

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**



PORTFÖY RİSK YÖNETİMİNDE KAPULA YAKLAŞIMI

Doktora Tezi

Emre YILDIRIM

Danışman

Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

SAMSUN

2022

TEZ KABUL VE ONAYI

Emre YILDIRIM tarafından, **Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ** danışmanlığında hazırlanan “**PORTFÖY RİSK YÖNETİMİNDE KAPULA YAKLAŞIMI**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 5.8.2022 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Doç. Dr. Erol TERZİ Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. Miraç EREN Ondokuz Mayıs Üniversitesi İktisat Anabilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. Haydar KOÇ Çankırı Karatekin Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Hamza ERDOĞDU Harran Üniversitesi Ekonometri Anabilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. Bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi?

Evet (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır

24/06/2022

Emre YILDIRIM

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: PORTFÖY RİSK YÖNETİMİNDE KAPULA YAKLAŞIMI

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 24.06.2022 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 7

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

İmza

24 /06 / 2022

Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

ÖZET

PORTFÖY RİSK YÖNETİMİNDE KAPULA YAKLAŞIMI

Emre YILDIRIM

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Doktora, Haziran/2022

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

Risk tahmini finansal risk yönetimindeki en önemli konulardan biridir. Risk tahminin performansı portföyü oluşturan varlıklar arasındaki bağımlılık yapısının doğru modellenmesine bağlıdır. Bu çalışmada USD/TRY, EUR/TRY, JPY/TRY ve RUB/TRY döviz kurlarından oluşan bir portföyün risk tahmini yapılmaktadır. İlk olarak döviz kuru getirilerinin marjinaleri ARMA-GARCH türü modeller ile tahmin edilmiştir. USD/TRY, EUR/TRY ve JPY/TRY'nin getiri serilerinde asimetrik volatilitenin mevcut olduğu ve tüm döviz kuru getiri serileri için en uyumlu dağılımın çarpık Student t olduğu belirlenmiştir. Daha sonra, oluşturulan döviz kuru portföyüne ilişkin risk tahmini varyans-kovaryans, tarihsel simülasyon ve kapula modelleri ile bu yöntemlerin çeşitli ağırlıklandırma teknikleriyle birleştirilmiş alt tahmin modelleri kullanılarak yapılmıştır. Modellerin risk tahmin performansları geriye dönük testler kullanılarak karşılaştırılmıştır. % 95 güven seviyesinde en iyi risk tahmin performansı maksimum çeşitlendirme ağırlıklı D-vine ve C-vine kapula modelleri ile elde edilmiştir. % 99 güven seviyesinde eşit ağırlıklı Student t kapula ile D-vine kapula modelleri en iyi risk tahmin performansları göstermiş ve eşit risk katkı ağırlıklı C-vine ile D-vine kapula modellerinin de eşit ağırlıklı modellere oldukça yakın sonuçlar ürettiği görülmüştür. Bununla birlikte, vine kapulaya dayalı risk tahmin modelleri klasik yaklaşımlar ve elipsel kapulaya dayalı modellerden daha iyi sonuçlar sunmuştur. Son olarak, farklı ağırlıklandırılmış modellerin portföyün risk tahmininde oldukça etkili sonuçlar ürettiği ortaya konmuştur.

Anahtar Sözcükler: Kapula, Bağımlılık modelleme, Risk yönetimi, Ağırlıklandırma teknikleri, Döviz kuru portföyü.

ABSTRACT

COPULA APPROACH IN PORTFOLIO RISK MANAGEMENT

Emre YILDIRIM

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Statistics

Ph.D., June/2020

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

Risk estimation is one of key issues in financial risk management. The performance of the risk estimation depends on the correct modeling of the dependency structure between the assets that create the portfolio. In this study, risk estimation of the portfolio consisting of USD/TRY, EUR/TRY, JPY/TRY and RUB/TRY Exchange rates is performed. First, marginals of exchange rate returns are estimated via ARMA-GARCH type models. It was determined that asymmetric volatility exists in returns series of USD/TRY, EUR/TRY and JPY/TRY and the best fitted distribution for all exchange rate returns is skewed Student t. Then, risk estimation of exchange rate portfolio created was carried out using variance-covariance, historical simulation and copula models and sub-estimation models of these methods that are combined with various weighting techniques. The risk estimation performances of the models were compared with backtesting. The best risk estimation performance at 95% confidence level was obtained with the maximum diversification weighted D-vine and C-vine copula models. Equally weighted Student t copula and D-vine copula models showed the best risk estimation performances at 99% confidence level and it was observed that C-vine and D-vine copula models with equal risk contribution weighted produced results very close to equally weighted models. However, risk estimation models based vine copula provide better results than the classical approaches and models based on the elliptical copula. Finally, it was found out that different weighted models produce highly effective results in the risk estimation of the portfolio.

Keywords: Copula, Dependence modelling, Risk management, Weighting techniques, Exchange rate portfolio.

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca bana yol gösterici olan ve olumlu tavırlarıyla beni cesaretlendiren danışman hocam Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emek ve fedakârlık gösteren annem, babam ve kardeşlerime teşekkürlerimi bir borç bilirim. Doktora sürecinde daima beni motive eden ve cesaretlendiren fedakâr eşim Hilal'e sonsuz teşekkür ederim. Dünyaya farklı bir gözle bakmamı sağlayan canım kızım Serra'ya teşekkürlerimi sunarım.

Emre YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI.....	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
TABLolar DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. BAĞIMLILIK MODELLEMESİ.....	7
2.1. Kapula Teorisi.....	7
2.2. Kapula Sınıfları.....	9
2.2.1. Elipsel Kapulalar.....	9
2.2.2. Arşimedyan Kapulalar.....	9
2.3. İki Değişkenli Elipsel Kapula Aileleri.....	10
2.4. İki Değişkenli Arşimedyan Kapula Aileleri.....	12
2.5. Döndürülmüş (Rotated) Kapula Aileleri.....	18
2.6. Çok Değişkenli Elipsel Kapula Aileleri.....	20
2.7. İkili Kapula Yapısı.....	21
2.7.1. Regular Vine.....	23
2.8. Karma Kapulalar.....	32
2.9. Uç Değer Kapulalar.....	34
2.9.1. Husler-Reiss Kapula.....	34
2.9.2. Galambos Kapula.....	34
2.9.3. Tawn Kapula.....	34
2.9.4. t - Uç Değer Kapula.....	34
2.10. Kapula Model Seçimi.....	35
3. FİNANSAL RİSK YÖNETİMİ.....	36
3.2. Varlık Getirileri.....	36
3.3. Volatilité.....	37
3.3.1. ARCH modeli.....	39
3.3.2. GARCH modeli.....	40
3.3.3. IGARCH modeli.....	40
3.3.4. GARCH-M modeli.....	41
3.3.5. EGARCH modeli.....	41
3.3.6. TGARCH modeli.....	41
3.3.7. APARCH modeli.....	42
3.3.8. NGARCH modeli.....	43
3.4. Risk Ölçümleri.....	43
3.4.1. Riske Maruz Değer.....	44
3.4.2. Beklenen Kayıp.....	44
3.5. Portföy Ağırlıklandırma Yöntemleri.....	45
3.5.1. Eşit ağırlıklandırma yöntemi.....	45
3.5.2. Ters volatilité ağırlıklandırma yöntemi.....	46
3.5.3. Minimum varyans ağırlıklandırma yöntemi.....	46
3.5.4. Maksimum çeşitlendirme ağırlıklandırma yöntemi.....	47
3.5.5. Eşit risk katkılı ağırlıklandırma yöntemi.....	47
4. MATERYAL VE YÖNTEM.....	49
4.1. Marjinal Değişkenlerin Modellenmesi.....	49
4.2. Kapulaya Dayalı Risk Tahmini.....	50
4.3. Geriye Dönük Testler.....	51
4.3.1. Kupiec başarısızlık oran testi.....	51

4.3.2. Christoffersen aralık tahmini testi	52
4.3.3. Kayıp fonksiyonlar	54
5. BULGULAR.....	56
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	72
KAYNAKLAR.....	74
ÖZ GEÇMİŞ.....	78

SİMGELER VE KISALTMALAR

r	: Getiri
p	: Fiyat
C	: Kapula dağılım fonksiyonu
φ	: Kapula üretici fonksiyonu
θ	: Kapula parametresi
ω	: Portföy ağırlık vektörü
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri
ARMA-GARCH	: Otoregresif Hareketli Ortalama-Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
APARCH	: Asimetrik Kuvvet Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
ARCH	: Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
BIC	: Bayesci Bilgi Kriteri
BK	: Beklenen Kayıp
CAIC	: Tutarlı Bayesci Bilgi Kriteri
C-VİNE	: Kanoniksel Bağ
D-VİNE	: Çizilebilir Bağ
EGARCH	: Üstel Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
GARCH	: Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
IGARCH	: Bileşik Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
NGARCH	: Simetrik Olmayan Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
PCC	: İkili Kapula Oluşturma
RMD	: Riske Maruz Değer
R-VİNE	: Düzenli Bağ
TGARCH	: Eşik Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. 0.5 korelasyon katsayılı Gaussian kapula grafiği.....	11
Şekil 2.2. 0.5 korelasyon katsayılı ve 3 serbestlik dereceli Student t kapula grafiği.....	12
Şekil 2.3. $\theta = 5.8$ olan Frank kapula grafiği.....	13
Şekil 2.4. $\theta = 2$ olan Clayton kapula grafiği.....	14
Şekil 2.5. $\theta = 2.8$ olan Joe kapula grafiği.....	15
Şekil 2.6. $\theta = 2$ olan Gumbel kapula grafiği	16
Şekil 2.7. $\theta = 2$ ve $\delta=1$ olan BB1 kapula grafiği.....	17
Şekil 2.8. $\theta = 2$ ve $\delta=1$ olan BB7 kapula grafiği.....	18
Şekil 2.9. Sırasıyla $\theta = -2$ olan döndürülmüş (90 derece) Clayton ile döndürülmüş (90 derece) Gumbel kapula grafiği	19
Şekil 2.10. Sırasıyla $\theta = 2$ olan sağkalım Clayton ile sağkalım Gumbel kapula grafiği	19
Şekil 2.11. Sırasıyla $\theta = -2$ olan döndürülmüş (270 derece) Clayton ile döndürülmüş (270 derece) Gumbel kapula grafiği	20
Şekil 2.12. 4-Boyutlu C-vine yapısı	25
Şekil 2.13. 4-Boyutlu C-vine yapısı	27
Şekil 2.14. 5-Boyutlu R-vine yapısı	28
Şekil 5.1. Döviz kurlarının günlük fiyatları.....	56
Şekil 5.2. Döviz kuru getiri serileri	57
Şekil 5.3. Standartlaştırılmış artıkların otokorelasyon fonksiyonları	61

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1. Zamana göre risk sınırını aşma durumu.....	53
Tablo 5.1. Döviz kuru getirilerinin tanımlayıcı istatistikleri.....	58
Tablo 5.2. Döviz kuru getirilerinin durağanlık, otokorelasyon ve değişen varyans test sonuçları.....	58
Tablo 5.3. Döviz kuru getirilerine ait marjinal dağılımların parametre tahminleri.....	59
Tablo 5.4. Marjinal dağılımlara ilişkin model uyum iyiliği sonuçları.....	60
Tablo 5.5. Eşit ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları.....	62
Tablo 5.6. Ters volatilité ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları.....	63
Tablo 5.7. Minimum varyans ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları.....	64
Tablo 5.8. Maksimum çeşitlendirme ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları....	65
Tablo 5.9. Eşit risk katkı ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları.....	66
Tablo 5.10. Risk tahmin yöntemlerinin model doğruluk sonuçları.....	67
Tablo 5.11. % 95 güven seviyesinde aday risk tahmin modellerinin performansları.....	68
Tablo 5.12. % 99 güven seviyesinde aday risk tahmin modellerinin performansları.....	70

1. GİRİŞ

Tekrar eden finansal krizler, riskin gerçek olduğunu ve özellikle finansal karar verme sürecinde dikkat edilmesi gereken unsurlardan biri olduğunu göstermektedir. Finansal varlıklardan oluşan portföye ilişkin risk yönetimi literatürde yaygın olarak araştırılan konulardan biridir. Yatırımcılar doğru finansal varlıkları tahmin ederek karlarını maksimum ve kayıplarını minimum yapmayı hedeflemektedirler. Tek bir finansal varlığa yatırım, özellikle finansal piyasalarda yeni olan yatırımcılar için oldukça yüksek risk içermektedir. Bunun yerine yatırımlarını birden fazla finansal yatırım araçlarına bölüştürmek yatırımcıların kaybetme riskini azaltmaktadır. Bu amaçla bir portföyü oluşturan finansal varlıklar arasındaki bağımlılık yapısının doğru bir şekilde modellenmesi risk tahmininde büyük önem taşımaktadır. İlgili finansal varlıkların karakteristik özellikleri, kullanılacak bağımlılık modelleme aracını belirlemede oldukça önemlidir. Araştırmaların büyük bir çoğunluğu, finansal varlıklar arasındaki bağımlılığı modellemede simetrik yaklaşımlar kullanmaktadır. Ancak finansal varlıkların karakteristik özelliklerinden dolayı simetrik yaklaşımlarla bağımlılığı modellemek yanıltıcı sonuçlar vermektedir. Bu nedenle portföyü oluşturan finansal varlıklar arasındaki bağımlılık yapılarını esnek bir şekilde modelleyebilen araçlara gerek duyulmaktadır. Diğer taraftan, portföyü oluşturan finansal varlıklar genellikle iki boyutlu olarak incelenmektedir. Bu durum, oluşturulacak olan portföyün çeşitlendirilmesini sınırlandırmakta ve yatırımcıların kayıp miktarlarının artmasına neden olabilmektedir.

Belirsizlik pek çok alanda yaygın olarak çalışılan konulardan biridir. Belirsizliği tahmin etmeden önceki en önemli adım, onu ölçmek ve analiz etmektir. Belirsizliği tahmin etmek için bağımsız değişkenlerinin belirlenmesi gerekir. Ancak bu değişkenleri belirlemek kolay değildir. Çünkü çalışılan alanda uzman bilgisi gerekebilir ya da girdi parametrelerini doğru bir şekilde belirlemek için önceki bilgilerin kullanımına gerek duyulabilir. Girdi parametreleri belirlendikten sonra bu parametrelerin olasılık dağılımları belirlenir ve belirsizlik bu dağılımlara dayalı olarak tahmin edilebilir. Bununla birlikte istatistikte, veri madenciliğinde ve makine öğrenmesindeki mevcut teorilerin, araçların ve sistemlerin çoğu tüm girdi değişkenlerinin bağımsız ve özdeş dağılımlı olduğu varsayımına dayalıdır. Bu varsayım zayıf ilişkili problemler için uygun olabilir. Ancak, gerçek dünya problemlerinde bu varsayım dayalı çözümler yanıltıcı sonuçlara neden olmaktadır. Girdi değişkenleri arasındaki bağımlılık yapısı, modelin çıktılarını önemli ölçüde etkileyebilir ve eğer bu bağımlılık dikkate alınmazsa elde edilen analiz sonuçlarının güvenilirliği zayıflamaktadır. Bu nedenle girdi değişkenleri arasındaki bağımlılığın modellenmesi pek çok alanda araştırılan en önemli konulardan biri

olmaktadır. Finansal değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı modellenmesinin neden çok önemli olduğunu bir örnek ile ele alalım. Beş yıllığına 1000\$ yatırım yapıldığını varsayalım ve beş yıl sonraki getiri:

$$r_{5-yıl} = 1000(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4)(1 + r_5) \quad (1.1)$$

Burada r_1, r_2, r_3, r_4 ve r_5 beş yıllık faiz oranlarını göstermektedir. Faiz oranları belirsizlikten dolayı bilinmemektedir. Faiz oranlarının geçmiş verileri araştırılarak dağılım bulunabilir. Basit olması için, faiz oranlarının 0,05 ile 0,15 arasında düzgün (uniform) dağıldığı varsayılabilir. Beş yıl sonraki net getiriyi bulmak için faiz oranlarının ortak dağılımını oluşturmak gerekmektedir. Faiz oranlarının birbirinden bağımsız olduğu varsayılırsa onların ortak dağılımı marjinal dağılımlarının çarpımı olarak elde edilir. Ancak faiz oranları arasında çeşitli bağımlılık yapıları varsa ortak dağılım, marjinal dağılımlar ve bağımlılık yapısıyla oluşturulabilir. Literatürde çeşitli bağımlılık ölçüleri mevcuttur. Bunlar; Pearson çarpım moment korelasyon katsayısı, Spearman sıra korelasyon katsayısı ve Kendall tau korelasyon katsayısıdır. Bu bağımlılık ölçüleri en iyi ölçümler değildir. Çünkü bu ölçümler ya normal dağılım varsayımına dayalı olarak elde edilmektedir ya da parametrik bir ailede geniş kapsamlı bir bağımlılık yapısı sunmazlar. Bu bağımlılık ölçüleri yukarıda bahsedilen örnekteki sorunu çözmede yeterli değildir ve bu amaçla kullanılacak yöntemlerden biri kapulalardır.

Çok değişkenli dağılım fonksiyonları, ilgili değişkenlere ilişkin marjinaler ve değişkenlerin ortak hareketlerini gösteren bağımlılık yapılarından oluşmaktadır. İlgili değişkenler arasında farklı türde bağımlılık yapıları mevcuttur. Sklar (1959) çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını tek değişkenli marjinallere bağlayan kapula fonksiyonlarının varlığını ortaya koymuştur. Kapulalar, değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını marjinal dağılımlarına bakmaksızın modelleyebilen güçlü araçlardır. Bununla birlikte, bilinen çok değişkenli dağılım fonksiyonlarının yetersiz kaldığını durumlarda yeni çok değişkenli dağılım fonksiyonlarının oluşturulmasına olanak sağlamaktadırlar. Çok sayıda kapula fonksiyonlarının varlığı, farklı türdeki bağımlılık yapılarının modellenmesini mümkün kılmaktadır.

Kapula, düzgün (uniform) marjinallerle bağımlılığı modellemek için doğal bir yaklaşım olarak ortaya çıkmıştır (Joe, 1997; Nelsen 1999). Kapulalar, marjinal dağılımlar ile bağımlılık yapısının ayrı bir şekilde incelenmesine olanak sağlamaktadır. Ek olarak, kapulalar normal dağılım varsayımına gerek duymamaktadır. Bununla birlikte, değişkenlerin aynı tek

değişkenli dağılım ailelerinden gelmesi gerekmemektedir. Farklı iki değişkenli kapula aileleri, ortak bir dağılımın çeşitli özelliklerinin modellenmesine olanak sağlamaktadır. Simetrik bağımlılıkların yanı sıra asimetrik ve doğrusal olmayan bağımlılıkları da modelleyebilen kapulalar pek çok alanda kullanılabilir. Bouyé vd. (2000) ve Embrechts vd. (2003) kapulaları ilk kez kullanan çalışmalardan bazılarıdır. Kapulaya dayalı modeller son yıllarda istatistiksel modellemede popüler bir yöntem haline gelmiştir. Kapula yaklaşımı bağımlılık yapısından bağımsız olarak marjinallerin modellenmesine olanak sağlamasından dolayı değişkenler arasında bağımlılığı modellemede önemli esneklikler sunmaktadır.

Ekonomi ve finans alanındaki olayların çoğu birbirleriyle ilişkilidir. Bu tür olayları açıklamak için bağımlılığın dikkate alınması gerekmektedir. Örneğin, New York borsasında yaklaşık olarak üç bin hisse senedi mevcuttur. Tüm bu finansal varlıkların fiyatları gelecekteki performans ve haber beklentisine göre sürekli olarak değişmektedir ve bu fiyatlardaki hareketler bağımsız değildir (Engle, 2009). Bağımlılık yapısı, riskleri belirleme ve ölçmede etkili olduğundan dolayı portföy seçim problemlerinde oldukça önemlidir. Bu nedenle, tüm varlık fiyatlarındaki hareketlerin bağımlı olduğunu ve tüm unsurların genel bir denge sisteminde birbirine bağlı olduğunu kabul etmek çok önemlidir.

n-tane varlık düşünüldüğünde, $p_{i,t}$, i-nci varlığın t-anındaki fiyatını gösterebilir. $r_{i,t}$ varlık getirisi aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$r_{i,t} = \ln \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right) \quad (1.2)$$

Çok değişkenli getiri matrisi aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{pmatrix} r_{t,1} & r_{t,2} & \dots & r_{t,n} \\ r_{t-1,1} & r_{t-1,2} & \dots & r_{t-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{t-k,1} & r_{t-k,2} & \dots & r_{t-k,n} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Burada $k < t$ dir. $r_{1,t}$ getirisi $\{r_{1,t-1}, r_{1,t-2}, \dots, r_{1,t-k}\}$ gecikmeli getirilerinden etkilenmektedir. Ayrıca, r_1 getirisi, $\{r_2, \dots, r_n\}$ getirilerinden etkilenmektedir. Getirilerin geçmiş değerleriyle olan bağımlılığı sütun vektöründeki ilişkilerdir. Varlıklar arasındaki etkileşim ise çok değişkenli getiri matrisinin satırları arasındaki bağımlılık olarak gösterilir.

Finansal alandaki yüksek boyutlu karmaşık bağımlılık yapılarını modellemek oldukça zordur. Bunun nedenlerinden biri, her bir varlık getirisinin kendine özgü karakteristik yapısı

mevcuttur. Bunlar, literatürde stilize edilmiş gerçekler (stylized facts) olarak da ifade edilmektedir. Önemli stilize edilmiş gerçekler aşağıdaki verilmektedir (Andersen vd., 2009):

- Günlük getirilerin koşullu ortalamalarının öngörülebilirliği oldukça düşüktür. Günlük getirilerin varyansları ortalamalarından önemli ölçüde büyüktür.
- Günlük getiriler normal dağılmamaktadır.
- Dinamik varyans modeliyle standardize edilmiş günlük getiriler bile normal dağılmamaktadır.
- Aynı büyüklükte pozitif ve negatif getiriler varyans üzerinde farklı etkilere sahip olabilirler.

Bununla birlikte, bağımlılıklarda bazı özellikler mevcuttur. Finansal varlıkların getirileri arasındaki bağımlılık yapısı asimetriktir. Örneğin, hisse senedi getirileri piyasaların düşüşte olduğu süreçlerde, yükselişte olduğu süreçlere göre daha yüksek bir bağımlılık gösterecektir. Yani, hisse senedi getirileri genel piyasalardaki düşüşlerde ortak bir şekilde azalış gösterebilirken yükselen piyasalarda birlikte artış göstermeyebilir.

Finansal getirilerin ortak ve marjinal dağılımları elipsel olmadığında korelasyon katsayısı bağımlılık yapısını modellemede yeterli değildir. Bununla birlikte kapula, bağımlılığı modellemede korelasyon katsayısına göre daha kapsamlı bir bağımlılık ölçüsüdür. Kapulular Gaussian dağılımın aksine kuyruk bağımlılığının modellenmesine olanak sağlar. Böylelikle negatif getiriler artsa bile bağımlılık yapısı modellenenmektedir. Özellikle finansal piyasaların çalkantılı olduğu dönemlerde finansal zaman serileri arasındaki kuyruk bağımlılığının ihmal edilmesi, çoklu finansal modelleme uygulamalarını önemli ölçüde etkileyebilir.

Literatürde finansal getiri serilerinin genellikle değişen varyans gösterdiği ortaya konmuştur. Yani, getiri serilerinin zamana göre düşük ve yüksek volatilitate kümeleri gösterdiği belirlenmiştir. Diğer taraftan, bazı finansal getiri serilerinde volatilitate asimetrisinin olduğu belirlenmiştir. Bir diğer ifadeyle, volatilitate üzerinde negatif haberlerin pozitif haberlerden daha büyük etkiye sahip olduğu görülmüştür (Brandt ve Kang, 2004; Liu, 2006).

Bununla birlikte, finansal varlıklar arasındaki bağımlılık yapısında asimetriklik olduğu deneysel çalışmalar sonucunda ortaya konmuş ve negatif getirilerin pozitif getirilere göre daha bağımlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Patton, 2004; Emekter vd., 2009; Das ve Uppal, 2004). Ayrıca, pek çok çalışma finansal değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının zamana

göre sabit olmadığını ortaya koymuştur (Christoffersen, 2009; Hamilton, 2008; Hsieh ve Huang, 2012).

Kapula teorisi Sklar (1959) tarafından ortaya konmasına rağmen finansal alandaki uygulamaları 21.yy başlarından itibaren yapılmaya başlanmıştır. Kapulalara ilişkin bazı çalışmalar Cherubini vd. (2004), McNeil vd. (2005) ve Nelsen (2006) tarafından yapılmıştır. Bununla birlikte, finansal zaman serileri arasındaki bağımlılık yapısının zamana göre sabit olduğu Manner ve Reznikova (2012) ve Silva Filho vd. (2014) tarafından ortaya konmuştur. Ancak bazı deneysel çalışmalar bu durumun gerçekçi olmadığını öne sürmektedir. Patton (2006) kapulaların zamanla değiştiğini öne sürmüştür ve bu teori literatürdeki pek çok çalışma için yol gösterici olmuştur (Okimoto, 2008; Ng, 2008; Guegan ve Zhang, 2010).

Çeşitli bağımlılık yapılarını modellemek için literatürde çok sayıda iki değişkenli kapulalar önerilmiştir. Elipsel olmayan kapulalar arasında Arşimedyan kapulalar son zamanlarda finans alanında yaygın bir kullanım kazanmıştır. Bu durum, Arşimedyan kapulaların kapalı formda kümülatif dağılım fonksiyonlarının mevcut olması ve rastgele değişkenler arasındaki bağımlılığı modellemeye uygunluğundan kaynaklanmaktadır. Bu bağlamda, Arşimedyan kapulaların finansal portföylerin alt kuyruk bağımlılıklarını modellemede yeterli olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Fannazzini, 2009). Çünkü bu kapulalar simetrik ve asimetrik kuyruk bağımlılıklarını yakalayabilmektedirler. Bununla birlikte, basit parametrik kapula modelleri çok değişkenli verilerin karmaşık bağımlılık yapılarını modellemede yeterli düzeyde esneklik sağlamamaktadır. Yüksek boyutlu veriler için az sayıda kapula modeli mevcuttur. Bu kapula modelleri değişkenler arasında aynı bağımlılık yapısını varsaydığından dolayı çok değişkenli bağımlılık yapılarını modellemede yeterli değildir.

Yüksek boyutlu kapula modelleri karmaşık çok değişkenli veri yapılarını modellemede oldukça esnek bir yapı sunmaktadır. Bu tür kapulalar vine kapula veya ikili kapula oluşumu (Pair-Copula Construction, PCC) olarak da ifade edilmektedir (Bedford ve Cooke 2002; Aas vd., 2009). Bu model doğası gereği hiyerarşik bir yapıya sahiptir ve çok değişkenli yoğunluk fonksiyonunun ardışık iki değişkenli kapula yoğunluklarına ayrışımaya dayalı olarak elde edilmektedir. Bu teknik orijinal veriye ve onların koşullu ve koşulsuz dağılım fonksiyonlarına uygulanmaktadır. Yüksek boyutlu dağılımlar için önemli sayıda ikili kapula yapıları mevcuttur. Bedford ve Cooke (2002) regular vine (R-vine) olarak bilinen grafik yöntemini ileri sürmüştür. Regular vine sınıfı çok genel bir sınıftır ve çok sayıda ikili kapula ayrışımı içermektedir. Literatürde iki sınıf üzerinde yaygın olarak durulmaktadır. Bunlar kanoniksel

vine (C-vine) ve çizilebilir vine (D-vine) olarak ifade edilmektedir. Vine kapulalar son zamanlarda risk yönetimi, varlık fiyatlaması ve portföy karar problemleri gibi çeşitli finansal uygulamalarda kullanılmaktadır.

Bu tez çalışması, finansal risk yönetiminde kullanılan klasik yöntemlerin yanı sıra bu yöntemlerin etkili sonuçlar vermediği ya da ilgili finansal varlıkların zayıf uyum gösterdiği durumlarda kullanılacak alternatif yaklaşımları içermektedir. Bu amaçla finansal risk yönetimdeki kullanılan Markowitz (1952) tarafından geliştirilen modern portföy teorisi ve bu yöntemlere alternatif olabilecek çeşitli yaklaşımlar sunulmaktadır. Bu yaklaşım farklı dağılım özelliklerine sahip finansal varlıklardan oluşan portföye ilişkin risk modellemesi ele alınmaktadır. Varlık getirilerinin değişkenliğinin ölçüsü olarak ifade edilen volatilité, çeşitli yaklaşımlarla modellenmektedir. Bu yaklaşımlar ile finansal zaman serilerinin asimetriklik ve kaldıraç etkisi gibi karakteristik özellikleri dikkate alınmakta ve finansal varlıkların fiyatlarının belirlenmesinde volatilitenin etkisi olup olmadığını ortaya koyan modeller de incelenmektedir. Finansal varlıklar arasındaki bağımlılıklar farklı bağımlılık yapılarını modelleyebilen esnek yapıya sahip kapula yaklaşımı ele alınmaktadır. Elipsel kapulalar ve elipsel olmayan kapulalar ve vine kapulalar incelenmektedir. Diğer taraftan risk modellemesinin önemli parametrelerinden biri olan ağırlık parametresi için bazı ağırlıklandırma yöntemleri kullanılarak risk modellemesi yapılmaktadır. Ele alınan tüm yaklaşımlar ile farklı finansal piyasalar incelenmektedir. Önerilen risk modellerinin performansları için geriye dönük testler (backtesting) kullanılmaktadır.

2. BAĞIMLILIK MODELLEMESİ

Bağımlılığı ölçmek ve modellemek için literatürde birçok yöntem mevcuttur. Finansal alanda bu yöntemlerden en yaygın kullanılanı Pearson korelasyon katsayısıdır. Bu ölçüm istatistikte çok değişkenli normallik varsayımına dayanan klasik yöntemlerde ve finasta sermaye varlık fiyatlandırma modelinde önemli rol oynamaktadır. Pearson korelasyon katsayısı elipsel dağılımlar için uygun bir bağımlılık ölçüsü olmasına rağmen bazı eksiklikleri vardır. Korelasyon marjinal dağılımlara bağlıdır ve marjinallerin doğrusal olmayan kesin artan dönüşümleri altında değişmezlik özelliğine sahip değildir. Bununla birlikte, ikili doğrusal bağımlılığın skaler bir ölçüsü olan korelasyon tüm bağımlılık yapısını yakalayamamaktadır. Bu nedenle doğrusal olmayan ilişkileri ve asimetric bağımlılıklarını modelleyemede yetersiz kalmaktadır.

Kapula fonksiyonları bu eksikliklerin üstesinden gelebilmekte ve özellikle normal olmayan değişkenler için ortak dağılımı modellemede esnek bir yöntem sunmaktadır. Bu bölümde ilk olarak kapula teorisi ve kapulanın önemli sınıfları verilmektedir. Ayrıca, kapulalara dayalı olarak elde edilen bağımlılık ölçüleri sunulmaktadır. Daha sonra, ikili kapula oluşumu hakkında teorik yapılar verilmekte ve son olarak hem kapula, hem de ikili kapulaya dayalı modeller için ilişkili literatür sunulmaktadır.

2.1. Kapula Teorisi

Kapula, düzgün (uniform) dağılımlı marjinallere sahip birim küp $[0,1]^d$ 'de tanımlı $C(u_1, \dots, u_d)$ çok değişkenli dağılım fonksiyondur. Bu fonksiyon d tane rastgele değişken arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesine olanak sağlamaktadır. Kapula kavramı ilk olarak Sklar (1959) tarafından literatürde kullanılmıştır. Bu teorem, marjinal dağılım fonksiyonlarıyla ortak dağılım fonksiyonu arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Kapula, seçilen marjinal dağılımlar hakkında herhangi bir varsayıma gerek duymadığından dolayı bağımlılık modellemesinde güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır.

2.1.1. Tanım

Kapulalar, $(0,1)$ 'de tanımlı düzgün marjinal dağılımlara sahip çok değişkenli kümülatif dağılım fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$C: [0,1]^d \rightarrow [0,1], \quad n \geq 2$$

İki değişkenli kapula $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Sınır koşulları

$u_1, u_2 \in [0,1]$ için

- $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$
- $C(u_1, 1) = u_1, \quad C(1, u_2) = u_2$

2. Artan fonksiyon

$u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ olmak üzere $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ için

- $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$

2.1.1. Teorem (Sklar teoremi)

F fonksiyonu F_1, F_2, \dots, F_d tek değişkenli marjinallerine sahip d -boyutlu dağılım fonksiyonu ise tüm $x = (x_1, \dots, x_d)' \in \mathbb{R}^d$ için d -boyutlu C kapula fonksiyonu mevcuttur:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (2.1)$$

Marjinaller sürekli ise kapula tektir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (2.2)$$

Burada F^{-1} marjinal fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır ve $u \in [0,1]^d$ dir. Diğer taraftan, F_1, F_2, \dots, F_d marjinal dağılım fonksiyonları ve C bir kapula fonksiyonu ise F fonksiyonu F_1, F_2, \dots, F_d marjinallerine sahip ortak dağılım fonksiyonudur.

Kapula yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial(u_1)\partial(u_2)} \quad (2.3)$$

Sklar teoreminden hareketle F_1, F_2 kesin artan ve sürekli marjinal yoğunluklara sahip F sürekli çok değişkenli dağılımı için zincir kuralını kullanarak f ortak yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial(F_1(x_1))\partial(F_2(x_2))} f_1(x_1) f_2(x_2) \\ &= c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bunun sonucu olarak,

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1) f_2(x_2)} \quad (2.5)$$

eşitliği elde edilir. Burada c iki değişkenli kapula yoğunluğudur. Sklar teoreminin iki önemli sonucu vardır. İlk olarak, düzgün marjinallere sahip her ortak dağılım fonksiyonu için bir kapula fonksiyonu mevcuttur. İkinci olarak, ortak bir dağılım fonksiyonu marjinal dağılımlardan ve bir kapuladan elde edilebilir. Bu nedenle, kapula modelleri marjinallerin bağımlılık yapısından ayrı olarak modellenmesine olanak sağlar ve buradaki bağımlılık yapısı bir kapula tarafından modellenir. Bu özellik marjinalleri belirlemede ve en uyumlu kapulayı seçmede önemli bir esneklik sağlamaktadır. Örneğin, iki rastgele değişken için iki farklı marjinal dağılım belirlenebilir. Bu marjinallerin aynı dağılım ailesinden olması zorunlu değildir. Bununla birlikte, bu iki rastgele değişken için en uyumlu kapula fonksiyonu farklı kapula ailelerinden seçilebilir ve bu dağılımın marjinal dağılımlar ile aynı aileden gelmesi gerekmemektedir. Ayrıca, bağımlılık yapısından marjinalleri ayırma tahmin süreci için önemli esneklik sunmaktadır. Bir diğer ifadeyle, marjinal dağılımlar bağımlılık yapısından bağımsız bir şekilde tahmin edilebilir. Bu durum tahmin sürecini çözülebilir adımlara ayırır ve böylelikle tahmin süreci kolaylaşır.

2.2. Kapula Sınıfları

Literatürde çok sayıda kapula modeli mevcuttur. Ancak elipsel ve Arşimedyan kapulalar en yaygın kullanılan kapula fonksiyon sınıflarıdır. Bu iki kapula fonksiyonuna ek olarak karma (mixture) kapulalar da gittikçe popülerlik kazanmaktadır. Karma kapulalar, değişkenler arasındaki karmaşık bağımlılık yapılarını belirlemek için çok sayıda model sunmaktadır. Nelsen (2006) kapulaların konveks birleşimlerinin de bir kapula olduğunu ortaya koymuştur. Önemli kapula sınıfları aşağıda verilmektedir.

2.2.1. Elipsel Kapulalar

Elipsel kapula türleri inversiyon yöntemini kullanarak elipsel dağılımlardan elde edilebilir. Detaylı bilgi için Nelsen (2006) incelenebilir. Çok değişkenli Gaussian (normal) ve Student t kapulalar (t kapula) kolay hesaplanmasından dolayı literatürde en yaygın kullanılan kapulalardır. Bununla birlikte, Gaussian kapula kuyruk bağımlılığına sahip değildir ve Student t kapula ise sadece simetrik kuyruk bağımlılığını modelleyebilmektedir.

2.2.2. Arşimedyan Kapulalar

Arşimedyan kapulalar sunduğu avantajlardan dolayı en önemli ve en yaygın olarak kullanılan kapula ailesidir. İlk olarak, Arşimedyan kapulalar değişkenler arasındaki üst, alt ve hem üst hem de alt kuyruk bağımlılıklarını modelleyebilen çok sayıda kapulalar içermektedir. İkinci olarak Arşimedyan kapulalar, üretici fonksiyonuna dayalı olarak kolayca üretilebilirler.

2.1.2. Tanım(Arşimedyan kapula)

Bir C kapulası aşağıdaki eşitliği sağlıyorsa bu kapulaya Arşimedyan kapula denir:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)], \quad u_1, u_2 \in [0,1] \quad (2.6)$$

Burada φ fonksiyonu C kapulanın üreticisi olarak ifade edilir ve $\varphi^{[-1]}$ ise sözde tersidir (psuedo-inverse). Eğer C bir Arşimedyan kapula ise aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

- C simetriktir. Yani,

$$C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$$

- C birleşme özelliğine sahiptir. Yani

$$C(C(u_1, u_2), u_3) = C(u_1, C(u_2, u_3))$$

- k herhangi bir sabitse ve φ fonksiyonu C'nin üreticisi ise $k\varphi$ de C'nin bir üretici fonksiyondur.

Arşimedyan kapulalar önemli özellikler sunmasına rağmen yüksek boyutlu bağımlılıkları modellemede esnek değildir. Bu esneksizlik diğer nedenlerin yanı sıra Arşimedyan kapulaların çok değişkenli bağımlılıkları yakalamada sadece bir veya iki parametreye sahip olmasından kaynaklanmaktadır.

2.3. İki Değişkenli Elipsel Kapula Aileleri

Aşağıda iki değişkenli elipsel kapula aileleri anlatılmaktadır. Bu konu hakkında detaylı bilgi için Joe ve Kurowicka (2011) ve Nelsen (2006) incelenebilir.

- *Gaussian kapula (Normal kapula)*

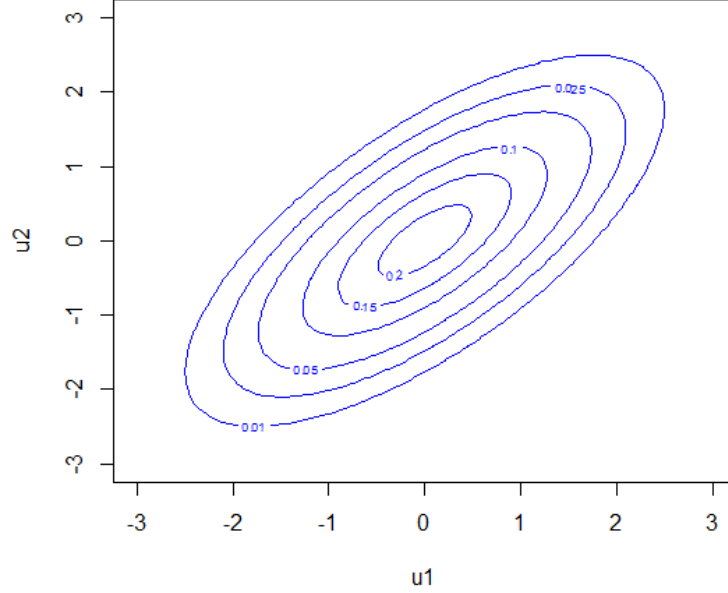
İki değişkenli Gaussian kapula elipsel kapula ailesine aittir ve aşağıda şekilde tanımlanmaktadır.

$$C(u_1, u_2) = \Phi_{\rho_{u_1, u_2}}[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)] \quad (2.7)$$

Burada $\Phi_{\rho_{u_1, u_2}}$ iki değişkenli ortak standart normal dağılım fonksiyonudur ve ρ_{u_1, u_2} doğrusal korelasyon katsayısına sahiptir. Φ^{-1} , standart normal dağılım fonksiyonunun tersidir. Gaussian kapulanın yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmektedir:

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} - \frac{2\rho\xi_1\xi_2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{2(1 - \rho^2)} \right] \quad (2.8)$$

Burada $\xi_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ ile $\xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ ve $\rho \in (-1,1)$ dir. Gaussian kapula $\rho \rightarrow 1$ için tam pozitif ve $\rho \rightarrow -1$ için tam negatif bağımlılık göstermektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı Gaussian kapula ile Şekil 2.1'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.1. 0.5 korelasyon katsayılı Gaussian kapula grafiği

- *Student t kapula (t kapula)*

İki değişkenli Student t kapula iki parametrelili bir kapula fonksiyonudur ve Gaussian kapula ile benzer şekilde elde edilir. $t_{p,v}$, ρ doğrusal korelasyon katsayılı ve serbestlik derecesi ($v > 0$) olan iki değişkenli ortak standart t dağılım fonksiyonudur. t^{-1} , standart t dağılımının tersidir. Bu durumda iki değişkenli Student t kapulanın dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C(u_1, u_2) = t_{p,v}[t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2)] \quad (2.9)$$

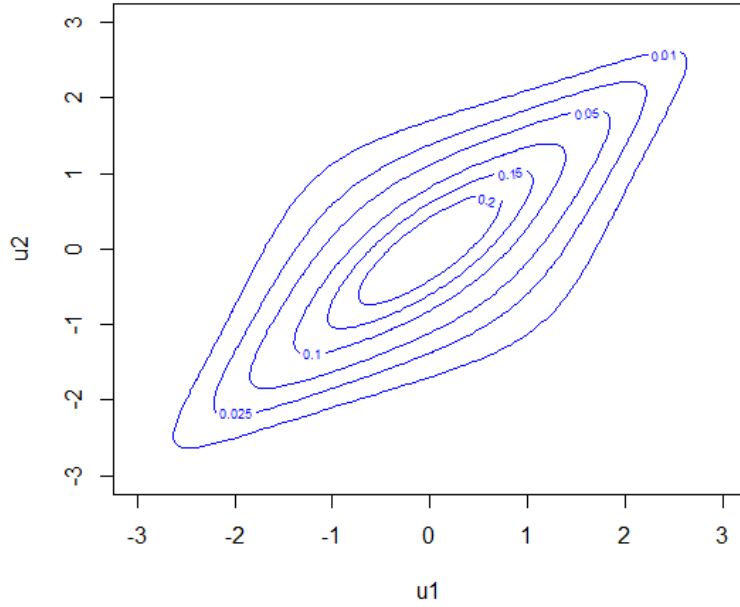
Student t kapulanın yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)^2} \frac{(1 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2)^{\left(\frac{-v+2}{2}\right)}}{\prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{v}\right)} \quad (2.10)$$

Burada $\zeta_i = t_v^{-1}(u_i)$, $i = 1,2$ ve Γ Euler fonksiyonudur. Gaussian kapula ile benzer şekilde

$\rho \in (-1,1)$ dir. $\rho \rightarrow 1$ için tam pozitif ve $\rho \rightarrow -1$ için tam negatif bağımlılığı ve $\rho = 0$ ilişkinin olmadığını göstermektedir. Hem Gaussian hem de Student t kapula elipsel kapula

ailisinden olmasına rağmen kuyruk bağımlılığı açısından farklılıklar göstermektedir. Alt kuyruk bağımlılığı kapula fonksiyonunun alt kuyruğundaki yoğunluğu ifade ederken üst kuyruk bağımlılığı kapula fonksiyonunun üst kuyruğundaki yoğunluğu göstermektedir. Kuyruk bağımlılığı ortak negatif veya pozitif üç değerlerin gözlenme olasılığını temsil etmektedir. Gaussian kapula kuyruk bağımlılığına sahip değilken Student t kapula eşit alt ve üst kuyruk bağımlılığını modelleyebilmektedir. Student t kapulanın kuyruk bağımlılık seviyesi ν serbestlik derecesi ile belirlenmektedir. Serbestlik derecesi arttıkça kuyruk bağımlılık seviyesi azalır ve $\nu \rightarrow \infty$ Student t kapula Gaussian kapulaya yakınsamaktadır. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı Student t kapula ile Şekil 2.2'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.2. 0.5 korelasyon katsayılı ve 3 serbestlik dereceli Student t kapula grafiği

2.4. İki Değişkenli Arşimedyen Kapula Aileleri

Arşimedyen adı, kapulaların reel sayılar için Arşimedyen aksiyomuna benzeyen cebirsel özelliğini ifade etmektedir. Elipsel kapulaların aksine Arşimedyen kapulalar tek değişkenli üretici fonksiyonlarıyla değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı hakkında tüm bilgiyi modelleyebilmektedir. Arşimedyen kapula aileleri aşağıda ifade edilmektedir.

- *Frank kapula*

Frank kapula bir parametrelili simetrik Arşimedyen kapuladır ve üretici fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\varphi(t) = -\ln \left[\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \quad (2.11)$$

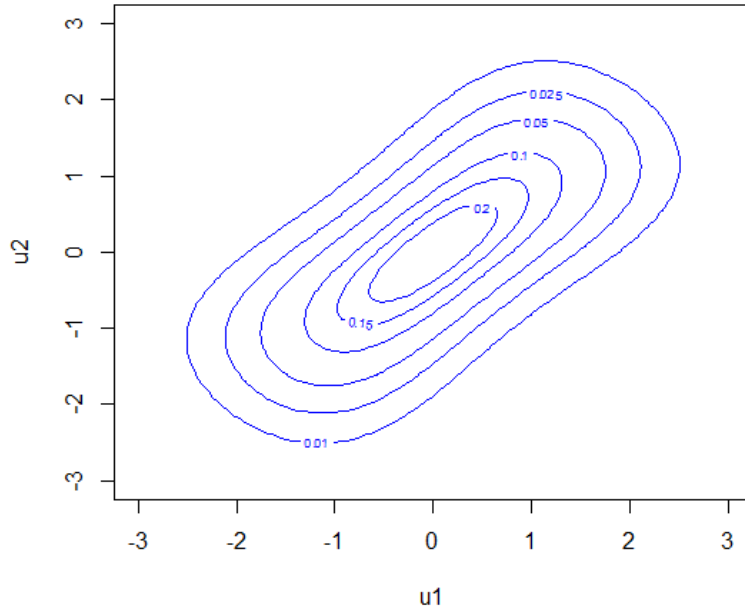
Parametrenin tanım aralığı $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ 'dır. Frank kapula negatif ve pozitif bağımlılık yapılarını modelleyebilmektedir. Ancak alt ve üst kuyruk bağımlılıklarını yakalayamamaktadır. Frank kapulanın dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = \frac{-1}{\theta} \ln \left[\frac{1 + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] \quad (2.12)$$

Frank kapulanın yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$c(u_1, u_2) = \theta(e^{-\theta} - 1) \frac{e^{-\theta}(u_1 + u_2)}{e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)} \quad (2.13)$$

Frank kapula $\theta \rightarrow -\infty$ için negatif bağımlılığı ve $\theta \rightarrow \infty$ için pozitif bağımlılığı göstermektedir. Bununla birlikte, $\theta = 0$ için iki değişkenin bağımsız olduğu ifade edilmektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı Frank kapula ile Şekil 2.3'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.3. $\theta = 5.8$ olan Frank kapula grafiği

- *Clayton kapula*

Clayton bir parametrelili kapuladır ve alt pozitif kuyruk bağımlılığını modellemektedir. Clayton kapulanın üretici fonksiyonu aşağıda tanımlanmaktadır:

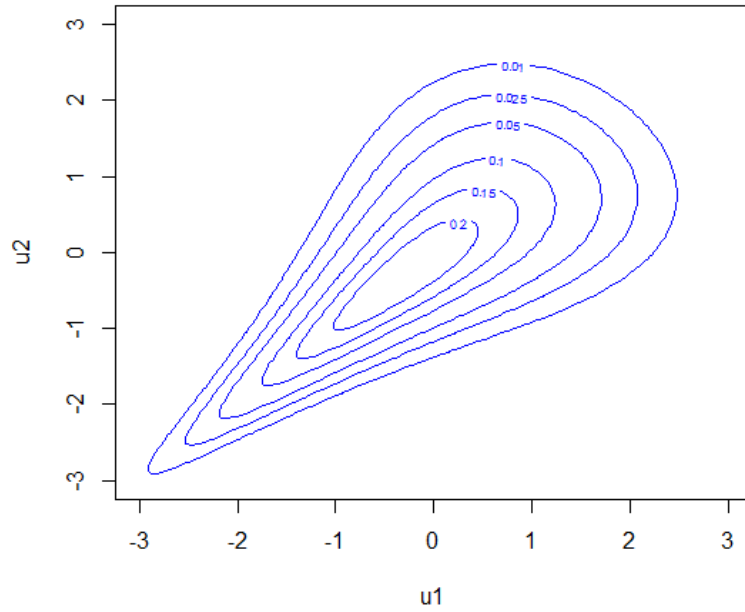
$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \quad (2.14)$$

Clayton kapulanın dağılım ve yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıda verilmektedir:

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}} \quad (2.15)$$

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta)(u_1, u_2)^{-1-\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2} \quad (2.16)$$

Parametrenin tanım aralığı $\theta \in (0, \infty)$ 'dır. Clayton kapula $\theta \rightarrow \infty$ için pozitif bağımlılığı ve $\theta = 0$ için bağımsızlığı ifade etmektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı Clayton kapula ile Şekil 2.4'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.4. $\theta = 2$ olan Clayton kapula grafiği

- *Joe kapula*

Joe kapula bir parametrelili bir Arşimedyen kapuladır ve Clayton kapulanın aksine üst pozitif kuyruk bağımlılığını modellemektedir. Joe kapulanın üretici fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

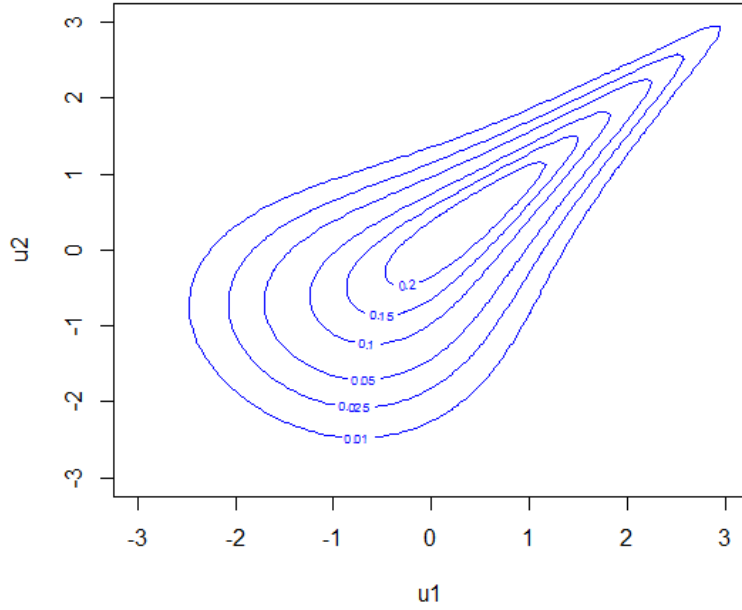
$$\varphi(t) = \ln[1 - (1 - t)^{\theta}] \quad (2.17)$$

Joe kapulanın dağılım ve yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıda verilmektedir:

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = 1 - [(1 - u_1)^{\theta} + (1 - u_2)^{\theta} - (1 - u_1)^{\theta}(1 - u_2)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}} \quad (2.18)$$

$$c(u_1, u_2) = \left[(1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)^\theta (1 - u_2)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta} - 2} x (1 - u_1)^{\theta - 1} (1 - u_2)^{\theta - 1} \\ x \left[\theta - 1 + (1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)^\theta (1 - u_2)^\theta \right] \quad (2.19)$$

Parametrenin tanım aralığı $\theta \in (1, \infty)$ 'dır. Joe kapula $\theta \rightarrow \infty$ için pozitif bağımlılığı ve $\theta \rightarrow 1$ için bağımsızlığı ifade etmektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı Joe kapula ile Şekil 2.5'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.5. $\theta = 2.8$ olan Joe kapula grafiği

- *Gumbel kapula*

Bir parametrelili Arşimedyen kapulalardan biri de Gumbel kapuladır. Joe kapulaya benzer şekilde Gumbel kapula da üst kuyruk bağımlılığını modellemektedir. Gumbel kapulanın üretici fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

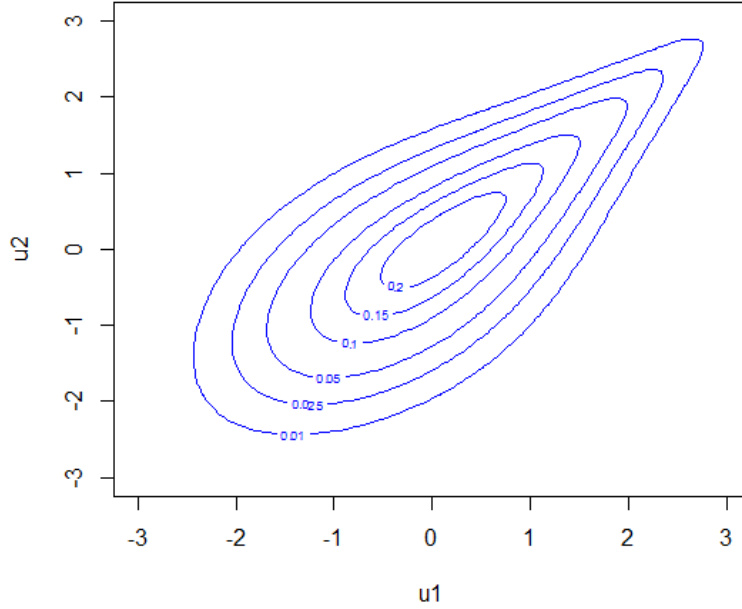
$$\varphi(t) = (-\ln(t))^\theta \quad (2.20)$$

Gumbel kapulanın dağılım ve yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıda verilmektedir:

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp \left[- \left((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \quad (2.21)$$

$$c(u_1, u_2) = C_\theta(u_1, u_2)(u_1, u_2)^{-1} \frac{(\ln(u_1) \ln(u_2))^{\theta - 1}}{\left((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta \right)^{2 - \frac{1}{\theta}}} \quad (2.22)$$

Parametrenin tanım aralığı $\theta \in [1, \infty)$ 'dır. Gumbel kapula $\theta \rightarrow \infty$ için pozitif bağımlılığı ve $\theta \rightarrow 1$ için bağımsızlığı ifade etmektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı Gumbel kapula ile Şekil 2.6'daki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.6. $\theta = 2$ olan Gumbel kapula grafiği

- *Clayton-Gumbel kapula (BB1)*

Clayton-Gumbel (BB1) kapula iki parametrelili bir Arşimedyen kapuladır ve Clayton ile Gumbel ailesinin genelleştirilmiş versiyonu olarak ifade edilebilir. Bu kapulanın üretici fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)^\delta \quad (2.23)$$

BB1 kapulanın dağılım ve yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıda verilmektedir:

$$C(u_1, u_2) = \left[1 + \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad (2.24)$$

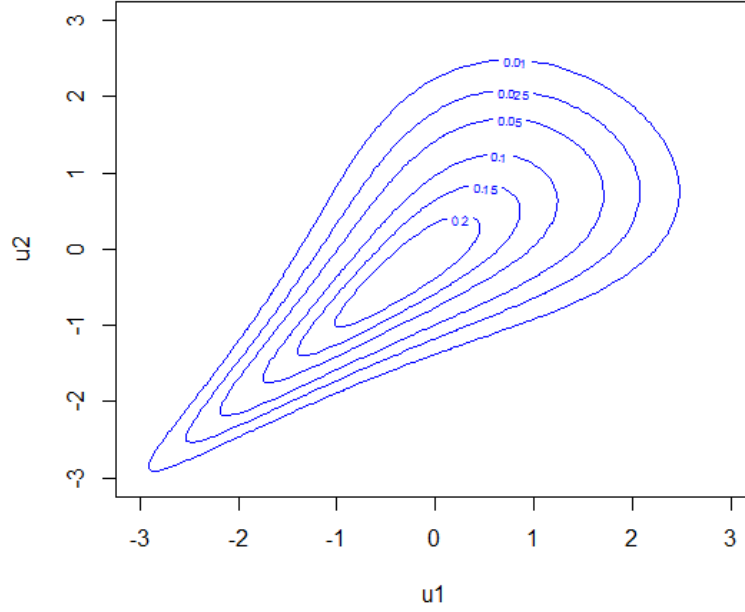
$$c(u_1, u_2) = \left\{ 1 + \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\}^{-\frac{1}{\theta}-2}$$

$$x \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{2}{\delta}-2}$$

$$x \left\{ \theta\delta + 1 + \theta(\delta - 1) \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\}$$

$$x (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta-1} u_1^{-\theta-1} (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta-1} u_2^{-\theta-1} \quad (2.25)$$

Parametrelerin tanım aralığı $\theta \in (0, \infty)$ ve $\delta \in [1, \infty)$ 'dır. $\theta = 0$ olduğunda BB1 kapula Gumbel kapula olmakta ve $\delta = 1$ için BB1 kapula Clayton kapula olmaktadır. BB1 kapula $\theta \rightarrow \infty$ ve $\delta \rightarrow \infty$ için pozitif bağımlılığı ifade etmektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı BB1 kapula ile Şekil 2.7'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.7. $\theta = 2$ ve $\delta=1$ olan BB1 kapula grafiği

- *Joe-Clayton kapula (BB7)*

Joe-Clayton (BB7) kapula iki parametrelili bir Arşimedyan kapula ailesidir. Bu kapulanın üretici fonksiyonu aşağıda verilmektedir:

$$\varphi(t) = [1 - (1 - t)^\theta]^\delta \quad (2.26)$$

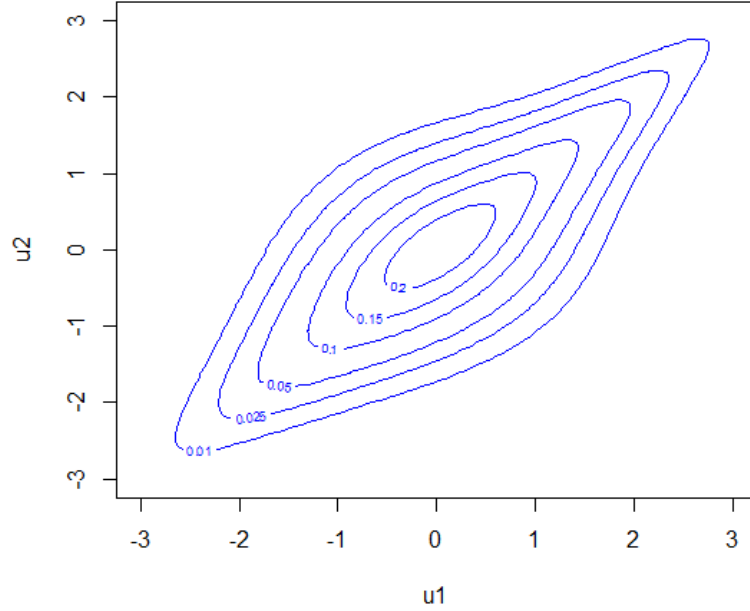
Joe-Clayton (BB7) kapulanın dağılım ve yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıda tanımlanmaktadır:

$$C(u_1, u_2) = 1 - \left[1 - \left[(1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} + (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} \right]^{\frac{-1}{\delta}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (2.27)$$

$$c(u_1, u_2) = \left[1 - (u_1 + u_2 + 1)^{\frac{-1}{\delta}} \right]^{\frac{1}{\theta-2}} (u_1 + u_2 + 1)^{\frac{-1}{\theta-2}} [(u_1 + 1) + (u_2 + 1)]^{1+\frac{1}{\delta}}$$

$$x \left[\theta(\delta + 1) - (\theta\delta + 1)(u_1 + u_2 + 1)^{\frac{-1}{\delta}} \right] [(1 - u_1)[1 - u_2]]^{\theta-1} \quad (2.28)$$

Parametrelerin tanım aralığı $\theta \in [1, \infty)$ ve $\delta \in (0, \infty)$ 'dır. $\theta = 1$ olduğunda BB7 kapula Clayton kapula olmakta ve $\delta = 0$ için BB7 kapula Joe kapula olmaktadır. BB7 kapula $\theta \rightarrow \infty$ ve $\delta \rightarrow \infty$ için pozitif bağımlılığı ifade etmektedir. İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı BB7 kapula ile Şekil 2.8'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.8. $\theta = 2$ ve $\delta=1$ olan BB7 kapula grafiği

2.5. Döndürülmüş (Rotated) Kapula Aileleri

Döndürülmüş kapula asimetrik kapulaların döndürülmüş versiyonlarını ifade etmektedir. Kapulalar $(1 - u_1, u_2)$, $(1 - u_1, 1 - u_2)$ ve $(u_1, 1 - u_2)$ argümanları ile sırasıyla 90, 180 ve 270 derece döndürülebilirler. 90 ve 270 derece döndürme ilgili kapulanın negatif bağımlılık yapılarının modellenmesini sağlamaktadır. 180 derece döndürme ise ilgili sağ kalım kapula ailesinin üretilmesini sağlamaktadır. Örneğin, Clayton, joe, Gumbel ve BB7 kapulalar sadece pozitif bağımlılık yapılarını kontrol edebilirler. Bu nedenle negatif kuyruk bağımlılığı gösteren veri yapılarını modellemek için bahsedilen kapulalar yeni kapulalar elde etmek için döndürülebilir. Döndürülmüş kapular hakkında detaylı bilgi için Cech (2006), Luo (2011) ve Wiboonpongse vd (2015) incelenebilir. Döndürülmüş kapulalar aşağıda tanımlanmaktadır:

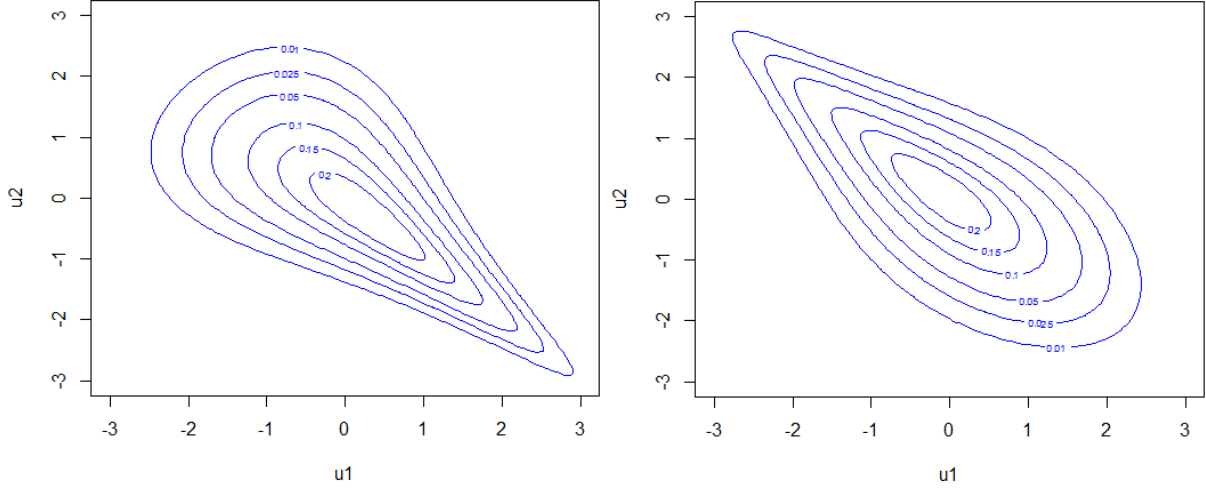
- *Döndürülmüş kapula (90 derece)*

$$C_{90}(u_1, u_2) = u_2 - C(1 - u_1, u_2) \quad (2.29)$$

Bu kapulaların yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$c_{90}(u_1, u_2) = c_{90}(1 - u_1, u_2) \quad (2.30)$$

İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı döndürölmüş (90 derece) Clayton ve döndürölmüş (90 derece) Gumbel kapular ile Şekil 2.9'daki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.9. Sırasıyla $\theta = -2$ olan döndürölmüş (90 derece) Clayton ile döndürölmüş (90 derece) Gumbel kapula grafiği

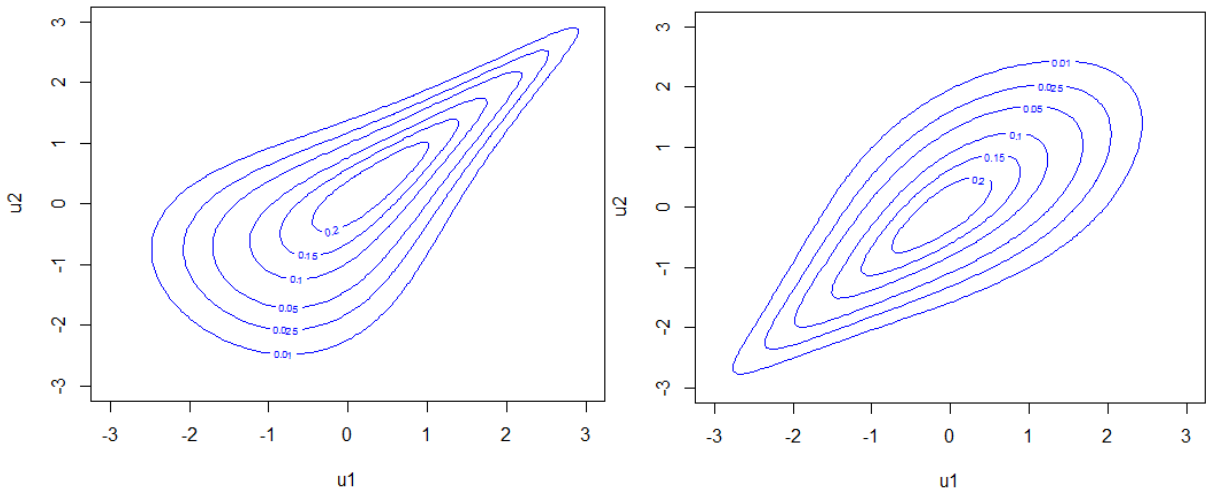
- Sağkalım kapula (180 derece)

$$C_{180}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, u_2) \quad (2.31)$$

Bu kapuların yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$c_{180}(u_1, u_2) = C_{180}(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (2.32)$$

İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı sağkalım Clayton ve sağkalım Gumbel kapular ile Şekil 2.10'daki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.10. Sırasıyla $\theta = 2$ olan sağkalım Clayton ile sağkalım Gumbel kapula grafiği

- Döndürülmüş kapula (270 derece)

$$C_{270}(u_1, u_2) = u_1 - C(u_1, 1 - u_2) \quad (2.33)$$

Bu kapulaların yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

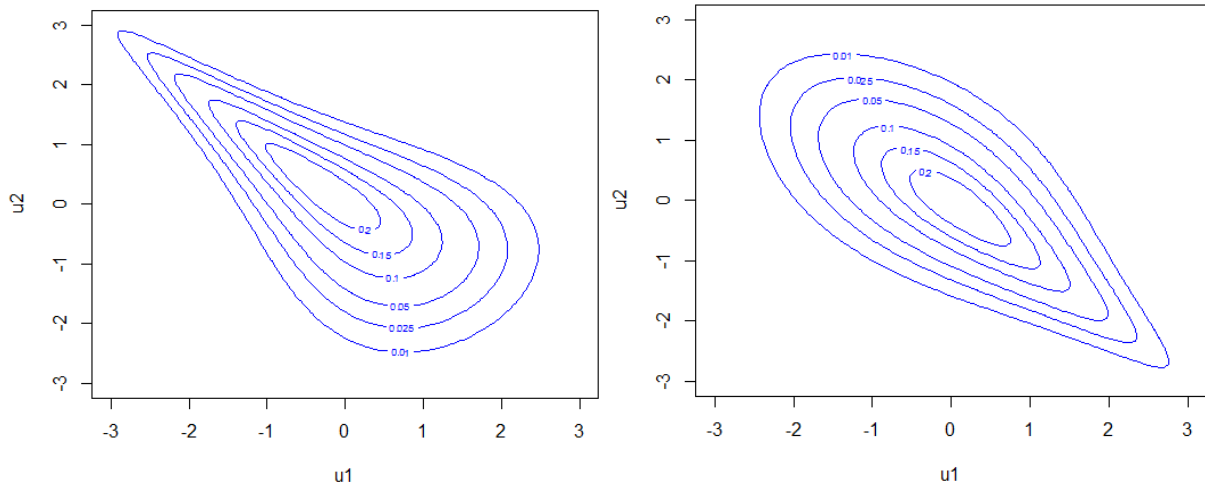
$$c_{270}(u_1, u_2) = C_{270}(u_1, 1 - u_2) \quad (2.34)$$

Eğer kapula simetrikse bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır:

$$c(u_1, u_2) = c_{180}(u_1, u_2) \quad (2.35)$$

$$c_{90}(u_1, u_2) = c_{270}(u_1, u_2) \quad (2.36)$$

İki değişken arasındaki bağımlılık yapısı döndürülmüş (270 derece) Clayton ve döndürülmüş (270 derece) Gumbel kapulalar ile Şekil 2.11'deki gibi modellenmektedir.



Şekil 2.11. Sırasıyla $\theta = -2$ olan döndürülmüş (270 derece) Clayton ile döndürülmüş (270 derece) Gumbel kapula grafiği

2.6. Çok Değişkenli Elipsel Kapula Aileleri

Elipsel kapulalar eşitlik (2.2)'de verilen ters dönüşüm kullanılarak elipsel dağılımlar yardımıyla üretilir (Owen ve Rabinovitch, 1983). Elipsel kapula ailelerinden biri Gaussian kapuladır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C(u) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (2.37)$$

Burada Φ ve Φ^{-1} sırasıyla standart normal kümülatif dağılım fonksiyonu ve standart normal kümülatif dağılım fonksiyonunun tersidir. Φ_R ise $R \in [-1,1]^n$ simetrik pozitif tanımlı korelasyon matrisine sahip çok değişkenli standart normal kümülatif dağılım fonksiyonudur. Bir diğer yaygın kullanılan elipsel kapula, çok değişkenli Student t kapuladır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C(u) = t_{R,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \quad (2.38)$$

Burada $t_{R,v}$, $R \in [-1,1]^n$ korelasyon matrisli ve $v > 0$ serbestlik dereceli çok değişkenli standart Student t kümülatif dağılım fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. t_v^{-1} , v serbestlik dereceli tek değişkenli standart t dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonunun tersidir.

2.7. İkili Kapula Yapısı

İkili kapula yapısı, esnek çok değişkenli dağılımları oluşturmada faydalı bir yöntem sunmaktadır. Joe (1997), Sklar (1959) teoremine dayalı olarak kümülatif dağılım fonksiyonunu kullanarak ikili kapula oluşturma kurallarını ortaya koymuştur. İkili kapula yapısı, çok değişkenli bir yoğunluk fonksiyonunun ardışık iki değişkenli kapulalara ayrılmasına dayalı olarak oluşturulur. Bu kural orijinal değişkenlere ve onların koşullu ve koşulsuz dağılımlarına uygulanır. Bedford ve Cooke (2001,2002) ikili kapula yapısı için farklı kombinasyonların var olduğunu göstermiş ve bu kombinasyonları oluşturmak için sıralı olarak ağaçları tasarlamaya dayalı bir grafiksel yöntem önermiştir. Bu dağılımlar regular vine olarak adlandırılmaktadır. Aas vd. (2009) iki değişkenli kapula seçiminde bir kısıtlama olmadığından dolayı bu ikili kapula oluşum prensibini, yapı taşları olarak keyfi iki kapula ailesi belirleyip genişletilebildiğini ortaya koymuştur. Bundan dolayı, yapı taşları olarak farklı kapula ailelerine izin veren ikili kapula oluşum prensini kullanarak ayrıştırılan çok değişkenli bir dağılım karma (mixed) vine olarak adlandırılır. Bu vine kapulalar, orijinal değişkenlerin karmaşık bağımlılık yapılarını modellemektedir.

Genel olarak vine kapulalar, uniform dağılımlı marjinallere sahip vine dağılımlarıdır. Regular vine kapulalar iki türü içermektedir. Bunlar; C-vine ve D-vine kapulalardır. Bu vine kapulaların arasındaki temel fark, çok değişkenli yoğunluk fonksiyonunu ayrıştırma yöntemden kaynaklanmaktadır. C-vine kapulalar, çok değişkenli yoğunluğu ayrıştırmak için yıldız ağacı metodolojisini kullanırken D-vine kapulalar, düz ağaç metodolojisini kullanır. d -boyutlu bir veri için ikili kapula modeli $\frac{d(d-1)}{2}$ koşulsuz ve $(d-1)(d-2)$ koşullu ikili kapulaya gerek duymaktadır. Bu kapulaların aynı aileden olması zorunlu değildir. Bir diğer ifadeyle, ikili kapula yapısı her bir değişken çifti için farklı iki değişkenli kapulaların belirlenmesine olanak sağlamaktadır. Böylelikle, ikili kapulaya dayalı modeller, bağımlılığı tek bir kapula ile modellemede karşılaşılan sınırlamalarının üstesinden gelmekte ve böylece

daha esnek çok değişkenli modeller sunmaktadır. İkili kapula yapısı aşağıda verilen örnekteki gibi tanımlanabilir:

Örnek 2.7.1. (3-boyutlu eş kapula yapısı)

$X = (X_1, X_2, X_3)$ rastgele değişken vektörü, $f(x_1, x_2, x_3)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ü ve f_1, f_2 ile f_3 ise bu değişkenlerin tek değişkenli marjinal yoğunlukları olsun. O halde f fonksiyonu aşağıdaki şekilde ayrılabilir:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_3(x_3) \cdot f(x_2|x_3) \cdot f(x_1|x_2, x_3) \quad (2.39)$$

Eşitlik (2.2) ve (2.5) kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_{123}[F(x_1), F(x_2), F(x_3)] \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \quad (2.40)$$

Burada c_{123} 3-boyutlu bir kapula yoğunluk fonksiyonudur. O halde $f(x_2|x_3)$ koşullu fonksiyonu aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir:

$$\begin{aligned} f(x_2|x_3) &= \frac{f(x_2, x_3)}{f_3(x_3)} = \frac{c_{23}[F(x_2), F(x_3)] \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3)}{f_3(x_3)} \\ &= c_{23}[F(x_2), F(x_3)] \cdot f_2(x_2) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Benzer şekilde, eşitlik (2.39) da verilen $f(x_1|x_2, x_3)$ aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2, x_3) &= \frac{c_{12|3}[F(x_1|x_3), F(x_2|x_3)] \cdot f(x_1|x_3) \cdot f(x_2|x_3)}{f(x_2|x_3)} \\ &= c_{12|3}[F(x_1|x_3), F(x_2|x_3)] \cdot f(x_1|x_3) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$f(x_1|x_3)$ aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} f(x_1|x_3) &= \frac{f(x_1, x_3)}{f_3(x_3)} = \frac{c_{13}[F(x_1), F(x_3)] \cdot f_1(x_1) \cdot f_3(x_3)}{f_3(x_3)} \\ &= c_{13}[F(x_1), F(x_3)] \cdot f_1(x_1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Eşitlik (2.41), (2.42) ve (2.43) birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilebilir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= c_{13}[F(x_1), F(x_3)] \cdot c_{23}[F(x_2), F(x_3)] \cdot \\ & c_{12|3}[F(x_1|x_3), F(x_2|x_3)] \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Burada (2.42) de tanımlanan $c_{12|3}$ koşullu kapulanın X_3 koşul değişkeninden bağımsız olduğu varsayılır. Bir diğer ifadeyle,

$$c_{12|3}[F(x_1|x_3), F(x_2|x_3); x_3] \equiv c_{12|3}[F(x_1|x_3), F(x_2|x_3)] \quad (2.45)$$

Haff vd. (2010) bu varsayımla vine kapula modelini basitleştirilmiş ikili kapula yapısı olarak adlandırmıştır. Bu varsayım esnek modeller oluşturmak için gereklidir. Bununla birlikte, basitleştirilmiş ikili kapula yapısının doğru ayrışma için iyi bir yaklaşım olduğu ortaya konmuştur. Diğer taraftan, 3-boyutlu ikili kapula ayrışımı için tek bir seçenek yoktur. Eşitlik (2.41) için alternatif bir ayrışım aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2, x_3) &= \frac{f(x_1, x_3|x_2)}{f(x_3, x_2)} = \frac{c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)]f(x_1|x_2)f(x_3|x_2)}{f(x_3|x_2)} \\ &= c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)]f(x_1|x_2) = c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)] \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \\ &= c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)] \frac{c_{12}[F(x_1), F(x_2)]. f_1(x_2). f_2(x_2)}{f_2(x_2)} \\ &= c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)]. c_{12}[F(x_1), F(x_2)]. f_1(x_2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Böylece f ortak yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= c_{12}[F(x_1), F(x_2)]. c_{23}[F(x_2), F(x_3)]. \\ & c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)]. f_1(x_1). f_2(x_2). f_3(x_3) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Eşitlik (2.47) deki $c_{13|2}$ koşullu kapula eşitlik (2.44)'deki $c_{12|3}$ koşullu kapuladan farklıdır. Örnek 2.7.1'de görüldüğü gibi ikili kapula yapısı tek değildir ve farklı ayrışmalar farklı sonuçlar verir. Örneğin, 5-boyutlu yoğunluk fonksiyonu için 240 farklı ikili kapula yapısı mevcuttur (Aas vd, 2009). Boyut arttıkça ikili kapula yapısının sayısı artmaktadır. Bu nedenle, ikili kapula yapısını düzenlemek için Bedford ve Cooke (2001) ile Bedford ve Cooke (2002) regular vine olarak da adlandırılan bir grafiksel araç geliştirmiştir. Bu grafiksel araç, iç içe bir ağaç kümesi olarak da tanımlanabilir.

2.7.1. Regular Vine

Bu bölümde regular vine yapısına ilişkin önemli tanım, teori ve bazı detayları hakkında bilgiler sunulmaktadır.

Tanım 2.7.1.(Ağaç)

$T = \{N, E\}$, N düğümlü ve E kenarlı (N tane düğümün her bir çiftini bağlantısı) bir ağaç grafiğidir. Düğümün derecesi, bu düğüme bağlanan kenarların toplam sayısı olarak belirlenir (Bedford ve Cooke, 2001).

Tanım 2.7.2.(Vine, Regular Vine)

V , aşağıdaki koşulları sağlarsa d boyutlu bir vine olarak adlandırılır.

- $V = (T_1, T_2, \dots, T_{d-1})$ 'dir. Burada T_1 vine yapısının ilk ağacını göstermekte ve diğerleri de bu şekilde devam etmektedir.
- T_1 ağacı $N_1 = \{1, 2, \dots, d\}$ düğüm ve E_1 kenarlı bağlı bir ağaçtır.
- $t = 2, 3, \dots, d - 1$ için T_t ağacı $N_t = E_{t-1}$ düğümlü ve E_{t-1} kenarlı bağlı bir ağaçtır.

Ayrıca V aşağıdaki koşulları sağlarsa d boyutlu bir regular vine olarak adlandırılır.

- $t = 2, 3, \dots, d - 1$ için $l = \{l_1, l_2\}$ ve $m = \{m_1, m_2\}$, T_t 'deki kenarlar ile bağlanmış iki düğüm ise kesin olarak l 'nin bir tanesi m_i 'nin ($i = 1, 2$) bir tanesine eşittir. Bu koşul, yakınlık koşulu olarak bilinmektedir.
- işe birleştirilmiş iki düğüm ise l_i 'nin biri kesin olarak m_i 'nin birine eşittir. Bu koşul yakınlık koşulu olarak da bilinir.

Yakınlık koşulu altında, (T_{j+1}) ağacındaki iki düğüm önceki ağaçtaki (T_j) ortak bir düğüm paylaşıyorsa yalnızca bir kenar ile bağlanır (Kurowicka ve Cooke, 2006).

Tanım 2.7.3.(Regular Vine özelliği)

$(\mathcal{F}, V, \mathcal{B})$ aşağıdaki özellikler sağlıyorsa bir regular vine (R-vine) kapuladır:

- $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_d)$, sürekli tersi alınabilir dağılım fonksiyonu vektörüdür.
- V , d boyutlu regular vine yapısıdır.
- $\mathcal{B} = \{B_e | i = 1, 2, \dots, d - 1; e \in E_i\}$ iki değişkenli kapula kümesidir.

Tanım 2.7.4.(D-vine ve C-vine)

Cooke ve Kurowicka (2006), D-vine ve C-vine yapılarını aşağıdaki şekilde tanımlamaktadır.

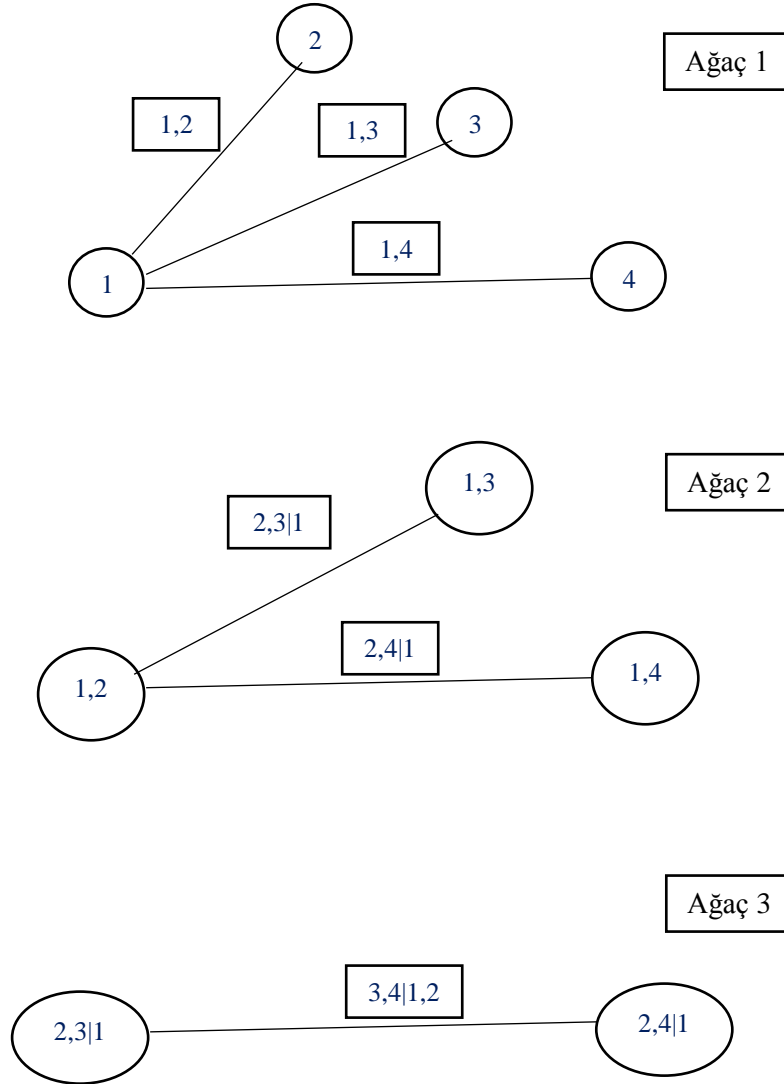
- Regular vine yapısının ilk ağacındaki her düğüm en çok iki düğümlle bağlıysa bu regular vine yapısı, D-vine olarak adlandırılır.

- Regular vine yapısının her T_j ağacında tüm diğer düğümlere bağlı bir özel düğüm (kök düğüm) varsa bu regular vine yapısı, C-vine olarak adlandırılır.

4-boyutlu C ve D vine yapılarıyla 5-boyutlu regular vine yapısına ait birer örnek aşağıda verilmektedir (Aas vd., 2009).

Örnek 2.7.2. (4-boyutlu C-vine)

Genel olarak d -boyutlu C-vine kapula için $d!/2$ tane ağaç yapısı mevcuttur. Bu nedenle 4-boyutlu C-vine yapısındaki ağaçları sıralamak için 12 farklı seçenek vardır. 4-boyutlu C-vine kapula aşağıdaki ağaç diyagramında verilmektedir.



Şekil 2.12. 4-Boyutlu C-vine yapısı

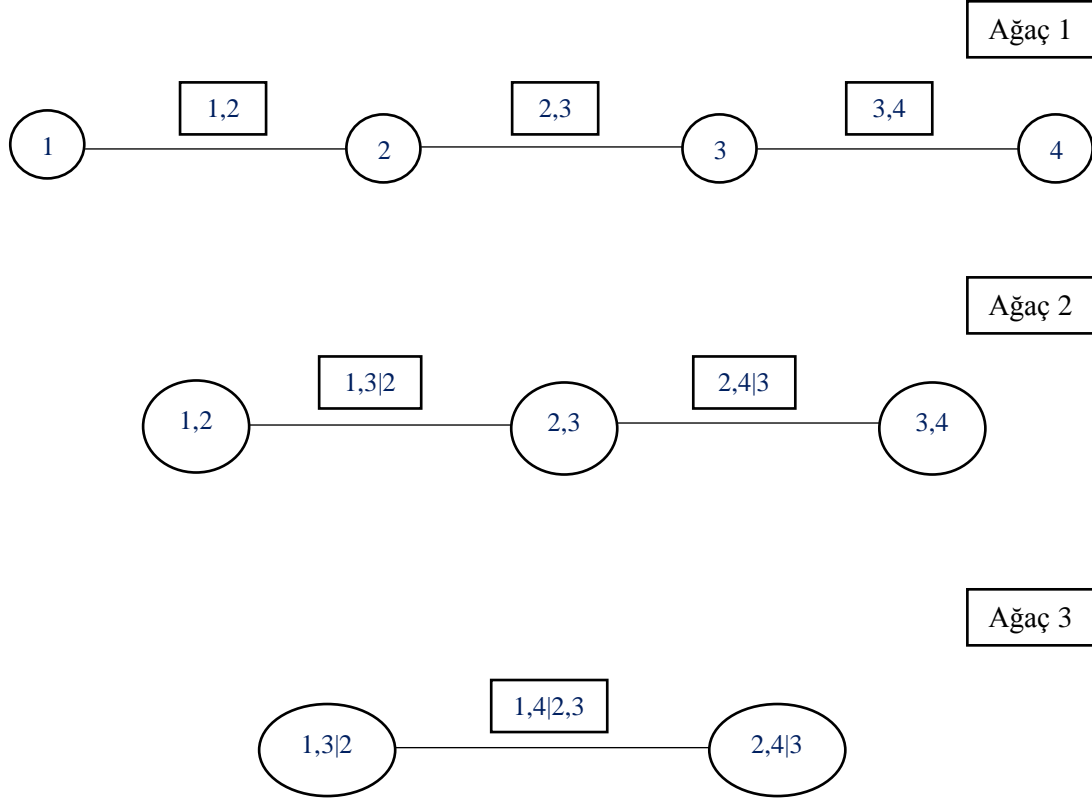
Bu ağaç diyagramında her bir düğüm bir değişkeni göstermektedir ve her bir kenar iki değişkenli (koşullu ve koşulsuz) kapula ailesine karşılık gelmektedir. Bu diyagramdan da görüldüğü gibi diğer tüm değişkenlere bağlanan bir kök değişken vardır. İlk ağaçta kök değişkenine göre tüm değişkenler arasındaki iki değişkenli bağımlılık yapılarını modellemek için koşulsuz iki değişkenli kapulalar kullanılır. İkinci ve üçüncü ağaçlarda ise iki değişkenli koşullu bağımlılık yapılarını modellemek için iki değişkenli koşullu kapulalar belirlenir. Bu örnekte 4 değişken, 3 ağaç ve 6 kenar vardır. Her bir çift için iki değişkenli bir kapula tahmin edilirse 6 tane (3 koşulsuz ve 3 koşullu) iki değişkenli kapula yoğunluğu olacaktır.

4-boyutlu C-vine yapısının ortak yoğunluk fonksiyonu eşitlik (2.48)'de verilmektedir:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times f_3(x_3) \times f_4(x_4) \\
& c_{12}[F(x_1), F(x_2)] \times c_{13}[F(x_1), F(x_3)] \times c_{14}[F(x_1), F(x_4)] \\
& c_{23|1}[F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)] \times c_{24|1}[F(x_2|x_1), F(x_4|x_1)] \\
& c_{34|12}[F(x_3|x_1, x_2), F(x_4|x_1, x_2)] \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Örnek 2.7.3. (4-boyutlu D-vine)

C-vine yapısında olduğu gibi D-vine yapısında da $d!/2$ ayırma seçeneği vardır. Ancak D-vine yapısı kök değişkene gerek duymamaktadır. D-vine yapısında değişkenler ardışık olarak oluşturulur. Yani, ilk değişken ikinci değişkene bağlanır, ikinci değişken üçüncü değişkene bağlanır ve bu şekilde devam eder. Böylece, ilk ağaçtaki değişkenler arasındaki iki değişkenli bağımlılık yapılarını modellemek için iki değişkenli koşulsuz kapulalar tahmin edilir. Kalan ağaçlarda ise değişkenler arasındaki koşullu bağımlılık yapılarını modellemek için koşullu iki değişkenli kapulalar belirlenir. Aşağıda verilen ağaç diyagramında 4-boyutlu D-vine ayırma örneği gösterilmektedir.



Şekil 2.13. 4-Boyutlu C-vine yapısı

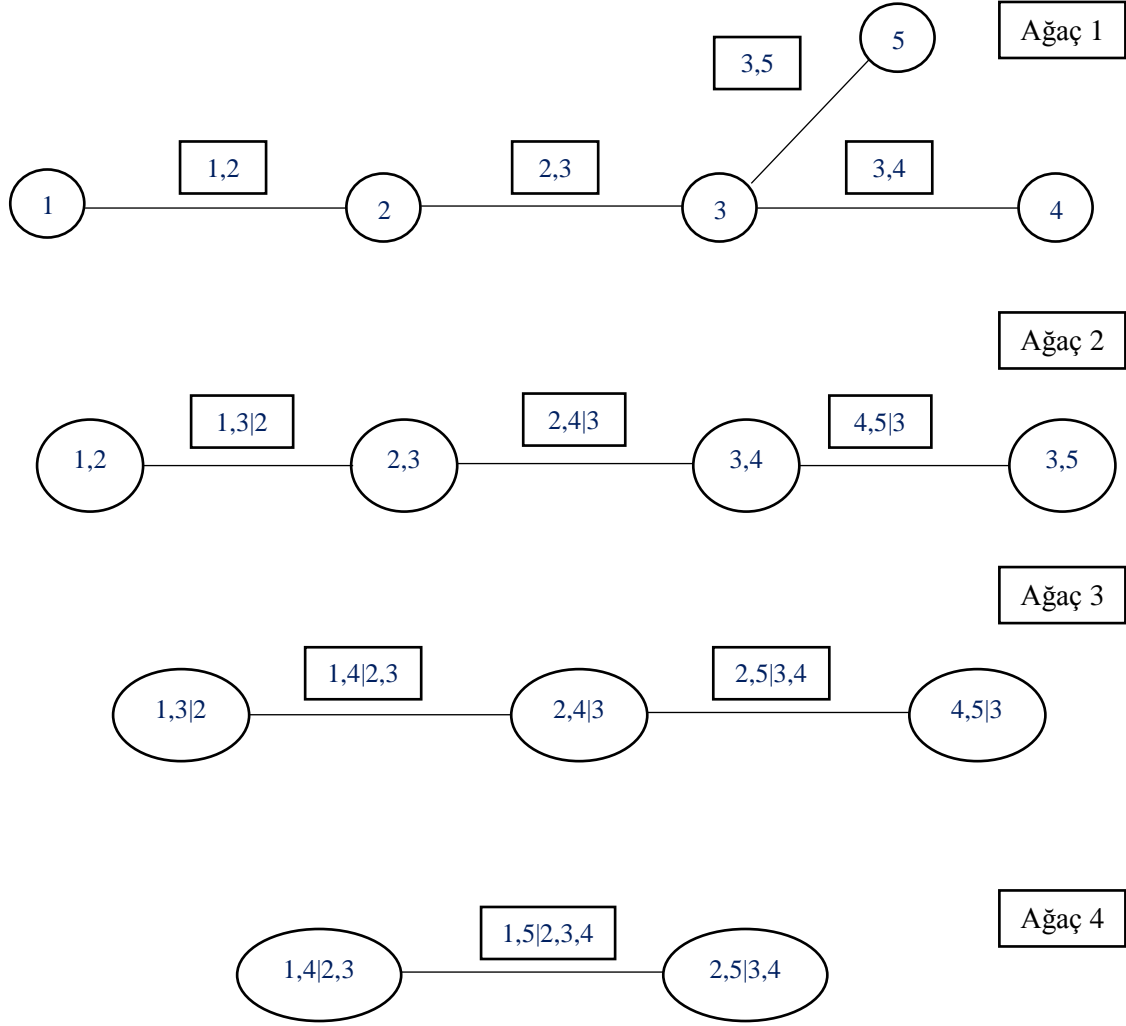
4-boyutlu D-vine yapısında 4 değişken, 3 ağaç ve 6 kenar mevcuttur. 4-boyutlu D-vine yapısının ortak yoğunluk fonksiyonu eşitlik (2.49)'da verilmektedir.

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f_1(x_1) x f_2(x_2) x f_3(x_3) x f_4(x_4) \\
 & c_{12}[F(x_1), F(x_2)] x c_{23}[F(x_2), F(x_3)] x c_{34}[F(x_3), F(x_4)] \\
 & c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)] x c_{24|3}[F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)] \\
 & c_{14|23}[F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)] \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Tanım gereği, hem C-vine hem de D-vine belirli bir ağaç yapısına gerek duymamaktadır. Bununla birlikte, R-vine sınıfı C-vine ve D-vine sınıfindan daha geniş ve her iki vine sınıfını da kapsamaktadır. Morales Napoles (2010), d tane değişken için $(d!/2)2^{\binom{d-2}{2}}$ tane R-vine yapısının var olduğunu göstermiştir. Ayrıca R-vine yapısı, değişkenlerin sıraları üzerinde herhangi bir sınırlamaya gerek duymamaktadır ve yüksek boyutlu değişkenleri modellemek için daha fazla esneklik sunmaktadır.

Örnek 2.7.4. (5-boyutlu R-vine)

Aşağıda verilen ağaç diyagramında 5-boyutlu R-vine kapulunun ayırma örneği gösterilmektedir.



Şekil 2.14. 5-Boyutlu R-vine yapısı

5-boyutlu R-vine yapısında 5 değişken, 4 ağaç ve 10 kenar mevcuttur. Bu ağaç diyagramından da anlaşılacağı gibi, R-vine yapısı C-vine veya D-vine yapısıyla aynı değildir. T_1 ağacındaki 3.düğüm diğer tüm düğümlere bağlı değildir. Bu nedenle C-vine yapısında olduğu gibi bir kök düğüm yoktur. Bununla birlikte, 3.düğümün derecesi 3'tür. Yani 3.düğüm üç düğüme (2,4 ve 5) bağlıdır. Böylelikle, D-vine yapısındaki maksimum dereceden daha

büyük olduğu görülmektedir. Bu nedenle, R-vine yapısı D-vine yapısıyla da aynı değildir. 5-boyutlu R-vine yapısının ortak yoğunluk fonksiyonu eşitlik (2.50)'de verilmektedir.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times f_3(x_3) \times f_4(x_4) \times f_5(x_5) \times \\
&c_{12}[F(x_1), F(x_2)] \times c_{23}[F(x_2), F(x_3)] \times c_{34}[F(x_3), F(x_4)] \times c_{35}[F(x_3), F(x_5)] \times \\
&c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)] \times c_{24|3}[F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)] \times c_{45|3}[F(x_4|x_3), F(x_5|x_3)] \times \\
&c_{14|23}[F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)] \times c_{25|34}[F(x_2|x_3, x_4), F(x_5|x_3, x_4)] \times \\
&c_{15|234}[F(x_1|x_2, x_3, x_4), F(x_5|x_2, x_3, x_4)] \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Özellikle yüksek boyutlu R-vine modellerini oluşturmak kolay değil ve oldukça karmaşıktır. Bu nedenle, Dissmann vd (2013), R-vine modellerinin tüm çıkarımlarını hesaplamak için uygun bir yaklaşım olarak regular vine matrisini oluşturmuştur. Bu matris, Kurowicka (2010)'nın çalışmasına dayalı bir dizi gösterim kullanılarak elde edilmektedir. R-vine matrisine ilişkin bazı detaylar aşağıda verilmektedir. Daha detaylı bilgi için Dissmann (2010) incelenebilir.

Regular Vine Matrisi

R-vine yapısının matris gösteriminin ardındaki temel düşünce, verilen bir R-vine yapısının koşullu ve koşulsuz kümelerini alt üçgensel matrise aktarmaya dayalıdır. Bununla birlikte, R-vine matrisi tek değildir. Bir R-vine matrisi için 2^{d-1} farklı R-vine matrisi vardır. R-vine matrisinin matematiksel tanımı verilmeden önce aşağıdaki notasyonları tanımlamak gerekmektedir.

- $i, s = 1, \dots, d$ olmak üzere $M = (m_{i,s}) \in \{1, \dots, d\}^{d \times d}$ bir alt üçgensel matris olsun.
- $L_m(i)$, M matrisinin i -nci sütunundaki tüm sıfırdan farklı değerler olsun. Burada,

$$L_m(i) = \{m_{i,i}, \dots, m_{d,i}\}$$

- $B_m(i)$ ve $B_m^*(i)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$B_m(i) = \{(m_{i,i}, D): j = i + 1, \dots, d, D = \{m_{j,i}, \dots, m_{d,i}\}\}$$

$$B_m^*(i) = \{(m_{j,i}, D): j = i + 1, \dots, d, D = \{m_{i,i}\} \cup \{m_{j+1,i}, \dots, m_{d,i}\}\}$$

Tanım 2.7.5.(R-vine matrisi)

M alt üçgensel matris olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa M bir R-vine matrisidir.

- $1 \leq s < i \leq d$ olmak üzere $L_m(i) \subset L_m(s)$ 'dir.
- $m_{i,i} \notin L_m(i+1)$, $i = 1, \dots, d-1$
- $i = 1, \dots, d-1$ ve $\forall j = i+1, \dots, d-1$ için
 $(m_{j,i}\{m_{j+1,i}, \dots, m_d\}) \in B_m(i+1) \dots \cup B_m(d-1) \cup B_m^*(i+1) \dots B_m^*(d-1)$

İlk koşul, M alt üçgensel matrisin her sütununun, bu sütunun sağındaki tüm sütunlardaki değerleri kapsadığını ifade etmektedir. İkinci koşul, tüm köşegen değerlerinin farklı olduğunu göstermektedir. Son koşul ise, R-vine yapısının daha önceden de tanımlanan yakınlık koşuludur. R-vine yapısının matris notasyonuna aktarma mantığı aşağıdaki örnekle açıklanabilir.

Örnek 2.7.5. (Matrise aktarılmış 5-boyutlu R-vine yapısı)

Şekil 2.3' te verilen 5-boyutlu R-vine yapısını ele alalım. Bu yapıya ait matris aşağıda verilmektedir.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matris aşağıdaki şekilde oluşturulmaktadır:

- İlk ağacın (T_1) kenarları $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}$ ve $\{3,5\}$ aşağıdaki şekilde M matrisine aktarılmaktadır.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- İkinci ağacın (T_2) $\{1,3|2\}, \{2,4|3\}$ ve $\{4,5|3\}$ kenarları koşullu ve koşul kümeleriyle birlikte aşağıdaki şekilde M matrisine aktarılmaktadır. Yatay çizgi her ağaçtaki koşullu ve koşul kümelerini belirlemeye yardımcı olur.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Üçüncü ağacın (T_3) $\{2,5|3,4\}$ ve $\{1,4|2,3\}$ kenarları aşağıdaki şekilde M matrisine aktarılmaktadır.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Dördüncü ağacın (T_4) $\{1,5|2,3,4\}$ kenarı aşağıdaki şekilde M matrisine aktarılmaktadır.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Her bir değişken çifti için ilgili iki değişkenli kapula ve bu kapuların parametreleri matristeki ilgili hücreye aktarılır. Yani, tüm iki değişkenli kapular bir matrise ve bu kapuların parametreleri eğer bir parametrelili iki değişkenli kapular ise parametre matrisine aktarılır. İki parametrelili kapular için ikinci parametrenin yeni bir matrise aktarılması gerekir. Örneğin B_c iki değişkenli kapularını aktarmak için kullanılan matris ve C_p ise ilgili parametre matrisi olsun. Bu durumda yeniden M matrisini ele alalım.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Joe & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Clayton & Clayton & 0 & 0 & 0 \\ Gumbel & Frank & joe & 0 & 0 \\ Gumbel & Frank & joe & Clayton & 0 \end{pmatrix}, C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3.9 & 3.5 & 0 & 0 \\ 2.9 & 3 & 2.5 & 1.8 & 0 \end{pmatrix}$$

Anlamı kolaylaştırması açısından, her satır (aşağıdan yukarıya) R-vine ağaçlarının her bir kenarı (aşağıdan yukarıya) için tahmin edilen iki değişkenli kapulayı içermektedir. Örneğin, B_c matrisinin son satırı T_1 ağacındaki değişken çiftleri için belirlenmiş 4 tane iki değişkenli kapulayı göstermektedir. Bir üst satır T_2 ağacındaki kenarlara ait 3 tane iki değişkenli kapulayı göstermekte ve diğer satırlar için de benzer şekilde devam etmektedir.

Böylelikle, R-vine matrisinde iki değişkenli kapulalar ve onların parametreleri kolay bir şekilde belirlenebilir. Örneğin, 1.ağactaki $\{1,5|2,3,4\}$ kenarı için 3.5 parametre değerine sahip Joe kapula tahmin edilmiştir.

İkili kapula yapısına dayalı yaklaşımlar, esnek çok değişkenli modellerin oluşturulmasını sağlamaktadır. Ancak, bu esneklik üç temek problemi çözmeyi gerektirmektedir.

İlk olarak, ikili kapula modelleri değişkenlerin optimal sırasını seçilmesine gerek duymaktadır. Bununla birlikte, bu sıralama tek değildir ve farklı sıralamaların sonuçları aynı değildir. Değişkenlerin sıralamaları için yaygın kullanılan yöntemlerden biri kenar ağırlığı olarak Kendall Tau değerini kullanmaya dayalıdır. Yani, bu yöntemde değişkenler Kendall Tau değerlerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır. Örnek çalışma için Aas ve Berg (2009) ve Kim vd (2013) incelenebilir. Benzer şekilde, Dissmann vd. (2013) maksimum yayılan ağacı kullanarak eş kapula modellerinin optimal ağaç yapısını sıralı olarak seçmiştir. Bu yöntemde her bir ağaçta tüm olası değişken çiftleri için deneysel Kendall Tau değerleri hesaplanır. Daha sonra, deneysel Kendall Tau mutlak değerlerinin toplamını maksimum yapan ağaç seçilir. Bir diğer yöntem, en güçlü kuyruk bağımlılığına göre değişkenleri sıralamaya dayalıdır (Aas vd., 2009).

İkinci olarak, ikili kapula modelleri her bir değişken çifti için en iyi uyum gösteren iki değişkenli kapulaların belirlenmesine gerek duymaktadır. İki değişkenli kapula modelinin seçimi oldukça önemlidir. Çünkü her bir kapula belirli bir bağımlılık yapısı şekliyle ilişkilidir. Bu problemi çözmek için geliştirilmiş bazı yöntemler literatürde mevcuttur. Örneğin, Aas vd. (2009) her iki değişkenli kapula ailesinin şeklini belirlemek için yayılım grafiği ve uyum iyiliği testi kullanmıştır. Diğer yöntemler, AIC gibi bilgi kriterlerinin kullanımına dayalı olarak geliştirilmiştir.

Üçüncü olarak, ikili kapulaya dayalı modellerde çok sayıda parametre tahminine gerek duyulmaktadır. Bunun için, kesme/sadeleştirme (truncation/simplification) yöntemi kullanılmaktadır (Dissmann,2013).

2.8. Karma Kapulalar

Karma (mixed) kapula, birden fazla kapuladan oluşan bir yaklaşımdır. Bu model her bir kapulaya bir ağırlık vererek yeni bir kapula modelinin oluşmasını sağlamaktadır. Böylelikle, değişkenler arasındaki farklı bağımlılık yapılarını dikkate alarak daha esnek çok değişkenli modeller sunmaktadır. Örneğin, üç farklı kapuladan oluşan bir karma model ele alınsın. İlgili

kapulalar sırasıyla; Gaussian, Gumbel ve survival(döndürülmüş) Gumbel kapula olsun. İki değişkenli Gaussian kapula eşitlik (2.51)'deki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C_G(u_1, u_2; \rho) = \Phi_{\rho_{u_1, u_2}}[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)] \quad (2.51)$$

Burada Φ , tek değişkenli standart normal dağılım ve $\Phi_{\rho_{u_1, u_2}}$ ise iki değişkenli standart normal dağılımı ifade etmektedir. Gaussian bağımlılık yapısı simetriktir ve piyasa getirileri bağlamında iki piyasanın birlikte yükselme ve düşme olasılığının eşit olduğu anlamına gelmektedir. Oluşturulan karma modeldeki bir diğer kapula ise Gumbel kapuladır ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C_{GM}(u_1, u_2; \theta) = \exp\left[-((- \ln(u_1))^\theta + (- \ln(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right] \quad (2.52)$$

Burada θ bağımlılık parametresidir ve θ arttıkça bağımlılık azalmaktadır. Gumbel kapula asimetriktir ve pozitif sağ kuyruk bağımlılığına sahiptir. Piyasa getirileri bağlamında bunun anlamı, iki piyasanın birlikte yükselme olasılığının birlikte düşme olasılığından daha yüksek olduğudur. Karma modeldeki üçüncü kapula ise survival (döndürülmüş) Gumbel kapuladır ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C_{SGM}(u_1, u_2; \beta) = u_1 + u_2 - 1 + \exp\left[-((- \ln(1 - u_1))^\beta + (- \ln(1 - u_2))^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right] \quad (2.53)$$

Survival (döndürülmüş) Gumbel kapula, Gumbel kapulanın 180o döndürülmüş halidir ve sol alt kuyruk bağımlılığını modellemektedir. Piyasa getirileri açısından, iki piyasanın birlikte düşme olasılığı, birlikte yükselme olasılığından daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Yukarıda verilen üç farklı kapula ile birlikte karma model aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$C_{mix}(u_1, u_2; \rho, \theta, \beta, \omega_1, \omega_2) = \omega_1 C_G(u_1, u_2; \rho) + \omega_2 C_{GM}(u_1, u_2; \theta) + (1 - \omega_1 - \omega_2) C_{SGM}(u_1, u_2; \beta) \quad (2.54)$$

Burada $\omega_1, \omega_2 \in [0,1]$ ve $\omega_1 + \omega_2 \leq 1$ 'dir. (ρ, θ, β) parametreleri karma modeldeki ilişki parametreleridir ve bağımlılığın derecesini göstermektedir. Diğer taraftan, (ω_1, ω_2) ise ağırlık veya şekil parametreleridir ve bağımlılık yapılarını göstermektedir. Tek bir kapula fonksiyonuna kıyasla karma kapula modelleri çeşitli bağımlılık yapılarını daha esnek bir şekilde modellemektedir.

2.9. Uç Değer Kapulalar

Uç (extreme) olaylar arasındaki bağımlılık yapısını modelleyebilen kapulalar olarak dikkate alınabilir. Uç değer kapulalar sadece uç olayları modellemenin yanı sıra pozitif bağımlılığa sahip verileri modellemek için de kullanılabilir. Uç değer kapula modelleri aşağıda ifade edilmektedir.

2.9.1. Husler-Reiss Kapula

Husler-Reiss kapula bir uç değer kapuladır ve eşitlik (2.55)'deki gibi tanımlanır:

$$C(u_1, u_2; \theta) = \exp\left(-\tilde{u}_1 \Phi\left[\frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{2} \ln\left(\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2}\right)\right] - \tilde{u}_2 \Phi\left[\frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{2} \ln\left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1}\right)\right]\right) \quad (2.55)$$

Burada $\tilde{u}_1 = -\log(u_1)$, $\tilde{u}_2 = -\log(u_2)$, Φ standart normal dağılım fonksiyonu ve $\theta \in (0, \infty)$ 'dur. θ sifıra yaklaştıkça bağımsızlık artarken θ sonsuza gittikçe bağımlılık artmaktadır.

2.9.2. Galambos Kapula

Galambos kapula bir uç değer kapuladır ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 \exp\left[\left((- \ln(u_1))^{-\theta} + (- \ln(u_2))^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right] \quad (2.56)$$

Burada $\theta \in (0, \infty)$ ve θ sifıra yaklaştıkça bağımlılık azalırken θ sonsuza gittikçe bağımlılık artmaktadır.

2.9.3. Tawn Kapula

Tawn kapula bir uç değer kapuladır ve eşitlik (2.57)'deki gibi tanımlanmaktadır:

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 \exp\left(-\theta \frac{\ln(u_1) \ln(u_2)}{\ln(u_1 u_2)}\right) \quad (2.57)$$

Burada $\theta \in (0, 1)$ ve θ sifıra yaklaştıkça bağımlılık azalırken θ bire yaklaştıkça bağımlılık artmaktadır.

2.9.4. t - Uç Değer Kapula

t-uç değer kapula aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C(u_1, u_2; \rho, v) = \exp \left[T_{v+1} \left\{ -\frac{\rho}{b} + \frac{1}{b} \left(\frac{\ln(u_2)}{\ln(u_1)} \right)^{1/v} \right\} \ln(u_1) \right. \\ \left. + T_{v+1} \left\{ -\frac{\rho}{b} + \frac{1}{b} \left(\frac{\ln(u_1)}{\ln(u_2)} \right)^{1/v} \right\} \ln(u_2) \right] \quad (2.58)$$

Burada T_v , v serbestlik dereceli Student t kümülatif dağılım fonksiyonudur ve $b^2 = (1 - \rho^2)/(v + 1)$ 'dir.

2.10. Kapula Model Seçimi

En uyumlu kapula seçimi bilgi kriterlerine dayalı olarak yapılmaktadır. Bu çalışmada AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion) ve CAIC (Consistent Akaike Information Criterion) bilgi kriterleri kullanılmaktadır. Bu kriterler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$AIC = -2\ln L(\hat{\theta}) + 2p \quad (2.59)$$

$$BIC = -2\ln L(\hat{\theta}) + p(\ln(N)) \quad (2.60)$$

$$CAIC = -2\ln L(\hat{\theta}) + p(\ln(N) + 1) \quad (2.61)$$

Model seçim aşamasında en düşük bilgi kriteri değerine sahip olan model en uyumlu model olarak ifade edilir.

3. FİNANSAL RİSK YÖNETİMİ

Finansal risk yönetiminin amacı, finansal alandaki potansiyel riskleri önceden tespit ederek, onları analiz etmek ve riskleri azaltmak için çeşitli önlemler almaktır. Finansal risk, yatırımcılar veya finansal kurumların para kaybetme olasılığı veya tehlikesi olarak tanımlanabilir. Çeşitli risk ölçüleri mevcuttur. Bunlar; piyasa riski, kredi riski ve işletme riski olarak adlandırılmaktadır. Bu riskleri ölçmek için farklı yöntemler mevcuttur. Kayıpların dağılımına dayalı olarak yaygın bir şekilde kullanılan risk ölçümleri, riske maruz değer (RMD) ve beklenen kayıp (BK) olarak sınıflandırılmaktadır.

Finansal riskler portföyü oluşturan varlıkların volatiliteleri ve bağımlılık yapılarından meydana gelmektedir. Genellikle bu iki unsur, standart bir istatistiksel yaklaşım olarak zamana göre sabit olduğu varsayılan bir kovaryans matrisiyle eş zamanlı olarak tahmin edilir. Bu bağımlılık yapısı, her bir değişkenin normal dağıldığı durumda optimal bir ölçüm olan Pearson korelasyonu ile modellenir. Ancak finansal varlıkların tek değişkenli dağılımlarının normal olmadığı ve uzun kuyruklu olduğu deneysel çalışmalar ile ortaya konmuştur (Christoffersen, 2011). Ayrıca, farklı marjinal değişkenlerin benzer uzun kuyruk derecesine sahip olması veya aynı tek değişkenli dağılım ailesinden gelmesi gibi temel bir zorunluluk yoktur (Dias ve Embrechts, 2010). Bu nedenle, çok değişkenli normal dağılımın kuyruk bağımlılığı ve asimetrikliği yakalamadaki yetersizliğinden dolayı elipsel dağılmayan varlıklar için bu tür dağılımları varsaymak değişkenlerin ortak uç (extreme) hareketlerini tahmin etmede yanıltıcı sonuçlar vermektedir (Braun, 2011; Embrechts vd., 2002).

3.2. Varlık Getirileri

Finansal çalışmaların büyük bir çoğunluğunda varlıkların fiyatlarının yerine getiri değerleri kullanılmaktadır. Campell vd. (1997) getirileri kullanmanın iki temel sebebini aşağıdaki şekilde açıklamaktadır:

- Bir varlığın getirisi, yatırım fırsatının eksiksiz ve ölçekten bağımsız bir özetidir.
- Getiri serisi önemli istatistiksel özelliklere sahip olduğundan dolayı fiyat serisinden daha kolay bir şekilde modellenenmektedir.

Bir finansal varlığın logaritmik getirisi aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \quad (3.1)$$

Burada p_t ve r_t sırasıyla bir varlığın t -anındaki fiyatı ve getirisidir.

N tane varlıktan bir portföy getirisi, ilgili varlıkların getirisinin ağırlıklı ortalaması olarak tanımlanmaktadır. Her bir varlığın ağırlığı, toplam portföy değerindeki yüzdesini ifade etmektedir. Bir portföyün t -anındaki getirisi eşitlik (3.2)'deki gibi tanımlanmaktadır.

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N \omega_i r_{i,t} \quad (3.2)$$

Burada $r_{p,t}$ ve $r_{i,t}$ sırasıyla portföyün ve i -inci varlığın getirisini göstermektedir. ω_i ise i -inci varlığın portföydeki ağırlığıdır.

$r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{N,t})'$ t -anındaki N tane varlığın logaritmik getirisi olsun. Çok değişkenli analizler $\{r_t\}_{t=1}^T$ 'nin ortak dağılımı ile ilgilidir. Serial bağımlılığın olduğu durumlarda istatistiksel analiz, $F(r_t|r_{t-1}, \dots, r_1, \theta)$ koşullu dağılımının özelliklerine dayalı olarak yapılır. Özellikle r_t 'nin koşullu beklenen değer ve koşullu kovaryans matrisinin zamana göre nasıl değiştiği konusu portföy seçimi ve risk yönetiminde yaygın olarak araştırılan konulardandır. Bir portföyün t -anındaki beklenen değer ve kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} E(r_{p,t}) &= \omega^T \mu_{i,t} \\ Cov(r_{p,t}) &= \omega^T \Sigma_t \omega \end{aligned}$$

Burada $\mu_{i,t}$ t -anındaki i -inci varlığın ortalaması ve Σ_t ise t -anındaki varyans kovaryans matrisidir.

3.3. Volatilite

Volatilite, bir finansal ürünün fiyatını etkileyen dalgalanmaların yoğunluğu olarak ifade edilebilir. Finansal ekonomistler varlıkların getirilerindeki volatilitiyi modellemek istemektedirler. Volatilite bir risk ölçüsü olarak değerlendirilmekte ve yatırımcılar riskli varlıklara yaptıkları yatırımdan bir kar payı hedeflemektedirler. Bankalar ve diğer finansal kurumlar varlıkların risklerini değerlendirmek için riske maruz değer (RMD) diye adlandırılan modelleri uygulamaktadırlar. Bu anlamda, varlıkların volatilitelerini tahmin etmek ve varlıkların getirileri arasındaki korelasyon yapısını modellemek oldukça önemlidir.

r_t , t -anındaki bir varlığın logaritmik getirisi olsun. Volatilite çalışmalarının ardında yatan düşünce, r_t serisinin ya serial olarak ilişkisiz veya zayıf ilişkili olduğu ancak bu serinin bağımlı olduğudur. Getiri serilerinde ACF grafiğiyle veya Ljung-Box Q istatistikleriyle önemli bir serial korelasyon olmadığı görülebilir. Ancak bu logaritmik getiri serilerinin

mutlak getiri serilerine ait ACF grafiği veya Ljung-Box Q istatistiği incelendiğinde bu mutlak serilerinin serial korelasyon gosterdiği görülmektedir. Sonuç olarak, logaritmik getiri serileri serial olarak ilişkisiz ancak bağımlıdır. Finansal varlıkların getiri serilerinde görülen bazı özellikler aşağıda verilmektedir:

- Volatilite kümelenmesi mevcuttur. Yani, bazı periyotlarda yüksek volatilite, bazı periyotlarda düşük volatilite görülmektedir.
- Volatilitenin zamana göre değişmektedir.
- Volatilitenin sabit aralıklarla değişmektedir. Bu durum istatistiksel açıdan volatilitenin durağan olduğunu göstermektedir.
- Volatilite büyük fiyat artışlarına ve düşüşlerine farklı tepkiler vermektedir. Bu olay, kaldıraç etkisi (leverage effect) olarak ifade edilmektedir. Bu zellik, volatilite modellerinin geliştirilmesinde önemli rol oynamaktadır.

Belirtilen bu özellikleri modellemek için tek değişkenli volatilite modelleri geliştirilmiştir. Bu modellerden bazıları aşağıda verilmektedir:

- Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) – Engle (1982)
- Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) – Bollerslev (1986)
- Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (IGARCH) – Engle ve Bollerslev (1986)
- Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (EGARCH) – Nelson (1991)
- Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (TGARCH) – Zakoin (1994).
- Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (APARCH) – Ding vd. (1993)
- Nonsymmetric Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (NGARCH) – Engle ve Ng (1993)

Bir finansal varlık getiri serisinin volatilite modelini oluşturma aşağıdaki aşamaları içermektedir:

- Getiri serisindeki serial bağımlılık test edilir. Seride eğer zayıf serial korelasyon varsa bu doğrusal bağımlılığı seriden çıkarmak için ekonometrik bir model olarak örneğin, bir ARMA (Autoregressive Moving Average) modeli ile ortalama denklemi belirlenir.
- ARCH etkisini test etmek için ortalama denkleminde elde edilen artıklar kullanılır.
- ARCH etkisi istatistiksel olarak önemli bulunursa bir volatilité modeli belirlenir ve ortalama ve volatilité denklemlerinin ortak tahmini yapılır.
- Tahmin edilen modeller kontrol edilir ve gerek duyulursa modelde iyileştirme yapılır.

Çalışmada kullanılan volatilité modellerine teorik yapıları ve bazı önemli özellikleri aşağıda açıklanmaktadır.

3.3.1. ARCH modeli

Volatilitenin modellenmesinde sistematik bir yapı sağlayan ilk model Engle (1982) tarafından ortaya konan ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modelidir. ARCH modelinin ardındaki temel düşünce, varlık getirilerinin (a_t) şoklarının serial olarak ilişkisiz ancak bağımlı olmasıdır. Bununla birlikte, (a_t) şoklarının bağımlılığı kendi gecikmeli değerlerinin karesel bir formu ile tanımlanmaktadır. ARCH(m) modeli aşağıdaki eşitlik (3.3)'deki gibi ifade edilmektedir:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 a_{t-1}^2 + \dots + \omega_m a_{t-m}^2 \quad (3.3)$$

Burada ϵ_t , sıfır ortalama ve 1 varyansa sahip bağımsız ve özdeş dağılımlı rastgele değişken dizisidir. Ayrıca, $\omega_0 > 0$ ve $\omega_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) koşulunu sağlamalıdır. Modelin yapısından da görüldüğü gibi $\{a_{t-i}^2\}_{i=1}^m$ gecikmeli büyük kare şoklar için büyük koşullu varyansın oluşması beklenmektedir. Sonuç olarak, a_t büyük şoklarının diğer büyük şoklar tarafından takip edilmeye eğilimli olduğu anlamına gelmektedir. Eğilimli denmesinin nedeni, büyük varyans mutlaka büyük değer üretmez. Yalnızca büyük değişim elde etme olasılığı küçük varyans elde etme olasılığından daha yüksektir. Bu özellik varlık getirilerinde gözlemlenen volatilité kümelenmesiyle benzerlik göstermektedir ve bu özellik ARCH modelinin güçlü bir yönü olarak ifade edilebilir. Zayıf yönü olarak ise volatilité üzerinde negatif ve pozitif şokların aynı etkiye sahip olduğunu varsayması gösterilebilir. Pratikte, finansal varlıkların fiyatları, pozitif ve negatif şoklara farklı tepkiler verdiği yaygın olarak kabul edilmektedir. ARCH modeli volatilitéyi açıklamak için yüksek derece gecikme değerine

gerek duymaktadır. Bu durum önemli sayıda parametre tahminine neden olmaktadır. Bu nedenle, ARCH modelinin bu eksikliği çözmek için daha az sayıda parametre tahminine gerek duyan GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modeli geliştirilmiştir.

3.3.2. GARCH modeli

Bollerslev (1986) tarafından geliştirilen GARCH modeli, ARCH modelinin genelleştirilmiş halidir. GARCH (p,q) modeli aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.4)$$

Burada ϵ_t , sıfır ortalama ve 1 varyansa sahip bağımsız ve özdeş dağılımlı rastgele değişken dizisidir. Ayrıca, $\omega_0 > 0$, $\omega_i \geq 0$ ve $\beta_j \geq 0$ ile $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (\omega_i + \beta_j) < 1$ koşulunu sağlamalıdır. ω_i ve β_j parametreleri sırasıyla ARCH ve GARCH parametreleri olarak ifade edilir. Tahmin edilen modelin doğruluğu standartlaştırılmış artıklar ile kontrol edilir. Büyük a_{t-1}^2 veya büyük σ_{t-1}^2 ' ler büyük σ_t^2 oluşmasına neden olmaktadır. Bunun anlamı, büyük a_{t-1}^2 ' ler büyük a_t^2 ' ler tarafından takip edilmeye eğilimlidir. Bu olay finansal zaman serilerinde volatilité kümelenmesi davranışı olarak ifade edilmektedir. GARCH modelinin zayıf yönü ise negatif ve pozitif şokların volatilité üzerinde aynı etkiye sahip olduğunu varsaymasıdır.

3.3.3. IGARCH modeli

Engle ve Bollerslev (1986) tarafından geliştirilen IGARCH (Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modeli birim-kök modellerini oluşturmaktadır. ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) modeline benzer şekilde IGARCH modelinin en önemli özelliği, a_t şoklarının üzerinde a_t^2 gecikmeli kare şoklarının etkisinin sürekli (persistent) olmasıdır. IGARCH (1,1) modeli eşitlik (3.5)'deki gibi tanımlanmaktadır:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2 \quad (3.5)$$

Burada ϵ_t , sıfır ortalama ve 1 varyansa sahip bağımsız ve özdeş dağılımlı rastgele değişken dizisidir ve $0 < \beta_1 < 1$ ' dir.

3.3.4. GARCH-M modeli

Finansta bir varlığın getirisi onun volatilitesine bağlıdır. Bu tür olayları modellemek için GARCH-M modeli geliştirilmiştir. Burada “M” ortalama denklemindeki GARCH anlamına gelmektedir. GARCH(1,1)-M modeli aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + c\sigma_t^2 + a_t, & a_t &= \sigma_t\epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega_0 + \omega_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Burada μ ve c sabitlerdir. c parametresi risk primi parametresi olarak adlandırılmaktadır. Pozitif c değeri, getirinin kendi gecikmeli volatilitesiyle pozitif ilişkili olduğunu göstermektedir.

3.3.5. EGARCH modeli

Finansal zaman serilerini açıklamada GARCH modellerinin bazı zayıf yönlerini iyileştirmek için Nelson (1991) tarafından EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) geliştirilmiştir. Özellikle pozitif ve negatif getiriler arasındaki asimetrik etkileri modelleyebilen EGARCH (p,q) modeli eşitlik (3.7)'deki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t\epsilon_t \\ \ln \sigma_t^2 &= \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada pozitif bir a_{t-i} logaritmik volatiliteye $\omega_i(1 + \gamma_i)|\epsilon_{t-i}|$ katkı sağlarken negatif bir a_{t-i} ise logaritmik volatiliteye $\omega_i(1 - \gamma_i)|\epsilon_{t-i}|$ kadar katkı sağlamaktadır. Burada $\epsilon_{t-i} = a_{t-i}/\sigma_{t-i}$ 'dir. Diğer taraftan, γ_i parametresi a_{t-i} 'nin kaldıraç etkisini belirler. EGARCH modeli logaritması alınan koşullu varyans kullanarak GARCH modelindeki gibi model katsayılarının pozitiflik sınırlamasını gerek duymamaktadır. Bununla birlikte, uygulamada γ_i parametresinin negatif olması beklenir.

3.3.6. TGARCH modeli

Zakoin (1994) tarafından önerilen TGARCH (Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modeli, kaldıraç etkisini modellemek için yaygın kullanılan bir volatilité modelidir. TGARCH (p,q) modeli aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p (\omega_i + \gamma_i N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.8)$$

Burada N_{t-i} , negatif şoklar a_{t-i} için gösterge fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1, & a_{t-i} < 0 \\ 0, & a_{t-i} \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Burada ω_i , γ_i ve β_j GARCH modelindeki gibi tanımlı olup negatif olmayan parametrelerdir. Modelden anlaşıldığı gibi, a_{t-i} pozitif şokları σ_t^2 'ye $\omega_i a_{t-i}^2$ kadar katkı sağlarken a_{t-i} negatif şokları $\gamma_i > 0$ olmak üzere σ_t^2 'ye $(\omega_i + \gamma_i) a_{t-i}^2$ kadar katkı sağlamaktadır. Bu model geçmiş şokların etkisini sınıflandırmak için sıfır noktasını eşik (threshold) olarak kullanmaktadır. Başka bir eşik değeri de kullanılabilir. TGARCH modeli, Glosten vd. (1993) tarafından önerilen GJRGARCH (Glosten- Jagannathan-Runkle Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modeli ile benzer yapı içermektedir.

3.3.7. APARCH modeli

TGARCH modeli Ding vd. (1993) tarafından önerilen APARCH (Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modeli sınıfına aittir. APARCH modeli eşitlik (3.10)'daki gibi tanımlanabilir:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i (|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i})^\lambda + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.10)$$

λ pozitif bir reel sayıdır. GARCH modelleri gibi APARCH modelleri de uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır. APARCH modelinin üç özel durumu mevcuttur:

- $\lambda = 2$ olduğunda APARCH modeli TGARCH modeline indirgenir.
- $\lambda = 1$ olduğunda APARCH olduğunda APARCH modeli, volatilité denkleminde doğrudan volatilitéyi kullanır.

- $\lambda = 0$ durumu $\lambda \rightarrow 0$ limit olarak kabul edilir ve bu durumda APARCH modeli EGARCH modeline indirgenir.

Yukarıda verilen güç fonksiyonu modelin uyum iyiliğini arttırmak için kullanılan bir dönüşümdür. Diğer taraftan, bazı özel değerlerin dışında λ güç parametresi için iyi tahminler bulmak oldukça zordur.

3.3.8. NGARCH modeli

Asimetrik volatilitiyi yakalayabilen bir diğer GARCH modeli, Engle ve Ng (1993) tarafından geliştirilen NGARCH (Nonsymmetric Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modelidir. NGARCH (1,1) modeli aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \omega_1 (a_{t-1} - \gamma \sigma_{t-1})^2 \quad (3.11)$$

Burada β_1 ve ω_1 negatif olmayan parametrelerdir ve $\omega_0 > 0$ 'dır. γ ise kaldıraç parametresidir ve pozitif değer alması beklenir. Eğer $\gamma = 0$ olursa bu durumda NGARCH (1,1) modeli GARCH (1,1) modeline indirgenir.

3.4. Risk Ölçümleri

Belirli bir periyot için bir finansal pozisyonun kaybı X rastgele değişkeni ile gösterilebilir. Finansal pozisyonun kaybına ilişkin tüm çıkarımlar kayıp rastgele değişkeninin dağılımına dayalı olarak yapılır.

Finansal bir risk ölçüsü finansal temel teorilerle tutarlı olmalıdır. η bir risk ölçüsü olsun. Eğer η , iki kayıp rastgele değişken X ve Y için aşağıdaki koşulları sağlarsa η risk ölçüsünün tutarlı olduğu söylenir:

- Alt toplanabilirlik: $\eta(X + Y) \leq \eta(X) + \eta(Y)$
- Monotonluk: Tüm X ve Y değerleri için $X \leq Y$ ise $\eta(X) \leq \eta(Y)$
- Pozitif homojenlik: Bir c sabiti için $\eta(cX) = c\eta(X)$
- Dönüşüm değişmezliği: Bir c sabiti için $\eta(X + c) = \eta(X) + c$

Bu çalışmada en yaygın olarak kullanılan iki risk ölçüsü ele alınmaktadır. Bunlar; riske maruz değer (RMD) ve beklenen kayıp (BK)'tır. Bu risk ölçülerine ilişkin matematiksel tanımlar ve önemli özellikler aşağıda verilmektedir.

3.4.1. Riske Maruz Değer

Riske maruz değer (RMD) en iyi bilinen risk ölçüsüdür. Bu ölçüm finansal kuruluşlar tarafından risklerini değerlendirmek için veya kredili işlem koşullarını belirlemek için düzenleyici komite tarafından kullanılabilir. Her iki durumda da RMD, finansal kuruluşların ekonomik krizlerden sonra hala iş yapabilmelerini olanak sağlamak amacıyla kullanılır. RMD, belirli bir periyot için bir finansal pozisyonun kayıp rastgele değişkeni kullanılarak hesaplanır.

t -anındaki bir finansal pozisyonun gelecek l periyodu için riskini ele alalım. $L_t(l)$, bu pozisyonun rastgele değişkeni olsun. V_t , t -anındaki pozisyonun değeri olsun. O halde $L_t(l)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L_t(l) = V_{t+l} - V_t \quad (3.12)$$

$L_t(l)$ rastgele değişkeninin kümülatif dağılım fonksiyonu $F_l(x)$ ile gösterilsin. $F_l(x)$ fonksiyonu t -indeksine bağlıdır. Belirli bir p olasılığıyla l zaman periyodunda bir finansal pozisyonun RMD'si eşitlik (3.13)'deki gibi tanımlanır:

$$RMD_{1-p} = \inf\{x | F_l(x) \geq 1 - p\} \quad (3.13)$$

Burada *inf*, verilen koşulu sağlayan en küçük reel sayıdır. Böylelikle, $(1 - p)$ olasılığıyla t anından $t - 1$ anına kadar finansal pozisyon sahibinin karşılaşacağı potansiyel kayıp RMD_{1-p} 'ye eşit veya daha küçüktür. RMD ölçüsünün üç bileşeni vardır. Bunlar; zaman periyodu, güven seviyesi ve kayıp miktarı (veya kayıp yüzdesi) olarak ifade edilmektedir.

RMD hesaplamak için kullanılan üç yöntem aşağıda verilmektedir:

- Tarihsel Simülasyon Yöntemi
- Varyans-Kovaryans Yöntemi
- Monte Carlo Simülasyon Yöntemi

3.4.2. Beklenen Kayıp

RMD genel olarak tutarlı bir risk ölçüsü değildir. Çünkü risk ölçülerinin tutarlılık özelliklerinden alt toplanabilirlik (subadditivity) genel olarak sağlanmamaktadır. RMD'nin bu sorunun çözmek için geliştirilen yeni bir risk ölçüsü ise beklenen kayıp (BK) olarak ifade edilmektedir. Aslında bu ölçüm literatürde yeni değildir. Aktüerya biliminde kuyruk riske maruz değer olarak adlandırılmaktadır. En basit haliyle beklenen kayıp, yıkıcı bir olaydan

sonra bir finansal pozisyonun beklenen kaybıdır. 1 periyodunda bir finansal pozisyonun X kayıp rastgele değişkeni ele alınsın. X 'in CDF ve PDF'si sırasıyla $F(x)$ ve $f(x)$ olsun. Verilen bir p olasılığı için X 'in riske maruz değeri RMD olarak tanımlansın. O halde X 'in beklenen kaybı (BK) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$BK_{1-p} = E(X|X > RMD) = \frac{\int_{RMD}^{\infty} xf(x)dx}{P(X > RMD)} \quad (3.14)$$

Tanımdan da görüldüğü gibi BK, X kayıp rastgele değişkeninin RMD'yi aşan kısmın beklenen kaybıdır. Bu nedenle BK literatürde koşullu riske maruz değer olarak da adlandırılır.

Kolaylık olması açısından X 'in sürekli olduğu varsayalım. Yukarıda verilen eşitlik (3.14)'deki ifadeyi yeniden tanımlamak için integralde değişken değişimi tekniği kullanılsın.

$$\begin{aligned} u &= F(x), & F(RMD) &= 1 - p, & RMD &\leq x < \infty \\ du &= f(x)dx & F(\infty) &= 1 \\ x &= F^{-1}(u) = RMD_u \end{aligned}$$

Eşitlik (3.14) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$BK_{1-p} = \frac{\int_{RMD}^{\infty} RMD_u du}{p} \quad (3.15)$$

Böylece BK, $1 - p \leq u \leq 1$ için tüm RMD_u 'lerin ortalaması olarak ifade edilebilir. Bu ortalama özelliği, X kayıp rastgele değişkeninin kuyruk davranışını RMD'den daha iyi yansıtmasını sağlar. Bununla birlikte, BK tutarlı bir risk ölçüsüdür.

3.5. Portföy Ağırlıklandırma Yöntemleri

Portföy ağırlıklandırma, portföy seçim problemlerinde önemli parametrelerden biridir. Portföydeki bir varlığa verilen ağırlık, varlık seçimi ve yatırım zamanlaması kararları kadar önemlidir. Yatırımcının potansiyel riskleri daha iyi yönetmesi ve kar marjını artırması için önemli rol oynamaktadır. Portföy ağırlıklandırma yöntemleri aşağıda ifade edilmektedir.

3.5.1. Eşit ağırlıklandırma yöntemi

Portföydeki her bir varlık için ağırlıkların eşit olduğu bir ağırlıklandırma tekniğidir ve ağırlıklar aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\omega_i = \frac{1}{m} \quad (3.16)$$

Burada m portföydeki varlıkların sayısını göstermektedir.

3.5.2. Ters volatilité ağırlıklandırma yöntemi

Ters volatilité ağırlıklandırma yöntemine göre düşük volatil varlığa büyük ağırlık değeri verilirken yüksek volatil varlığa ise düşük ağırlık verilmektedir. Bununla birlikte, tüm portföyün volatilitesinin düşük olması gerekmemektedir. Çünkü bu yöntemde varlıkların kovaryansı dikkate alınmamaktadır. Ters volatilité ağırlıkları aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\omega_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{i=1}^m 1/\sigma_i} \quad (3.17)$$

Burada σ_i , i -nci varlığın volatilitesidir.

3.5.3. Minimum varyans ağırlıklandırma yöntemi

Minimum varyans ağırlıklandırma, portföy varyansını minimum yapan ağırlık değerlerini üretir. Bu ağırlıklandırma yönteminin ardındaki düşünce, portföyün Sharpe Oranını maksimum yapmaktır. Portföyün Sharpe Oranı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{E[r_p]}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}} \quad (3.18)$$

Burada $E[r_p]$ portföyün beklenen getirisidir ve paydadaki ifade ise portföyün beklenen riskidir. Bu ağırlıklandırma tekniğinde varlıkların beklenen getirilerinin aynı olduğu varsayılır. Yani, $E[r_i] = k$ 'dir. Burada k bir sabittir ve r_i ise i -inci varlığın getirisidir. Bununla birlikte, varyansın belirli bir güven seviyesinde tahmin edilebilir olduğu varsayılmaktadır. Böylelikle,

$$\frac{E[r_p]}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}} = \frac{\omega^T (E[r_1], E[r_2], \dots, E[r_m])}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}} = \frac{\omega^T (k, k, \dots, k)}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}} = \frac{k}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}} \quad (3.19)$$

Burada $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ 'dir. Bu varsayımlar altında eşitlik (3.18) ifadesini maksimum yaparak elde edilen portföy Sharpe Oranı optimize edilmiş portföy olmaktadır. Minimum varyans ağırlıkları aşağıdaki optimizasyon problemini çözerek elde edilir:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \omega^T \Sigma \omega \quad (3.20) \\ \sum_{i=1}^m \quad & \omega_i = 1 \\ \omega_i \geq 0 \quad & (i = 1, \dots, m) \\ \omega_i < c \quad & \end{aligned}$$

Burada c tepe değeridir. Minimum varyans optimizasyon problemi, bir konveks karesel optimizasyon problemidir.

3.5.4. Maksimum çeşitlendirme ağırlıklandırma yöntemi

Maksimum çeşitlendirme ağırlıklandırma yöntemi minimum varyans ağırlıklandırma tekniğine benzerdir. Bu teknik de Sharpe Oranını maksimum yapmayı amaçlamaktadır. Minimum varyans tekniğinde olduğu gibi bu teknikte de varyansın belirli güven aralığıyla tahmin edilebilir olduğu varsayılmaktadır. Bununla birlikte, bu yöntemde varlıkların beklenen getirilerinin onların varyanslarıyla orantılı olduğu varsayılmaktadır. Yani, $E[r_p] = k\omega^T\sigma$ 'dır. Bir portföyün çeşitlendirme oranı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D(\omega) = \frac{\omega^T\sigma}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} \quad (3.21)$$

Eşitlik (1)'de tanımlanan Sharpe Oranında pay kısmına $k\omega^T\sigma$ yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{E[r_p]}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} = \frac{k\omega^T\sigma}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} = k * D(\omega) \quad (3.22)$$

$D(\omega)$ 'yi maksimum yapma, portföyün Sharpe Oranı olan $\frac{E[r_p]}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}}$ ifadesini maksimum yapma ile aynıdır. Maksimum çeşitlendirme ağırlıkları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \frac{\omega^T\sigma}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} \quad (3.23) \\ \sum_{i=1}^m \omega_i = 1 \\ \omega_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ \omega_i < c \end{aligned}$$

Burada c tepe değeridir. Maksimum çeşitlendirme optimizasyon problemi, karesel programlama problemidir.

3.5.5. Eşit risk katkılı ağırlıklandırma yöntemi

Eşit risk katkılı ağırlıklandırma yöntemi, minimum varyans portföyü ile eşit ağırlıklı portföy arasında bir orta nokta bulmayı amaçlamaktadır. Minimum varyans yönteminde olduğu gibi varyansın belirli bir güven seviyesinde tahmin edilebilir olduğu varsayılmaktadır. Bu ağırlıklandırma yönteminde, portföyü oluşturan bir bileşenin risk katkısı, portföydeki

diğer bileşenlerden daha büyük değildir. Eşit risk katkılı portföye ilişkin ağırlıklar aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümüyle elde edilir.

$$\min_{\omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\omega_i(\Sigma\omega)_i - \omega_j(\Sigma\omega)_j)^2 \quad (3.24)$$
$$\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$$
$$\omega_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

Eşit risk katkılı portföy, amaç fonksiyonu sıfıra eşit olduğunda veya tüm risk katkıları eşit olduğunda çözüme ulaşır.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölüm, çalışmada kullanılan tek değişkenli marjinal değişkenleri modelleme yöntemlerini, kapulaya dayalı risk tahminleme algoritmasını ve risk tahminlerini karşılaştırmak için kullanılan geriye dönük testleri içermektedir.

4.1. Marjinal Değişkenlerin Modellenmesi

Finansal varlıkların risk hesaplamalarında yaygın kullanılan yaklaşımlardan biri ekonometrik modellere dayalı risk tahminidir. Bu çalışmada ortalama denklemi için zaman serisi modelleri kullanılırken volatilitiyi modellemek için koşullu değişen varyans modelleri kullanılmaktadır. Koşullu değişen varyans modelleri olarak GARCH türü modeller ele alınmaktadır. Bu çalışmada ortalama ve koşullu varyansı modellemek için kullanılan ARMA(m,n)-GARCH(p,q) modeli aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \sum_{i=1}^m \varphi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^n \theta_j a_{t-j} + a_t \\ a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Burada μ ve ω_0 sabittir. φ_i ile θ_j sırasıyla AR ve MA parametreleridir. ω_i ARCH parametresi ve β_j ise GARCH parametresidir. Ayrıca ϵ_t sıfır ortalama ve bir varyanslı bağımsız özdeş dağılımlıdır. Bu çalışmada ϵ_t hatalarının dağılımı için normal, Student t ve eşitlik (4.3)'teki gibi tanımlanan çarpık Student t dağılımları varsayılmıştır.

$$f(x|\eta, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{a + bx}{1 - \lambda} \right)^2 \right)^{-(\eta+1)/2}, & x < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{a + bx}{1 + \lambda} \right)^2 \right)^{-(\eta+1)/2}, & x \geq -a/b \end{cases} \quad (4.2)$$

Burada $2 < \eta < \infty$ ve $-1 < \lambda < 1$ 'dir. a, b ve c sabitleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$a = 4\lambda c \frac{\eta - 2}{\eta - 1}, \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, \quad c = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\eta - 2)}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

x rastgele değişkeni 0 ortalama ve birim varyansa sahiptir. $\lambda = 0$ olduğundan bu dağılım Student t dağılımına dönüşür. (Hansen,1994)

4.2. Kapulaya Dayalı Risk Tahmini

Bu çalışmada değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını esnek bir şekilde modelleyen kapula yaklaşımı kullanılarak risk modellemesi yapılmaktadır. Kapulaya dayalı risk tahmini için aşağıda verilen algoritma uygulanmaktadır.

- *1.adım:* T gözlem kullanılarak her bir getiri serisi için uyumlu marjinal dağımlar ve ARMA-GARCH türü modeller tahmin edilir.
- *2.adım:* $T + 1$ zamanı için getiri ortalamaları ve volatiliteleri tahmin edilir. Bu tahminler \hat{r}_{T+1}^i ve \hat{h}_{T+1}^i ($i = X, Y$) ile gösterilsin.
- *3.adım:* ARMA-GARCH türü modellerden elde edilen standartlaştırılmış artıklar sırasıyla η_t^X ve η_t^Y olsun. Olasılıksal integral dönüşümü kullanılarak standartlaştırılmış artıklar u_t ve v_t ' ye dönüştürülür. Daha sonra bu dönüşüm değişkenleriyle en uyumlu kapula modeli ve parametre tahminleri elde edilir.
- *4.adım:* Bir önceki adımda tahmin edilen kapula fonksiyonundan j . rastgele değişkenler için ($j = 1, \dots, N$) simülasyon değeri üretilir.
- *5.adım:* Tahmin edilen marjinal dağılımların ters fonksiyonları kullanılarak simülasyon değerleriyle standartlaştırılmış artıklar $\eta_{T+1}^{i,j}$ elde edilir.

$$(\eta_{T+1}^{X,j}, \eta_{T+1}^{Y,j}) = (F_{X,T+1}^{-1}(u_{T+1}^j; \hat{\gamma}), F_{Y,T+1}^{-1}(v_{T+1}^j; \hat{\delta}))$$

- *6.adım:* ikinci adımda tahmin edilen ortalamalar ile volatiliteler beşinci adımda elde edilen standartlaştırılmış artıklar (simülasyon değerleri) kullanılarak logaritmik getiriler üretilir. Dördüncü adım ile altıncı adım arası uygulanarak bu işlem N kez tekrar edilir.

$$(r_{T+1}^{X,j}, r_{T+1}^{Y,j}) = (\hat{r}_{T+1}^X + \eta_{T+1}^{X,j} \sqrt{\hat{h}_{T+1}^X}, \hat{r}_{T+1}^Y + \eta_{T+1}^{Y,j} \sqrt{\hat{h}_{T+1}^Y})$$

- *7.adım:* Elde edilen logaritmik getiriler farklı ağırlıklandırma tekniklerinden elde edilen ağırlıklandırma vektörüyle çarpılarak kayıp değerleri üretilir.
- *8.adım:* N tane kayıp değeri küçükten büyüğe doğru sıralanır ve %95 ile %99 riske maruz değer ve beklenen kayıp değerleri elde edilir.

Yukarı verilen risk tahmin algoritması için simülasyon sayısının doğru bir şekilde seçilmesi oldukça önemlidir. N simülasyon sayısı arttıkça risk tahminleri daha doğru olacaktır. Bununla birlikte, simülasyon işlemi oldukça zaman alabilir. Fantazzini (2008) simülasyon sayısını 100000 olarak alınmasını önerirken Bastianin (2009) simülasyon

verisinin 5000 seçilmesinin yeterli olduğunu önermiştir. Bu çalışmada simülasyon sayısı 10000 olarak belirlenmiştir.

4.3. Geriye Dönük Testler

Riske maruz değer modelleri, gelecek dönem riskleri doğru bir şekilde tahmin ederse iyi bir model olduğu söylenir. Tahminlerin doğruluğunu değerlendirmek için önerilen modeller uygun yöntemlerle geriye dönük testler (backtesting) kullanılarak kontrol edilir. Geriye dönük testler, gerçek kayıpların sistematik olarak ilgili riske maruz değer tahminleriyle karşılaştırıldığı istatistiksel yöntemlerdir. Geriye dönük test işleminde, belirli bir zaman aralığında risk sınırını aşan kayıpların frekanslarının belirlenen güven seviyesiyle uyumlu olup olmadığı incelenir. Bu tür testler, koşulsuz kapsama (unconditional coverage) testleri olarak adlandırılır. Bu testler, risk sınırını aşan kayıpların ortaya çıktığı zamanı dikkate almadığından dolayı uygulaması kolaydır. Ancak teoride iyi bir RMD modeli sadece doğru sayıda risk sınırını aşan kayıpları üretmez aynı zamanda, zamana göre eşit olarak yayılan risk sınırını aşan kayıpları da üretir. Risk sınırını aşan kayıpların kümelenmesi, modelin piyasa volatilité ve korelasyonlarındaki değişimi doğru bir şekilde yakalayamadığını gösterir. Koşullu kapsama (conditional coverage) testleri, verideki zaman değişimini de hesaba katmaktadır.

4.3.1. Kupiec başarısızlık oran testi

Riske maruz değer modelini test etmek için kullanılan yöntemlerden biri, ele alınan periyod için risk sınırını aşan kayıpların sayısını hesaplamaktır. Eğer bu kayıpların sayısı belirlenen güven aralığından daha az ise ilgili RMD yöntemi, riski aşırı tahmin etmektedir. Diğer taraftan, bu kayıpların sayısı belirlenen güven aralığından daha fazla ise uygulanan RMD yönteminin riski düşük tahmin ettiğini gösterir. Riski aşan kayıpların sayısı ile belirlenen güven seviyesindeki kayıpların aynı olması nadir rastlanan bir durumdur. Bu nedenle risk sınırını aşan kayıpların kabul edilebilir olup olmadığını yani modelin kabul edilip edilemeyeceğini belirlemek için istatistiksel analiz yapılır. Risk sınırını aşan kayıpların sayısı x ve toplam gözlem sayısı T ile gösterilsin. Başarısızlık oranı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$Hata\ oranı = \hat{p} = \frac{x}{T} \quad (4.3)$$

İdeal durumda bu oranın belirlenen güven seviyesiyle aynı olması beklenir. Örneğin, %99 güven seviyesi kullanılırsa sıfır hipotezi, kayıpların frekansının $p = 1 - 0,99 = \%1$ olduğunu ifade eder. Modelin doğru olduğu varsayılarak gözlemlenen başarısızlık oranı

olan (x/t) 'nin p 'nin yansız bir tahmin edicisi olmalıdır. Böylelikle örneklem sayısı arttıkça bu oran %1'e yakınsar (Jorion,2007). Belirlenen zaman aralığındaki her periyotta risk sınırını aşan kayıpların ortaya çıkma ihtimali yarı yarıyadır. Bu durum başarılar ve başarısızlıklar dizisi olan Bernoulli denemesi olarak bilinir. Risk sınırını aşan kayıpların sayısı (x) , binom dağılımına sahiptir.

$$f(x) = \binom{T}{x} p^x (1-p)^{T-x} \quad (4.4)$$

Kupiec başarısızlık oran testi, risk sınırını aşan kayıpların sayısının güven seviyesiyle tutarlı olup olmadığını ölçmektedir.

$$H_0: p = \hat{p} \quad (4.5)$$

Gözlemlenen başarısızlık oranının (\hat{p}) , güven seviyesi ile belirlenen başarısızlık oranından (p) anlamlı ölçüde farklı olup olmadığı test edilir. Kupiec (1995)'e göre başarısızlık oran testi, en iyi olabilirlik oran (LR) testi ile yapılır. Test istatistiği aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$LR_{BO} = -2 \ln \left(\frac{p^x (1-p)^{T-x}}{\left(\frac{x}{T}\right)^x \left(1 - \frac{x}{T}\right)^{T-x}} \right) \quad (4.6)$$

Sıfır hipotezi altında model doğrudur. LR_{BO} asimptotik olarak 1 serbestlik dereceli χ^2 dağılmaktadır. LR_{BO} istatistiği $\chi^2_{(1)}$ kritik değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir ve modelin hatalı olduğu söylenir. Başarısızlık oran testinin dezavantajı, risk sınırını aşan kayıpların sadece frekanslarını dikkate alır ve bu kayıpların ortaya çıkma zamanını hesaba katmaz. Sonuç olarak, kümelenmiş risk sınırını aşan kayıpları üreten bir modeli reddetmede başarısız olabilir. Bu nedenle geriye dönük test, sadece koşulsuz kapsama testlerine göre değerlendirilmemelidir (Campell, 2005).

4.3.2. Christoffersen aralık tahmini testi

Christoffersen (1998) tarafından önerilen aralık tahmini testinde, Kupiec başarısızlık oran testine benzer şekilde olabilirlik oran (LR) testi kullanılmaktadır. Bu test Kupiec testine ilave olarak risk sınırını aşan kayıpların bağımsızlığı için ayrı bir testi de içermektedir. Doğru kapsama oranına ek olarak Christoffersen testi herhangi bir günde risk sınırını aşan kayıpların olasılığının önceki günün sonucuna bağlı olup olmadığını incelemektedir. Bu testte ilk olarak indikatör değişkeni tanımlanır. Bu değişken RMD değeri aşılsa 1 ve aşılmazsa 0 değerini alır.

$$I_t = \begin{cases} 1, & RMD \text{ aşılsa} \\ 0, & RMD \text{ aşılmazsa} \end{cases}$$

Önceki günde i-nci durumun ortaya çıktığı varsayılarak j-nci durumun ortaya çıktığı günlerin sayısı n_{ij} olarak tanımlansın. Tüm sonuçlar aşağıda verilen tablodaki gibi özetlenebilir.

Tablo 4.1. Zamana göre risk sınırını aşma durumu

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$	Σ
$I_t = 0$	n_{00}	n_{10}	$n_{00} + n_{10}$
$I_t = 1$	n_{01}	n_{11}	$n_{01} + n_{11}$
Σ	$n_{00} + n_{01}$	$n_{10} + n_{11}$	

π_i , $t - 1$ 'inci günde i-nci durumdayken t gününde risk sınırını aşan kayıp olasılığını gösterir.

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \quad \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \quad \pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

Model doğruysa t gününde risk sınırını aşan kayıp, $t - 1$ 'inci günde kayıp ortaya çıkıp çıkmadığına bağlı olmamalıdır. Bir diğer ifadeyle, sıfır hipotezi altında π_0 ve π_1 eşit olmalıdır. Risk sınırını aşan kayıpların bağımsızlığı için ilgili test istatistiği aşağıda verilmektedir.

$$LR_{BA\check{G}} = -2 \ln \left(\frac{p^{n_{00}+n_{10}} (1-\pi)^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1-\pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right) \quad (4.7)$$

Bu bağımsızlık test istatistiği Kupiec'in başarısızlık oran testiyle birleştirilerek iyi bir RMD modelinin özellikleri olan doğru başarısızlık oranı ve risk sınırını aşan kayıpların bağımsızlığı veya koşullu kapsaması test edilir.

$$LR_{CT} = LR_{BO} + LR_{BA\check{G}} \quad (4.8)$$

Burada $LR_{CT} \sim \chi_{(2)}^2$ 'dir. Çünkü bu testte iki ayrı LR istatistiği mevcuttur. LR_{CT} istatistiği $\chi_{(2)}^2$ 'nin kritik değerinden daha küçükse önerilen RMD modeli doğru bir modeldir denir.

4.3.3. Kayıp fonksiyonlar

Yukarıda bahsedilen tüm istatistiksel testler risk sınırını aşan kayıpların frekansları ve bu kayıpların bağımsızlıklarını içermektedir. Bu testler, risk sınırını aşan kayıpların sayısına bağlı olarak uygun model seçmektedir. Ancak, risk sınırını aşan kayıpların sayısının içerdiği bilgi sınırlıdır. Risk sınırını aşan kayıpların ortaya çıkıp çıkmadığından ziyade bu kayıpların büyüklükleri araştırılabilir (Campell,2005). İstatistiksel testler uyumlu RMD modellerini belirlemede ancak bu modeller arasındaki gücü göstermemektedir. İstatistiksel testlerin bu eksik yönü kayıp fonksiyonların oluşmasına yol açmıştır. İlk olarak ele alınan kayıp fonksiyon, Lopez (1999) tarafından önerilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$C_t^L = \begin{cases} 1 + (|L_t| - RMD_t)^2, & L_t < -RMD_t \\ 0, & L_t \geq -RMD_t \end{cases}$$

Bu ölçüm risk sınırını aşan kaybın ortaya çıktığı zamanın dışında bu kaybın büyüklüğünü ifade eden ilave bir terim içermektedir. Bu kayıp fonksiyonunu kullanarak geriye dönük test ortalama kaybı hesaplayarak yapılmaktadır.

$$\hat{C}^L = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T C_t^L \quad (4.9)$$

Blanco ve Ihle (1999) risk sınırını aşan kayıpların ortalama büyüklüğüne dayalı alternatif bir kayıp fonksiyonu önermiştir. Bu kayıp fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$C_t^{BI} = \begin{cases} \frac{|L_t| - RMD_t}{RMD_t}, & L_t < -RMD_t \\ 0, & L_t \geq -RMD_t \end{cases}$$

Geriye dönük test değeri eşitlik (1) kullanılarak elde edilir. Bir diğer kayıp fonksiyonu ise Gonzalez-Rivera vd. (2004) tarafından önerilen kantil tahminine dayalı olarak elde edilen kayıp fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

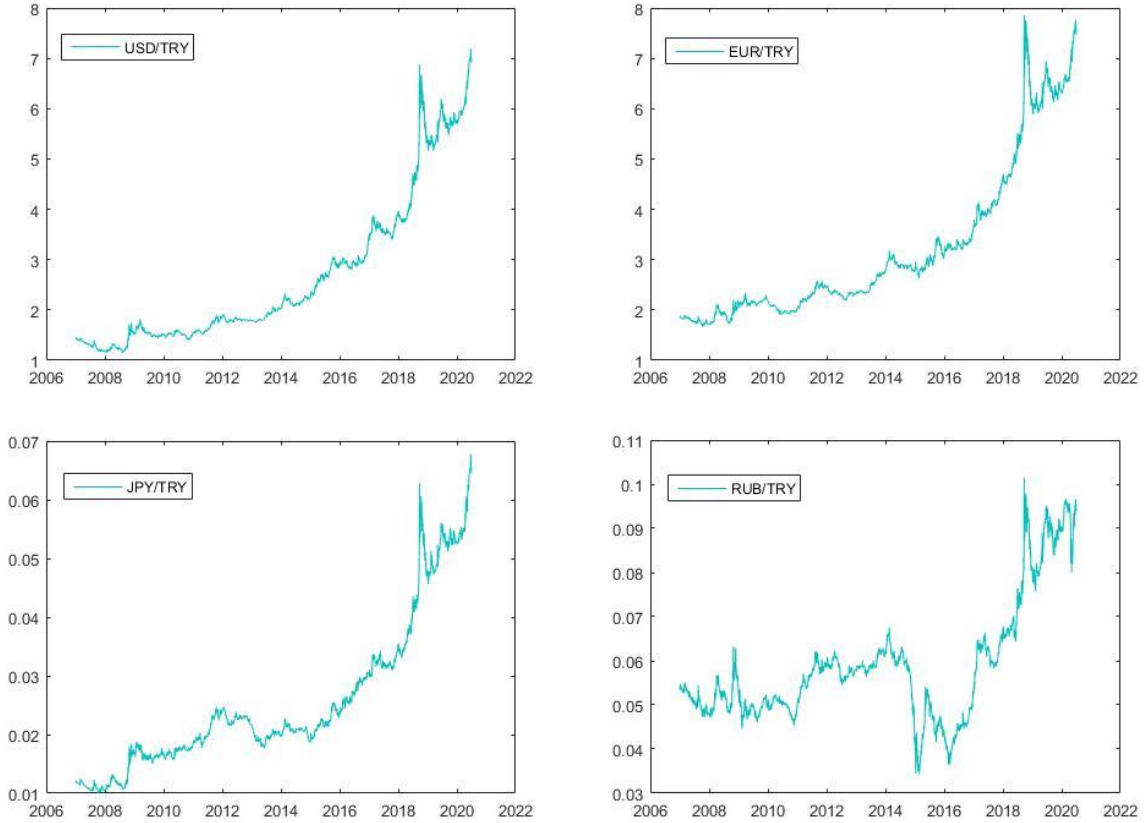
$$Q = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (q - I_t)(L_t - RMD_t)$$

Farklı RMD modellerinin performanslarını değerlendirirken daha küçük \hat{C} ve Q değerli model, daha iyi uyum iyiliği göstermektedir. Farklı RMD modellerinin performansları geriye

dönük test edildiğinde en iyi RMD modelini seçerken ilk olarak istatistiksel testler kullanılır ve bu testleri geçen RMD modellerini karşılaştırmak için kayıp fonksiyonlar uygulanır.

5. BULGULAR

Bu çalışmada döviz kurlarından oluşan bir portföy için risk tahmini yapılmıştır. Bu amaçla oluşturulan portföy USD/TRY, EUR/TRY, JPY/TRY ve RUB/TRY finansal enstrümanlarını içermektedir. İlgili portföyün döviz kurlarından oluşturulmasının nedeni, bu piyasanın volatilitésinin yüksek olması ve önerilen risk tahmin modelinin yüksek volatil piyasalarda etkili sonuçlar verebildiğini göstermektir. İlgili döviz kurlarına ait veri seti “investing.com” web sitesinden elde edilmiştir. Günlük frekanslı döviz kuru veri setinin başlangıcı 01.01.2007 ve bitiş tarihi ise 15.05.2020 olarak belirlenmiş olup toplam 3490 gözlem değerinden oluşmaktadır. Döviz kurlarına ait grafikler Şekil 5.1’de gösterilmiştir.

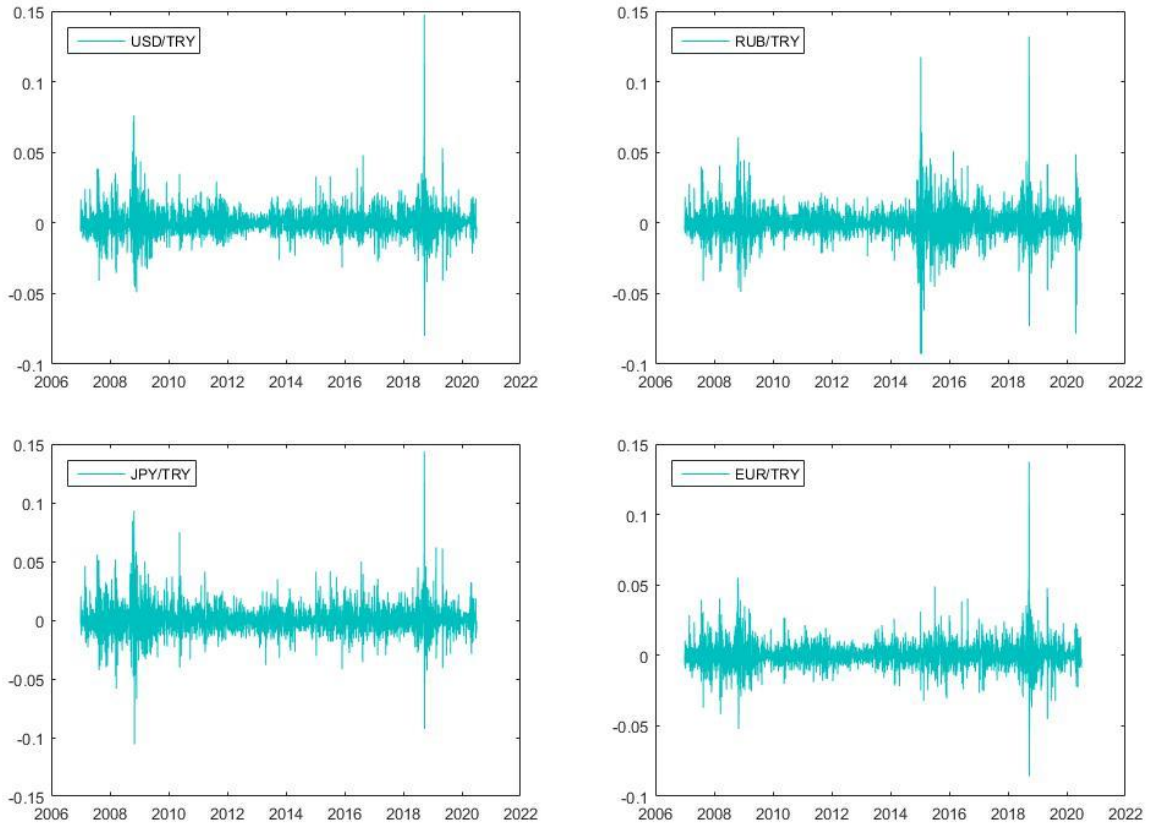


Şekil 5.1. Döviz kurlarının günlük fiyatları

Türkiye ve dünya ekonomisi ele alınan periyotta önemli ekonomik ve finansal krizler yaşamıştır. Bu tür kriz dönemlerinde fiyatlamalarda sert hareketler yaşanabilmektedir. Önerilen yöntemin bu tür periyotlardaki fiyat hareketlerini modellemede güçlü bir araç olduğunu ortaya koymak amacıyla bahsedilen örnek periyot ele alınmıştır.

Risk tahmin modellerinin performanslarını karşılaştırılabilmek için ele alınan örnek periyot iki alt periyoda ayrılmıştır. İlk periyot model tahmini ve ikinci periyot ise risk tahmin

modellerinin öngörü performanslarını değerlendirmek için kullanılmıştır. Bir diğer ifadeyle, ilk periyot eğitim verisini ve ikinci periyot ise test verisini oluşturmaktadır. Eğitim verisi, 01.01.2017 ile 31.05.2017 tarihlerini kapsayıp toplam 2718 gözlem değerinden oluşmaktadır. Test verisi, 01.06.2017 ile 15.05.2020 tarihlerini kapsamakta ve toplamda 772 günlük veriden oluşmaktadır. Test verisi, toplam veri setinin yaklaşık olarak % 22'sine karşılık gelmektedir. Bu çalışmada yapılan analizler orijinal seriler yerine onlara ait getiri serileri ile yapılmıştır. Bunun nedeni, getiri serilerinin bazı önemli istatistiksel özellikler sunmasından kaynaklanmaktadır. Döviz kurlarının getiri serileri Şekil 5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Döviz kuru getiri serileri

Getiri serileri aşağıda verilen eşitlik (5.1) ile elde edilmiştir.

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \quad (5.1)$$

Burada p_t ve r_t sırasıyla t anındaki fiyat ile getiri ifade etmektedir. Getiri serilerine ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 5.1'de verilmektedir.

Tablo 5.1. Döviz kuru getirilerinin tanımlayıcı istatistikleri

	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ortalama	0.00045	0.00039	0.00048	0.00016
Std. Sapma	0.00975	0.00921	0.01238	0.01135
Çarpıklık	1.34919	1.04213	0.80030	0.46018
Basıklık	21.71060	20.34435	12.47604	15.28121
JB İst.	69671	60881	23033	34117
P-değeri	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Ele alınan örnek periyot için döviz kurlarına ilişkin ortalama getiri değerleri incelendiğinde tüm döviz kurlarındaki getiri değerlerinin pozitif olduğu görülmüştür. JPY/TRY döviz kurunun en yüksek ortalama getiri sunduğu, ikinci en yüksek ortalama getiriye USD/TRY ve en düşük ortalama getiri sağlayan döviz kurunun RUB/TRY olduğu belirlenmiştir. Döviz kurları getiri serilerinin tamamının standart sapmaları ortalama değerlerinden büyüktür. Bu durum döviz kurlarının yüksek volatilité gösterdiğini ortaya koymaktadır. Bununla birlikte, ilgili döviz kurlarının çarpıklık değerleri pozitif ve bu durum ilgili döviz kurlarında pozitif getiri gözlenme olasılığı negatif getiri gözlenme olasılığından daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Diğer taraftan basıklık değerleri, döviz kuru getirilerinin aşırı basık olduğu sonucu ortaya koymaktadır. Getiri serilerine ilişkin hem çarpıklık hem basıklık değerleri, bu serilerin normal dağılım göstermediğini işaret etmektedir. Jarque-Bera testi sonucunda döviz kurlarının tamamının normal dağılım göstermediği belirlenmiştir. Bu durumda ilgili döviz kurları getiri serilerini modellemede normal dağılımın yeterli olmayacağı sonucuna ulaşılmıştır. Döviz kuru getiri serilerine ait durağanlık, otokorelasyon ve değişen varyans testlerinin sonuçları Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Tablo 5.2. Döviz kuru getirilerinin durağanlık, otokorelasyon ve değişen varyans test sonuçları

	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
ADF İst.	-20.4	-21.1	-21.5	-22.3
P-değeri	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Ljung Box Q İst.	58.101	68.059	25.734	29.410
P-değeri	0.00000	0.00000	0.00056	0.00012
ARCH LM İst.	570.97	644.33	596.06	629.87
P-değeri	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Zaman serilerinin durağanlığını ölçmek için kullanılan testlerden biri olan ADF (Augmented Dickey-Fuller) testine göre döviz kuru getiri serilerinin % 5 anlamlılık düzeyinde durağan olduğu belirlenmiştir. Böylelikle, her bir seriyi modellemek için durağan zaman serisi modelleme yöntemleri kullanılabilir. Döviz kurlarının otokorelasyonunu test etmek için Ljung-Box testi uygulanmıştır. Test sonucunda getiri serilerinde otokorelasyon olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte, bu getiri serilerinde değişen varyans olup olmadığını belirlemek için Engle (1982) tarafından önerilen ARCH testi uygulanmıştır. Döviz kuru getiri serilerinde ARCH etkisi önemli bulunmuştur. Tüm getiri serilerinde otokorelasyon ve ARCH etkisinin varlığı belirlenmiş olup ilgili döviz kuru getiri serilerinin marjinal dağılımlarını modellemek için ARMA-GARCH türü modellerin kullanılmasının gerekliliğine karar verilmiştir. Getiri serilerinin marjinal dağılımlarını modellemek için normal, Student t ve çarpık Student t dağılımları varsayılmıştır. En uyumlu marjinal model AIC ve BIC bilgi kriterlerine göre belirlenmiştir. Her bir döviz kuru getiri için tahmin edilen ARMA-GARCH türü modeller Çizelge 5.3'te verilmiştir.

Tablo 5.3. Döviz kuru getirilerine ait marjinal dağılımların parametre tahminleri

Parametre	USD/TRY: TGARCH-ST (Çarpık)			EUR/TRY: TGARCH-ST (Çarpık)		
	Tahmin	Std. Hata	P-değeri	Tahmin	Std. Hata	P-değeri
φ_1	-1.60457	0.05474	0.00000	0.76112	0.03235	0.00000
φ_2	-0.83524	0.03072	0.00000	/	/	/
φ_3	-0.04556	0.01180	0.00011	/	/	/
θ_1	1.58162	0.05503	0.00000	-0.77093	0.03189	0.00000
θ_2	0.79146	0.02581	0.00000	/	/	/
ω	0.00011	0.00004	0.01398	0.00018	0.00006	0.00229
α_1	0.07649	0.01576	0.00000	0.09120	0.01740	0.00000
β_1	0.92689	0.01642	0.00000	0.90527	0.01949	0.00000
η	-0.37096	0.10895	0.00066	-0.44036	0.10233	0.00001
ν	5.80374	0.60787	0.00000	6.26857	0.69364	0.00000
ξ	1.14864	0.02975	0.00000	1.08954	0.02812	0.00000
Parametre	JPY/TRY: TGARCH-ST (Çarpık)			RUB/TRY: GARCH-ST (Çarpık)		
	Tahmin	Std. Hata	P-değeri	Tahmin	Std. Hata	P-değeri

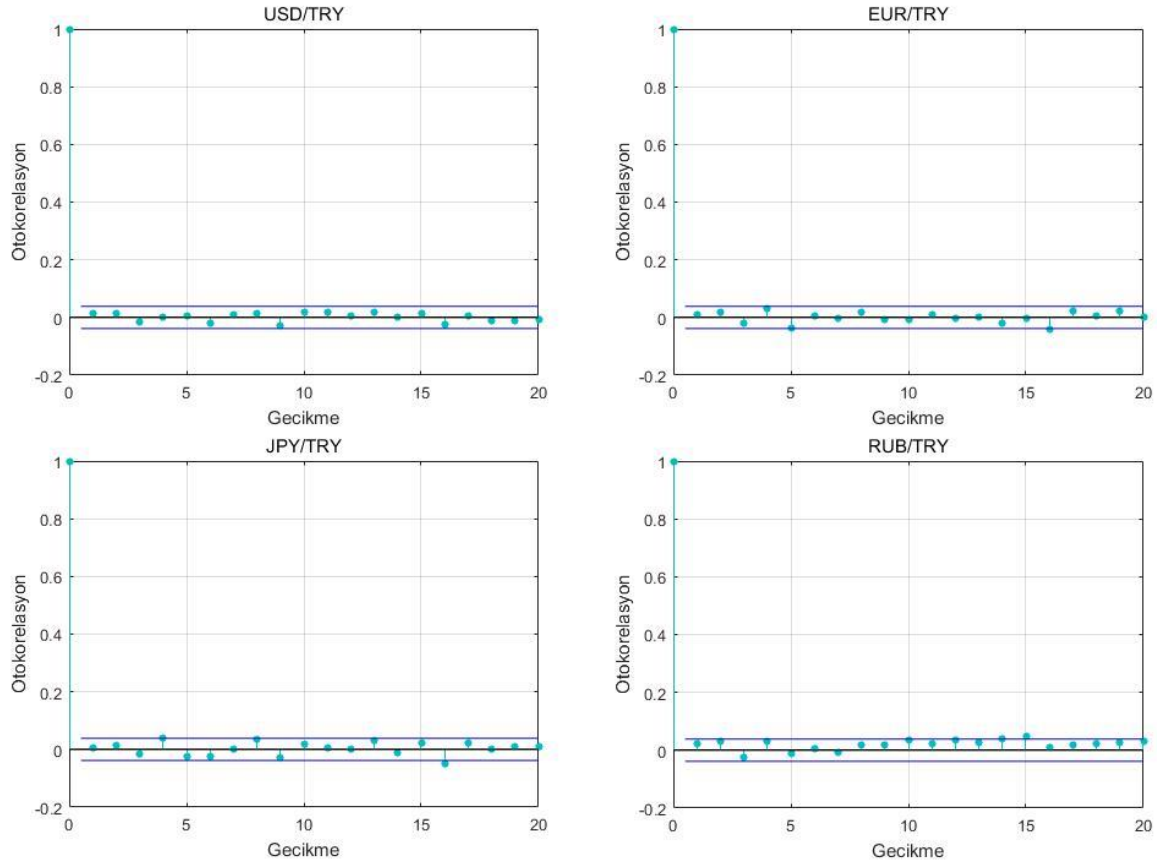
φ_1	0.53027	0.04661	0.00000	0.64847	0.16022	0.00005
θ_1	-0.56260	0.04552	0.00000	-0.67494	0.15499	0.00001
ω	0.00039	0.00009	0.00001	0.00001	0.00000	0.59675
α_1	0.10113	0.01413	0.00000	0.12138	0.05305	0.02214
β_1	0.88710	0.01625	0.00000	0.86952	0.05046	0.00000
η	-0.46406	0.09934	0.00000	/	/	/
ν	5.58052	0.59365	0.00000	6.58530	0.02634	0.00000
ξ	1.11510	0.02753	0.00000	1.05806	0.55533	0.00000

Döviz kuru getiri serilerine ilişkin marjinal modeller sırasıyla USD/TRY için ARMA(3,2)-TGARCH(1,1), EUR/TRY için ARMA(1,1)-TGARCH(1,1), JPY/TRY için ARMA(1,1)-TGARCH(1,1) ve RUB/TRY için ARMA(1,1)-GARCH(1,1) olarak belirlenmiştir. Her bir getiri serisinin hatalarına ilişkin en uyumlu dağılım çarpık Student t olarak seçilmiştir. Tahmin edilen marjinal modellerde ξ parametrelerinin anlamlı bulunması, marjinal dağılımlar için çarpık Student t dağılımının uyumlu olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte USD/TRY, EUR/TRY ve JPY/TRY döviz kuru getirileri için η parametrelerinin anlamlı bulunması ve TGARCH modelinin ilgili döviz kuru getirilerinin marjinallerini modellemede yeterli olması bu döviz kurlarının getirilerinde asimetrik volatilité etkisinin mevcut olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan RUB/TRY döviz kurunun getirisi için en uyumlu marjinal model, GARCH modeli olduğundan bu döviz kurunun getirisinde simetrik volatilité vardır.

Tablo 5.4. Marjinal dağılımlara ilişkin model uyum iyiliği sonuçları

	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ljung Box Q İst.	3.3947	8.9556	8.7512	8.6769
P-değeri	0.8462	0.2559	0.2710	0.2767
ARCH LM İst.	10.964	8.1992	5.8363	2.5878
P-değeri	0.1402	0.3154	0.5590	0.9203

Tahmin edilen marjinal modellerin uyum iyiliğini test etmek için bu modellerden elde edilen standartlaştırılmış artıklara Ljung-Box testi uygulanmıştır. Getiri serilerinin her birinin artıkları ayrı ayrı incelenmiş ve artık serilerinde otokorelasyon olmadığı görülmüştür. ARMA-GARCH modellerinden elde edilen standartlaştırılmış artıkların otokorelasyon grafikleri Şekil 5.3'te verilmiştir.



Şekil 5.3. Standartlaştırılmış artıkların otokorelasyon fonksiyonları

Bununla birlikte, her bir standartlaştırılmış artık serilerinin her birine ARCH testi uygulanmış ve serilerde ARCH etkisine rastlanmamıştır. Bütün bu sonuçlar her bir seri için tahmin edilen marjinal modellerin uyumlu olduğu göstermektedir. Böylelikle, kapula tahmini için gerekli olan girdi değişkenleri elde edilmiş olur.

USD/TRY, EUR/TRY, JPY/TRY ve RUB/TRY olmak üzere 4 döviz kurundan oluşan portföy için ilgili döviz kurlarının bağımlılık yapısı çok değişkenli kapula yaklaşımı ile modellenmiştir. Bu modeller çok değişkenli normal kapula, çok değişkenli Student t kapula, C-vine ve D-vine kapuladır. Kapula yaklaşımlarının her biri için ayrı ayrı bir risk tahmin modeli oluşturulmuştur. Bununla birlikte, her bir kapula yaklaşımı çeşitli ağırlıklandırma teknikleri kullanılarak 5 farklı alt risk tahmin modeline ayrılmıştır. Böylelikle, ilgili kapula yaklaşımları ile toplam 20 farklı risk tahmin modeli oluşturulmuştur. Diğer taraftan, klasik risk tahmin modelleri de farklı ağırlıklandırma teknikleri kullanılarak 5 alt risk tahmin modeline ayrılmıştır. Böylece, 30 farklı risk tahmin modeli ile ilgili döviz kuru portföyü için risk tahmini yapılmıştır. Risk ölçüsü olarak risk maruz değer (RMD) ve beklenen kayıp (BK)

değerleri kullanılmıştır. Risk tahmin değerlendirmeleri hem % 95 hem de % 99 güven seviyesinde yapılmıştır. İlgili portföyün risk tahmini eşit ağırlıklandırma, ters volatilité ağırlıklandırma, minimum varyans ağırlıklandırma, maksimum çeşitlendirme ağırlıklandırma ve eşit risk katkılı ağırlıklandırma teknikleri ile incelenmiştir. Bu ağırlıklandırma teknikleriyle oluşturulan risk tahmin modellerine ait RMD ve BK değerleri Çizelge 5.5 – Çizelge 5.9 arasında verilmiştir.

Tablo 5.5. Eşit ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 95	RMD % 99	BK % 95	BK % 99
Normal kapula	39	8	16	5
Student t kapula	42	7	12	4
C-vine kapula	40	7	13	5
D-vine kapula	40	7	13	4
Tarihsel simülasyon	49	13	24	7
Varyans-Kovaryans	37	18	27	12
	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ağırlıklar	0.25	0.25	0.25	0.25

Eşit ağırlıklandırılmış modellerden elde edilen risk sınırını aşan kayıpların sayısı incelendiğinde % 95 güven seviyesinde en iyi RMD risk tahmin performansını gösteren model varyans-kovaryans olurken normal kapulaya dayalı risk tahmin modeli en iyi ikinci model olmuştur. En kötü RMD risk tahmin performansı ise tarihsel simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, % 95 güven seviyesinde en iyi BK risk tahmin modeli Student t kapulaya dayalı model olurken C-vine ve D-vine kapula yaklaşımları ikinci en iyi performansı sunan modeller olmuştur. En kötü BK risk tahmin performansı varyans kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte, % 99 güven seviyesinde eşit ağırlıklı modellerin tahmin performansları değerlendirildiğinde en iyi RMD risk tahmin performansı Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleri ile sağlanmıştır. En kötü RMD risk tahmin modeli ise varyans kovaryans yöntemi olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en iyi BK risk tahmin performansı Student t kapula ve D-vine kapula modelleriyle elde edilirken en kötü BK risk tahmin performansı varyans-kovaryans modeli kullanılarak bulunmuştur. Bütün bu değerlendirmeler ışığında eşit ağırlıklandırılmış modeller arasında

Student t kapula, D-vine kapula ve varyans-kovaryans yaklaşımları en iyi risk tahmin modelleri için aday olarak belirlenmiştir.

Tablo 5.6. Ters volatilité ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 95	RMD % 99	BK % 95	BK % 99
Normal kapula	39	8	15	5
Student t kapula	42	8	12	5
C-vine kapula	40	8	13	5
D-vine kapula	40	8	12	5
Tarihsel simülasyon	51	13	26	7
Varyans-Kovaryans	39	19	27	12
	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ağırlıklar	0.26982	0.28560	0.21262	0.23194

Ters volatilité ağırlıklandırılmış modellerden elde edilen risk sınırını aşan kayıpların sayısı incelendiğinde % 95 güven seviyesinde en iyi RMD risk tahmin performansını gösteren model normal kapula ve varyans-kovaryans olurken en kötü RMD risk tahmin performansı ise tarihsel simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, % 95 güven seviyesinde en iyi BK risk tahmin modelleri Student t kapula ve D-vine kapula olduğu görülmüştür. En kötü BK risk tahmin performansı varyans kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte, % 99 güven seviyesinde ters volatilité ağırlıklı modellerin tahmin performansları değerlendirildiğinde en iyi RMD risk tahmin performanslarını normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleri sunmuştur. En kötü RMD risk tahmin modeli ise varyans kovaryans yöntemi olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en iyi BK risk tahmin performansları normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleriyle elde edilirken en kötü BK risk tahmin performansı varyans-kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bu sonuçlara göre ters volatilité ağırlıklandırılmış modeller arasında normal kapula, Student t kapula ve D-vine kapula modellerinin en iyi risk tahmin modelleri için aday yaklaşımlar olarak seçilmiştir.

Tablo 5.7. Minimum varyans ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 95	RMD % 99	BK % 95	BK % 99
Normal kapula	45	9	14	5
Student t kapula	45	9	13	5
C-vine kapula	45	9	14	5
D-vine kapula	45	9	12	5
Tarihsel simülasyon	61	17	28	8
Varyans-Kovaryans	41	21	29	14
	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ağırlıklar	0.271154	0.49990	0.00000	0.23194

Minimum varyans ağırlıklı modellerden elde edilen risk sınırını aşan kayıpların sayısı incelendiğinde % 95 güven seviyesinde en iyi RMD risk tahmin performansını gösteren modeller normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula olurken en kötü RMD risk tahmin performansı ise tarihsel simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, % 95 güven seviyesinde en iyi BK risk tahmin modeli D-vine kapulaya dayalı model olurken Student t kapula yaklaşımı ikinci en iyi performansı sunan model olmuştur. En kötü BK risk tahmin performansı varyans kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte, % 99 güven seviyesinde minimum varyans ağırlıklı modellerin tahmin performansları değerlendirildiğinde en iyi RMD risk tahmin performansı normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleri ile sağlanmıştır. En kötü RMD risk tahmin modeli ise varyans kovaryans yöntemi olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en iyi BK risk tahmin performansı normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleriyle elde edilirken en kötü BK risk tahmin performansı yine varyans-kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bu sonuçlar ışığında minimum varyans ağırlıklı modeller arasında Student t kapula, ve D-vine kapula yaklaşımları en iyi risk tahmin modelleri için aday olarak belirlenmiştir.

Tablo 5.8. Maksimum çeşitlendirme ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 95	RMD % 99	BK % 95	BK % 99
Normal kapula	36	5	17	5
Student t kapula	37	5	14	5
C-vine kapula	35	5	13	4
D-vine kapula	35	5	12	4
Tarihsel simülasyon	46	12	23	6
Varyans-Kovaryans	38	16	25	12
	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ağırlıklar	0.11536	0.23182	0.25550	0.39731

Maksimum çeşitlendirme ağırlıklı modellerden elde edilen risk sınırını aşan kayıpların sayısı incelendiğinde % 95 güven seviyesinde en iyi RMD risk tahmin performansını gösteren modeller C-vine ve D-vine kapula modelleri olurken normal kapulaya dayalı risk tahmin modeli en iyi üçüncü model olduğu görülmüştür. En kötü RMD risk tahmin performansı ise tarihsel simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, % 95 güven seviyesinde en iyi BK risk tahmin modeli D-vine kapula olurken C-vine kapula yaklaşımı ikinci en iyi performansı sunan model olmuştur. En kötü BK risk tahmin performansı varyans kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte, % 99 güven seviyesinde maksimum çeşitlendirme ağırlıklı modellerin tahmin performansları değerlendirildiğinde en iyi RMD risk tahmin performansı normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleri ile sağlanmıştır. En kötü RMD risk tahmin modeli ise varyans kovaryans yöntemi olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en iyi BK risk tahmin performansı C-vine ve D-vine kapula modelleriyle elde edilirken en kötü BK risk tahmin performansı varyans-kovaryans modeli kullanılarak bulunmuştur. Bu sonuçlardan hareketle maksimum çeşitlendirme ağırlıklı modeller arasında Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula yaklaşımları en iyi risk tahmin modelleri için aday olarak belirlenmiştir.

Tablo 5.9. Eşit risk katkı ağırlıklı portföyde risk tahmin yöntemlerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 95	RMD % 99	BK % 95	BK % 99
Normal kapula	39	8	15	5
Student t kapula	42	8	12	5
C-vine kapula	40	7	12	5
D-vine kapula	40	7	12	5
Tarihsel simülasyon	50	13	25	7
Varyans-Kovaryans	37	19	27	12
	USD/TRY	EUR/TRY	JPY/TRY	RUB/TRY
Ağırlıklar	0.25564	0.27660	0.20856	0.25918

Eşit risk katkı ağırlıklı modellerden elde edilen risk sınırını aşan kayıpların sayısı incelendiğinde % 95 güven seviyesinde en iyi RMD risk tahmin performansını gösteren model varyans-kovaryans modeli olurken normal kapulaya dayalı risk tahmin modeli en iyi ikinci model olduğu görülmüştür. En kötü RMD risk tahmin performansı ise tarihsel simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, % 95 güven seviyesinde en iyi BK risk tahmin modelleri Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula olduğu görülmüştür. En kötü BK risk tahmin performansı varyans-kovaryans modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte, % 99 güven seviyesinde eşit risk katkı ağırlıklı modellerin tahmin performansları değerlendirildiğinde en iyi RMD risk tahmin performansı C-vine ve D-vine kapula modelleri ile sağlanmıştır. En kötü RMD risk tahmin modeli ise varyans kovaryans yöntemi olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en iyi BK risk tahmin performansı normal kapula, Student t kapula, C-vine ve D-vine kapula modelleriyle elde edilirken en kötü BK risk tahmin performansı varyans-kovaryans modeli kullanılarak bulunmuştur. Bu sonuçlardan hareketle eşit risk katkı ağırlıklı modeller arasında varyans-kovaryans, C-vine ve D-vine yaklaşımları en iyi risk tahmin modelleri için aday olarak belirlenmiştir. RMD ve BK değerine göre en iyi performansı gösteren risk tahmin modellerinin doğruluğunu test etmek için Kupiec (1995) başarısızlık oran testi ve Christoffersen (1998) aralık tahmin testi uygulanmış ve sonuçlar Çizelge 5.10'da verilmiştir.

Tablo 5.10. Risk tahmin yöntemlerinin model doğruluk sonuçları

Tahmin yöntemi	KT % 95	KT % 99	CT % 95	CT % 99
<i>Eşit ağırlıklı</i>				
Student t kapula	0.30684 (0.57962)	0.07001 (0.79130)	7.73576 (0.02090)	3.97508 (0.13703)
D-vine kapula	0.052848 (0.81817)	0.07001 (0.79130)	5.80765 (0.05481)	3.97508 (0.13703)
Varyans-Kovaryans	0.07074 (0.79025)	10.05496 (0.00151)	4.59893 (0.10031)	17.49497 (0.00015)
<i>Ters volatilité ağırlıklı</i>				
Norman kapula	0.00434 (0.94741)	0.01013 (0.91980)	6.21070 (0.06436)	3.37601 (0.18488)
Student t kapula	0.306843 (0.57962)	0.01013 (0.91980)	7.73576 (0.02090)	3.37601 (0.18488)
D-vine kapula	0.05284 (0.81817)	0.01013 (0.91980)	5.80765 (0.05481)	3.37601 (0.18488)
<i>Minimum varyans ağırlıklı</i>				
Student t kapula	1.06293 (0.30254)	0.20352 (0.65188)	4.79796 (0.09081)	3.10763 (0.21143)
C-vine kapula	1.06293 (0.30254)	0.20352 (0.65188)	4.79796 (0.09081)	3.10763 (0.21143)
Varyans-Kovaryans	0.15408 (0.69466)	15.70184 (0.00007)	5.46100 (0.06186)	21.39892 (0.00002)
<i>Maksimum çeşitlendirme ağırlıklı</i>				
Student t kapula	0.07074 (0.79025)	1.10590 (0.29297)	7.31517 (0.02579)	6.43371 (0.04008)
C-vine kapula	0.36434 (0.54610)	1.10590 (0.29297)	5.74401 (0.05657)	6.43371 (0.04008)
D-vine kapula	0.36434 (0.54610)	1.10590 (0.29297)	5.74440 (0.05657)	6.43371 (0.04008)
<i>Eşit risk katkı ağırlıklı</i>				
C-vine kapula	0.05284 (0.81817)	0.07001 (0.79130)	5.80765 (0.05481)	3.97508 (0.13703)
D-vine kapula	0.05284 (0.81817)	0.07001 (0.79130)	5.80765 (0.05481)	3.97508 (0.13703)
Varyans-Kovaryans	0.07074 (0.79025)	11.83104 (0.000582)	4.59893 (0.10031)	18.64638 (0.00008)

% 95 güven seviyesinde doğruluk testlerini geçen risk tahmin modelleri sırasıyla eşit ağırlıklı D-vine kapula ile varyans-kovaryans modeli, ters volatilité ağırlıklı normal kapula ile D-vine kapula modeli, minimum varyans ağırlıklı Student t kapula, C-vine kapula ve varyans-kovaryans modeli, maksimum çeşitlendirme ağırlıklı C-vine ve D-vine kapula modelleri, eşit risk katkılı C-vine ve D-vine kapula ile varyans-kovaryans modelidir. % 95 güven seviyesinde 12 aday risk tahmin modeli Kupiec ve Christoffersen testlerini geçmeyi

başarmıştır. Diğer taraftan, % 99 güven seviyesinde ilgili doğruluk testlerini geçmeyi başaran modeller sırasıyla eşit ağırlıklı Student t kapula ve D-vine kapula modelleri, ters volatilité ağırlıklı normal kapula, Student t kapula ve D-vine kapula modelleri, minimum varyans ağırlıklı Student t kapula ve C-vine kapula modelleri ile eşit risk katkı ağırlıklı C-vine ve D-vine kapula modelleridir. % 99 güven seviyesinde 9 aday model doğruluk testleri başarıyla geçmiştir. Kupiec ve Christoffersen testlerinden geçen aday modeller için kayıp fonksiyon değerleri hesaplanmış olup bu değerler risk sınırını aşan kayıplarla birlikte % 95 ve % 99 güven seviyesinde sırasıyla Çizelge 5.11 ve Çizelge 5.12’ de özetlenmiştir.

Tablo 5.11. % 95 güven seviyesinde aday risk tahmin modellerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 95	BK % 95	LO % 95	BI % 95	GR % 95	Kayıpların Sıra Ortalaması
<i>Eşit ağırlıklı</i>						
D-vine kapula	40	13	0.00507	0.02136	0.00096	4.5
Varyans-Kovaryans	37	27	0.00663	0.03670	0.00121	9.33
<i>Ters volatilité ağırlıklı</i>						
Normal kapula	39	15	0.00041	0.02133	0.00097	4.5
D-vine kapula	40	12	0.00507	0.02188	0.00096	5.5
<i>Minimum varyans ağırlıklı</i>						
Student t kapula	45	13	0.10611	0.02449	0.00097	10
C-vine kapula	45	14	0.10611	0.02259	0.00096	8.5
Varyans-Kovaryans	41	29	0.01492	0.04156	0.00121	10.5
<i>Maksimum çeşitlendirme ağırlıklı</i>						
C-vine kapula	35	13	0.03357	0.02007	0.00095	4.67
D-vine kapula	35	12	0.03357	0.01995	0.00095	4.33
<i>Eşit risk katkı ağırlıklı</i>						
C-vine kapula	40	12	0.00507	0.02161	0.00096	4.83
D-vine kapula	40	12	0.00507	0.02162	0.00096	5.17
Varyans-Kovaryans	37	27	0.00663	0.037371	0.00048	6.17

Hem risk ölçüleri hem de kayıp fonksiyon değerleri dikkate alındığında % 95 güven seviyesinde ilgili döviz kuru portföyü için en iyi risk tahmin performansını maksimum çeşitlendirme ağırlıklı D-vine kapula modeli sunmuştur. İkinci en iyi risk tahmin modeli ise

maksimum çeşitlendirme ağırlıklı C-vine kapula olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en kötü risk tahmin performansı minimum varyans ağırlıklı Student t kapula modeli ile elde edilmiştir.

Risk ölçülerini hesaplamada klasik yaklaşımlardan biri olan varyans-kovaryans yöntemi ile %95 güven seviyesinde BK değerleri tahmin edilmiş ve BK sınırını aşan kayıpların sayısının kapula yaklaşımına dayalı modellere göre oldukça yüksek olduğu görülmüştür. Döviz kuru getiri serilerinin normal dağılış göstermemesi bu sonucunun ortaya çıkmasında etkili olmuştur. Bununla birlikte, kapulaya dayalı yaklaşımlar normal dağılım varsayımına gerek duymadığından ve klasik yaklaşımlara göre dağılımların kuyruklarındaki bağımlılığı daha iyi modelleyebildiğinden dolayı üretilen risk tahmin sonuçları klasik yaklaşımlara göre daha doğru ve tutarlı olduğu görülmüştür.

% 95 güven seviyesinde vine kapula modelleri tüm ağırlıklandırma tekniklerinde en az bir tane doğruluk testlerinin geçen risk tahmin modeli sunarken elipsel kapullar benzer performansı gösterememiştir. Bu durum vine kapulaların elipsel kapulalara kıyasla değişkenler arasındaki bağımlılığı daha esnek bir şekilde modelleyebilmesinden kaynaklanmaktadır. Normal kapula simetrik bağımlılık ve Student t kapula simetrik kuyruk bağımlılığını modelleyebilirken vine kapulalar asimetric bağımlılıkları da modelleyebilmektedir. Bu nedenle vine kapulalar değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını daha kapsamlı bir şekilde ele almaktadır.

% 95 güven seviyesinde maksimum çeşitlendirme ağırlıklı modeller en iyi performansa sahip olduğu, ikinci olarak eşit risk katkı ağırlıklı modellerin ve daha sonra eşit ağırlıklı modellerin iyi performans gösterdiği belirlenmiştir. En kötü performans ise minimum varyans ağırlıklı modeller ile elde edilmiştir. Bununla birlikte, alternatif ağırlıklandırma modellerinin eşit ağırlıklı modellerden daha iyi tahmin üretebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Tablo 5.12. % 99 güven seviyesinde aday risk tahmin modellerinin performansları

Tahmin yöntemi	RMD % 99	BK % 99	LO % 99	BI % 99	GR % 99	Kayıpların Sıra Ortalaması
<i>Eşit ağırlıklı</i>						
Student t kapula	7	4	0.00134	0.00347	0.00027	3.17
D-vine kapula	7	4	0.00134	0.00372	0.00027	3.5
<i>Ters volatilité ağırlıklı</i>						
Norman kapula	8	5	0.00020	0.00468	0.00028	6.17
Student t kapula	8	5	0.00020	0.00385	0.00028	4.83
D-vine kapula	8	5	0.00020	0.00398	0.00027	3.67
<i>Minimum varyans ağırlıklı</i>						
Student t kapula	9	5	0.00424	0.00420	0.00028	7.67
C-vine kapula	9	5	0.00424	0.00440	0.00028	8
<i>Eşit risk katkı ağırlıklı</i>						
C-vine kapula	7	5	0.00134	0.00376	0.00027	3.83
D-vine kapula	7	5	0.00134	0.00384	0.00027	4.17

% 99 güven seviyesinde risk sınırını aşan kayıpların sayısı ve kayıp fonksiyon değerleri incelendiğinde döviz kuru portföyü için en iyi risk tahmin performansları eşit ağırlıklı Student t kapula ve D-vine kapula modelleri kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte, eşit risk katkı ağırlıklı C-vine ve D-vine kapula modellerinin risk tahmin performansları oldukça etkili olup eşit ağırlıklı modellere alternatif olarak kullanılabilir. Diğer taraftan, en kötü risk tahmin performanslarını minimum varyanslı Student t ve C-vine kapula modellerinin gösterdiği belirlenmiştir.

Ayrıca % 99 güven seviyesinde klasik risk tahmin yöntemlerinden olan varyans-kovaryans ve tarihsel simülasyon modellerinin Kupiec ve Christoffersen'in model doğruluk testlerini geçmede başarısız olduğu görülürken kapula yaklaşımına dayalı modellerin bu testleri geçme klasik yöntemlere kıyasla daha başarılı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Tüm ağırlıklandırma gruplarında model doğruluk testlerini geçen en az bir tane vine kapula modeli bulunurken risk katkı ağırlıklı elipsel kapula modellerinin bu testlerden geçemediği belirlenmiştir. Bu durum vine kapulaların bağımlılığı modellemedeki gücünü ortaya koymaktadır.

Son olarak, % 99 güven seviyesinde eşit ağırlıklı modeller ile eşit risk katkı ağırlıklı modellerin en iyi performansı gösterdiği belirlenmiştir. En kötü performans ise minimum varyans ağırlıklı modeller ile elde edilmiştir. Bu sonuçlardan hareketle alternatif ağırlıklı modellerin eşit ağırlıklı modeller yerine kullanılmasının daha iyi risk tahmin performansı sunabileceği gösterilmiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada USD/TRY, EUR/TRY, JPY/TRY ve RUB/TRY döviz kurlarından oluşan bir portföy için risk tahmini yapılmıştır. Bu amaçla klasik risk tahmin yöntemlerinden olan varyans-kovaryans ve tarihsel simülasyon modellerinin yanı sıra çok değişkenli normal kapula, çok değişkenli Student t kapula ile C-vine ve D-vine kapula modelleri kullanılmıştır. Ayrıca ilgili risk tahmin modelleri eşit ağırlığın yanı sıra ters volatilité, minimum varyans, maksimum çeşitlendirme ve eşit risk katkı ağırlıkları ile birleştirilerek her bir risk tahmin modeli için beş alt risk tahmin modeli oluşturulmuştur. Böylelikle, otuz farklı risk tahmin modeli kullanılarak ilgili döviz kuru portföyü için risk tahminleri yapılmıştır.

İlk olarak her bir döviz kuru getiri serisinin marjinaleri ARMA-GARCH türü modellerle tahmin edilmiştir. USD/TRY için ARMA(3,2)-TGARCH(1,1) modeli, EUR/TRY ve JPY/TRY için ARMA(1,1)-TGARCH(1,1) modeli ve RUB/TRY için ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelinin en uyumlu modeller olduğu belirlenmiştir. Çarpık Student t dağılımı marjinal modellere ilişkin en uyumlu dağılım olduğu görülmüştür. Ayrıca RUB/TRY hariç diğer döviz kuru getiri serilerinde asimetric volatilitenin olduğu anlaşılmıştır.

USD/TRY, EUR/TRY, JPY/TRY ve RUB/TRY'den oluşan döviz kuru portföyü için otuz farklı risk tahmin modeli ile % 95 ve % 99 güven seviyesinde risk tahminleri yapılmıştır. % 95 güven seviyesinde en iyi risk tahmin performansı maksimum çeşitlendirme ağırlıklı D-vine kapula modeli ile elde edilmiştir. Maksimum çeşitlendirme ağırlıklı C-vine kapula ise en iyi ikinci model olarak belirlenmiştir. En kötü risk tahmini minimum varyans ağırlıklı Student t kapula modeli ile yapılmıştır. % 99 güven seviyesinde eşit ağırlıklı Student t kapula ile D-vine kapula en iyi risk tahmin performansı sunmuştur. Eşit risk ağırlıklı C-vine ve D-vine kapula modellerinin eşit ağırlıklı modellere iyi bir alternatif olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, en kötü risk tahmin performansı minimum varyans ağırlıklı Student t kapula ve C-vine kapula ile elde edilmiştir.

% 95 güven seviyesinde tüm ağırlıklandırma gruplarında klasik risk tahmin yöntemleri doğruluk testlerini geçmede başarısız olmuştur. Diğer taraftan, vine kapula modelleri % 99 güven seviyesinde maksimum çeşitlendirme ağırlıklı modeller hariç diğer tüm ağırlıklandırma gruplarında en az bir tane doğruluk testlerinin geçen risk tahmin modeli sunduğu görülmüştür. Bu durum vine kapulaların değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modellemedeki gücünü ortaya koymaktadır. Ayrıca C-vine ve D-vine kapula risk tahmin sonuçları birbirlerine

oldukça yakındır. Bu nedenle ilgili değişkenler arasındaki bağımlılık hem C-vine hem de D-vine yapılarına uyumlu olup her iki kapula modeli ile ele alınabilir.

% 95 güven seviyesinde en iyi risk tahmin modeli maksimum çeşitlendirme ağırlıklı modeller kullanılarak elde edilmiştir. % 99 güven seviyesinde ise eşit ağırlıklı modeller ile eşit risk katkı ağırlıklı modellerin performanslarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar farklı ağırlıklandırılmış risk tahmin modellerinin eşit ağırlıklı modellerden daha iyi performans gösterebileceğini ortaya koymuştur.

Bu tez çalışmasında tek değişkenli volatilité modelleri ile portföy risk tahmini yapılmıştır. Çok değişkenli volatilité modelleri kullanılarak farklı ağırlıklandırılmış risk tahmin modelleri ile portföy risk tahmini incelenebilir. Ayrıca, bu araştırmada döviz kurlarından oluşan bir portföy ele alınmıştır. Enerji piyasası gibi farklı piyasalardan oluşan bir portföye ait risk tahmini önerilen model ile araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. ve Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and economics*, 44(2), 182-198.
- Aas, K. ve Berg, D. (2009). Models for construction of multivariate dependence—a comparison study. *The European Journal of Finance*, 15(7-8), 639-659.
- Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiß, J. P. ve Mikosch, T. V. (Eds.). (2009). *Handbook of financial time series*. Springer Science & Business Media.
- Bastianin, A. (2009). Modelling asymmetric dependence using copula functions: an application to value-at-risk in the energy sector.
- Bedford, T. ve Cooke, R. M. (2001). Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial intelligence*, 32(1-4), 245-268.
- Bedford, T. ve Cooke, R. M. (2002). Vines—a new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics*, 30(4), 1031-1068.
- Blanco, C. ve Ihle, G. (1998). How good is your VaR? Using backtesting to assess system performance. *Financial Engineering News*, 11, 1-2.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. ve Roncalli, T. (2000). Copulas for finance—a reading guide and some applications. Available at SSRN 1032533.
- Brandt, M. W. ve Kang, Q. (2004). On the relationship between the conditional mean and volatility of stock returns: A latent VAR approach. *Journal of Financial Economics*, 72(2), 217-257.
- Braun, V. (2011). *Dynamic copulas for finance: An application to portfolio risk calculation* (Vol. 166). BoD—Books on Demand.
- Campbell, J. Y., Champbell, J. J., Campbell, J. W., Lo, A. W., Lo, A. W. ve MacKinlay, A. C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University press.
- Campbell, S. (2005). *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*. Federal Reserve Board, Washington, 2005.
- Cech, C. (2006). Copula-based top-down approaches in financial risk aggregation. Available at SSRN 953888.
- Cherubini, U., Luciano, E. ve Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 841-862.

- Christoffersen, P. (2011). *Elements of financial risk management*. Academic Press.
- Christoffersen, P. (2009). Value-at-Risk Models. In Mikosch, T., Kreiß, J.-P., Davis, R. A., and Andersen, T. G., editors, *Handbook of Financial Time Series*, pages 753–766. Springer Berlin Heidelberg.
- Das, S. R. ve Uppal, R. (2004). Systemic risk and international portfolio choice. *The Journal of Finance*, 59(6), 2809-2834.
- Dias, A. ve Embrechts, P. (2010). Modeling exchange rate dependence dynamics at different time horizons. *Journal of International Money and Finance*, 29(8), 1687-1705.
- Ding, Z., Granger, C. W. ve Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83-106.
- Dissmann, J., Brechmann, E. C., Czado, C. ve Kurowicka, D. (2013). Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics & Data Analysis*, 59, 52-69.
- Dissmann, J. F. (2010). Statistical inference for regular vines and application.
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. ve Rachev, S. (2003). *Handbook of heavy tailed distributions in finance. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. Handbooks in Finance: Book, 1, 329-385.
- Embrechts, P., McNeil, A. ve Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. Risk management: value at risk and beyond, 1, 176-223.
- Emekter, R., Jirasakuldech, B. ve Snaith, S. M. (2009). Nonlinear dynamics in foreign exchange excess returns: Tests of asymmetry. *Journal of Multinational Financial Management*, 19(3), 179-192.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987-1007.
- Engle, R. (2009). *Anticipating correlations: a new paradigm for risk management*. Princeton University Press.
- Engle, R. F. ve Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric reviews*, 5(1), 1-50.
- Engle, R. F. ve Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The Journal of Finance*, 48(5), 1749-1777.
- Fantazzini, D. (2008). Dynamic copula modelling for value at risk. *Frontiers in Finance and Economics*, 5(2), 72-108.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. ve Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5), 1779-1801.

- González-Rivera, G., Lee, T. H. ve Mishra, S. (2004). Forecasting volatility: A reality check based on option pricing, utility function, value-at-risk, and predictive likelihood. *International Journal of forecasting*, 20(4), 629-645.
- Guegan, D. ve Zhang, J. (2010). Change analysis of a dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data. *Quantitative Finance*, 10(4), 421-430.
- Haff, I. H., Aas, K. ve Frigessi, A. (2010). On the simplified pair-copula construction—simply useful or too simplistic?. *Journal of Multivariate Analysis*, 101(5), 1296-1310.
- Hamilton, J. D. (2008). *Regime Switching Models*. In Durlauf, S. N. and Blume, L. E., editors, *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Palgrave Macmillan, second edition.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 705-730.
- Hsieh, C.-H. ve Huang, S.-C. Time-Varying Dependency and Structural Changes in Currency Markets. *Emerging Markets Finance and Trade*, 48 (2):94–127, March 2012.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.
- Joe, H. ve Kurowicka, D. (Eds.). (2011). *Dependence modeling: vine copula handbook*. World Scientific.
- Jorion, P. (2007). *Financial risk manager handbook* (Vol. 406). John Wiley & Sons.
- Kim, D., Kim, J. M., Liao, S. M. ve Jung, Y. S. (2013). Mixture of D-vine copulas for modeling dependence. *Computational Statistics & Data Analysis*, 64, 1-19.
- Kurowicka, D. (2010). *Optimal truncation of vines*. In *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook* (pp. 233-247).
- Kurowicka, D. ve Cooke, R. M. (2006). *Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling*. John Wiley & Sons.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The J. of Derivatives*, 3(2).
- Liu, J. (2006). Portfolio selection in stochastic environments. *The Review of Financial Studies*, 20(1), 1-39.
- Lopez, J. A. (1999). Methods for evaluating value-at-risk estimates. *Economic review*, 2, 3-17.
- Luo, J. (2011). Stepwise estimation of D-Vines with arbitrary specified copula pairs and EDA Tools.
- Manner, H. ve Reznikova, O. (2012). A survey on time-varying copulas: specification, simulations, and application. *Econometric reviews*, 31(6), 654-687.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

- McNeil, A. J., Frey, R. ve Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools* (Vol. 3). Princeton: Princeton university press.
- McNeil, A. J., Frey, R. ve Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools* (Vol. 3). Princeton: Princeton university press.
- Morales-Napoles, O. (2010). Counting vines. In *Dependence modeling: Vine copula handbook* (pp. 189-218).
- Nelsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* . NY: Springer Science+ Business Media.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 347-370.
- Ng, W. L. (2008). Modeling duration clusters with dynamic copulas. *Finance Research Letters*, 5(2), 96-103.
- Okimoto, T. (2008). New evidence of asymmetric dependence structures in international equity markets. *Journal of financial and quantitative analysis*, 43(3), 787-815.
- Owen, J. ve Rabinovitch, R. (1983). On the class of elliptical distributions and their applications to the theory of portfolio choice. *The Journal of Finance*, 38(3), 745-752.
- Patton, A. J. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 130-168.
- Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review*, 47(2), 527-556.
- Silva Filho, O. C., Ziegelmann, F. A. Ve Dueker, M. J. (2014). Assessing dependence between financial market indexes using conditional time-varying copulas: applications to Value at Risk (VaR). *Quantitative Finance*, 14(12), 2155-2170.
- Sklar, M. (1959). *Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges*. Publ. inst. statist. univ. Paris, 8, 229-231.
- Wiboonpongse, A., Liu, J., Sriboonchitta, S. ve Denoeux, T. (2015). Modeling dependence between error components of the stochastic frontier model using copula: application to intercrop coffee production in Northern Thailand. *International Journal of Approximate Reasoning*, 65, 34-44.
- Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and control*, 18(5), 931-955.

ÖZ GEÇMİŞ

Emre Yıldırım, Tuzla Anadolu Teknik Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden 2014 yılında mezun oldu. 2017 yılında OMÜ LEE İstatistik Yüksek Lisans programını bitirdi. 2017 yılında OMÜ LEE İstatistik Doktora öğrenimine başladı. 2016 yılından bu yana Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmakta ve iyi derecede İngilizce bilmektedir. (23.06.2022)

İletişim Bilgileri :

ORCID ID : 0000-0002-2816-7473

Yayımlar :

1. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2022). Modeling dependency between industry production and energy market via stochastic copula approach. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 51, 2006-2019, doi: 10.1080/03610918.2019.1691228
2. Sağlam, F., Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2022). Clustered Bayesian Classification for Within-Class Separation. *Expert Systems with Applications*, 118152.
3. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2018). Dependency between Exchange Rate and Gold Price via Copula-DCC-GARCH Approach. *International Journal for Scientific Research and Development*, 6(5), 974-978.
4. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2017). Determining of Dependency Between Exchange Rates Through Copula – GARCH Model. *EPRA International Journal of Research Development (IJRD)*, 2(11), 7-15.
5. Zaman, T., Yıldırım E., & Civanbay, H. (2017). Financial performance analysis of netherlands eredisie with the help of resampling methods. *International Peer-reviewed journal of humanities and academic science (uhbab)*(20), 1-20., doi:10.17368/uhbab.2017.2.1.
6. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2016). Evaluating Value at Risk in BIST Using Copula Approach. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, 5(30), 52-62.
7. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2019). Portfolio Risk Estimation via ARMA-GARCH Kapula Approach. *2nd International Conference on Data Science and Applications (Özet Bildiri/SözlüSunum)*
8. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2019). DCC-GARCH-Copula Approach in Modelling Dependency between Stock and Government Bonds. *2nd International Conference on Data Science and Applications (ICONDATA'19 (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)*
9. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2018). Kapula Yaklaşımı İle Portföy Risk Degerlendirilmesi. *19. uluslararası ekonometri, yöneylem araştırması ve istatistik sempozyumu (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)*
10. Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2018). Döviz Kuru Getirilerinin ARIMA-GARCH Yaklaşımı ile Modellenmesi. *19. uluslararası ekonometri, yöneylem araştırması ve istatistik sempozyumu (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)*

- 11.Yıldırım, E. (2017). Determining Dependency between Gold Price and Exchange Rate Using Copula. *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences* (Özet Bildiri/Poster)
- 12.Yıldırım, E. (2017). Estimating Value at Risk for Portfolio Via Copula Approach. *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)
- 13.Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2017). Finansal Varlıklar Arasındaki Bağımlılık Yapısının Modellenmesinde Kapula Yaklaşımı. *18. International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)
- 14.Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2017). OECD Ülkelerinde GSYH'yi Etkileyen Faktörlerin Path Analizi Yöntemi Ile Modellenmesi. *18. International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)
- 15.Zaman, T., & Yıldırım, E. (2016). Financial Performance Investigation with the Help of the Bootstrap Method Example of the Eredivisie League. *2nd International Conference on Applied Economics and Finance (ICOAEF 2016)* (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)
- 16.Yıldırım, E., & Cengiz, M. A. (2016). Sanayi Üretim Endeksleri Ile Ilgili Temel Degiskenler arasındaki Bağımlılığın Stokastik Kapula Yaklaşımı ile Modellenmesi. *2nd International Conference on Applied Economics and Finance (ICOAEF 2016)* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)