \Delta_2(G)$ şartını sağlayan ve $L^1(G)$ uzayına ait olan ya da olmayan her w ağırlığı için $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayında $\|\cdot\|$ normuna göre her yerde yoğun olan bir küme bulunabildiği ve bu kümelerdeki herhangi bir h elemanı için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğu ispatlanmıştır. Burada, G üzerinde tanımlı basit fonksiyonların kümesi ve bu kümenin sonlu ölçümlü bir kümede desteğe sahip bir alt kümesi kullanılır. Ayrıca bu iki sonuç yardımıyla her $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ ve G grubundan $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesine tanımlı $s \rightarrow \|L_s h\|$ fonksiyonlarının sürekli olduğu elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler

Yoğunluk;
Süreklilik;
Ağırlıklı Lorentz uzayı;
Girişim operatörü;
Tensör çarpımı

On Continuity of Functions Involving the Translation Operator on the Space $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$

Abstract

Let G be a unimodular locally compact group and $w \in B_p$ where $p = \min\{p_1, p_2\}$. In this paper, it has been proved that for every weight w that satisfies the condition $W \in \Delta_2(G)$ and belongs to the space $L^1(G)$ or not, there can be a dense set everywhere in the space $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ with respect to the norm $\|\cdot\|$ and for any element h in these sets the function $s \rightarrow L_s h$ from the group G to the space $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ is continuous. Here, the set of simple functions in G and a subset of this set with support in a set of finite measure is used. Also, by using these two results, it has been obtained that for any $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ the mapping $s \rightarrow L_s h$ from G to $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ and the mapping $s \rightarrow \|L_s h\|$ from G to $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ are continuous.

Keywords

Density;
Continuity;
Weighted Lorentz space;
Convolution operator;
Tensor product

1. Giriş

Avcı ve Gürkanlı (2007), Yap (1969) tarafından tanımlanan Lorentz uzaylarını kullanarak G yerel kompakt Abel grup, $1 < p_1, p_2 < \infty$ ve $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ olmak üzere bir $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G)$ uzayı ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlamıştır. Ayrıca yine Avcı ve Gürkanlı (2007) aynı çalışmada, $L(p, q)(G)$ Lorentz uzayında yoğun olan bir küme kullanılarak elde edilen ve $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G)$ uzayında yoğun olan bir kümenin bulunabileceğini ifade etmiş ve bu kümedeki herhangi bir h elemanı için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermiştir.

Li ve Sun (2012), Carro vd. (2007) tarafından tanımlanan ağırlıklı Lorentz uzaylarını ele alarak G ünimodüler yerel kompakt grup, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ ve $W \in \Delta_2(G)$ olmak üzere $L^1(G)$ uzayına ait olan ya da olmayan her w ağırlığı için $\Lambda_G^{p, q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayında yoğun olan kümelerin varlığını ispatlamış ve bunun sonucunda da her $f \in \Lambda_G^{p, q}(w)$ için G grubundan $\Lambda_G^{p, q}(w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow f_s$ fonksiyonunun sürekli olduğunu elde etmiştir. Li ve Sun (2012) aynı çalışmada, ağırlıklı Lorentz uzaylarını kullanarak G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere bazı özel w ağırlıkları için bir $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayı tanımlamış ve birkaç özelliğini incelemiştir. Ancak her yerde yoğun kümenin varlığı ve süreklilik problemlerini incelememiştir.

Buradan yola çıkarak, bu çalışmada, Avcı ve Gürkanlı (2007) nın kullandığı yöntemlerle G ünimodüler yerel kompakt grup, $p = \min\{p_1, p_2\}$ ve $w \in B_p$ olmak üzere Li ve Sun (2012) tarafından tanımlanan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayının yukarıda bahsedilen yoğunluk ve süreklilik problemlerinin ele alınması amaçlanmaktadır.

2. Materyal ve Metot

Tanım 2.1 X, Y ve Z aynı F cismi üzerinde üç normlu lineer uzay olsun. Bir $\phi: X \times Y \rightarrow Z$ dönüşümü verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlarsa ϕ dönüşümüne bilineer dönüşüm denir.

i) Her $y \in Y$ için $x \rightarrow \phi(x, y)$ dönüşümü lineerdir.

ii) Her $x \in X$ için $y \rightarrow \phi(x, y)$ dönüşümü lineerdir.

Eğer her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $\|\phi(x, y)\| \leq M \|x\| \|y\|$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa ϕ bilineer dönüşümüne sınırlıdır denir. ϕ dönüşümünün normu;

$$\|\phi\| = \sup \{ \|\phi(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \}$$

ile tanımlanır (Bonsall and Duncan 1973).

Tanım 2.2 X ve Y, F cismi üzerinde iki normlu uzay, X' ve Y' de sırasıyla X ve Y nin dual uzayları olsun. $X' \times Y'$ uzayından F cisminde tanımlı bütün sınırlı, bilineer dönüşümlerin Banach uzayını $BL(X', Y'; F)$ ile gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ ve $y \in Y$ verilsin. $x \otimes y$, $BL(X', Y'; F)$ nin $f \in X'$ ve $g \in Y'$ olmak üzere $(x \otimes y)(f, g) = f(x).g(y)$ ile tanımlı elemanı olsun. $\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$ kümesinin $BL(X', Y'; F)$ uzayında gerdiği uzaya X ve Y nin cebirsel tensör çarpımı denir ve $X \otimes Y$ ile gösterilir (Bonsall and Duncan 1973).

Teorem 2.3 Bir $\phi: X \times Y \rightarrow Z$ bilineer dönüşümü verildiğinde her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $\sigma(x \otimes y) = \phi(x, y)$ olacak şekilde bir tek $\sigma: X \otimes Y \rightarrow Z$ lineer dönüşümü vardır (Bonsall and Duncan 1973).

Tanım 2.4 X ve Y iki normlu uzay olsun. $X \otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı üzerinde γ projektif tensör normu; $\gamma(u) = \inf \left\{ \sum_i \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_i (x_i \otimes y_i) \right\}$

ile tanımlanır. Burada infimum u nun tüm sonlu gösterimleri üzerinden alınır. $X \otimes Y$ uzayının γ normuna göre tamlamasına X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımı denir ve $X \otimes_\gamma Y$ ile gösterilir. Projektif tensör çarpım uzayının her u

elemanı $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$ olmak üzere

$u = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i \otimes y_i)$ şeklindedir (Bonsall and Duncan 1973).

Tanım 2.5 $(X, \mu), (\bar{X}, \bar{\mu})$ ve (Y, \mathcal{G}) üç ölçüm uzayı olsun. Bir T operatörü X ve \bar{X} üzerinde tanımlı basit fonksiyon çiftlerini Y üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlara dönüştürsün. Eğer f, f_1, f_2 ve g, g_1, g_2 basit fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu T operatörüne pozitif girişim operatörü denir (Yap 1969).

- i) $\|T(f, g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
- ii) $\|T(f, g)\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty}$
- iii) $\|T(f, g)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_1$
- iv) $T(f_1 + f_2, g) = T(f_1, g) + T(f_2, g)$
- v) $T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2)$.

Tanım 2.6 (X, μ) bir ölçüm uzayı ve $\mathcal{M}(X, \mu)$, X üzerinde hemen hemen her yerde sonlu olan ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olsun. $f \in \mathcal{M}(X, \mu), 0 < \lambda < \infty$ için

$$\mu_f(\lambda) = \mu(x \in X : |f(x)| > \lambda)$$

f fonksiyonunun dağılım (veya distribüsyon) fonksiyonu olmak üzere $0 < t < \infty$ için

$$f^*(t) = \inf \{ \lambda : \mu_f(\lambda) \leq t \} = \sup \{ \lambda : \mu_f(\lambda) > t \}$$

eşitliği ile tanımlı f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun rearrangementi, $0 < t < \infty$ için

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

ile tanımlı f^{**} fonksiyonuna da f fonksiyonunun ortalama (averaj) fonksiyonu denir. μ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonları pozitif tanımlı, artmayan, sağdan sürekli fonksiyonlardır.

$0 < p, q < \infty$ olduğunu kabul edelim. $L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı,

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)} = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{1/p} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

olacak şekildeki tüm $f \in \mathcal{M}(X, \mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. $0 < p \leq \infty$ için $L^{p,\infty}(X)$ uzayı ise,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < \infty$$

olacak şekildeki tüm $f \in \mathcal{M}(X, \mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır (Hunt 1966).

$L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı üzerinde

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)}^* = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^{\infty} \left(t^{1/p} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{L^{p,q}(X)}^*$ fonksiyonu bir normdur. Ayrıca $L^1(X)$ ve $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ için $L^{p,q}(X)$ uzayı $\|\cdot\|_{L^{p,q}(X)}^*$ normuna göre bir Banach uzayıdır (Hunt 1966).

Üstelik $1 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ için $C(p, q)$, p ve q ya bağlı bir sabit olmak üzere $\|f\|_{L^{p,q}(X)} \leq \|f\|_{L^{p,q}(X)}^* \leq C(p, q) \|f\|_{L^{p,q}(X)}$ eşitsizliği gerçekleşir (Yap 1969).

Tanım 2.7 \mathbb{R}^+ üzerinde tanımlı negatif olmayan yerel integrallenebilir fonksiyona, yani hemen hemen her yerde $(0, \infty)$ da değerler alan fonksiyona \mathbb{R}^+ da bir ağırlık fonksiyonu denir ve w ile gösterilir (Carro et al. 2007).

$(X, \mu) = (\mathbb{R}^+, w(t)dt)$ alırsak; $0 \leq \lambda < \infty$ için

$$\begin{aligned} \mu_f(\lambda) &= \mu(x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda) \\ &= w(x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda) \\ &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda\}} w(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

ve $0 < t < \infty$ için $f^*(t) = \inf \{ \lambda : \mu_f(\lambda) \leq t \}$ olur. Böylece $L^{p,q}(X, \mu) = L^{p,q}(R^+, w(t) dt)$ uzayı elde edilir ve bu uzay $L^{p,q}(w)$ ile gösterilir. $0 < p, q < \infty$ veya $0 < p \leq \infty, q = \infty$ için $\Lambda_X^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayı Carro vd. (2007) tarafından $\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = \|f^*\|_{L^{p,q}(w)}$ olmak üzere

$$\Lambda_X^{p,q}(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mu) : \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. $p = q$ olması durumunda

$$\Lambda_X^{p,p}(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mu) : \|f\|_{\Lambda_X^{p,p}(w)} < \infty \right\}$$

uzayı elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \|f^*\|_{L^p(R^+, w)} &= \left[\int_{R^+} |f^*(t)|^p (w(t))^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\neq \left[\int_X |f(x)|^p (w(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{L^p(X, w)} \end{aligned}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,p}(w) \neq L^p(X, w)$ dir. $\Lambda_X^{p,p}(w)$ uzayı $\Lambda_X^p(w)$ ile gösterilir. $w = 1$ olması durumunda

$$\Lambda_X^{p,q}(1) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mu) : \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(1)} < \infty \right\} \quad \text{ve}$$

$\mu_{f^*} = \mu_f$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \|f^*\|_{L^{p,q}(\square^+, 1)} &= \|f^*\|_{L^{p,q}(\square^+, \mu)} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f^*)^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{L^{p,q}(X)} \end{aligned}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,q}(1) = L^{p,q}(X)$ dir (Carro et al. 2007).

$\Lambda_X^{p,q}(w)$ uzayının dualini ifade etmek için Lorentz uzaylarının başka bir çeşidi olan Γ tanımlanmıştır.

Tanım 2.8 A operatörü; $f \in \mathcal{M}^+(0, \infty)$ ve $t > 0$ olmak üzere $Af(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds$ ile tanımlı Hardy

operatörü olsun. $\Gamma_X^p(w)$ uzayı $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)} = \left(\int_0^\infty (f^{**}(t))^p w(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ olmak üzere}$$

$$\Gamma_X^p(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mu) : \|f\|_{\Gamma_X^p(w)} < \infty \right\}$$

ile ve $\Gamma_X^{p,q}(w)$ uzayı $0 < p, q < \infty$ için

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds \text{ olmak üzere}$$

$$\Gamma_X^{p,q}(w) = \Gamma_X^q \left(W^{\frac{q-1}{p}} w \right)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Gamma_X^{p,q}(w)} &= \|f\|_{\Gamma_X^q \left(W^{\frac{q-1}{p}} w \right)} \\ &= \left(\int_0^\infty (f^{**}(t))^q W^{\frac{q-1}{p}}(t) w(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

dur (Carro et al. 2007).

Tanım 2.9 $0 < p < \infty$, L_{dec}^p ; L^p de negatif olmayan artmayan fonksiyonların sınıfı olmak üzere $A : L_{dec}^p(w) \rightarrow L^p(w)$ Hardy operatörü sınırlı ise $w \in B_p$ ile gösterilir (Carro et al. 2007).

Arino ve Muckenhoupt (1990) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $w \in B_p$ olması için gerekli ve yeterli şartın $\int_t^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx \leq \frac{c}{t^p} \int_0^t w(x) dx$ eşitsizliğinin sağlanması olduğunu göstermiştir.

Örnek 2.10 $w(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ile tanımlı w ağırlık fonksiyonu B_2 sınıfına aittir.

Tanım 2.11 $W(t) = \int_0^t w(s) ds$ olmak üzere

$\mu(A \cup B) > 0$ olan her ölçülebilir $A, B \subset X$ küme

ikilisi için

$$0 < W(\mu(A \cup B)) \leq C(W(\mu(A)) + W(\mu(B)))$$

eşitsizliği sağlanırsa $W \in \Delta_2(X)$ yazılır. Buna denk koşul; her t için $W(2t) \leq K.W(t)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Carro et al. 2007).

Örnek 2.12 $p \geq 1$ olmak üzere $w(t) = p.t^{p-1}$ için $W(t) = t^p$ fonksiyonu $\Delta_2(X)$ sınıfına aittir.

Tanım 2.13 G bir yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif, regüler μ Borel ölçümüne sol (sağ) Haar ölçümü denir.

- i) Her $E \subset G$ kompakt kümesi için $\mu(E) < \infty$ dir.
- ii) Her $E \subset G$ Borel kümesi ve her $x \in G$ için $\mu(xE) = \mu(E)$ ($\mu(Ex) = \mu(E)$) dir (Folland 1995).

Her yerel kompakt grup bir sol Haar ölçümüne sahiptir (Folland 1995).

Tanım 2.14 G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde tanımlı sol Haar ölçümü olsun. Eğer μ sol Haar ölçümü aynı zamanda sağ Haar ölçümü ise G grubuna ünimodüler grup denir (Folland 1995). G değişmeli, diskret veya kompakt bir grup ise ünimodülerdir (Folland 1995).

Tanım 2.15 (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı ve $A \in \Sigma$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa A kümesine bir atom denir.

- i) $\mu(A) > 0$ dir.
- ii) $B \subset A$ olan herhangi bir $B \in \Sigma$ için $\mu(B) = 0$ veya $\mu(A) = \mu(B)$ dir.

Eğer pozitif ölçümlü her ölçülebilir küme bir atom içerirse μ ölçümüne atomik ölçüm, μ için Σ de hiçbir atom bulunamıyorsa μ ölçümüne atomik olmayan ölçüm denir. μ atomik bir ölçüm ise

(X, Σ, μ) ölçüm uzayına atomik ölçüm uzayı, μ atomik olmayan bir ölçüm ise (X, Σ, μ) ölçüm uzayına atomik olmayan ölçüm uzayı denir (Halmos 1974).

Örnek 2.16 μ sayma ölçümü olmak üzere $(N, \wp(N), \mu)$ ölçüm uzayı atomik ölçüm uzayı ve Σ Borel cebiri, η de Lebesgue ölçümü olmak üzere (R, Σ, η) ölçüm uzayı atomik olmayan ölçüm uzayıdır.

Tanım 2.17 (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere her $n \in N$ için $\mu(E_n) < \infty$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ olacak şekilde bir $(E_n) \subset \Sigma$ küme dizisi varsa (X, Σ, μ) uzayına σ -sonlu ölçüm uzayı denir (Halmos 1974).

Lemma 2.18, Lemma 2.19, Önerme 2.20, Lemma 2.21 da G bir yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve $(G, \lambda), \sigma$ -sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı olarak alınacaktır.

Lemma 2.18 G bir ünimodüler yerel kompakt grup, T bir girişim operatörü, $0 < p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$, c bir sabit olmak üzere $w \geq c > 0$, $p = \min\{p_1, p_2\}$ olmak üzere $w \in B_p$ ve $f \in \Lambda^{p_1, q_1}(w)$, $g \in \Lambda^{p_2, q_2}(w)$ için $k = T(f, g) = f * g$ olsun. O halde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{r}$, $s \geq 1$ ve $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$ olmak üzere $k \in \Lambda^{r, s}(w)$ ve $\|k\|_{\Lambda^{r, s}(w)} \leq C \cdot \|f\|_{\Lambda^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda^{p_2, q_2}(w)}$ dir (Li and Sun 2012).

Lemma 2.19 $0 < p, q < \infty$ ve $W \in \Delta_2(G)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Eğer $w \in L^1(G)$ ise G deki basit fonksiyonlar kümesi S , $\Lambda_G^{p, q}(w)$ da yoğunudur.
- ii) Eğer $w \notin L^1(G)$ ise S nin sonlu ölçümlü bir kümede desteğe sahip olan S_0 alt

kümesi $\Lambda_G^{p, q}(w)$ da yoğundur (Li and Sun 2012).

Önerme 2.20 $0 < p, q < \infty$ olmak üzere her $f \in \Lambda_G^{p, q}(w)$ ve her $s \in G$ için $L_s f \in \Lambda_G^{p, q}(w)$, $R_s f \in \Lambda_G^{p, q}(w)$ dir. Dolayısıyla $\Lambda_G^{p, q}(w)$ uzayı ötelemeler altında invarianttir (Li and Sun 2012).

Lemma 2.21 $0 < p, q < \infty$ olmak üzere her $f \in \Lambda_G^{p, q}(w)$ için $G \rightarrow \Lambda_G^{p, q}(w), s \rightarrow L_s f$ dönüşümü süreklidir (Li and Sun 2012).

Bu kesimin devamında ve bulgular bölümünde G bir ünimodüler yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve $(G, \lambda), \sigma$ -sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı,

$$1 < p_1, p_2 < \infty, 1 \leq q_1, q_2 < \infty, \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{r}, r > 0, \\ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}, s \geq 1,$$

$c > 0$ olmak üzere $w \geq c > 0$, $p = \min\{p_1, p_2\}$ olmak üzere $w \in B_p$ olsun.

$\tilde{f}(x) = f(-x)$ olmak üzere her $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) = \mu_{\tilde{f}}(\lambda)$ olduğundan $\|f^*\|_{L^{p, q}(w)} = \|(\tilde{f})^*\|_{L^{p, q}(w)}$ ve dolayısıyla $\|f\|_{\Lambda_G^{p, q}(w)} = \|\tilde{f}\|_{\Lambda_G^{p, q}(w)}$ dir. Yani $f \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ iken $\tilde{f} \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ olur. Böylece Lemma 2.18 gereği her $f \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ için

$$\|T(\tilde{f}, g)\|_{\Lambda_G^{r, s}(w)} \leq C \cdot \|\tilde{f}\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \\ = C \cdot \|f\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}$$

eşitsizliği yazılır. O halde $\Lambda_G^{p_1, q_1}(w) \times \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r, s}(w)$ uzayına bir k bilineer dönüşümünü $f \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ olmak üzere $k(f, g) = \tilde{f} * g$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu

k dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca $\|f\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \leq 1, \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \leq 1$ olan her $f \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ için

$$\|k\| = \sup \left\{ \frac{\|k(f, g)\|_{\Lambda_G^{r, s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}} \right\} \\ = \sup \left\{ \frac{\|\tilde{f} * g\|_{\Lambda_G^{r, s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}} \right\} \\ \leq \sup \left\{ \frac{C \cdot \|f\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}} \right\} = C$$

olduğundan k dönüşümü sınırlıdır. O halde Teorem 2.3 gereği bu sınırlı k bilineer dönüşümüne her $f \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ için $K(f \otimes g) = \tilde{f} * g$ olacak şekilde $\Lambda_G^{p_1, q_1}(w) \otimes_\gamma \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r, s}(w)$ uzayına tanımlı bir tek K lineer dönüşümü karşılık gelir. Yine $\|K\| \leq C$ olup K dönüşümü de sınırlıdır (Li and Sun 2012).

Tanım 2.22 K lineer dönüşümü altında $\Lambda_G^{p_1, q_1}(w) \otimes_\gamma \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ uzayının görüntüsünü $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ ile gösterelim. Böylece

$$A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w) = \left\{ \begin{array}{l} h = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{f}_i * g_i): \\ f_i \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g_i \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w), \\ K \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{f}_i \otimes g_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{f}_i * g_i), \\ \sum_{i=1}^{\infty} (\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}) < \infty \end{array} \right\}$$

olur. Her $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ için $f_i \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g_i \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ ve $h = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{f}_i * g_i)$ olmak üzere

$$\|h\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right\}$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu bir normdur. Böylece $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayı bir normlu uzay olur (Li and Sun 2012).

Sonuç 2.23 Her $s \in G$ ve her $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ için $\|L_s h\| \leq c \|h\|$ eşitsizliği vardır (Değirmen ve Değirmen 2021).

3. Bulgular

S, G de tanımlı basit fonksiyonların kümesi ve P, S nin sonlu ölçümlü bir kümede desteğe sahip bir alt kümesi olsun.

Önerme 3.1 $W \in \Delta_2(G)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Eğer $w \in L^1(G)$ ise $K(S \otimes_\gamma S)$ kümesi $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayında $\|\cdot\|$ normuna göre her yerde yoğunur.
- ii) Eğer $w \notin L^1(G)$ ise $K(P \otimes_\gamma P)$ kümesi $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayında $\|\cdot\|$ normuna göre her yerde yoğunur.

İspat:

i) Herhangi bir $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ alalım. Bu durumda $f_i \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g_i \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ olmak üzere

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{f}_i * g_i), \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} < \infty$$

yazılır. $h_n = \sum_{i=1}^n (\tilde{f}_i * g_i)$ diyelim. $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i$ serisi

h fonksiyonuna yakınsadığından herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ olduğunda

$$\begin{aligned} \|h - h_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{f}_i * g_i) - \sum_{i=1}^n (\tilde{f}_i * g_i) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (\tilde{f}_i * g_i) \right\| \\ &\leq c \sum_{i=n+1}^{\infty} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi n_0 sayısına eşit veya n_0 sayısından büyük olan bir v_0 doğal sayısı seçelim ve sabitleyelim.

$$c_1 = \max_{1 \leq i \leq v_0} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \text{ ve } c_2 = \max_{1 \leq i \leq v_0} \|s_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \text{ olsun.}$$

Lemma 2.19 i) gereği $\bar{S} = \Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ olduğundan verilen aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_i - s_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} < \frac{\varepsilon}{3v_0 c_1 t_1}$$

ve

$$\|g_i - k_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} < \frac{\varepsilon}{3v_0 c_2 t_2}$$

olacak şekilde $s_i, k_i \in S$ vardır. Bu durumda

$$s_i \otimes k_i \in S \otimes_\gamma S \text{ olup } \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * k_i) \in K(S \otimes_\gamma S)$$

yazılır. Yine aynı $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left\| h - \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * k_i) \right\| \right\| \\
 &= \left\| \left\| h - h_{v_0} + h_{v_0} - \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * g_i) \right\| \right\| \\
 & \quad + \left\| \left\| \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * g_i) - \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * k_i) \right\| \right\| \\
 &\leq \left\| h - h_{v_0} \right\| + \left\| \left\| h_{v_0} - \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * g_i) \right\| \right\| \\
 & \quad + \left\| \left\| \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * g_i) - \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * k_i) \right\| \right\| \\
 &< \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \left\| \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{f}_i * g_i) - \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * g_i) \right\| \right\| \\
 & \quad + \left\| \left\| \sum_{i=1}^{v_0} (\tilde{s}_i * (g_i - k_i)) \right\| \right\| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \left\| \sum_{i=1}^{v_0} ((\tilde{f}_i - \tilde{s}_i) * g_i) \right\| \right\| \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{v_0} t_2 \left(\|s_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i - k_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{v_0} t_1 \left(\|f_i - s_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{v_0} t_2 \left(\|s_i\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_i - k_i\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) \\
 &< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{v_0} t_1 \frac{\varepsilon}{3v_0 c_1 t_1} c_1 \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{v_0} t_2 \frac{\varepsilon}{3v_0 c_2 t_2} c_2 = \varepsilon
 \end{aligned}$$

olur. O halde $K(S \otimes_\gamma S)$ kümesi $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayında $\|\cdot\|$ normuna göre her yerde yoğundur. Böylece ispat tamamlanır.

ii) i) şıkkının ispatında S yerine P alınarak ve Lemma 2.19 ii) kullanılarak ispat yapılır.

Önerme 3.2

i) Eğer $w \in L^1(G)$ ise her $h \in K(S \otimes_\gamma S)$ için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

ii) Eğer $w \notin L^1(G)$ ise her $h \in K(P \otimes_\gamma P)$ için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

İspat:

i) $s \rightarrow L_s h$ lineer olduğundan bu fonksiyonun G üzerindeki sürekliliğini göstermek için G grubunun biriminde sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $h \in K(S \otimes_\gamma S)$ alalım. O halde Önerme 3.1 i) gereği $f_k \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w), g_k \in \Lambda_G^{p_2, q_2}(w)$ olmak üzere $h = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_k * g_k), \sum_{k=1}^{\infty} (\|f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}) < \infty$ yazılır. Buradan her $s \in G$ için

$$\begin{aligned}
 \|L_s h - L_e h\| &= \|L_s h - h\| \\
 &= \left\| L_s \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_k * g_k) - \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_k * g_k) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} L_s (\tilde{f}_k * g_k) - \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_k * g_k) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((L_s \tilde{f}_k) * g_k) - \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_k * g_k) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((L_s \tilde{f}_k - \tilde{f}_k) * g_k) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (((R_s f_k)^\sim - \tilde{f}_k) * g_k) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((R_s f_k - f_k)^\sim * g_k) \right\| \\
 &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} (\|R_s f_k - f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)})
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.20 den $\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ uzayının ötelemeler altında invariant olduğu ve Lemma 2.21 den $f \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ için G grubundan $\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ uzayına giden $s \rightarrow L_s f$ fonksiyonunun sürekliliği biliniyor. $\tilde{f}_k \in \Lambda_G^{p_1, q_1}(w)$ olduğundan $s \rightarrow 0$ için $\|L_s \tilde{f}_k - \tilde{f}_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \rightarrow 0$ dir.

$$\begin{aligned} \|L_s \tilde{f}_k - \tilde{f}_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} &= \|(R_s f_k)^\sim - \tilde{f}_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \\ &= \|R_s f_k - f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \end{aligned}$$

olduğundan $\|R_s f_k - f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \rightarrow 0$ olur. Yine

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|R_s f_k - f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\|R_s f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} + \|f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \right) \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) \\ = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\|R_s f_k - f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)} \right) \text{ toplamı sınırlı}$$

olur. Bu durumda

$$\|L_s h - h\| \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \|R_s f_k - f_k\|_{\Lambda_G^{p_1, q_1}(w)} \|g_k\|_{\Lambda_G^{p_2, q_2}(w)}$$

eşitsizliğinde $s \rightarrow 0$ için limit alınırsa $\|L_s h - h\| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonunun G grubunun biriminde sürekli olması demektir. Buradan her $h \in K(S \otimes_{\gamma} S)$ için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğu elde edilir.

ii) i) şıkkının ispatında S yerine P alınarak ve Önerme 3.1 ii) kullanılarak ispat yapılır.

Önerme 3.3 Her $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ için G grubundan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Herhangi bir $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ alalım.

$w \in L^1(G)$ olsun. Bu durumda $K(S \otimes_{\gamma} S)$ kümesi $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayında her yerde yoğundur. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|h - k\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $k \in K(S \otimes_{\gamma} S)$ vardır. Sonuç 2.23 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|L_s h - h\| &= \|L_s h - L_s k + L_s k - k + k - h\| \\ &\leq \|L_s h - L_s k\| + \|L_s k - k\| + \|k - h\| \\ &= \|L_s(h - k)\| + \|L_s k - k\| + \|k - h\| \\ &= \|k - h\| + \|L_s k - k\| + \|k - h\| \\ &= 2\|k - h\| + \|L_s k - k\| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \|L_s k - k\| \end{aligned}$$

yazılır. Diğer yandan Önerme 3.2 i) şıkkından dolayı $s \rightarrow L_s k$ fonksiyonu sürekli olduğundan aynı $\varepsilon > 0$

sayısı verildiğinde her $s \in U$ için $\|L_s k - k\| < \frac{\varepsilon}{3}$

olacak şekilde $U \in U(e)$ komşuluğu vardır. Bu durumda aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $s \in U$ için

$$\|L_s h - h\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \text{ elde edilir. Bu durumda}$$

$s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

$w \notin L^1(G)$ olması durumunda ilk kısımda $K(S \otimes_{\gamma} S)$ yerine $K(P \otimes_{\gamma} P)$ alınarak ve Önerme 3.2 ii) kullanılarak devam edilir. Bu durumda $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4 Her $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ için G grubundan $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesine tanımlı $s \rightarrow \|L_s h\|$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Her $h \in A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ elemanı için $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğunu Önerme 3.3 den biliyoruz. Bu durumda $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu herhangi bir $s_0 \in G$ noktasında sürekli olur. Böylece herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $s \in U$ için $\|L_s h - L_{s_0} h\| < \varepsilon$ olacak şekilde $U \in U(s_0)$ komşuluğu vardır. Buradan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $s \in U$ için $\|L_s h\| - \|L_{s_0} h\| \leq \|L_s h - L_{s_0} h\| < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $s \rightarrow \|L_s h\|$ fonksiyonu süreklidir. Böylece ispat tamamlanır.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu makalede, G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere Li ve Sun (2012) tarafından tanımlanan $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayındaki Avcı ve Gürkanlı (2007) nin ele aldığı yöntemlerle yoğunluk ve süreklilik gibi temel özellikler incelenmiştir. Böylece $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayı ile $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G)$ ve $\Lambda_G^{p, q}(w)$ uzaylarındaki sonuçların benzerlik gösterdiği ve bu uzaylarda bu sonuçlara dayanan ve literatürde var olan bazı özelliklerin de $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayında araştırılabileceği saptanmıştır.

5. Kaynaklar

Arino, M. A. and Muckenhoupt, B., 1990. Maximal functions classical Lorentz spaces and Hardy' s inequality with weights for nonincreasing functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **320**(2), 727-735.

Avcı, H. and Gürkanlı, A. T., 2007. Multipliers and tensor products of $L(p, q)$ Lorentz spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **27**(B)(1), 107-116.

Bonsall, F. F. and Duncan, J., 1973, Complete Normed Algebras, 80, Springer Verlag, Berlin, 230-237.

Carro, M. J., Raposo, J. A. and Soria, J., 2007, Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities, 187, no. 877, Managing editor Robert Guralnick, *Memoirs of the American Mathematical Society*.

Değirmen, N. ve Değirmen, İ., 2021. $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}(G, w)$ uzayı ve bazı topolojik özellikleri üzerine. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **11**(2), 1468-1480.

Folland, G. B., 1995, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRS Press, Boca Raton, Florida, 36-47.

Halmos, P. R., 1974, Measure Theory, Second edition, Springer Verlag, New York, 73-183.

Hunt, R. 1966. On $L(p, q)$ spaces. *L'Enseignement Mathématique*, **12**, 249-276.

Li, H. and Sun, Q., 2012. Multipliers and tensor products of the weighted Lorentz spaces $\Lambda_G^{p, q}(w)$. *Georgian Mathematical Journal*, **19**, 721-740.

Yap, L. Y. H., 1969. Some remarks on convolution operators and $L(p, q)$ spaces. *Duke Mathematical Journal*, **36**, 647-658.