

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**



**MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YAKLAŞIMLARI
KULLANARAK KATEGORİK VE SÜREKLİ TEKRARLI
ÖLÇÜMLER İÇİN BAYESÇİ HİYERARŞİK MODELLER**

Doktora Tezi

Endris Assen EBRAHİM

Danışman

Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

SAMSUN
2022

TEZ KABUL VE ONAYI

Endris Assen EBRAHİM tarafından, Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ danışmanlığında hazırlanan “MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YAKLAŞIMLARI KULLANARAK KATEGORİK VE SÜREKLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLER İÇİN BAYESÇİ HİYERARŞİK MODELLER” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 28.7.2022 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT Akdeniz Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü, Biyometri ve Genetik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. Üyesi Emre DÜNDER Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. Haydar KOÇ Çankırı Karatekin Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Hamza ERDOĞDU Harran Üniversitesi Ekonometri Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul <input type="checkbox"/> Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
... / ... / ...
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır

İmza

.../.../20...

Endris Assen EBRAHİM

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YAKLAŞIMLARI KULLANARAK KATEGORİK VE SÜREKLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLER İÇİN BAYESÇİ HİYERARŞİK MODELLER

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 23.06.2022 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 3

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

İmza

.../.../20...

Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

ÖZET

MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YAKLAŞIMLARI KULLANARAK KATEGORİK VE SÜREKLİ TEKRARLI ÖLÇÜMLER İÇİN BAYESÇİ HİYERARŞİK MODELLER

Endris Assen EBRAHİM
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

Doktora, Ağustos/2022

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

Hem frekansçı hem de Bayesci istatistik okulları, toplanan veriler veya ölçümler için gelişmiş istatistiksel araçlara ve model seçeneklerine sahiptir. Model seçim yaklaşımları, doğrusal tahmin edicilerin değişkenleri gruplayarak değiştiği ve model parametrelerinin sayısının farklı olmadığı karmaşık hiyerarşik modelleri karşılaştırmanın zorluğu nedeniyle ilerlemiştir. Tekrarlı ölçüm verileri, aynı bağımlı değişkenin tekrarlı ölçümlerinin (gözlemlerinin) zamana, mekâna veya çoklu durumlara bağlı olarak iki veya daha fazla noktada alındığı bir boylamsal veri tipi olabilir. Tekrarlı ölçümler, doğası gereği kümelenmiştir ve tipik olarak klinik deneylerde, eğitimde, bilişsel psikolojide ve tedavi takibinde ortaya çıkar. Bu tez çalışmasının amacı, çeşitli bağımlı değişken türleri ile tekrarlı ölçüm verilerine hiyerarşik modellerde parametre tahminleri için Bayesci Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yaklaşımların farklı veri seti kullanarak uygulanması ve model seçme yöntemlerinin incelenmesidir. Bu tezde, Bayesci Hiyerarşik modeller, üç farklı durum için uygulanmaktadır: sürekli bağımlı değişken (durum I), kategorik bağımlı değişken (durum II) ve karışık bağımlı değişken (durum III). Üç farklı MZMC yaklaşımıyla iki uygulama veri seti için en uygun modeller belirlendi. Kurulan modellerin karşılaştırmaları, bir adet dışarıda bırakma kriteri (LOO-IC), Bayesci sapma kriteri (DIC), Bilgi karmaşıklığı (ICOMP), Watanabe uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC) ve K-kat çapraz doğrulama ölçütleri kullanılarak yapıldı. Bayesci hiyerarşik modellerini tahmin etmek için her durumda Metropolis-Hastings (MH), Gibbs örnekleme ve Hamiltoncu Monte Carlo yaklaşımı kullanıldı. Bu üç Bayesci yaklaşımı için boş model, rastgele kesişim modeli ve tam hiyerarşik rastgele eğitim modelleri yerleştirildi. Hem sözel öğrenme testi veri seti (ACTIVE çalışma veri seti) hem de Damar Tıkanıklığı Hastalıkları (DTH) veri seti için en iyi tahmin performansına sahip model, her durumda, Hamiltoncu-Markov Zinciri Monte Carlo yaklaşımını kullanan tam hiyerarşik rastgele eğitim model oldu.

Anahtar Sözcükler: Hiyerarşik, Bayesci, En iyi uyum, Model seçimi, Bilgi karmaşıklığı

ABSTRACT

BAYESIAN HIERARCHICAL MODELS FOR CATEGORICAL AND CONTINUOUS REPEATED MEASURES DATA USING MARKOV CHAIN MONTE CARLO APPROACHES

Endris Assen EBRAHIM
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Statistics

Ph.D. August/2022

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

Both Frequentist and Bayesian statistics schools have improved statistical tools and model choices for the collected data or measurements. Model selection approaches have advanced due to the difficulty of comparing complicated hierarchical models in which linear predictors vary by grouping variables, and the number of model parameters is not distinct. Repeated measurement data can be a longitudinal data type in which repeated measurements (observations) of the same dependent variable are taken at two or more points depending on time, location, or multiple states. Repeated measures are inherently clustered and typically occur in clinical trials, education, cognitive psychology, and treatment follow-up. This thesis aims to apply Bayesian Markov Chain Monte Carlo (MCMC) approaches to different types of repeated measures data and model selection methods for parameter estimates in hierarchical models with various outcome variable types. In this thesis, Bayesian Hierarchical models are applied for three different cases: continuous outcome (case I), categorical outcome (Case II), and mixed outcome (Case III). We identified the best-fitted models under two application datasets using the three MCMC approaches. Comparisons of the fitted models were done using leave-one-out information criteria (LOO-IC), Deviance information criteria (DIC), Information complexity (ICOMP), Watanabe applicable Bayesian information criterion (WAIC), and K-fold cross-validation methods. We used Metropolis-Hastings (MH), Gibbs sampler, and Hamiltonian Monte Carlo approach in all cases to estimate the Bayesian hierarchical models. For these three Bayesian approaches, we fitted the null model, random intercept model, and the full hierarchical random slope models. In all cases, the model with the best predictive performance for the verbal learning test dataset (ACTIVE study dataset) and Arterial Occlusive Diseases (AOD) dataset was the full hierarchical random slope model using the Hamiltonian Monte Carlo approach.

Keywords: Hierarchical, Bayesian, Best-fit, Model selection, Information complexity

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği geçen başta tez danışmanım Prof. Dr. Mehmet Ali Cengiz'e, eğitimin boyunca yanımda olan aileme, Araş. Gör. Fatih Sağlam'a ve başta olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma çok teşekkür etmek isterim.

Endris Assen EBRAHİM

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Hiyerarşik Tekrarlı Ölçüm Verileri.....	1
1.2. Bayesci Hiyerarşik Modeller için Tekrarlı Ölçüm Veri Yapısı	2
1.3. Tezin Amaçları ve Önemi	2
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI/YORUMLARI	4
3. METODOLOJİ/TEZE İLİŞKİN YÖNTEM	9
3.1. Genel ve Genelleştirilmiş Bayesci Hiyerarşik Modelleri.....	9
3.2. Durum I: Normal veya Sürekli Bağımlı değişken Modelleri	11
3.2.1. Sürekli Tekrarlı Ölçümler İçin Hiyerarşik Doğrusal Modelleme.....	11
3.3. Genel ve Genelleştirilmiş Doğrusal Bayesci Hiyerarşik Model Türleri	13
3.3.1. Boş Model	13
3.3.2. Rastgele Kesişim (Sabit Eğimli) Modeli.....	14
3.3.3. Rastgele Kesişim ve Rastgele Eğim (Katsayılar Modeli)	15
3.4. Tekrarlı ölçüm verileri için Bayesci hiyerarşik doğrusal modelleme	18
3.5. Durum II: Kategorik Bağımlı Değişken (ler)i için Modeller	22
3.5.1. Kategorik Bağımlı Değişken İçin Bayesci Hiyerarşik Modelleri.....	22
3.6. Durum III: Çok Değişkenli Karışık Bayesci Hiyerarşik Modeller.....	24
3.6.1. Bayesci Hiyerarşik Karışık Bağımlı Değişken Modellemesi	25
3.7. Bayesci Çıkarım ve Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) Yaklaşımları	27
3.7.1. Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) Yaklaşımları.....	27
3.8. Bayesci Hiyerarşik Modellemesi İçin Paketler ve Önseller	32
3.8.1. R2MlwiN paket: Çok düzeyine bir R komut arayüzü	33
3.8.2. MCMCglmm paket: MZMC ile Genelleştirilmiş Doğrusal Karışık Modeller....	33
3.8.3. BRMS in Stan paket: Stan kullanarak Bayesci regresyon modelleri	34
3.9. Bayesci Hiyerarşik Model Karşılaştırma Kriterleri.....	34
3.9.1. Bayesci Sapma Kriteri (Bayesian Deviance Information Criteria)	36
3.9.2. Bozdoğan'ın Bilgi Karmaşıklığı Kriterleri (ICOMP)	37
3.9.3. Watanabe 'in Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC)	38
3.9.4. Bir tane dışarıda bırak bilgi kriteri (LOO-IC)	38
3.9.5. K-katlı çapraz geçerlilik (K-fold-CV)	39
4. TEK DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ BAĞIMLI DEĞİŞKENE UYGULAMASI	41
4.1. Durum I için Uygulama Veri Tanımlaması.....	41
4.1.1. Durum I: Boş Modeller: Tekrarlı Ölçüm Sürekli Bağımlı değişken	43
4.1.2. Durum I: Rastgele Kesişim Modeller: Sürekli Bağımlı Değişken	44
4.1.3. Durum I: Rastgele Kesişim ve Eğim Modelleri: Sürekli Bağımlı Değişken.....	47
4.2. Model Karşılaştırmaları: Tekrarlı Ölçüm Sürekli Bağımlı Değişken	52
4.3. En İyi Model Seçimi	53
4.4. Bayesci hiyerarşik modellerindeki önseller ve duyarlılık analizi: Durum I.....	53
5. TEK KATEGORİK BAĞIMLI DEĞİŞKENLİ UYGULAMASI	56
5.1. Durum II ve III: Uygulama veri seti, yapı ve değişken açıklamaları	56
5.2. DTH verileri için Bayesci hiyerarşik lojistik modelinin belirtilmesi	58
5.3. Durum II: Tekrarlı Ölçüm Kategorik Bağımlı değişken ile BHM'leri	59

5.3.1. Metropolis–Hastings algoritmasını kullanarak DTH verileri için Bayesci hiyerarşik lojistik regresyon modellerinin sonuçları	60
5.3.2. Gibbs örnekleme kullanarak DTH verileri için Bayesci hiyerarşik lojistik regresyon modellerinin sonuçları	61
5.3.3. Hamiltoncu Monte Carlo kullanarak DTH verileri için Durum II modelleri	62
5.3.4. Durum II'de seçilen modellerin yakınsama ve koşullu etkileri	64
6. ÇOK DEĞİŞKENLİ KARIŞIK BAĞIMLI DEĞİŞKEN TEKRARLI ÖLÇÜMLERDE UYGULAMASI.....	69
6.1. Durum III: DTH verileri için çok değişkenli karışık bağımlı değişkenle modelinin belirtilmesi	69
6.2. Durum III'te seçilen modellerde yakınsama ve koşullu etkilerin değerlendirilmesi	74
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR	81
ÖZ GEÇMİŞ.....	88

SİMGELER VE KISALTMALAR

ACTIVE	: Advanced Cognitive Training for Independent and Vital Elderly (Bağımsız ve Hayati Yaşlılar için Gelişmiş Bilişsel Eğitim)
ANOVA	: Varyans Analizi
BHM	: Bayesci Hiyerarşik Modelleme
BIC	: Bayesci Bilgi kriteri
BRMS	: 'Stan' kullanan Bayasçi regresiyon modelleri (R paketi)
DIC	: Bayesci sapma kriteri
DTH	: Damar Tıkanlığı Hastalıkları
EAS	: Beklenen Değer Sonsal Tahmini
ESS	: Etkin örnek boyutları
GA	: Güven Aralığı
HMC	: Hamiltoncu Monte Carlo
HPD	: En yüksek sonsal yoğunluk aralığı
ICC	: Sınıf İçi Korelasyon Katsayısı
ICOMP	: Bozdoğan'ın Bilgi karmaşıklığı/Kriterleri Endeksi
IFIM	: Ters Fisher bilgi matrisi (inverse-Fisher information matrix)
MANOVA	: Çok Değişkenli Varyans Analizi
MCMCglmm	: MZMC ile Genelleştirilmiş Doğrusal Karışık Modeller (R paketi)
MH	: Metropolis-Hasting
MMSE	: Mini zihinsel durum muayenesi toplam puan (Bilişsel Durum)
MOT	: Maksimum Olabilirlik Tahmini
MZMC	: Markov Zinciri Monte Carlo
LOO-IC	: Bir adet dışarıda bırakma kriteri
pMZMC	: Markov Zinciri Monte Carlo yaklaşımlarla p-değeri
R2MLwiN	: MH algoritmasını kullanan R içinden MLwiN'i çalıştırmak için bir paket
RCP	: Kaf basıncı ölçümünde azalma
SBD	: Sonsal Beklenen Değeri
SS	: Standart Sapma
WAIC	: Watanabe-Akaike/Bayesci Bilgi Kriteri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Rastgele Kesişim Modeli (Bayesci çerçevesi).....	21
Şekil 3.2. Rastgele kesişim ve eğim/katsayı modeli (Bayesci çerçevesi)	21
Şekil 3.3. Çalışmanın genel bütün metodoloji adımları	40
Şekil 4.1. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim model yakınsama teşhisi: Durum I.....	49
Şekil 4.2. Bayesci hiyerarşik rastgele eğim model yakınsama teşhisi (Devam): Durum I ...	50
Şekil 4.3. Gözlenen ve tahmin edilen sonuçlar için Bayesci hiyerarşik model: Durum I.....	51
Şekil 4.4. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim modeli için marjinal tahmin etkileri: Durum I ...	51
Şekil 5.1. Metropolis Hasting'den Rasgele Kesişim ve Eğim Modelinin Doğruluğu Teşhisi	64
Şekil 5.2. Rastgele kesişim ve eğim MH modelinde ilgili tüm parametrelerin iz ve yoğunluk grafikleri.	64
Şekil 5.3. Rastgele kesişim ve eğim Gibbs modelinde ilgili tüm parametrelerin iz ve yoğunluk grafikleri	65
Şekil 5.4. HMC yakınsamasında Rastgele kesişim ve eğim modelinin ilgili tüm parametrelerinin iz ve yoğunluk grafikleri	66
Şekil 5.5. Sabit ve rastgele terimlerin etkileri ile sonsal olasılık yönü: Durum II	67
Şekil 5.6. Ultrason ve RCP (kaf basıncı ölçümünde azalma)'nin farklı bacak ölçülerinde hastaların hastalık durumu üzerindeki koşullu etkisi.....	68
Şekil 6.1. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim modeli yakınsama teşhisi: Durum III.....	74
Şekil 6.2. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim modeli yakınsama teşhisi: Durum III.....	75
Şekil 6.3. Bayesci hiyerarşik rasgele eğime uygun model etkiler yön: Durum III	76
Şekil 6.4. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim modeli marjinal tahmin etkileri: Durum III	77
Şekil 6.5. Gözlenen ve tahmin edilen sonuçlar üzerinde Bayesci hiyerarşik rasgele eğime uygun modeli.....	78

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1. Uzun Formatta Tekrarlı Ölçümlerin Genel Yapısı	2
Tablo 3.1. Metropolis Algoritması : Rastgele Yürüyüş Metropolü	29
Tablo 3.2. Metropolis- Hastings (MH) Algoritması (Genel)	30
Tablo 3.3. Gibbs Örneklemesi	31
Tablo 3.4. Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) algoritması	32
Tablo 4.1. Durum I: ACTIVE veri seti	41
Tablo 4.2. Durum I : Boş Modeller: R2MLwiN, MCMCglimm ve BRMS.....	43
Tablo 4.3. Durum I: Rasgele Kesişim Model: Metropolis-Hastings (MH) ile (R2MLwiN)	44
Tablo 4.4. Durum I : Rastgele Kesişim Model: Gibbs Örneklemesi ile(MCMCglimm)	45
Tablo 4.5. Durum I: Rastgele Kesişim Model: Hamiltoncu Monte Carlo (HMC)	46
Tablo 4.6. Durum I: Rastgele Kesişim Ve Rastgele Eğim Modeller: MH.....	47
Tablo 4.7. Durum I: Rastgele Kesişim Ve Rastgele Eğim Model: Gibbs Örneklemesi	48
Tablo 4.8. Durum I: Rastgele Kesişim Ve Rastgele Eğim Model: Hamiltoncu Monte Carlo	49
Tablo 4.9. Durum I : Genel Olarak Model Karşılaştırmaları: Bayesci Hiyerarşik Doğrusal Model.....	52
Tablo 4.10. Durum I : Önsellerin doğruluğuyla birlikte sonsal tahminler: Duyarlılık analizi	55
Tablo 5.1. Damar Tıkanıklığı Hastalıklarının örnek veri seti, yapısı ve değişken doğası.....	57
Tablo 5.2. Durum II: Tüm modeller: Metropolis-Hastings.....	60
Tablo 5.3. Durum II: Tüm modeller: Gibbs örneklemesi	61
Tablo 5.4. Durum II: Tüm modeller: Hamiltoncu Monte Carlo (HMC).....	62
Tablo 5.5. Durum II: Model Karşılaştırmaları: Bayesci Hiyerarşik Doğrusal Lojit Model..	63
Tablo 6.1. Durum III: Çok değişkenli karışık bağımlı değişken tüm modelleri: MH.....	70
Tablo 6.2. Durum III: Çok değişkenli karışık bağımlı değişken tüm modelleri: Gibbs örneklemesi.....	71
Tablo 6.3. Durum III: Çok değişkenli karışık bağımlı değişken tüm modelleri: HMC	72
Tablo 6.4. Durum III: Bayesci Hiyerarşik çok değişkenli karışık bağımlı değişkenli modelleri Karşılaştırmaları	73

1. GİRİŞ

1.1. Hiyerarşik Tekrarlı Ölçüm Verileri

Tekrarlı ölçüm verileri, aynı bağımlı değişkeninin tekrarlı ölçümlerinin (gözlemlerinin) zamana, mekâna veya çoklu durumlara bağlı olarak iki veya daha fazla noktada alındığı bir boylamsal veri tipi olabilir. Tekrarlı ölçümler, birey, hayvan veya makine gibi aynı deneme ünitesinde birden fazla ölçümün yapılmasıyla elde edilir (Liu, 2016b).

Yaşam bilimleri, halk sağlığı, biyo-istatistik ve epidemiyoloji, tarım, Ekonometri, Sosyal Bilimler, çevre çalışmalar vb. gibi çeşitli disiplinlerde tekrarlı ölçüm verilerini analiz etmek için gelişmiş istatistiksel tekniklere olan yüksek talep nedeniyle, tekrarlı ölçüm verilerinde araştırmalar çok hızlı bir şekilde artmaktadır (Twisk, 2006).

Tekrarlı ölçüm verilerinin istatistiksel modellemesi, iki tür bağımlılığın varlığı nedeniyle karmaşık hale gelir (Kang, vd., 2018):- birincisi, bağımlı ve açıklayıcı değişkenler arasındaki bağımlılık ve ikincisi bağımlı değişkenlerinin gözlemlenen ölçümleri arasındaki bağımlılıktır. Genel olarak, bağımlı değişkenleri iki türlü olabilir. Birincisi kategorik (nitel): sıralı veya nominal ve ikincisi nicel: kesikli veya sürekli olur.

Tekrarlı ölçümlü çok değişkenli verileri analiz ederken, aynı katılımcılardan tekrarlı olaylardan dolayı ölçümler arasındaki bağımlılığın türü büyük endişe kaynağıdır. Başka bir deyişle, bireyler içindeki ve arasındaki korelasyonun doğası hesaba katılmalıdır (Kang, vd., 2018; Rolfe, 2010; Tango, 2017).

Rastgele etkiler, karışık etkiler veya çok düzeyli modeller olarak adlandırılabilirler hiyerarşik istatistiksel modeller, birim gruplarını içeren ve yapı içinde yuvalanmış veriler için yaygın olarak kullanılır. Araştırmacılar, tekrarlı ölçüm verilerini iki düzeyli bir hiyerarşi olarak inceleyerek, daha karmaşık hiyerarşik model yapılarına sahip olabilir. Kategorik, sayım, sürekli ve çok değişkenli karışık bağımlı değişken türleri içeren farklı alanlardaki geniş metodolojik çalışmalardan yararlanabilirler. Bu nedenle, bu tez çalışması, sürekli, kategorik ve çok değişkenli karışık bağımlı değişkenleri ile Bayesci doğrusal hiyerarşik regresyon modellerini tekrarlı ölçüm verileri altına uydurmak için MZMC yaklaşımlarının uygulanmasına odaklanacaktır.

1.2. Bayesci Hiyerarşik Modeller için Tekrarlı Ölçüm Veri Yapısı

Tekrarlı ölçüm verileri doğal olarak iki düzeyli hiyerarşıktır ve daha fazla düzeye genişletilebilir. Örneğin, düzey 1: gözlemler olarak tekrarlı okuma performansı puanı ölçümleri ile basit tekrarlı ölçümlü bir tasarım ve düzey 2'deki bireysel çocuklarda (öğrenciler) hiyerarşik olarak iç içe geçmiş durumdadır. BHM'ye uyuması için eksik değerleri yansıtan dengesizliğe dikkat etemeye gerek yok. Tüm birey (çocuklar) her durumda ölçülmemiştir (Islam ve Chowdhury, 2017). Bayesci Hiyerarşik modelleme için gerekli olan uzun formattaki kümelenmiş (tekrarlı ölçümler) verilerin genel yapısı, aşağıdaki Tablo 1'de gösterilen 'vektörleştirilmiş' formdur.

Tablo 1.1. Uzun Formatta Tekrarlı Ölçümlerin Genel Yapısı

Birey/Kişi (Kimlik)	zaman noktası	Eksik gösterge	Sonuç	Açıklayıcı Değişken, $X_{ij}Z_i$			
1	1	1	y_{11}	x_{111}	...	x_{11p}	z_1
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	j	j^*	y_{1j}	x_{1j1}	...	x_{1jp}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
i	n_1	n^*_1	y_{1n_1}	x_{1n_11}	...	x_{1n_1p}	z_i
	1	1	y_{i1}	x_{i11}	...	x_{i1p}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	j	j^*	y_{ij}	x_{ij1}	...	x_{ijp}	
m	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	z_m
	n_i	n^*_i	y_{in_i}	x_{in_i1}	...	x_{in_ip}	
	1	1	y_{11}	x_{m11}	...	x_{m1p}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
m	j	j^*	y_{1j}	x_{mj1}	...	x_{mjp}	z_m
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	n_m	n^*_m	y_{1n_1}	x_{mn_m1}	...	x_{mn_mp}	

1.3. Tezin Amaçları ve Önemi

Bayesci istatistik teknikleri, gerçek dünya verilerinin karmaşık doğasını yakalayan modeller geliştirmenize olanak tanıyan modelleme varsayımlarında esneklik sunar. Bu esnek modelleme teknikleri, bağımlı değişken dağılımının seçimini, olasılık fonksiyonlarını veya önsel dağılımları, regresyon yapısını, çoklu gözlemsel birim düzeylerini vb. içerir. Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yöntemleri, ince farklılıklara sahip parametrelerin gerçekçi karmaşık fonksiyonları olan Bayesci modellerini genellikle daha standart modellere uydurmak için kullanılan tahmin yöntemleri ailesidir. Çok düzeyli faktör analizi, hiyerarşik doğrusal modeller ve çapraz sınıflandırılmış ve çoklu üyelik modelleri gibi bazı karmaşık

modeller, yalnızca Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) kullanılarak tahmin edilmiştir.

Bayesci istatistikler için kullanılan Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) tekniklerinin en popüler algoritmalarından Gibbs örnekleme, Metropolis-Hastings (MH) algoritması ve Hamiltoncu Monte Carlo (HMC); R yazılımında (R2MlwiN, MCMCglmm ve BRMS paketleri) mevcuttur. Tekrarlı ölçümler için tahmine dayalı model seçimi Bayesci hiyerarşik modelleri Bayesci Faktörü, Çapraz Doğrulama, Bayesci Bilgi Kriterleri (BIC) Akaike Bilgi Kriterleri (AIC) vb. kullanılarak yapılabilir.

Literatürde çalışmalara ve uygulamalara bağlı olarak hiyerarşik verilerin modellenmesine çeşitli isimler verilmiştir: çok düzeyli modeller, rastgele etki modelleri, karışık etki modelleri, rastgele katsayı modelleri ve varyans bileşen modelleri. Boylamsal çalışmaların uygulamalı Bayesci modellemelerinin çoğu, model parametreleri ve tek bağımlı değişkeniyle yalnızca bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar kullanılarak geliştirilmiştir (Kang vd., 2018; Li vd.,2016; Terzi & Cengiz, 2013). Bununla birlikte, hem bilgilendirici hem de bilgilendirici olmayan önsel dağılımların kullanımıyla daha fazla alt grup tanımlanabilir. Ayrıca, zaman, alan veya ölçüm durumları üzerinden tekrarlı ölçüm verileri, karmaşık zamansal varyans-kovaryans yapısına yol açan oto-korelasyonlu sonuçları içerebilir. Gelecekteki araştırmaların olası odak noktası bu olacaktır.

Çok değişkenli modellerde özellikle bağımlı değişkenlerin karışık yapıda olduğu durumlarda tekrarlı ölçüm veri modellemesinde, MZMC yaklaşımlarını kullanımı, bu tez dahil olmak üzere uygulamalı istatistik alanındaki birçok araştırmacıları zorlamaktadır. Bu uygulamalı tez çalışmasında, farklı tekrarlı ölçüm verilerinin farklı Bayesci doğrusal (doğrusal olmayan) hiyerarşik modeller (tek değişkenli bağımlılar, çok değişkenli aynı tür ve çok değişkenli karışık tip sonuçlar) kullanılacaktır. Gerçek veri setleri ve MZMC yaklaşımları ile uydurma modellerinin uygulanması, araştırmacıları daha fazla uygulamalı çalışmalar için gelişmiş istatistiksel modelleri kullanmaya yönlendirecektir. Kısaca, bu tez çalışmasının amacı, çeşitli bağımlı değişken türleri ile tekrarlı ölçüm verilerine hiyerarşik modellerde parametre tahminleri için Metropolis-Hasting, Gibbs örnekleme ve Hamiltoncu Monte Carlo Bayesci MZMC yaklaşımlarının farklı veri seti kullanılarak uygulanması ve model seçme yöntemlerinin incelenmesidir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI/YORUMLARI

Tekrarlı ölçümler veri analizinde sık sık komplikasyonlar vardır çünkü eksik, dengesiz ve bağlantılıdır. (Maas ve Snijders, 2003) göre her zaman noktasında tüm verilerin toplanması pek beklenemeyeceği için, bir deneğin sonraki veri toplama ölçümleri sırasında bir veya daha fazla eksik değere sahip olması durumunda eksik veri veya bırakma sorunu ortaya çıkmıştır. Peter (2010) tarafından belirtildiği gibi Bayesci Markov Zinciri Monte Carlo tahmini, sonsal dağıtımlardan tekrarlı örnekleme yoluyla, ister kalıcı özne etkileri (genellikle basitçe "rastgele etkiler" olarak adlandırılır), korelasyonlu veya yapılandırılmamış gözlem düzeyi hataları, zamanla değişen, tekrarlı ölçüm verilerinin hiyerarşik modellemesini kolaylaştırır.

Hiyerarşik Lineer Modelleme (HLM), hiyerarşik olarak yapılandırılmış verileri analiz etmek için tasarlanmış özel bir regresyon tekniğidir (Raudenbush ve Bryk, 2002). Sosyal Bilimler ve özellikle Eğitim Bilimlerindeki araştırmalarda kullanılan veriler genellikle hiyerarşik ve iç içe geçmiş (nested) bir yapı göstermektedir. Yani öğrenciler sınıflar içerisinde, sınıflar okullar içerisinde, okullar bölgeler içerisinde iç içe geçmiş (kümelenmiş) bir yapıda bulunmaktadır (Goldstein, 2010). Sağlık mesleklerinde ve eğitim araştırmalarında karşılaşılan üç istatistiksel metod; birleştirme (toplama), çarpma ve tekrarlı ölçüm analizidir. Birleştirme metodunda, tekrarlı ölçümler, her bir ölçüm için ortalama puanlara (yani toplamlara) indirgenir ve bunlar sonraki analizlerde kullanılır. Çarpma, tekrarlı ölçümler aynı kişilerden değil de farklı kişilerden geliyormuş gibi değerlendirilir. Hiyerarşik olarak tekrarlı ölçümler analiz metodunda, verilerin tekrarlı ölçümler olduğu gibi ele alınır. Bu bağlamda, araştırmada kullanılan veriler hiyerarşinin farklı düzeylerinde yer alabilmektedirler. Bu araştırmada hem hiyerarşinin en alt düzeyinde yer alan tekrarlı ölçümlerden hem de hiyerarşinin üst düzeyinde yer alan bireysel kişiler veya gruptan elde edilen veriler kullanılmıştır (Bosker ve Snijders, 2012). Böyle hiyerarşik veri yapısının bulunduğu çalışmalarda değişkenler arasındaki ilişkilerin (sabit etki) hangi düzeyde inceleneceği araştırmalarda karışıklık yaratmaktadır (Hox, 2010).

Tekrarlı ölçüm (çok düzeyli) verilerin yer aldığı araştırmalarda analizler; birleştirme (aggregation), ayrıştırma (disaggregation) ve çok düzeyli analiz teknikleri olmak üzere üç farklı şekilde gerçekleştirilebilir (Hofmann, 2016). Ancak literatürde geleneksel analiz teknikleri olarak kabul edilen birleştirme ve ayrıştırma tekniklerinin, çok düzeyli veri yapısına uygun olmadığı ve bu tekniklerin kullanıldığı

araştırma sonuçlarının genellikle yanlı ve hatalı sonuçlar ortaya koyduğu ifade edilmektedir (Hox, 2010; Bosker ve Snijders, 2012).

Matsuyama ve Ohashi (1997), Gibbs örneklemesini kullanarak tek bir bağımlı değişken için hiyerarşik modelin bir genellemesi olan her bir konu için (potasyum ve kalsiyum düzeyi) iki değişkenli bağımlı değişkenler geliştirir. Tek değişkenli model ile 2. düzeyi için sonsal tedavi etkisinin, iki değişkenli hiyerarşik modeli ile elde edilenlere kıyasla daha az tahmin edildiği sonucuna varılmıştır.

Terzi & Cengiz (2013), Manyetik Rezonans Görüntüleme (MRI) ve Bilgisayarlı Tomografi (CT) için sedasyon ölçümünden elde edilen kategorik uzunlamasına (tekrarlı ölçüm) verilerin analizi için Bayesci hiyerarşik modeli kullanılmıştır. Bağımlı değişken için çok terimli bir logit modeli, Gibbs örnekleme yöntemi kullanılarak, ilgili parametre için bazı uygun önsel dağılımlarla popüler MZMC tahmin tekniği olarak yerleştirilmiştir.

Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yaklaşımları, modelde korelasyon yapısı varken diğer impütasyon yöntemlerine göre etkili olmuştur (Ingrisawang ve Potawee, 2012; Tango, 2017), randomize kontrollü denemeleri modellemeyi düşündü ve tanımlamıştır. Diğer kitaplar (Mastrangelo, 2011; Leyland ve Groenewegen, 2020) çoklu ve karışık tip bağımlılıklarla tekrarlı ölçüm verilerinin istatistiksel metodolojik zorluklarını açıklamaktadır. Örneğin: Kan basıncı (sürekli) ve sigara içme durumu (kategorik) gibi çok değişkenli karma sonuçların modellenmesi mümkündür.

Song vd. (2017), doğruluk verilerinin hiyerarşik modellerine Bayesci yaklaşımı uyguladı. Analiz, model seçimi için Watanabe-Akaike Bilgi Kriteri ve Bayesci faktörü ile lojistik ve probit karma modelleri kullanılarak yapıldı. Bayesci hiyerarşik modelleri, hesaplamalı olarak karmaşık tekrarlı binary verilerin analizi için yetenekli bir araç olarak geliştirilmiştir. MZMC yöntemleri, sonsal dağılımda ilgilenilen parametrelerin tamamını, Gibbs örnekleme yöntemindeki yavaş yakınsama problemini ve Metropolis-Hasting algoritmasını sağlasa da, ters Bayesci formülü (IBF) örnekleme yöntemi gibi verimli MZMC algoritmasının sonsal modları tahmin etmek için kullanılması gerekir (Tan vd., 2006).

Bayesci analizi, veriler daha az kümeyle sahip olduğunda varyans bileşenlerinin (rastgele terimler) doğru tahminini sağlamıştır. Tüm istatistiksel yazılım prosedürleri

için, varyans bileşenlerinin tahmini, küme sayısına bakılmaksızın küme başına yalnızca beş konu olduğunda zayıf olma eğilimindeydi (Austin, 2010).

Bayesci genelleştirilmiş doğrusal karışık etki modellerinde varyans bileşenlerinin tahmini, tüm MZMC yöntemleri ve önsel özellikler için gerçek başlangıç değerleri küçük olduğunda bazı yakınsama zorluğu göstermiştir (Yimer ve Shkedy, 2021). Tüm yazılımlar için elde edilen tahminler, önsel varsayılanlara bağlı olarak aşağı veya yukarı doğru önyargılı olma eğilimindedir.

Lages ve Scheel (2016), tarafından yapılan araştırmaya göre, gizli atama ve grup özgü parametrelere sahip Bayesci lojistik karma modelleri verileri daha iyi hesaba katarken, karışık etkilere sahip klasik lojistik hiyerarşik modeli iyi tahmin etmiştir.

Farklı MZMC yaklaşımları, model yapısına bağlı olarak hız ve yakınsama ile ilgili performanslarında farklılık gösterir (Korner-Nievergelt vd., 2015). MZMC yaklaşımların R BUGS ve STAN paketleri kullanılarak teorik ve pratik yollarla sunulmuştur. Lemoine (2019), bilgilendirici önsellerin sonsal parametre tahminlerini ve model performansını nasıl etkilediğini göstermek için R simülasyonlarını kullanmıştır.

Sengupta vd. (2015) dört gradyansız MZMC yaklaşımının (rastgele yürüyüş Metropolü örnekleme, dilim örnekleme, uyarlamalı MZMC ve popülasyona dayalı MZMC ile temperleme) performansını, birim hesaplama süresi başına üretebilecekleri bağımsız örnek sayısı açısından karşılaştırmıştır. Ve hem uyarlanabilir hem de popülasyona dayalı yaklaşımların, rastgele yürüyüş Metropolü yaklaşımı veya dilim örnekleme ile karşılaştırıldığında daha verimli olduğu sonucuna varıldı; ancak uyarlanabilir MZMC örnekleme, hesaplama süresi açısından daha umut vericidir.

Zhang vd. (2021)'ya göre Bayesci Lojistik Regresyon (BLR) sonuçları, HMC'nin tüm veri setleri üzerinde en iyi performansa sahip olduğunu göstermiştir, bu da genel olarak diğer yöntemlere göre üstünlüğünü göstermektedir.

Çeşitli çalışmalar, klasik istatistiksel çıkarımların hiyerarşik modellerinde art arda ölçülen bağımlı değişkenlerinden biri olarak kabul edildi (Fieuws vd., 2007). Bu ayrı modeller, rastgele etkilerinde niteliksel, çoğunlukla binom/ kategorik ve niceliksel (sürekli) değişkenin ortak dağılımını belirleyerek çok değişkenli karma

sonuçlar hiyerarşik modeline bağlanabilir. Bu strateji çok değişkenli uzunlamasına profillerin veya diğer çok değişkenli tekrarlanan veri türlerinin birleştirilmesinde kullanılmıştır (Cox ve Wermuth, 1992). Çok değişkenli hiyerarşik modellerdeki boyutsal sınırlamaları aşmak için olası tüm iki değişkenli karma sonuçlar hiyerarşik model modellerinin takıldığı ve çıkarımın sözde olabilirlik argümanlarından kaynaklandığı çift yönlü bir modelleme yaklaşımı önerilmiştir. Çok değişkenli karma sonuçlar hiyerarşik modeli bağlamında çift yönlü yaklaşımın performansını gösteren işitme eşiklerinin 22 değişkenli boyuna ölçümleri üzerinde pratik bir veri analizi yapılmıştır.

Rastgele etki yapısının hiyerarşik modellemesini ve istatistiksel çıkarım üzerindeki etkisini açıklar. Bununla birlikte, sonuçların sayısı arttığında ve büyük bağımlılık yapısı meydana geldiğinde hesaplama problemleri artabilir (Bai vd., 2020).

Karışık bağımlı değişkenli ve tek sürekli bağımlı değişkenli regresyon modellerini analiz etmek için olasılığa dayalı bir teknik önerilmektedir. Karışık tip sonuçların çok değişkenli modellerinin çeşitli önemi arasında, çok değişkenli sorguları raporlamak için bağımlı değişken vektörlerinin korelasyon yapısını araştırır ve farklı bağımlı değişkenlerin tek değişkenli analizleri yapıldığında ortaya çıkan 1.tip hatasının yükselişi üzerinde kontrol sağlar. Model parametrelerinin çoklu karşılaştırmalar hesaba rastgele terimler katılmadan gerçekleştirilir. Ayrıca, her analize farklı birey kümeleri katkıda bulunduğundan, bağımlı değişken olmadığında bağımlı değişkenler ile yorumların kolaylığı arasındaki ilişkiyi hesaba katarak daha kesin parametre tahminleri sağlar (Cox ve Wermuth, 1992; Fitzmaurice ve Laird, 1997).

Tidemann-Miller vd. (2016), tarafından farklı tipteki çoklu fonksiyonel bağımlıları (rneğin ikili/ kategorik ve sürekli veriler) birlikte analiz etmek için Bayesci yaklaşımı önerilmiştir. Bu durumda, çok değişkenli gizli normal süreci ve gizli sürecin bağımlılığı yoluyla fonksiyonel tepkiler arasındaki bağımlılığı modeller. Açıklayıcı değişkenlerin etkisini aynı anda açıklarken ve tüm varyans-kovaryans göz önünde bulundurularak çok değişkenli karışık sonuçların ortak bir analizini yapmaya ihtiyaç vardır (Kapur vd., 2015). Tate ve Pituch (2007), varsayımsal bir senaryo için rastgele alan deneylerinden ve simülasyon verilerinden kaynaklanan hiyerarşik bir doğrusal modelde çok değişkenli çoklu sonuçların kullanılılığını gösterdi. Çok

sonuçlu uzunlamasına verilerin doğrusal hiyerarşik bir modelde analiz edilmesi, çok sonuçlu tekrarlanan önlemler grup arasında ve grup içi korelasyonu modellemek için büyük esneklik sağlar. Çok değişkenli öğrenci-t-lineer karışık modele sağlam bir Bayesci yaklaşımı, Gibbs şeması ile birlikte hesaplama açısından verimli bir ters Bayesci formülleri (IBF) örnekleyicisi ile donatılabilir (Wang ve Fan, 2012).

Suesse ve Liu (2013)'e göre BHM, birden fazla kategorik değişkenin tekrarlanan ölçümleri için yapılabilir. Burada bağımlı değişken olarak kategorilerden birden fazlasını seçebilir ve marjinal (veya popülasyon ortalaması alan) bir modelleme. Bu, koşullu yorumlamalara sahip genelleştirilmiş doğrusal hiyerarşik (karışık efekt) bir modelin, hem zaman içinde hem de ögeler arasında farklı korelasyon yapılarını hesaba katmak için kullanılabilmesi anlamına gelir.

Karışık kategorik (binom) ve sürekli (normal) bağımlı değişkenli BHM, eksik kesitsel veriler üzerinde modellenebilir. Bu durumda, kategorik bağımlı değişken için model bağımlı değişken göstergesi sürekli bağımlı değişkene bağlı olabilir. Böyle bir modelleme olgusu, ebeveynlerin psikolojik bozukluğunun hem sözel anlama skoru hem de çocuklarında olumsuz semptomların varlığı üzerindeki etkisinin eksik bağımlı değişkenlerin varlığında modellendiği gözlemsel bir çalışmanın verileri ile gösterilmiştir (Ganjali, 2003).

Alfö ve Giordani (2022)'e göre çok değişkenli karışık bağımlı değişkenler için esnek bir regresyon modeli, sonuca özgü rastgele efektlere sahip birkaç (koşullu bağımsız) tek değişkenli regresyon modeli göz önünde bulundurularak takılabilir. Bu çok değişkenli model, ortak dağılımları aracılığıyla sonuçlara özgü göze çarpmayan heterojenliği ve sonuçlar arasındaki bağımlılığı açıklar. Ayrıca, farklı bağımlı değişkenli regresyon Eşitliklerindeki rastgele etkiler arasında daha genel bağımlılık yapılarına açılır.

Xin ve Qiu (2017), çoklu bağımlı değişken tekrarlı ölçümlerde model belirtimi (tanımlama) ve model uydurma (parametre tahmini) için önerilen metodolojinin yararlılığını ve yeterliliğini göstermek için gerçek bir veri kümesi kullanıldı. Kovaryans ve regresyon katsayıları için tahminler, belirli boş hipotez testleri altındaki duruma genişletilir ve değişken seçimi için en iyi BIC alt kümesi kullanılır. Farklı zaman noktalarında antisosyal davranışa verilen dört bağımlı değişken arasında pozitif korelasyon katsayıları elde edildi.

3.METODOLOJİ/TEZE İLİŞKİN YÖNTEM

Herhangi bir bilimsel alanda toplanabilecek sürekli, kategorik ve karışık bağımlı değişkenleriyle birkaç tekrarlı ölçüm veri setinin bulunması gerekir. İnternette ve herhangi bir organizasyondan gelen ikincil veriler tek kaynak olabilir.

3.1. Genel ve Genelleştirilmiş Bayesci Hiyerarşik Modelleri

Hiyerarşik lineer modellemenin, birleştirme ve ayırıştırma tekniklerinin beraberinde getirdiği sorunların üstesinden gelebildiği, tekrarlı ölçüm (çok düzeyli) veri yapısına uygun olduğu, ayrıca çok düzeyli veya hiyerarşik değişkenler arasındaki ilişkilerin, etkileşimlerin incelenmesine ve hiyerarşinin farklı düzeylerinde yer alan tekrarlı ölçüm verilerin aynı anda analizine olanak sağladığı ifade edilmektedir. Bu hiyerarşik verileri modellemek için kullanılan regresyon analizlerinde maksimum olabilirlik ve Bayesci Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) tahmin yöntemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak, bu yöntemlerin performansı Bayesci hiyerarşik modellerin rastgele ve sabit tahmini için yeterince çalışılmamıştır. Ayrıca tek bağımlı değişken modellerin bir tek MZMC yaklaşımıyla kullanılmıştır.

İstatistiksel modellerin çoğu, gözlemlerin tek bir dağılım ve bir veya daha fazla bilinmeyen parametre ile aynı ve bağımsız olarak dağıldığını (i.i.d.) varsaymıştır. Ancak, birçok durumda, ölçümlerin aynı dağılımdan aynı parametre (ler) ile aynı ve bağımsız olarak dağıtılmış (i.i.d.) olarak ele alınması mantıklı değildir (Hilbe, 2009). Sürekli (Ör. gelir, Ağırlık, hayvancılıkta tüketim, not ortalaması) ve kategorik (Ör. Öğrencilerin devamlılık durumu, akademik durumu) bağımlı değişkenler için, tek düzeyli klasik doğrusal ve binary lojistik veya çok terimli lojistik regresyon modelleri, önsel dağılımlar eklenerek ve regresyon katsayılarının kümeler üzerinde rastgele farklılaşmasına izin vererek Bayesci hiyerarşik//çok düzeyli bir modele genelleştirilebilir. Bu tezde, çeşitli veri türleri ile tekrarlı ölçüm verilerinin modellenmesi ele alınacaktır.

Genel Bayesci hiyerarşik doğrusal modeli (GBHDM), tekrarlı ölçüm verilerin modellemek için bir yapı sağlamak için dağılım ve yapısal varsayımlarla karakterize edilebilir (Chen ve Chen, 2021). Sabit etkilerin ve rastgele etkilerin doğrusal belirleyicilerine bağlı olarak, zaman veya koşuldaki konu ve ölçüm verilerinin üstel aileye göre dağıtıldığı varsayılmaktadır,

$$(y_{it}|\theta_{it}, \phi) = \exp\left(\frac{y_{it}\theta_{it} - \alpha(\theta_{it})}{\phi} + c(y_{it}, \theta_{it})\right) \quad (3.1)$$

Burada θ_{it} model parametre (ler) ini temsil eder ve e yapısal kavram koşullu olarak beklenen değer $E(y_{it}) = \mu_{it} = \alpha'(\theta_{it})$, için varsayılan formları regresyon bağlantısı $g(\mu_{it}) = \eta_{it}$, ve varyanslar $V_{it} = \phi Var(\mu_{it})$ ile yönetir. Eşlenik/Conjugate/önseller, özellikle rastgele varyasyon tahmin edicileri içermiyorsa, üstel aile bağımlı değişkenleri için gruptaki rastgele varyasyonu veya gözlem düzeyinde ele almak için uygun olabilir. Bağlantı işlevi $g(\cdot)$ ile, yapısal varsayım şunları belirtir:

$$g[E(y_{it}|u_{it}, e_{it})] = \eta_{it} = X_{it}\beta + Z_{it}U_{it} + \varepsilon_{it} \quad (3.2)$$

Daha karmaşık Bayesci genel hiyerarşik doğrusal modeller matris cebirinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Y_{N \times 1} = \underbrace{X_{N \times p}\beta_{p \times 1}}_{\text{Sabit etkiler}} + \underbrace{Z_{N \times m}U_{m \times 1}}_{\text{Rastgele etkiler}} + \underbrace{\varepsilon_{N \times 1}}_{\text{hata term}} \quad (3.3)$$

Burda $Y_{N \times 1}$, bağımlı değişken(ler)inin vektörüdür $(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)'$; $X\beta$, sabit etkilerin doğrusal tahmincisidir; ZU rastgele etkilerin doğrusal tahmincisidir ve ε artık terimidir. Bu kavramda, Bayesci analizi, tüm sabit etkileri ve rastgele etkileri kendi dağılımlarına sahip rastgele değişkenler olarak kabul eder. Burda, Z , her bloğun bir $n_i \times q$ matrisi olduğu m bloklarından oluşan bir $N \times mq$ blok diyagonal tasarım matrisidir; $\beta_{p \times 1}$ sabit efekt parametre vektörüdür; $U_{m \times 1} = [v'_1, v'_2, \dots, v'_m]'$ rastgele efekt vektörüdür; ve $\varepsilon_{N \times 1}$ hata vektörüdür. $U \sim Normal(\mathbf{0}, G)$ ve $\varepsilon \sim Normal(\mathbf{0}, \sigma_e^2 R)$ varsayalım ve $i = 1, 2, \dots, m$ (grup: kişi), $j = t = 1, 2, \dots, n_i$ (ölçümler) ve $N = \sum_{i=1}^m n_i$ olur; U ve ε bağımsız olarak dağıtılır. R ve G , pozitif kesin blok diyagonal matrislerdir ve G , $m \times m$ 'dir ve her biri D olan m özdeş bloklardan oluşur. Yani

$$G = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_m \end{bmatrix} \text{ ve } R = \sigma_e^2 \mathbf{I}_N, \theta, \beta_{p \times 1} \text{ vektörünün, } D \text{ matrisinin ve skaler } \sigma_e^2 \text{'nin}$$

elemanlarından oluşan bilinmeyen parametre vektörünü gösterebilir. Belirli bir parametre tahminleri kümesi için $\hat{\theta}$, Y 'nin kovaryans matrisi şu şekilde verilir:

$$Cov(Y) = V = Z\hat{G}Z' + R.$$

3.2. Durum I: Normal veya Sürekli Bağımlı Değişken Modelleri

Tezin bu bölümünde, Bayesci Hiyerarşik Doğrusal modelde (BHDM) modellenebilen bireyler içinde yuvalanmış tekrarlı ölçümler/gözlemlerle normal dağılımlı sürekli bağımlı değişkeni tanımlanacaktır.

3.2.1. Sürekli Tekrarlı Ölçümler İçin Hiyerarşik Doğrusal Modelleme

Hiyerarşik modelleme, bir şekilde gruplanmış gözlemlerimiz olduğunda önemlidir. Farklı eyaletlerdeki birkaç kişiyi gözlemlemiş veya kişi başına birden çok gözleme sahip olabiliriz. Standart ekonometrik terimlerle, bu genellikle otokorelasyona ve değişen varyansa yol açacak ve gruba özgü araçların ve varyansların tahmin edilmesini gerektirecektir. Bir regresyon ortamında, katsayıların gruplar arasında nasıl değiştiği ek olarak tahmin edilebilir (Goldstein, 2010).

Daha düşük düzeyli birimler bir veya daha fazla üst düzey tabakanın içine yerleştirildiğinde, geleneksel tek düzeyli regresyon analizi uygun değildir. Çünkü gözlemler artık bağımsız değildir: aynı okullardaki öğrenciler veya aynı topluluklardaki haneler, farklı okullardaki veya farklı topluluklardaki hanelerdeki öğrencilerden daha fazla birbirine benzeme eğilimindedir. Bu tür bir bağımlılık, yuvalama göz ardı edilirse standart hataların aşağı doğru önyargılı olduğu ve tahmin etkilerine ilişkin sahte çıkarımlar yapılabileceği anlamına gelir (Congdon, 2020).

Tekrarlı ölçüm verilerinin analizi için diğer istatistiksel teknikler Varyans Analizi (ANOVA) ve Çok Değişkenli Varyans Analizidir (MANOVA). ANOVA tekniğinin ilk sınırlaması, tekrarlı ölçümler arasındaki kovaryansı hesaba katmaması ve zaman boyunca sabit varyans varsaymasıdır. İkinci sınırlama, bu yöntemin yalnızca dengeli (eksik olmayan) veri dizisi için işe yaramasıdır, yani gözlem sayısı aynı zaman noktalarında her birim için aynı olmalıdır. MANOVA, birkaç bağımlı değişken içeren ANOVA'nın bir uzantısıdır. Hem ANOVA hem de MANOVA, grupları zaman içindeki ortalama gözlemlerin eğilimleri açısından karşılaştırmaya odaklanır. Ancak birey/özne profillerinin zaman veya mekân içinde nasıl değiştiği hakkında çok az bilgi sağlar. MANOVA ile kovaryans yapısının modellenmesi daha da karmaşık hale gelir (Gardini vd., 2021).

Tekrarlı ölçüm veri analizi için dikkate alabileceğimiz farklı hiyerarşik modelleri tanımlayalım. Diyelim ki, j -nci zaman noktasında, zaman ölçeğinde veya durumda ($j = t = 1, 2, 3, \dots, n_t$), i -nci bireyi/özne ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) için $Y_{ij} = Y_{it}$

bağımlı değişkeni belirtmiş olalım. Aynı birey/kişi i hakkında aynı anda n_i tekrarlı ölçüm alındığı için, daha sonra bağımlı değişkeni üzerindeki ölçümler bir $n_i \times 1$ vektör olarak gruplanabilir.

$$Y_{it} = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ Y_{i3} \\ \dots \\ Y_{in_i} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad X_{it} = \begin{pmatrix} X_{it1} \\ X_{it2} \\ X_{it3} \\ \dots \\ X_{ijp} \end{pmatrix}$$

Her sonuç veya bağımlı değişkeni Y_{it} ile, t -nci ölçüm zamanı veya i -nci vesilesiyle birey (düzey-2) için zaman, zamanla değişkenlik ve zamanla değişmeyen öngörücüler içeren ortak değişkenler veya $P \times 1$ açıklayıcı değişkenler vektörü vardır. i -nci birey (grup) üzerinde n_i tekrarlı ölçümlerin her biri ile ilişkili ortak değişkenlere veya öngörücülere karşılık gelen bir vektör vardır. Ortak değişkenlerin $n_i \times P$ vektörlerini bir ortak değişkenler matrisine gruplayabiliriz:

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{i11} & X_{i12} & \dots & X_{i1p} \\ X_{i21} & X_{i22} & \dots & X_{i2p} \\ X_{i31} & X_{i32} & \dots & X_{i3p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ X_{in_i1} & X_{in_i2} & \dots & X_{in_ip} \end{pmatrix}$$

Her bir X_i satırın, n_i farklı ölçümlerdeki sonuç veya bağımlı değişkenne Y_i karşılık geldiği ve X_i sütunları, p farklı ortak değişkenlere veya öngörücülere karşılık geldiği görülmektedir. Zaman içinde ortak değişkenlerdeki değişiklikleri ilişkilendiren ortalama gözlem için doğrusal bir regresyon düşünelim;

$$Y_{it} = \beta_1 X_{it1} + \beta_2 X_{it2} + \dots + \beta_p X_{ijp} + e_{it} \quad (3.4)$$

Burada, Y_{it} ortalamasını karşılık gelen X_i ortak değişkenlerle ilişkilendiren bilinmeyen katsayılar $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ şeklindedir. Dolayısıyla, her n_i ölçümde bağımlı değişken için çözülecek n_i ayrı regresyon bağımlımleri vardır. e_{it} , ortalama sıfır olan rastgele hatalardır:

$$E(Y_{it}/X_{it}) = \beta_1 X_{it1} + \beta_2 X_{it2} + \dots + \beta_p X_{itp} \quad (3.5)$$

Genel olarak $X_{it1} = 1$, her i bireyi ve $j = t$ için aynı zaman noktasında önleme/kesişim modeli olarak da adlandırılır. Yukarıdaki regresyon Eşitliği (3.4) matris temsili şöyledir:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad \text{veya} \quad Y_i = X_i\beta + e_i \quad (3.6)$$

Burada, $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i})^T$ karşılık gelen i -nci deneğin bağımlı değişken vektörü ile ilişkili rastgele hataların bir $n_i \times 1$ vektörüdür. $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsayılmaktadır. Sürekli bir bağımlı değişken için, sonuç vektörünün çok değişkenli normal dağılım olduğu varsayılır. Ortalama bağımlı değişken vektörü: $E(Y_i) = \mu_i = X_i\beta$ ve kovaryans matrisi: $\Sigma_i = Cov(Y_i)$ şeklindedir. Tekrarlı ölçümler arasındaki seri korelasyon (düzey 1), Σ_i kovaryans matrisinin diyagonal dış elemanları tarafından yakalanır. Hiyerarşik modeller, verilerin hiyerarşisini ve özneler arasındaki doğal heterojenliğin kaynaklarını ele almak için gruplar arasında veya özneler içinde rastgele değişmek üzere bazı regresyon katsayılarını (β) dikkate alır. Hiyerarşik veya çok düzeyli model fikri, ortalama yanıtı, sabit etkiler olarak bilinen tüm bireyler için ortak olan popülasyon özelliklerinin (tahminler), β ve rastgele etkiler olarak bilinen belirli bir bireyin belirli etkilerinin bir kombinasyonu olarak modellemektir. Bu nedenle, bu tür genel modele hiyerarşik veya karışık etki modeli de denir.

3.3. Genel ve Genelleştirilmiş Doğrusal Bayesci Hiyerarşik Model Türleri

Hiyerarşik veya Çok düzeyli model, Boş model, Rastgele kesişim modeli, Rastgele Eğim/Katsayılar modeli ve rastgele kesişim ve eğim modeli olabilir. Bunlar kısaca aşağıdaki gibidir:

- Model 1: Boş Modeli: Her grup (özne), genel (tüm) kesişimye ek olarak farklı bir kesişim alır. Ancak bağımsız değişken (ler) eklenmez.
- Model 2: Rastgele Kesişim (Sabit Eğimli) Modeli: Her grup (birey), genel (tüm) kesişim ek olarak, bağımsız değişken (ler) in her biri (veya bir alt kümesi) için farklı katsayılar alır.
- Model 3: Rastgele Kesişim ve Rastgele Eğim Modeli: Her grup (özne), genel (tüm) bir kesişimye ek olarak, her bağımsız değişken için hem farklı bir kesişim hem de farklı katsayılar alır.

3.3.1. Boş Model

Hiyerarşik modeline uyduğumuzda, toplam varyansın iki rastgele bileşene bölündüğünü görerek başlamalıdır: özneler (bireyler) ve gruplar içindeki ölçüm durumları (zaman noktaları) arasında. Bu temel varyans bileşen modeli, daha karmaşık hiyerarşik modelleri karşılaştırmak için temel bilgiler sağlayan açıklayıcı

değişkenler veya ortak değişkenler ile donatılmıştır. Hiyerarşik boş model şöyle yazılabilir.

$$Y_{ij} = \beta_0 + u_i + \varepsilon_{it} \quad (3.7)$$

i -nci özne/birey için $j = t$ zaman noktasındaki bağımlı değişken Y_{it} için, u_i rastgele özne (grup) etkisidir ve ε_{it} zaman noktasındaki örnekleme hatasıdır. Hem u_i hem de ε_{it} normal rastgele değişkenler $u_i \sim N(0, \Omega)$; $\varepsilon_{it} \sim N(0, \Sigma_i)$ olarak kabul edilir ve aynı zamanda birbirinden bağımsız olduğu varsayılır (yani, farklı bireyler/gruplar üzerindeki gözlemler, ölçümler bağımsızdır, ancak aynı birey/grup içindeki gözlemler bağımlıdır, ilişkilidir).

3.3.2. Rastgele Kesişim (Sabit Eğimli) Modeli

Zaman veya vesileyle (düzey 1) toplanan tekrarlı ölçüm veriler için hiyerarşik model, öznelerin içine yerleştirilmiştir veya bireyler (düzey 2) iki hiyerarşi düzeyini dikkate alır. Her bireyin popülasyondaki bağımlı değişken üzerinde bir etkisi olduğunu varsayarsak, standart doğrusal regresyon modeli (3.6), şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$Y_{it} = X_{it}^T \beta + u_i + \varepsilon_{it} \quad (3.8)$$

i -nci özne/birey için t -nci zaman noktasındaki veya durumdaki Y_{it} bağımlı değişken, u_i rastgele özne (grup) etkisidir ve ε_{it} zaman noktasındaki örnekleme hatasıdır. Hem u_i ve hem de ε_{it} aşağıdaki parametrelerle normal rastgele değişkenler olduğu varsayılır ($u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$; $\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$). Bu modelde, kümelenmiş veriler için farklı düzeylerde iki varyasyon kaynağımız var, bu hiyerarşik modellerde u_i ve ε_{it} rastgele terimler adı verilir ve birbirinden bağımsız oldukları varsayılır ve ayrıca farklı bireylerde (gruplar) yapılan gözlemler (ölçümler) bağımsızdır, ancak aynı birey (grup) içindeki ölçüm gözlemleri aynı şeyi paylaşır ve ilişkili, bağımlıdır.

Genel olarak model bize, i -nci birey için t -nci zaman noktasında (ölçüm vesilesiyle) cevabın/sonucun grup düzeyin, u_i , neden olduğu rastgele bir etki ve özne içi bir hata, ε_{it} , nedeniyle popülasyon ortalamasından, $X_{it}^T \beta$ farklı olduğunu söyler. Dolayısıyla, herhangi bir bireyin (grubun) $j = t = 1, 2, \dots, n_i$ dönem boyunca ortalama yanıt şöyle olabilir: $E(Y_{it}|u_i) = X_{it}^T \beta + u_i$ olduğu için yukarıdaki Eşitlik 3.8'de inceleniyor.

$$\begin{aligned} Y_{it} &= X_{it}^T \beta + u_i + \varepsilon_{it} \\ &= \beta_1 X_{it1} + \beta_2 X_{it2} + \dots + \beta_p X_{itp} + u_i + \varepsilon_{it} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1 + \beta_2 X_{it2} + \dots + \beta_p X_{itp} + u_i + \varepsilon_{it} \\
&= (\beta_1 + u_i) + \beta_2 X_{it2} + \dots + \beta_p X_{itp} + \varepsilon_{it}
\end{aligned}$$

$X_{ij1} = \mathbf{1}$ (sabit) ile tümü i ve $j = t$ için, β_1 sabit etki olan kesmeyi temsil eder. u_i rastgele olduğu için i -nci birey (grup) için kesişim, bireyler arasında (gruplar arasında) $\beta_1 + u_i$ şeklindedir ve rastgele değişir. Kolaylık ve net bir anlayış için, iki etki düzeyi şu şekilde yazılabilir:

$$Y_{it} = \beta_{1i} + \beta_2 X_{it2} + \dots + \beta_p X_{itp} + \varepsilon_{it} \quad (3.10)$$

$$\beta_{1i} = \beta_1 + u_i$$

Her bağımlı değişkenin, Y_{it} marjinal varyansı şu şekilde verilir:

$$Var(Y_{it}) = Var(X_{it}^T \beta + u_i + \varepsilon_{it}) = Var(u_i) + Var(\varepsilon_{it}) = \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Herhangi iki bağımlı değişken arasındaki marjinal kovaryans (gözlemler ve bir i -nci grupta (özne) şu şekilde verilir: $Cov(Y_{it}, Y_{is}) = Cov(X_{it}^T \beta + u_i + \varepsilon_{it}, X_{is}^T \beta + u_i + \varepsilon_{is})$; $t \neq s$ için $= Cov(u_i + \varepsilon_{it}, u_i + \varepsilon_{is}) = Cov(u_i, u_i) = Var(u_i) = \sigma_u^2$

Dolayısıyla, bağımlı değişkeninin türü sürekli olduğunda, aynı gruptan (birey) bağımlı değişkenine ilişkin iki ölçüm gözlemi arasındaki korelasyon şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
Corr(Y_{it}, Y_{is}) &= \frac{Cov(Y_{it}, Y_{is})}{Var(Y_{it})} \\
ICC = \rho &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2}
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Bireyler (grup) arası değişkenliğin, σ_u^2 , dikkate alınması, aynı grupta (bireysel) tekrarlı ölçümler arasında korelasyonu tetikler. Terim σ_u^2 olmadan korelasyon sıfır olur. Rastgele kesişim modeli, yalnızca kesişimin değiştiğini varsayar. Oysa eğimler veya diğer regresyon katsayıları tüm bireyler (gruplar) için aynıdır. Bu modelin en büyük dezavantajı, ölçümler (gözlemler) arasındaki korelasyonun tüm zaman noktaları (ölçüm durumları) boyunca sabit olduğunu varsaymasıdır. Ortak değişkenler ile bağımsız değişkenler arasındaki değişen korelasyonu barındırabilecek daha esnek bir model gereklidir.

3.3.3. Rastgele Kesişim ve Rastgele Eğim (Katsayılar Modeli)

Yukarıda tartışılan hiyerarşik modelin genel formu, kesişimlerin ve katsayıların, rastgele etkiler kovaryans yapısını indükleyen bireyler arasında (grup arasında) rasgele değiştiğini düşünen bir modeldir. t -nci ölçüm vesilesiyle, $j = t = 1, 2, \dots, n_i = T_i$, i -nci birey (grup) üzerinde ölçülen Y_{it} bir sonucu (gözlem) tekrar ele alalım. Tekrarlı ölçümler, zaman içinde doğal olarak dengesiz olabilir.

Hiyerarşik bir model (bir düzey-2 olarak i gruplama ve zaman(durum) içinde tekrarlı ölçümler (ölçüm vesileleri, gözlemler) düzey-1 olarak, vektör ve matris notasyonları kullanılarak yazılabilir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Y_i = X_i\beta + Z_iu_i + \varepsilon_i \quad (3.12)$$

Burada:

- $Y_i (n_i \times 1)$, bağımlı değişkeninin bir sütun vektörü,
- $\beta (p \times 1)$, sabit etkilerin vektörü,
- $u_i (q \times 1)$, bir vektör rastgele etkiler (β tamamlayıcısı olarak),
- $X_i (n_i \times p)$, bir ortak değişkenler matrisi (öngörücüler),
- $Z_i (n_i \times q)$, q rastgele etkileri için bir eş değişkenler matrisi (rastgele sabit olanı X_i tamamlar).
- $\varepsilon_i (n_i \times 1)$, bir kısmı açıklanmayan kalıntıların bir sütun vektörüdür.

Burada, Z_i 'in ilgili X_i sütunlarını dahil ederek bileşenlerin rastgele değişmesini kolaylaştırmak için Z_i tasarım matrisi verilmiştir. u_i ve ε_i gruplar (bireyler) arasında karşılıklı bağımsız ve bağımsızdır. Rastgele etkiler vektörünün (grup etkileri arasında), u_i , ortalama $E(u_i) = 0$ ve varyans-kovaryans $Cov(u_i, u_i) = Var(u_i) = D = \Omega$ ile çok değişkenli normal olduğu varsayılır (Laird ve Ware, 1982). Hata vektörünün ε_i (ölçümler arasında, grup etkileri içinde), ortalama $E(\varepsilon_i) = 0$ ve varyans-kovaryans, $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = Var(\varepsilon_i) = \Sigma_i$ ile çok değişkenli normal olduğu varsayılır. ε_{it} ve ε_{is} , bir çift hata terimi olarak varsayılırsa, ε_{it} ve ε_{is} bağımsızdır. Burada, $\Sigma_i = \sigma^2 I_{n_i}$ bir özdeşlik matrisi anlamına gelen köşegen bir matris olabilir. Verilere en iyi uyan bir kovaryans Σ_i örüntü matrisi seçmek mümkündür. Bununla birlikte, atanmış bir Σ_i kovaryans örüntüsü ile modelleme, ölçüm hataları ε_{it} olarak iyi yorumlanmayabilir. Ayrıca, hem $D = \Omega$ hem de Σ_i mevcut veri setinden tahmin elde etmek her zaman mümkün olmayabilir (Kapur vd., 2015).

Bu nedenle, rastgele etkilerin (u_i) ve rastgele hataların, (ε_i) kalıntıların birbirinden bağımsız olduğu varsayılır. Bir bireyin (grubun) ortalama yanıt profili veya koşullu ortalama, Y_i verilen u_i , $E(Y_i|u_i) = X_i\beta + Z_iu_i$ şeklindedir. Ortalaması alınan popülasyon veya Y_i 'in marjinal ortalama, rastgele etkiler, u_i değerleri üzerinden ortalama alınır, ve

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= E\{E(Y_i|u_i)\} = E(X_i\beta + Z_iu_i) = X_i\beta + Z_iE(u_i) \\ &= X_i\beta. E(u_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

olur. Çünkü $E(u_i) = 0$.

Bu nedenle, β regresyon parametre vektörünün tüm bireyler (gruplar) için aynı olduğu varsayılmıştır. Vektör u_i (karşılık gelen β ile birleştirildiğinde) rastgele etkilerdir. Verilen u_i koşullu Y_i 'nin kovaryansı $Cov(Y_i|u_i) = Cov(e_i) = \Sigma_i$ Şeklinindedir. Rastgele etkilerin, u_i dağılımı üzerinden ortalaması alınan Y_i 'nin marjinal kovaryansı şöyledir:

$$\begin{aligned} Cov(Y_i) &= Cov(Z_i u_i) + Cov(e_i) \\ &= Z_i Cov(u_i) + Cov(e_i) \\ &= Z_i \Omega Z^T + \Sigma_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ölçüm gözlemleri çiftinin bağımsız olduğu varsayıldığında, $\Sigma_i = \sigma^2 I_{n_i}$, yani kovaryans, $Cov(Y_i) = Z_i \Omega Z^T + \sigma^2 I_{n_i}$, sıfırdan farklı diyagonal elemanlara sahip olduğundan, aynı grup (özne) üzerinde tekrarlı gözlemler arasındaki korelasyonu açıklar. Böylece, grup arası/birey ($D = \Omega$) ve grup içi (Σ_i) değişimler bu model için etkin bir şekilde hesaba katılır. Hiyerarşiyi açıklamak için zamanı, t_{ij} bir yordayıcı/bağımsız değişken olarak ele alalım.

$$X_i = Z_i = \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} \\ 1 & t_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{in_i} \end{pmatrix}$$

Eşitlik (3.12), ($i = 1, 2, 3, \dots, N$ ve $t = j = 1, 2, \dots, n_i$) için şu şekilde yeniden yazılabilir ($Y_{it} = \beta_1 + \beta_2 t_{it} + b_{1i} + \beta_{2i} t_{it} + \varepsilon_{it}$):

$$Y_{it} = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ y_{i3} \\ \vdots \\ y_{in_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} \\ 1 & t_{i2} \\ 1 & t_{i3} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{in_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} \\ 1 & t_{i2} \\ 1 & t_{i3} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{in_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \varepsilon_{i3} \\ \vdots \\ \varepsilon_{in_i} \end{pmatrix}$$

Hiyerarşinin 1. Düzeyi, birey düzeyindeki ortalamanın düşünülebilir.

$$Y_{it} = \beta_{1i} + \beta_{2i} t_{it} + \varepsilon_{it}; \quad \varepsilon_{it} \sim (0, \sigma^2) \quad (3.15)$$

Hiyerarşinin düzey-2'si bireyler arası değişkenlerin doğrusal bir işlevi olarak ifade edilebilen β_i rastgele oluşur. Örneğin A_i , $E(\beta_i) = A_i$ ve $Cov(\beta_i) = G$ veya $\beta_{1i} = a_{11} + u_{1i}$; $\beta_{2i} = a_{21} + u_{2i}$.

$$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix} = u_i \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right) \quad (3.16)$$

Şeklinde olsun. Bağımlı, Y_{it} değişkeninin varyansı, $Var(Y_{it}) = Var(\beta_1 + \beta_2 t_{it} + b_{1i} + \beta_{2i} t_{it} + \varepsilon_{it}) = Var(u_{1i} + \beta_{2i} t_{ij} + \varepsilon_{it}) = Var(u_{1i}) + 2t_{ij} Cov(u_{1i}, u_{2i}) + t_{ij}^2 Var(u_{2i}) + Var(\varepsilon_{it}) = g_{11} + 2t_{ij} g_{12} + t_{ij}^2 g_{22} + \sigma^2$ olur. Burada varyans, t_{ij} zamanın işlevidir ve zaman içinde sabit değildir. Benzer şekilde, gruplar içi (bireyler)

ölçümlerin kovaryansı $Var(Y_{it}, Y_{is}) = g_{11} + (t_{it} + t_{is})g_{12} + t_{it}t_{is}g_{22}$ ile gösterilebilir. Genel olarak, iki düzeyli bir hiyerarşik model şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} \\ 1 & t_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{in_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} \\ 1 & t_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{in_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \varepsilon_{i3} \\ \vdots \\ \varepsilon_{in_i} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$Y_i = X_i\beta + Z_iu_i + \varepsilon_i$$

Z_i üzerindeki öğeler, X_i sütunlarının alt kümesidir. Bu nedenle, X_i sütunlarını sabit efektlere karşılık gelen bir sütun kümesine $X_i^{(F)}$ ve rastgele etkilere karşılık gelen bir sütun kümesine $X_i^{(R)}$ şu şekilde bölebiliriz:

$$Y_i = X_i^{(F)}\beta^{(F)} + X_i^{(R)}\beta^{(R)} + \varepsilon_i \quad (3.18)$$

Burada β , sabit efektlere $\beta^{(F)}$ ve rastgele efektlere $\beta^{(R)}$ bölünmüştür. Hem sabit etkiyi hem de rastgele etkileri hesaba katan tüm hiyerarşik modellerde, bilinmeyen parametreler $\beta_1, \beta_2, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_u^2, \dots$, bilinmeyen sabitler olarak ele alınmıştır. Klasik yaklaşım, ana hedef, sabit etki parametrelerini ve rastgele etki parametrelerini tahmin etmektir. Klasik istatistik uygulamalarında bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için Parametrelerin Beklenti Maksimizasyonu ve Yinelemeli Genelleştirilmiş En Küçük Kareler gibi fonksiyon optimizasyon algoritmaları ile Maksimum Olabilirlik Tahmini veya Sınırlı Maksimum Olabilirlik Tahmini teknikleri kullanılmıştır. Bununla birlikte, hiyerarşik modellerin tüm parametrelerini rastgele olarak ele alan daha ileri bir modele ihtiyaç vardır. Bu, modellerin ilgili tüm parametreler için önselleri belirlediği Bayesci yaklaşıma yol açar.

3.4. Tekrarlı ölçüm verileri için Bayesci hiyerarşik doğrusal modelleme

Bayesci hiyerarşik modelleri, regresyon katsayıları (sabit etkiler) ve rastgele etkiler olarak varyans bileşenlerinin dağılımındaki parametrelerden önce bir (düz veya yaygın) belirleyerek rastgele etkiler modelinin uzantılarıdır. Şimdiye kadar dikkate alınan modellerin parametrelerine önsel dağılım varsayımlarını eklersek, Bayesci bakış açısıyla aynı model yelpazesini kullanamayız ve çoğu uygulamada, bu MZMC yöntemlerine başvurmamız gerekir.

Bayesci Hiyerarşik modeller, analistlerin içselliği hesaba katmasına izin verir. Bir Bayesci Hiyerarşik modeli, bir rastgele değişkenler kümesini ve bunların koşullu bağımlılıklarını yönlendirilmiş bir döngüsel olmayan grafik aracılığıyla temsil eden olasılıksal bir grafik model olan Bayesci bir ağdır (Alsefri vd., 2020). Bayesci

Hiyerarşik modeller, üç veya daha fazla rastgele değişken düzeyi içererek veya gizli değişkenler kullanarak kendilerini alt kümeler haline getirir. Bir düzey, birim içi analiz ve başka bir düzey, birimler arası analiz için kullanılır. Birim içi model, zaman içindeki bireysel yanıtlayıcıları tanımlar. Birim arası analiz, birimlerin çeşitliliğini veya heterojenliğini tanımlamak için kullanılır.

Boylamsal ve tekrarlı ölçüm verilerini içeren çok düzeyli veya hiyerarşik verilerde, gözlemler farklı gruplara aittir. Gruplar, hastaneler, hastanelerde iç içe geçmiş doktorlar ve hastanelerdeki doktorların içine yerleştirilmiş hastalar gibi farklı hiyerarşi düzeylerini temsil edebilir. Çok düzeyli veya hiyerarşik modeller, regresyon modelinde gruba özgü etkileri birleştirir ve genellikle normal bir dağılım olan bazı önsel dağılımlara göre gruplar arasında rastgele değiştiğini varsayar. Bu varsayım, hiyerarşik/çok düzeyli modeli Bayesci analizi için doğal adaylar haline getirir. Bayesci hiyerarşik doğrusal modeller ayrıca regresyon katsayıları ve varyans bileşenleri gibi diğer model parametrelerinin gruba özgü etkilerin varyanslarının da rastgele olduğunu varsayar.

Tekrarlı ölçümler veri çalışmasında $i = 1, \dots, N$ bireyi için $t_{i1} < \dots < t_{ij} < \dots < t_{in_i}$, $j = t = 1, \dots, n_i$ zaman veya durumlarda gözlemlenen bir sürekli bağımlı değişkeninin Y ve bir ortak değişken X vektörünün değerlerini (Y_{it}, X_{it}) ile gösterelim.

Popülasyon etkileri ve bireye/kişiye özgü rastgele efektlere sahip Bayesci Hiyerarşik Doğrusal Modeller (BHDM'ler), tekrarlı ölçüm modeli aracılığıyla hiyerarşik olarak tanımlanır:

$$y_{it} = x'_{it}\beta + z'_{it}v_i + \varepsilon_{it}, \quad \varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_e^2) \quad (3.19)$$

X_{it} ortak değişkenlerin/açıklayıcı değişkenlerin vektörü, kesişim terimi için bir sabit $\mathbf{1}$ içerir, ve $z_{it} = 1$ için rastgele kesişim (sabit eğimli) modellerine ve z_{it} daha fazla açıklayıcı değişken eklenirse rastgele eğim (sabit kesişim) modellerine yol açan bir alt vektördür. Hataların aynı şekilde bağımsız olarak dağıtıldığı varsayılır), ancak otokorelasyonu (oto-ilişkilendirilmiş) hatalara uzantılar da mümkündür. Önsel rastgele efektler, $\mathbf{v}_i = [u_{0i}, \dots, u_{ri}]' \sim N(0, D)$, bilinmeyen (elemanlar) D ile tanımlanabilir. Daha sonra, $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$, $\mathbf{\Omega} = \text{blockdiag}(D, \dots, D)$ tüm r rastgele efektlerin vektörü $\mathbf{u} = [\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_r]'$ için önseldir. Y ve içindeki hataları ε bir araya

getirirsek ve X ve tasarlanmış matris Z 'yi yukarıda açıklandığı gibi tanımlarsak, doğrusal hiyerarşik modeller genel formda şu şekilde yazılabilir:

$$Y = X\beta + Zu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (3.20)$$

Doğrusal hiyerarşik modellerin tam Bayesci çıkarımı için, hiper önseller, hiper parametrelere $\sigma^2 = Var(\varepsilon_{it})$ ve $D = Cov(v_i)$ atanmalıdır. σ^2 için standart önsel seçim $IG(a, b)$, $p(\sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{a+1}} \exp\left(\frac{-b}{\sigma^2}\right)$, $a > 0$, $b > 0$, uygun olan bir ters gamma (IG) önselidir. Bununla birlikte, kullanımı MZMC örnekleyicileri bunu saptayamayacak şekilde uygunsuz sonsalla sonuçlanabilir. Bu nedenle, küçük $a = b = k = 0.1, 0.01$, veya 0.001 olan 'yaygın' ters gamma (IG) önselleri önerilmiştir. Bu önsel seçimi, $\sigma^2, IG(k, k)$, az sayıda gruba veya daha yüksek düzeyli birimlere sahip modellerde aslında oldukça bilgilendirici olabilir, diğerleri ayrıca standart sapmalardan önsel tek tip veya katlanmış-Cauchy yoğunluğu gibi alternatif önseller önerdi. Ters gamma (IG) ve ters Wishart (IW) önseller (koşullu olarak) eşlenik önsel olduğundan, Gibbs örneklemesinin sonsallar için mümkün olması gibi hesaplama avantajına sahiptirler. Bunlardan önce başlamak, hiper parametrelere göre hassasiyeti kontrol etmek (en azından seyrek veri durumunda) ve muhtemelen alternatif önsellerle devam etmek iyi bir strateji olacaktır (Rasbash vd., 2020; Scott vd., 2013).

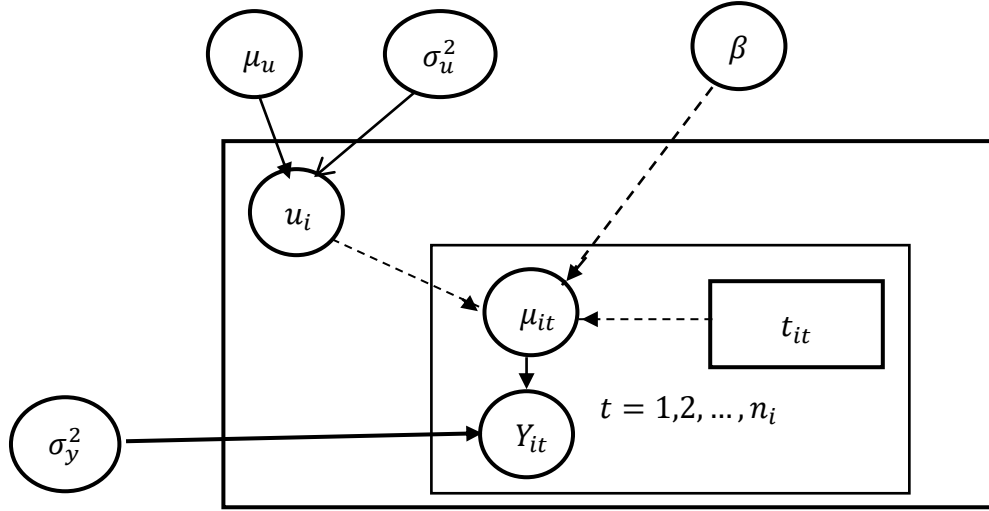
Bayesci bir hiyerarşik modelin biçimi burada, i -nci gruptan (özne, birey, hayvanlar, kişi, vb.), bireyler (grup) bir yordayıcı ile düzey-2 olarak ve birey içinde birinci düzey olarak yuvalanmış t -nci zaman noktasında (vesile ile) tekrarlı gözlemler, Y_{it} , iki düzeyli hiyerarşisini dikkate alır. Bayesci bir rastgele kesişim modeli şu şekilde yazılabilir:

$$Y_{ij} = \mu_{it} + \varepsilon_{it} \quad (3.21)$$

Burada, $\mu_{it} = E(y_{it}/x_{it}) = u_i + t_{it}\beta$

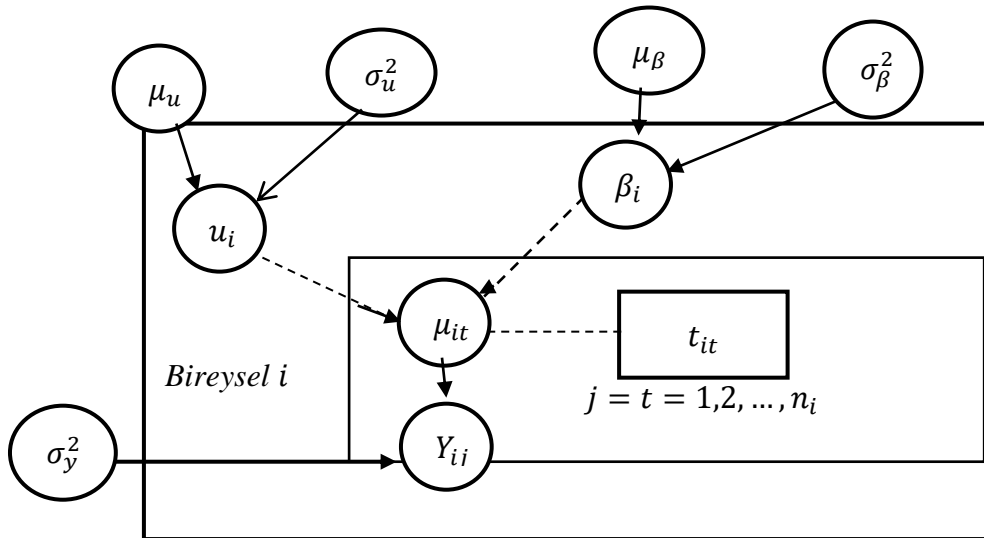
$Y_{it} \sim N(\mu_{it}, \sigma_y^2)$ ve $u_i \sim N(\mu_u, \sigma_u^2)$ 'nin olasılık dağılımlarını varsayalım. Ardından, Eşitlik (3.21)'de, β, σ_y^2, μ_u ve σ_u^2 hiper-parametreler olarak vardır. Nüfus dağılımının (yani β, σ_y^2) hiperparametreleri, makul bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar varsayılarak tahmin edilebilir. μ_u ve σ_u^2 için önsel dağılımları seçmek için farklı fikirler mevcuttur.

Uygulamada, genellikle uygunsuz düzgün bir dağılım veya σ_u^2 için tekdüze ters Gamma (IG) dağılımı ve μ_u için normal dağılım kullanılır.



Şekil 3.1. Rastgele Kesişim Modeli (Bayesci çerçevesi)

Bayesci rastgele kesişim model grafik olarak şekil 3.1 gibi gösterilebilir. Modelin her parametresi grafikte bir düğüm olarak görünür. Noktalı oklar, parametreler arasındaki deterministik bağımlılıkları temsil ederken (örneğin, $\beta - \mu_{it}$ arası) kesintisiz oklar olasılığa dayalı (rastgele) bağımlılıkları (örneğin, $\sigma_y^2 - Y_{it}$ arası) temsil eder. Bayesci bir rastgele kesişim ve katsayı/eğim modeli Eşitlik (3.22) şekilde yazılabilir:



Şekil 3.2. Rastgele kesişim ve eğim/katsayı modeli (Bayesci çerçevesi)

Bayesci rastgele kesişim ve eğim/katsayı modeli grafik olarak şekil 3.2 ile gösterilebilir. Yukarıdaki şekil 3.1 ile karşılaştırıldığında, β rastgele kesişim ve

rastgele eğim modeli için olasılıksal bir düğümdür. Böylece, rastgele kesişimlerle birlikte her birey (küme) için rastgele katsayılarımız/eğimlerimiz var. Parametreler arasındaki korelasyonu ele alarak modeli yazmanın daha düzenli bir yolu aşağıdaki gibidir: $Y_{it} \sim N(u_i + t_{it}\beta_i, \sigma_y^2)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u \\ \beta \end{bmatrix} \sim MVN \left(\begin{pmatrix} \mu_u \\ \mu_\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \rho\sigma_u\sigma_\beta \\ \rho\sigma_u\sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{pmatrix} \right) \quad (3.22)$$

Hem kesişim hem de katsayı/eğim modelinin $\mu_u, \mu_\beta, \sigma_u, \sigma_\beta$ ve ρ hiperparametrelerinin, parametreler için uygun varsayımlarla tek tip hiper önsel dağılımlara sahip olduğu varsayılabilir.

Genel matris formunda, Eşitlik (3.22) marjinal formunda rastgele etki modeli ile şu şekilde ilişkilendirilebilir: $Y_i \sim MVN(X_i\beta, Z_i\Omega Z_i' + \Sigma_i)$. Bayesci hiyerarşik modeli hakkında daha ayrıntılı tartışmalar, tekrarlı ölçüm verilerine uygulanmasıyla birlikte araştırmanın bir sonraki bölümünde yapılacaktır. İki düzeyli bir Bayesci hiyerarşik doğrusal modelin ortak sonsal,

$$P(\beta, u, \sigma_u^2, \sigma_e^2 / X, Y) \propto p(Y, X / \beta, u, \sigma_e^2) p(u / \sigma_u^2) p(\beta) p(\sigma_u^2) p(\sigma_e^2) \text{ 'dir.}$$

En basit örnekler dışında, bu karmaşık modelin analitik olarak çözülmesi neredeyse imkansızdır. Alternatif bir yaklaşım gereklidir ve MZMC yöntemlerinin buna uyduğu yer burasıdır (Chib ve Carlin, 1999).

3.5. Durum II: Kategorik Bağımlı Değişken (ler)i için Modeller

Tezin bu bölümünde, Bayesci Hiyerarşik Lojistik/Çok Terimli Modelinde (BHL/ÇTM) modellenen bireyler içinde yuvalanmış tekrarlı ölçümler/gözlemler ile iki terimli veya çok terimli dağıtılmış kategorik bağımlı değişkeni tanımlanacak ve veri analiz ile pratik olacaktır.

3.5.1. Kategorik Bağımlı Değişken İçin Bayesci Hiyerarşik Modelleri

Modern istatistik çağında, kategorik bağımlı değişkenle tekrarlı ölçüm verilerinin analizi için istatistiksel modellerin geliştirilmesi amacıyla önemli çabalar sarf edilmiştir. Bu çabaların çoğu için model geliştirmeye odaklanmışken sayımlar veya oranlar gibi farklı bağımlı değişkenler ve binom kategorik veya poisson verileri, çoklu kategorilere (nominal veya sıralı) kategorik tekrarlı gözlem verilerine göreceli olarak az ilgi gösterilmiştir. İkili kategorik ve çoklu kategorileri (sıralı veya nominal) içeren kategorik verileri tekrarlayan ölçümler veya $t = 1, 2, \dots, T_i$ ölçüm tekrarları

için $i = 1, 2, \dots, N$ bireylere/kişilere göre $k = 1, 2, \dots, K$ nitelikler genellikle marka seçiminde, işgücü piyasası ve siyasal bilimler uygulamalarında bulunur. Bunlar, $y_{it} \in (1, 2, \dots, K)$ kategorik bağımlı değişkenlerle ifade edilebilir. Bayesci hiyerarşik modelin en düşük düzeyinde (tekrarlı gözlemler), $y_{it} = (y_{it1}, y_{it2}, \dots, y_{itk})$ özniteliğin bireysel seçiminin, i -nci bireyin şu şekilde tanımlanan K . kategoriye sahip olduğu çok terimli dağıtıldığı varsayılır:

$y_{it} \sim \text{Binomial}_k(1, \pi_{it})$. Burada, $\pi_{itk} = p(y_{it} = k)$ bireysel i bir kişi, t zaman noktası ve K kategori için olasılık.

Hiyerarşinin ikinci düzeyi (bireyler, gruplar olarak), standartlaştırılmış bir π_{itk} terim aracılığıyla modellenmiş nedensel etkilere bağlanır:

$$\pi_{itk} = \frac{\mu_{itk}}{\sum_{k=1}^K \mu_{itk}} \quad (3.23)$$

$$\log(\mu_{itk}) = \beta_{0k} + u_{ik} + X'_{it}\beta_k + Z'_{it}\gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Burada, X_{it} açıklayıcı değişkenlerin bir matrisidir, Z_{it} gecikmeli bağımlı değişkenlerinin bir matrisidir, γ_k ve β_k bilinmeyen parametrelerin ilişkili vektörleridir ve u_{ik} bir rastgele etki terimidir. Tekrarlı ölçümler veri analizinde, u rastgele etkiler üzerine koşullu olarak, t -nci zaman noktasında veya vesilesiyle i -nci birey için (bağımlı değişken kategorik olur) $Y_{it} = k$ olasılığı şu şekilde yazılabilir:

$$\pi_{it} = \mu_{it} = Pr(y_{it} = k | u_i, X_{it}, Z_{it}) \quad (3.24)$$

$$= \left[1 + \sum_{s=1}^K \exp(X'_{it}\beta_s + Z'_{it}\beta_{is}) \right]^{-1} \exp(X'_{it}\beta_s + Z'_{it}\beta_{is}), \text{ for } k = s = 1, 2, \dots, K$$

Hem regresyon katsayılarının (sabit etkiler) β_k hem de rastgele etkilerin k alt simge taşıdığı yerde, bu nedenle, regresyon katsayılarının ve rastgele etkilerin varyans-kovaryans matrisinin bağımlı değişken kategorileri arasında değiştiği varsayılır. Bu parametreler kendi olasılık dağılımlarına sahip olmak için daha fazla rastgele hale getirildiğinde hiyerarşik çok terimli logit regresyon modeli Bayesci yaklaşımı kapsamına girer.

Modelin tanımlanması, bir referans kategori belirlemeden imkansızdır ve $k = 1$ seçilebilir, $\log\left(\frac{\pi_{itk}}{\pi_{it1}}\right) = \log\left(\frac{\mu_{itk}}{\mu_{it1}}\right) = \log(\mu_{itk}) - \log(\mu_{it1})$ $k = 1$ için ve $\log(\mu_{it1}) = 0$. Buna karşılık ilgili parametrelerin tümü $\beta_1, \gamma_1, u_{i1}$ sifıra ayarlanır. Bu nedenle, her

bir kategoriye bağımsız olarak tahmin etmek için $K - 1$ Eşitliklerimiz var, bu da her kategorinin olasılığını temel (referans) kategori ile karşılaştıran kategorik bir bağımlıya eşittir. Böylece, $\log(\mu_{itk})$ temel $k = 1$ kategoride olma olasılığına göre k kategoride olma olasılığı log olarak yorumlanabilir. Kalanların u_{ik} çok değişkenli normal olduğu varsayılmaktadır: $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik}) \sim MVN(0, \Sigma)$.

Daha sonra, bilgilendirici olmayan önsel şartname ile, ortak sonsal dağılımı şu şekilde yazılabilir:

$$P(\beta, \gamma, u, \Sigma/X, Y) \propto p(X, Y/\beta, \gamma, u, \Sigma) \times p(u/\Sigma) \times p(\beta) \times p(\gamma) \times p(\Sigma) \quad (3.25)$$

Burada, β, γ ve Σ bilinmeyen parametrelerin önceden bağımsız olduğunu ve yalnızca u bunlara bağlı Σ olduğunu varsaydık. $\pi_{it} = \mu_{it}$ kategori sonucu 1 olasılığına ve $1 - \mu_{it}$ kategori sonucu 0 olasılığına sahip ikili (binom) bir kategorik bağımlı değişken y_{it} için ortalama $E(y_{it}) = \mu_{it}$ ve varyans $Var(y_{it}) = \pi_{it}(1 - \pi_{it})$ şeklindedir. Bayesci hiyerarşik lojistik regresyon modeli, $k = 1, 2 = K$, logit bağlantı işlevi kullanılarak modellenebileceğini şu şekilde dikkate alır: $y_{it}/u_i \sim Bernoulli(\pi_{it})$

$$\text{Logit } p(y_{it}/u_i) = \text{logit } p\{y_{it} = k = 1/u_i\} = \beta_0 + X'_{it}\beta + Z'_{it}u_i \quad (3.26)$$

Hiyerarşik bir modelde, en düşük düzeydeki gözlemler arasındaki korelasyon, daha yüksek düzeydeki açıklanamayan sonuç varyansının oranını gösteren bir Sınıf İçi Korelasyon Katsayısı (ICC) ile tahmin edilebilir. Bağımlı değişkeninin türü kategorik olduğunda, iki düzeyli modelde ICC şu şekilde tanımlanır:

$$ICC = \rho = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \frac{\pi^2}{3}} \quad (3.27)$$

Ayrıca, hiyerarşik bir lojistik regresyon veya kategorik bağımlı değişken rastgele etkiler modelinde, hataların ortalama sıfır ve yaklaşık $\pi^2/3 = 3.29$ varyansla standart bir lojistik dağılımı izlediği varsayılır (Twisk, 2006).

3.6. Durum III: Çok Değişkenli Karışık Bayesci Hiyerarşik Modeller

Yukarıda tartıştığımız I ve II numaralı durumlardaki modeller, bağımsız olarak alınan tek tipte sürekli (normal dağılıma sahip) ve kategorik (binom veya çok terimli) bağımlı değişkenleri sahipti.

Sürekli değişkenin Normal dağılımına sahip çoklu bağımlı (çok) değişkenli hiyerarşik modeller, uygulamalı araştırmalarda yaygındır. Ancak, daha az uygulanır,

ve farklı bağımlı değişken türlerinin analizini hiyerarşik çok değişkenli karışık bağımlı değişkenler modelinde birleştirmek mümkündür; örneğin, çok değişkenli modeller gibi sigara içme durumu gibi kategorik bir bağımlı değişkenin yanı sıra kan basıncı gibi sürekli bir bağımlı değişkeni de dahil edebiliriz (Leyland ve Groenewegen, 2020).

Eşitlik (3.6)'deki genel modele dayanarak, tek bağımlı değişkenli Bayesci hiyerarşik modeli, karışık bağımlı değişkenlerle çok değişkenli Bayesci hiyerarşik modeline genişletilebilen $Y_{n \times 1}$ olarak ifade edildi. Çok değişkenli (karışık) bağımlı değişkenler artık matris biçiminde temsil edilebilir (MacCallum vd., 1997).

Boik (1988); MacCallum vd.(1997); Sperling (2010) 'de açıklandığı gibi, vektörü Eşitlik (3.18)'dan genişleterek, ilk $s + 1$ terimlerinin sabit etkiler olduğunu ve geri kalanının r sayıda bağımlı değişkenne sahip rastgele etkiler olduğunu varsayıyoruz (eğer iki değişkenli çok değişkenli karışık bağımlı değişkenler varsa, $r = 2$, $Y_{ij}^{(1)}$ 'nin kategorik olduğunu ve $Y_{ij}^{(2)}$ 'nin sürekli olduğunu ima eder).

$$Y = X\beta + ZU + E \quad (3.28)$$

Burada, $X = [1_n, x_1, \dots, x_s] \in M_{n, s+1}$, $Z = [x_{s+1}, \dots, x_p] \in M_{n, p-(s+1)}$ ve

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \dots & \beta_{0r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{s1} & \dots & \beta_{sr} \end{bmatrix} \in M_{s+1, r} \quad \text{and} \quad U = \begin{bmatrix} \beta_{(s+1)1} & \dots & \beta_{(s+1)r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pr} \end{bmatrix} \in M_{p-(s+1), r}$$

şeklinindedir. Bayesci hiyerarşik modellemesi nedeniyle, tüm parametrelerin hiper-önseli vardır ve rastgele olarak kabul edilir.

3.6.1. Bayesci Hiyerarşik Karışık Bağımlı Değişken Modellemesi

Normal, Bernoulli (Binom) ve Multinomial dağıtılmış bağımlı değişkenlerinin karışımlarını tekrarlayan ölçüm veri yapısında modellemek basit bir iş değildir. Bunun nedeni, farklı türdeki bağımlı değişkenlerimiz için çeşitli bağlantı fonksiyonlarının ve üstel ailelerin farklı dağıtım varsayımlarıdır (Liu, 2016a). Şu anda, R2MLwiN'de MZMC tahmin yaklaşımlarını kullanarak, yalnızca Normal ve Binom bağımlı değişkenlerinin karışımlarını ve ardından Binom için yalnızca bir probit bağlantı fonksiyonunu sığdırabiliriz. Bunun nedeni, yalnızca bu bağımlı değişken kombinasyonunun, en düşük düzeydeki kalıntılar için tanımlanabilir bir

dağılımla sonuçlanmasıdır. Diğer bağımlı kombinasyonları, ölçüm (en düşük) düzeyinde (genellikle gerçekçi olmayan) bağımsızlık varsayımı yapılarak ele alınabilir (Rasbash vd., 2020).

Karışık kategorik ve sürekli bağımlı değişkenler kümesine sahip modeli tanımlayalım. Basit olması için, lojistik (veya probit) modellerde binom kategorik sonucu ele alalım. Modeli birden çok kategorik (sıralı ve nominal) bağımlı değişkenne genelleme prensipte basittir çünkü her kategorik değişken bir dizi binary gösterge değişkeniyle değiştirilebilir.

Her $i = 1, \dots, N$ bireyin, $\mathbf{resp}_1 = \mathbf{Y}_{1sit} = (\mathbf{y}_{1it}, \dots, \mathbf{y}_{sit})'$ ($t = 1, \dots, T_i = n_i$) şeklinde s adet sürekli bağımlı değişkenler üzerinde ölçümleri olsun. Bu bireylerin, Z_y yordayıcı/bağımsız değişkenlerin vektörü ile $\mathbf{resp}_2 = \mathbf{Y}_{2sit} = (\mathbf{y}_{1it}, \dots, \mathbf{y}_{Tit})'$ T adet ikili (binary) bağımlı değişkenlerini gözlemlediğini varsayalım. Yani $Y_{it}^{(s)}$ i -nci ($i = 1, 2, \dots, N$) bireysel öznenin t -nci ($t = 1, 2, \dots, n_i$) ölçüm gözlemi için gözlemlenen s -nci ($s = 1, 2, \dots, m$) bağımlı değişkenidir. Bir probit bağlantısı varsayılırsa, (Goldstein vd., 2009; Luo & Wang, 2014) açıklandığı gibi, gizli bir normal değişkeni örneklemek için algoritmadaki her yinelemede ekstra bir adım ekleyebiliriz. Daha sonra, normalleştirilmiş bağımlı haline gelir. Böylece, gözlemlenen $Y_{it}^{(s)}$ bağımlı değişkenlerin her biri (kategorik) $Y_{it}^{*(s)}$ gizli değişken tarafından normalleştirilir. Bu nedenle, s farklı tipte bir dizi ilgili karışım bağımlı değişkenler ölçütünün olduğu, $Y_{it} = [Y_{it}^{(1)}, Y_{it}^{(2)}, \dots, Y_{it}^{(s)}]$, $\mathbf{resp}_{1i}, \mathbf{resp}_{2i}, \dots, \mathbf{resp}_{mi}$ ve normalleştirilmiş gizli bağımlı değişkenin \mathbf{resp}_{si}^* $s = 1, \dots, m$ olduğu oldukça genel durumu ele alıyoruz.

Bireysel kişiler içinde yuvalanmış ölçüm gözlemlerine sahip 2 düzeyli bir hiyerarşik model için, çok değişkenli karışık bağımlı değişken modeli şu şekilde yazılabilir:

$$Y_{itk} = \delta_i [X'_{it} \beta_k + Z'_{it} \gamma_k + u_{ik}] + (1 - \delta_i) [X'_{it} \beta_k + Z'_{it} \gamma_k + u_{ik} + e_{itk}] \quad (3.29)$$

Eşzamanlı bağımlı değişken göstergesi kukla değişkeni,

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer } Y_{itk} \text{ kategorik} \\ 0, & \text{eğer } Y_{itk} \text{ sürekli} \end{cases}$$

şeklindedir.

Durum III'teki hiyerarşik yapının Bayesci uzantısı, durum I ve durum II gibi ilgilenilen parametrelerin rastgele hale getirilmesidir. Hiyerarşik modeller hem veri

hem de parametre yapısı bakımından gerekli modeller olmasına rağmen, analitik çözümlere çoğu zaman ulaşılamaz.

3.7. Bayesci Çıkarım ve Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) Yaklaşımları

Klasik yaklaşımda, $Y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ örneklem gözlemlenen ölçümleri, rastgele kabul edilen veri kümeleridir. Bilinmeyen θ parametre seti ise sabit olarak alınır. Bayesci yaklaşımda motivasyon, parametrelerle ilgili belirsizliği yansıtan bilinmeyen θ parametre setini rastgele Y örneklem gözlemlenen ölçümlere dayalı olasılık dağılımlarına sahip olarak almaktır. Daha sonra, Bayesci çıkarım, Bayesci teoremi uygulanarak resmileştirilebilir:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta) \times p(\theta)}{\int p(y|\theta) \times p(\theta) = p(y)} \propto p(y|\theta) \times p(\theta) = c \times p(y|\theta)p(\theta) \quad (3.30)$$

Normalleştirme c sabiti ile, mevcut görüşümüzü (önsel dağılım, $p(\theta)$) elde edilen verilerle (olasılık $p(y|\theta)$) güncelleyerek yeni görüşümüzü (θ 'nin sonsal dağılım olarak $p(\theta|y)$) elde ederiz. Önsel dağılım, $p(\theta)$ sonsal dağılımda veriyi görmeden önce θ 'nin belirsizliğimizi ifade eder, sonsal dağılım, $p(\theta|y)$ veriyi gördükten sonraki θ 'nin belirsizliğimizi ifade eder.

3.7.1. Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) Yaklaşımları

Bir dağılımdan çok sayıda rastgele değeri örnekleyen herhangi bir simülasyon tekniğine Monte Carlo Simülasyonu denir. Markov Zinciri Monte Carlo (MZCM) fikri, θ_i parametre değerlerinden "örnekleme" yapmaktır. Bir uzun süre Bayesci analizi, sonsal dağılımı elde etmek için çok boyutlu integrallere ihtiyaç duyan karmaşık modellerin değerlendirilememesi nedeniyle engellenmiştir.

Bu nedenle, analiz, sonsalın önsel ile aynı formu aldığı ve dolayısıyla ortalama, medyan ve diğer özet ölçümlerin karmaşık çok boyutlu entegrasyon yapmak zorunda kalmadan bilindiği eşlenik analizlerle sınırlandırılmıştır. Bununla birlikte, modern hesaplama gücünün ortaya çıkmasıyla birlikte, artık Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri olarak bilinen simülasyonları kullanarak karmaşık integralleri hesaplama yeteneğine sahibiz. Bu, Bayesci fikirlerin büyümesine yol açar.

Modern istatistiksel metodolojide, Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yöntemleri, hiyerarşik, çok düzeyli veya karma efektli modelleri tahmin etmek için kullanılabilen Bayesci tahmin teknikleridir.

MZMC yöntemlerinin temel aşamaları şunlardır:

- a) *Analitik yöntemlerin simülasyonla değiştirilmesi:* $p(\theta/y)$, ortak sonsal dağılımından örnek alın ve çok sayıda makul θ değeri kaydedin. Daha sonra, örneğin, örneklenen değerlerin örnek ortalamasını, $E(\theta/y)$ sonsal ortalamasının bir tahmini olarak kullanırız.
- b) *Sonsal dağılımdan örnekleme:* Bir Markov zinciri üretme olasılığının çarpımıyla orantılı olduğu bilinen ortak bir sonsal dağılımdan örnekleme yöntemleri, burada bir sonraki simüle edilen değer için dağılım yalnızca mevcut değere bağlıdır. Markov zincirlerinin teorisi, geniş koşullar altında, numunelerin sonunda bir "denge dağılımına" yaklaşacağını belirtir. Denge dağılımını sağlamak için belirtilen $p(y/\theta) \times p(\theta)$ formunu kullanan sonsal dağılımın bir dizi algoritması mevcuttur. Popüler teknikler şunları içerir: Gibbs örnekleme, Metropolis algoritması ve yeni melez yöntemi.
- c) *Simülasyonun başlatılması:* Markov zinciri bir yerden başlatılmalıdır ve bilinmeyen parametreler için başlangıç değerleri seçilir. Teorik olarak, başlangıç değerlerinin seçimi nihai örnekler üzerinde bir etkiye sahip olmayacaktır, ancak pratikte yakınsama oranında bir fark yaratırlar.
- d) *Yakınsama kontrolü:* Bir Markov zincirinin birleşip birleşmediğini kontrol etmek zor bir sorundur. Yakınsama eksikliği, örneklenen değerlerin düzensiz davranışını gözlemleyerek teşhis edilebilir, ancak yakınsamayı teşhis etmek özellikle zordur. Fikirlerden biri, çeşitli başlangıç değerlerinden birkaç zincir çalıştırmak ve bunların aynı sonsal dağılımdan gelip gelmediğini kontrol etmektir.

Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yaklaşımı, bir Markov zincirini $\{\theta_t, t \in T\}$ θ için yaklaşık dağılımlardan simüle etmeye ve ardından simülasyonu hedef sonsal dağılıma $p(\theta/y)$ daha iyi yaklaştırmak için ayarlamaya dayanan genel bir yaklaşımı ifade eder (Glema vb., 2004). Bir Markov Zinciri, θ_t rastgele (gizli) değişkenler $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$, dizisi olarak tanımlanabilir. Öyle ki her $t \geq 0$ yineleme bir sonraki durum θ_{t+1} , yalnızca zincirin θ_t mevcut durumuna bağlı olan bir $P(\theta_{t+1}/\theta_t)$, teklif dağılımından örneklenir, yani, $P(\theta_{t+1}/\theta_t, \theta_{t-1}, \dots, \theta_0) = P(\theta_{t+1}/\theta_t)$. Modern Bayesci istatistiklerinde, Bayesci marjinal ve birleşik sonsal yoğunlukların verimlilikte değişiklik gösteren tahmininde kullanılan üç popüler

MZMC algoritması vardır (Liu, 2000). Bunlar, Metropolis-Hasting (MH), Gibbs örnekleme ve yeni melez (Hamiltoncu) Monte Carlo algoritmasıdır.

3.7.1.1. Metropolis-Hastings (MH) Algoritmaları

Metropolis vb. (1953) tarafından ilk kez önerilen Metropolis algoritması, sonsal dağılım için analitik bir ifadenin yazılması imkânsız olduğunda kullanılır. Algoritma, $Q(\theta_t^*/\theta_t)$ yoğunluk işlevine sahip bir teklif dağılımı gerektirir ve bu dağılımdan önerilen ve aşağıda açıklandığı gibi bir Metropolis-Hasting oranı tarafından kabul edilen veya reddedilen simülasyonlara dayalı olarak bir yineleme zamanında bir adım ilerler. Hedef dağılımı (Bayesci analizdeki sonsal dağılım) $P(\cdot)$ ile gösterelim ve $Q(\cdot/\theta_t)$ teklif dağılımı, yineleme t zamanında aday noktanın θ^* örneklendiği bir öneri dağılımı olsun.

Tablo 3.1. Metropolis Algoritması: Rastgele Yürüyüş Metropolü

Girdi: θ_0 başlangıç noktası, Q teklif dağılımı ve T yineleme sayısı;

$t = 0, 1, 2, \dots, T$ için:

$\theta^* \sim Q(\cdot/\theta_t)$, $Q(\theta_t/\theta^*) = Q(\theta^*/\theta_t)$ koşulunu sağlayan örnek çek;

Kabul olasılığını hesapla; $p = \alpha(\theta_t, \theta^*) = \min \left\{ 1, \frac{P(\theta^*)}{P(\theta_t)} \right\}$

Rastgele bir değişkeni örnekle; $U \sim Uniform(0,1)$

Eğer $U \leq p$:

$\theta_t \rightarrow \theta^*$

$\theta_t \rightarrow \theta_0$ (yeni aday çekmek için geri dönün),

t 'yi artır

Çıktı: θ

Simetrik bir öneri/teklif dağılımını, $Q = Normal$, seçen Metropolis yaklaşımı, tarihsel olarak Metropolis-Hastings'den önce bulunmuştur. Bazen rastgele yürüyüş (Random-Walk) Metropolis'ten farklı kabul olasılığına sahip asimetrik bir teklif dağılımına, $Q(\cdot/\theta_t)$, ihtiyacımız olabilir. Bu nedenle, Algoritma 1 ve Algoritma 2, kabul olasılığının, $Q(\cdot/\theta_t)$, hesaplanması bakımından farklıdır. Burada, θ_0 verildiğinde yeni değer için $Q(\cdot/\theta_t)$ koşullu dağılımından çekilen bir örnek yeni değer olarak önerilir, bu değer belli bir olasılığa göre kabul edilir. Edilmezse eksi değerde kalınır.

Tablo 3.2. Metropolis- Hastings (MH) Algoritması (Genel)

Girdi: Q bazı ilk teklif dağıtımından ve T yineleme sayısından θ_0 başlangıç noktası; (θ_0 'ın verilmesi durumunda)

1. için; $yapmakt = 0,1,2, \dots, T$
2. Çikiliş örneklem $\theta_{t+1}^* \sim Q(\theta_t, \theta^*)$, Q teklif dağıtımının ihtiyaç duymadığı (ancak θ_t bağlı olabileceği) durumlarda;
3. Kabul olasılığını hesaplayın; $p = \alpha(\theta_t, \theta_{t+1}^*) = \min \left\{ 1, \frac{P(\theta_{t+1}^*)Q(\theta_{t+1}, \theta_t)}{P(\theta_t)Q(\theta_t, \theta_{t+1}^*)} \right\}$
4. Rastgele bir değişkeni örnekleyin; $U \sim Uniform(0,1)$
5. Eğer $U \leq p$, $\theta_{t+1} \rightarrow \theta_{t+1}^*$
6. Başka/Yoksa, $\theta_{t+1} \rightarrow \theta_t$ (yeni aday çekmek için geri dönün), artırın t .

Çıktı: θ

3.7.1.2. Gibbs Örneklemesi

Gibbs örneklem algoritması, esasen Metropolis-Hasting'in bir varyasyonudur. Burada her bir bileşen $\theta_i \in \theta$ diğer tüm bileşenlerin değerleri verildiğinde koşullu dağılımından örnek alınarak sırayla değiştirilir. Metropolis-Hastings (MH) örnekleyici, Gibbs örnekleyici dahil olmak üzere herhangi bir MZMC yaklaşımının özü olabilir. Gibbs örneklemesinin kullanılmasının önseli nedeni, doğru hedefe ulaşan bir dizi düşük boyutlu simülasyon oluşturarak çok boyutluluk problemini (hem reddetmeyi hem de önemli örneklemeyi etkiler) kırmaktır. Gibbs örneklemesi, sürekli bağımlı değişken modelleri için sonsal dağılıma aitanalitik bir ifadenin yazılmasıyla doğrudan koşullu sonsal dağılımdan bir örneklemedir.

Resmi bir tanımla, Gibbs örneklemesi, bir (1) kabul olasılığı ile özel bir Metropolis-Hastings (MH) algoritması durumudur. Gibbs örneklemesinde teklif dağılımlar her zaman kabul edilir. Gibbs örneklemesi, sert çok değişkenli eklem sonsal dağılımından, $Q(\cdot) = Q(\theta^1 \theta^2 \dots \theta^D)$, kolay tam (tek değişkenli) koşullu dağılımlara, $Q(\theta^1 / \theta^2 \dots \theta^p)$, $Q(\theta^2 / \theta^1 \theta^3 \dots \theta^D)$, ..., $Q(\theta^D / \theta^1 \dots \theta^{D-1})$, çekmeyi azaltır. Algoritmanın adımları aşağıdaki gibidir:

Tablo 3.3. Gibbs Örneklemesi

Girdi: verilen noktadan başlayarak, θ_0 'ın verilmesi durumunda ve ters örnekleme gibi koşullu dağılımlardan yararlanmanın bir yolunu bulun; $t = 0, \dots$ için

A. Çekiliş: $\theta_{t+1}^{(1)} \sim Q(\theta_{t+1}^{(1)} / \theta_t^{(2)} \dots \theta_t^{(D)})$

B. Çekiliş: $\theta_{t+1}^{(2)} \sim Q(\theta_{t+1}^{(2)} / \theta_{t+1}^{(1)} \theta_t^{(3)} \dots \theta_t^{(D)})$

...

C. Çekiliş: $\theta_{t+1}^{(D)} \sim Q(\theta_{t+1}^{(D)} / \theta_{t+1}^{(1)} \dots \theta_{t+1}^{(D-1)})$

D. Ayarlamak $\theta_{t+1} = (\theta_{t+1}^{(1)} \dots \theta_{t+1}^{(D)})$; ardından $Q(Y/\theta_t)$ 'dan Y değeri Çekilir.

Çıktı: θ

3.7.1.3. Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) Algoritması

Son zamanlarda, Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yöntemleri, karmaşık ve yüksek boyutlu dağılımlardan örnekleri üretmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Tüm Bayesci yaklaşım yöntemleri arasında, Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) (Almond, 2014) yaklaşımı, karmaşık veri yapısı modellerine yaklaşmak için en verimlidir ve geleneksel Metropolis-Hastings ve Gibbs yöntemlerinden daha hızlı bir şekilde yakınsaktır (Kruschke ve Vanpaemel, 2015). Çok bilinen MZMC yaklaşımları, karmaşık parametre yapılarında (Yao ve Stephan, 2021) zayıf performans ve muazzam derecede yavaş yakınsama göstermektedir.

Gibbs örneklemesine benzer şekilde, Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) parametre uzayındaki mevcut konuma bağlı olarak rastgele bir teklif dağılımı kullanır. Ancak Gibbs algoritmasından farklı olarak, HMC, parametreleri koşullu sonsal dağılımından hesaplama ve örnekleme işlemlerine dayanmaz. HMC'nin diğer MZMC yöntemlerine göre iki avantajı vardır. Birincisi, örneklerin otokorelasyonu çok azdır veya hiç yoktur. Diğer avantajı ise hızlı mix-in, yani zincirin dağılıma hemen yakınsamasıdır. Bu nedenle, düşük (oto) korelasyon ve düşük örnek reddi ile sürekli dağılımlar için en iyi yaklaşımdır (Nishio ve Arakawa, 2019).

Model parametreleri ayrık yerine sürekli olduğunda, hibrit Monte Carlo olarak da bilinen Hamiltoncu Monte Carlo (HMC), örnekleme problemini bir hedef dağılımdan diğerine dönüştüren akıllı bir yardımcı değişken şeması aracılığıyla bu tür rastgele yürüme davranışını bastırabilir (Neal, 2011).

HMC, birinci dereceden gradyan bilgisi ile bildirilen bir dizi adım atarak, diğer MZMC yaklaşımlarını rahatsız eden ilişkili parametrelere karşı rastgele yürüme davranışını ve duyarlılığı önleyen bir MZMC algoritmasıdır. HMC, BHM'ye uyacak şekilde niteliklere ve popülasyon yapısına dayalı uygun parametre ayarlarını gerektirir. Dahası, HMC'nin performansı simüle edilmiş veriler için Gibbs örneklemesinden daha iyiydi (Nishio ve Arakawa, 2019).

Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) algoritması, bir $t = 0, \dots, T$ süresi için yörüngeyi hesaplayan ve ardından son konumu $X(T) = X_{n+1}$ alan Hamiltoncu'ya (toplam enerji) dayanmaktadır.

Tablo 3.4. Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) algoritması

Girdi: θ_0 başlangıç noktası ve bir hız dağılımı $\theta_0 = X_0 q(v)$

1. İçin $n = 0, \dots$
2. Başlangıç konumunu şu şekilde ayarlayın; $X(t = 0) = X_n$
3. Yeni bir rastgele ilk hız çizin $v(t = 0) \sim q(v)$;
4. Yörüngeyi bir süre için toplam enerji ile sayısal olarak entegre edin (Leapfrog yöntemini kullanın) $H(X, v) = U(X) + K(v) = -\log p(X) - \log q(v)$ T
5. Kabul olasılığını hesaplayın $\alpha(X_{n+1}, X_n) = \min \left\{ 1, \frac{\exp[-H(X_{n+1}, v_{n+1})]}{\exp[-H(X_n, v_n)]} \right\}$
6. Ayarlamak $X_{n+1} = X(t = T)$
7. Artış

Çıktı: θ

3.8. Bayesci Hiyerarşik Modellemesi İçin Paketler ve Önseller

Bu tez çalışması, Bayesci hiyerarşik modellerine kısa bir genel bakış sağlayıp çeşitli bağımlı değişken ve önsel spesifikasyonlardaki modellere, uygun model seçim kriterleriyle R2MlwiN, MCMCglmm ve R-stan/BRMS kullanılarak bunların nasıl uydurulacağına odaklanacaktır (Kruschke, 2014). Bu üç R paketi, farklı alile dağılımlarından gelen tek veya çok (karışık) değişkenli bağımlı değişkenlerle BHM'ye uygundur. Bunun yanında, BHM üç farklı Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yöntemiyle uyumludur. Kısacası, (Mai ve Zhang, 2018) tarafından belirtilen Bayesci hiyerarşik (çok düzeyli) modellemeye yönelik yazılım paketleri listesinden üçü, MZMC algoritmaları farklılıklarına dayanarak bu tezde kullanılmak üzere seçilmiştir. Farklı paketlerdeki modellerin kurulmak için farklı inceltme, yakma periyodu (burn-in) ve iterasyonlu değer uygulanmıştır. Tüm modeller,

Hamiltoncu Monte Carlo yaklaşımında 2 çekirdekli, ısınma veya 1000 yanmalı, 1 inceltme ve 10000 iterasyonlu dört zincirle model kuruldu. Bayasçi Modelleri, 2000'lik bir inceltme aralığı ile 100.000'lik bir yanmadan sonra 5.000 yineleme için Gibbs örneklmesi kullanarak MCMCglmm paketi ile donatılmış. Ayrıca, Metropolis Hasting yaklaşımı için R2MlwiN'li modelleri, 10'luk bir inceltme ile 1000'lik yanmadan sonra 10000 iterasyon için yerleştirmiştir.

3.8.1. R2MlwiN paket: Çok düzeyine bir R komut arayüzü

Bir paket R2MlwiN olarak, MLwiN'deki çok düzeyli pencereler R komut arayüzünde yürütülebilir. Bu paket WinBug ve lme4 ile bağlantılıdır (Zhang, 2014; Zhuge vd., 2020). Bayesci çerçevesindeki hiyerarşik doğrusal modeller için bu paket varsayılan olarak Metropolis- Hasting (MH) algoritması kullanır (Zhang vd., 2016). Gibbs örnekleme ayrıca seçilen olasılık ve önsel kombinasyonlar için desteklenir. MZMC'nin yakınsaması ve verimliliğinin kontrol edilmesi, parametreler ve önsel dağılımlar için sonsal özetler elde edilmesi ve model karşılaştırması da sağlanır. Analimize dahil etmek istediğimiz ortalama parametre veya önceki çalışmalardan elde edilebilen bilgilendirici önseller (sık sık kullanılan HM tahminleri) için bilgilendirici olmayan düz önsel (1 yoğunluklu) kullanabiliriz.

Önsel seçimi, veri yapısına ve yazılım paketlerine bağlıdır (Alvarez vd., 2014; Lemoine & Lemoine, 2019). WinBUGS ve R2MLwiN, ters Wishart (IW (Phi, nu)) dağılımını rastgele etkileyen kovaryans matrisi için koşullu eşlenik olarak kabul eder. Ancak bu seçimin sorunlu olduğu görülmüştür. Küme sayısı (birey) azdır (Leckie ve Charlton, 2013). Bununla birlikte, kovaryans matrisinin önseli için (Gelman ve Hill, 2006) ölçekli ters Wishart (IW) kullanılmasını önermektedir. Herhangi bir Bayesci modelinin yeni 'varsayılan' önceliği olarak zayıf bilgilendirici öncelleri düşünmek daha iyidir (McElreath, 2018a).

3.8.2. MCMCglmm paket: MZMC ile Genelleştirilmiş Doğrusal Karışık Modeller

MCMCglmm (Hadfield, 2017), MZMC yöntemlerini kullanan genelleştirilmiş doğrusal hiyerarşik modelleri uydurmak için bir R paketidir. Bayesci genelleştirilmiş çok düzeyli (hiyerarşik) doğrusal modellerin yanı sıra, R'deki MCMCglmm kütüphanesi BHM'yi sürekli ve karışık bağımlı değişkenlere yapabilir. Model katsayıları ve kesişimler için varsayılan önseller, standart normal dağılımlar olan

bilgilendirici değildir (Gromping, 2015). Daha üst düzey rastgele etki için önsel dağılım, G-yapısı ve artık terim R yapısı için, varsayılanlar V ve nu olmak üzere iki ayrı terim belirterek ifade edilir (Hadfield, 2010, 2015).

3.8.3. BRMS in Stan paket: Stan kullanarak Bayesci regresyon modelleri

BRMS (Bürkner, 2018; Bürkner, 2017), tam Bayesci çıkarımı için 'Stan' kullanan Bayesci (genel) genelleştirilmiş (doğrusal olmayan) doğrusal, tek değişkenli ve çok değişkenli hiyerarşik (çok düzeyli) modellere uyabilir. BRMS'de çok çeşitli dağıtımlar ve bağlantı işlevleri desteklenir (McElreath, 2018a). MCMCglmm ve BRMS gibi "R" karışık etki model paketlerinden takılan nesnelere, 'broom.mixed' paketinin çizgileri boyunca düzenli veri çerçeveleri şeklinde şekillendirilebilir. MCMCglmm ve BRMS gibi "R" karışık etki model paketlerinden takılan nesnelere, model düzeyinde istatistiklerin tek satırlık bir özetini sağlayan 'süpürge' paketinin çizgileri boyunca düzenli veri çerçeveleri şeklinde şekillendirilebilir (Bolker, 2019). BRMS'de varsayılan olarak (P. C. Bürkner, 2017), 3 serbestlik derecesine sahip yarım Student-t önsel dağılımı kullanır. Bu önsel, genellikle nispeten zayıf bilgilendirici olmakla birlikte, modellerin yarım 'Cauchy' önselinden daha iyi yakınsamasına yol açar.

Farklı bilim adamları, yerleşik Bayesci model yapısına ve MZMC yöntemine bağlı olarak değişkenlik parametrelerinin hiyerarşik bir modelinde bir bileşen için çeşitli önseller önerdiler. Bazı araştırmacılar, Gibbs örneklemede tek tip ve ters gama aileleri de dahil olmak üzere bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar önerdiler. Diğer araştırmacılar, hiyerarşik model için bir yarım t ailesi önerdi ve nispeten zayıf bilgilendirici ön dağılım gösterdi. Yarı öğrenci-t önseliği, standard sapma (SS) parametreleri için BRMS'de bir varsayılan önsellik daha iyi yakınsamaya yol açar. Yine de, yerel büzülme parametreleri, Stan'in BRMS'sinde artan sayıda farklı geçişlere yol açmaktadır (Piironen & Vehtari, 2016).

3.9. Bayesci Hiyerarşik Model Karşılaştırma Kriterleri

Farklı modelleme türlerinde uygulanan ve farklı yazılım paketlerinde bulunan çok daha fazla bilgi kriteri vardır. Bunlar arasında Akaike Bilgi kriterleri (AIC), Düzeltilmiş Akaike Bilgi kriterleri (AICc), Schwartz Bayesci Bilgi Kriterleri (SBC, SBIC), Bayesci Bilgi Kriterleri (BIC) ve belirtme katsayısı (R^2) vardır. Tüm bu bilgi kriterleri, sapma teriminin ve ceza teriminin toplamı olarak ifade edilebilecek

Maksimum Olabilirlik Tahminine (MOT) dayanmaktadır. Bu ölçütler, uyum ölçü eksikliği için fazla belirlenen parametreyi cezalandırarak, yeterli bir uyum iyiliği ve az sayıda parametreden oluşan “en iyi” modelin seçilmesinde kullanılır. En iyi model, kriteri en aza indirir (Vehtari vd., 2017). Bu bilgi ölçümlerinin matematiksel hesaplamaları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 a) \quad AIC &= -2 \log p(y|\hat{\theta}_{MOT}) + 2k \\
 b) \quad BIC &= -2 \log p(y|\hat{\theta}_{MOT}) + k * \ln(N) \\
 c) \quad AICc &= -2 \log p(y|\hat{\theta}_{MOT}) + 2k * \frac{N}{N - k - 1} \text{ ve} \quad (3.31) \\
 d) \quad SBIC &= -2 \log p(y|\hat{\theta}_{MOT}) + k * \ln\left(\frac{N + 2}{24}\right)
 \end{aligned}$$

Görülebildiği gibi yukarıdaki listeler (a-d) model karşılaştırma indikisi de aynı $-2 \log p(y|\hat{\theta}_{MOT})$ terimi kullanmaktadır, ve $\hat{\theta}_{MOT}$ Maksimum olabilirlik tahmini (MOT) temelli parameter nokta tahmini ve $\log p(y|\hat{\theta}_{MOT})$, $\hat{\theta}_{MOT}$ temelli verinin olabirliğinin logaritmasıdır. Ceza terimi için AIC, $2k$ ve BIC, $k * \ln(N)$ kullanmaktadır. Burada k parameter sayısını, N ise örneklem boyutunu göstermektedir. AICc, AIC’in düzeltilmiş bir versiyonudur. N örneklem boyutunun k parametre sayısına oranı küçük olduğunda AIC üzerinde bir düzeltme yapar. SBIC ise model karmaşıklığını (k parametre sayısı) BIC’dan daha sert cezalandıran, BIC’in bir versiyonudur.

Yukarıdaki dört model karşılaştırma yönteminde da görüldüğü gibi yöntemler sapma terimini MOT nokta tahmini ile ve ceza terimlerini parametre sayısı ile küçük örneklem boyutu ile hesaplamaktadır. Tüm bu 4 bilgi kriteri, sapma terimlerini Maksimum Olabilirlik Tahminine (MOT) nokta tahmini ile hesaplar. Ama ceza terimlerini sonsal tahmini düşünmeden (Beklenen sonsal tahmincisini bulmadan) sadece örneklem büyüklüğü ve parametre sayısı ile hesaplar. Bu nedenle, bu yöntemler genellikle tam Bayesci olarak kabul edilmez. Bunun için, bu tezde, ceza terimlerini sonsal tahmini ve varyans/kovaryans termi düşününen değir Bayesci model karşılaştırma yöntemlerini el aldık.

Bu yöntemlerin Bayesci factörü, AIC, BIC ve R^2 gibi geleneksel bilgi kriteri temelli model seçme yöntemlerinden daha iyi performans gösterdikleri gösterilmiştir (Ryoo, 2011). Bununla birlikte, Bayesci analizi bağlamında model seçimi için en iyi

kriterler hakkında bir fikir birliği yoktur (Ariyo vd., 2019) .Watanabe-Akaike bilgi kriteri (WAIC) ve bir tane dışarda bırakma çapraz geçerliliği (leave-one-out, LOO-IC) iki Bayesci model seçme yöntemidir. DIC ve WAIC, Bayesci bilgi kriteri indisleridir ve sapma terimi ile ceza teriminin toplamı olarak ifade edilebilirler (Y. Li vd., 2013; Link & Sauer, 2016). Bu tezde kullanılan üç paket, yakınsama teşhisi için düzenli özet istatistikler ve grafikler çıkarabilen hemen hemen tüm yaygın Bayesci hiyerarşik (çok düzeyli) model türlerini desteklemektedir (Busemeyer ve Wang, 2000; Mai ve Zhang, 2018). İyi uyum endeksleri için MCMCglmm ve R2MLwiN, Bayesci sapma bilgi kriterini (DIC; Spiegelhalter vd., 2002) çıkarırken, BRMS’de Watanabe–Akaike bilgi kriteri, LOO-IC ve k-fold sunar (Mai & Zhang, 2018; Vehtari vd., 2017). En iyi uygulama için, bu tezde, yakın zamanda savunulan WAIC, LOO-IC ve ICOMP, DIC ile, Bayesci model karşılaştırmaları ve seçim yöntemleri olarak kullanılmıştır.

3.9.1. Bayesci Sapma Kriteri (Bayesian Deviance Information Criteria)

DIC, Bayesci model seçimi için (Spiegelhalter vd., 2002) tarafından AIC'nin Bayesci bağlamına uyarlanması olarak geliştirilmiştir. DIC şu şekilde hesaplanabilir

$$DIC = -2 \log p(y|\hat{\theta}_{EAS}) + 2p_{DIC} \quad (3.32)$$

Burada, maksimum olabilirlik tahmininin, $\hat{\theta}_{MOT}$, sonsal dağılım ortalaması, $\hat{\theta}_{Bayes} = \hat{\theta}_{EAS} = E(\theta|Y)$ ile değiştirilmesi ve k parametrelerinin sayısının veri tabanlı bir sapma düzeltmesi ile değiştirilmesi yapılır. Beklenen log-noktasal tahmin yoğunluğu olarak ifade edilen Bayesci tahmin doğruluğunun yeni ölçüsü:

$$p_{DIC} = 2 \left(\log p(y|\hat{\theta}_{EAS}) - E_{post}(\log p(y|\theta)) \right) \quad (3.33)$$

Burada DIC $\hat{\theta}_{EAS}$, beklenen değer sonsal (EAS) tahmini, yani sonsal ortalama tahminini temel alan bir nokta tahminini kullanmaktadır. Böylece, verinin log-olabilirliğini hesaplayabilmektedir $(\log p(y|\hat{\theta}_{EAS})) +$ Ceza terimi (3.33)’te hesaplanır. Burada parantez içindeki ikinci terim verinin log-olabilirliğinin sonsal ortalamasıdır. Sonsal dağılımı kullanan tek ceza terimi olduğu için DIC kısmen Bayesci olarak kabul edilir. Benzer şekilde, DIC şu şekilde tanımlanabilir:

$$DIC = Dhat + 2p_{DIC} = Dbar + P_{DIC} \quad (3.34)$$

Burada, $Dhat = D(\theta_{bar}) = -2 \log p(y|\hat{\theta}_{EAS})$, $Dbar =$ sonsal dağılımın ortalamasının sapması ve P_{DIC} , sapmanın sonsal dağılımı ortalaması eksi sonsal dağılımın ortalamasının samasıdır.

3.9.2. Bozdoğan'ın Bilgi Karmaşıklığı Kriterleri (ICOMP)

Bir model M_k için yeni geliştirilen bilgi karmaşıklığı ölçütleri (ICOMP), modelin serbest parametrelerinin sayısını cezalandırmaya alternatif olarak modelin kovaryans karmaşıklığını cezalandırır (Bozdoğan, 2009). Genel olarak, Bozdoğan'ın Bilgi karmaşıklığı (ICOMP) kriter, şu şekilde tanımlanabilir

$$ICOMP = -2\log(\hat{\theta}_{MOT}|Y) + 2C(\hat{\Sigma}_{model}) \quad (3.35)$$

ICOMP, C değerli (3.35) eşitliği ile hesaplanan genel çok değişkenli doğrusal veya doğrusal olmayan bir model için bilgi temelli kovaryans karmaşıklığı indeksi üzerinden elde edilen tesadüfi vektörler seti veya bir elemanın yapısal karmaşıklığı ile hesaplanır. ICOMP, gerçek değerli bir karmaşıklık ölçüsünü temsil eder ve $\hat{\Sigma}_{model} = Kov(\hat{\theta}_{MOT}) = Var(\hat{\theta}_{MOT})$ olur. Bu da modeldeki parametre vektörlerinin kovaryans matrisinin tahminidir ve bir modelin tahmini ters Fisher bilgi matrisi (IFIM veya F^{-1}) olabilir (Howe, E.Deniz, Bozdoğan H, 2017).

Model yapısına bağlı olarak (Bozdoğan, 1988, 2000, 2009; Bozdoğan ve Haughton, 1998a; Kartal Koc ve Bozdoğan, 2015), ICOMP'un çeşitli biçimlerini ve teorik gerekçelerini tanımlamıştır. Bu tezde (Wand, 2007) tarafından türetilen ve özetlenen ters Fisher bilgi matrisini (IFIM veya F^{-1}) göz önünde bulundurarak Bayesci hiyerarşik (karışık etki) modelleri için en genel ICOMP stilini (Howe vd., 2012) kullanıyoruz. Bozdoğan'ın sonsal beklenen değeri en üst düzeye çıkarmak için Bayesci çerçevesinde bilgi karmaşıklığı (ICOMP) kriteri

$$ICOMP_{IFIM.PEU} = -2\text{LogL}(\hat{\theta}_k) + k + 2C(F^{-1}) \quad (3.36)$$

olarak tanımlanabilir. Burada, C karmaşıklık ölçü. Ve $\hat{\theta}_k$, k bilinmeyen parametrelili M modeli altında θ_k parameter vektörünün maksimum sonsal dağılımı tahminidir. Aynı veri kümesinden birleştirilmiş BHM'ler arasında en küçük ICOMP'a sahip bir model en iyi model olarak seçilir (Bozdoğan, 2009). ICOMP kriterinin karmaşıklık ölçüsünü hesaplamak için (Bozdoğan, 1988, 1990, 2000, 2010; Hamparsum Bozdoğan & Haughton, 1998), aşağıdaki gibi bir maksimum bilgi karmaşıklığı ölçüsü $C(\Sigma)$ önermiştir:

$$C(\hat{\Sigma}_{model}) = \frac{d}{2} \log \frac{\text{tr}(\Sigma)}{d} - \frac{1}{2} \log |\Sigma| \quad (3.37)$$

d: kovaryans matrisi Σ 'nin boyutudur. Model belirtimi doğruysa, $\hat{\Sigma}_{model(\theta)} = F^{-1}$ olur (Bozdoğan, 2009). Yukarıdaki (3.36) ve (3.37) Eşitliklerin kullanarak ve

(Shang, 2016) tarafından hiyerarşik doğrusal (karışık etki) modeller için ICOMP'un türetilmesinden yola çıkarak, ICOMP'u şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$ICOMP_{BHM} = -2\text{Log}L(\hat{\theta}_k) + d \log \frac{\text{tr}(F^{-1})}{d} - \log|F^{-1}| \quad (3.38)$$

3.9.3. Watanabe 'in Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC)

WAIC (Watanabe-Akaike veya yaygın olarak uygulanabilir bilgi kriteri (Watanabe, 2010), Bayesci modelleri için sapma bilgi kriteri (DIC) üzerinde bir gelişme olarak görülebilir. Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC)'ın hesaplanmasında kullanılan sapma terimi Log-Nokta Tabanlı-Tahminsel-Yoğunluğu (LNTTY) gerektirir. LNTTY aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$LNTTY = \sum_{i=1}^N \log \int p(y_i|\theta) \times p_{post}(\theta) d\theta \quad (3.39)$$

Log-Nokta Tabanlı-Tahminsel-Yoğunluğu (LNTTY)'nin hesaplanışında tüm $p_{post}(\theta)$ sonsal dağılım kullanılmaktadır. LNTTY, AIC ve BIC'in hesaplanmasındaki $\log p(y|\hat{\theta}_{MOT})$ ve DIC'in hesaplanmasındaki $\log p(y|\hat{\theta}_{EAS})$ değerlerinin tamamen Bayesci bir analogu olarak görülebilir. LNTTY'ye benzer olarak WAIC'in ceza terimi tamamen Bayescidir ve aşağıdaki gibidir.

$$p_{WAIC} = \sum_{i=1}^N \text{Var}_{post}(\log p(y_i|\theta)) \quad (3.40)$$

Burada p_{WAIC} ceza terimi, N veri noktası üzerinde toplanmış log-tahminsel-yoğunluğundaki terimlerin varyansıdır. Watanabe- Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri şu şekilde hesaplanabilir:

$$WAIC = -2LPPD + 2p_{WAIC} \quad (3.41)$$

3.9.4. Bir tane dışarıda bırak bilgi kriteri (LOO-IC)

Bayesci LOO-IC, bir tane dışarıda bırak bilgi kriteri (leave-one-out information criteria, LOO-IC) yukarıda bahsedilen bilgi kriterlerinden farklıdır. Çünkü hesaplanışında hiçbir ceza terimi yoktur.

$$LOO - IC = -2LPPD_{loo} = -2 \sum_{i=1}^N \log \int p(y_i|\theta) \times p_{post(-i)}(\theta) d\theta \quad (3.42)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $p_{post(-i)}(\theta)$, veriden i noktasındaki verinin çıkarılmasını temel alan sonsal dağılımdır. LNTTY i veri noktasını hem sonsal dağılımı hem de tahmini hesaplamak için kullanır. Burada ise bunun aksine $LPPD_{loo}$ aynısını sadece tahmin için kullanmaktadır. Bu nedenle veriyi iki kez kullanarak potansiyel yanlılığı düzeltmek için ceza terimine gerek yoktur. Yaygın Uygulanabilir Akaike/Bayesci bilgi kriteri (WAIC), bir tane ayırarak çapraz geçerlilik (LOO-IC) ve K-katlı çapraz

geçerlilik kullanarak tamamen Bayesci modeli iken Bayesci Sapma kriteri (DIC) ve ICOMP kısmen Bayesci olarak kabul edilir (Vehtari vd., 2017).

3.9.5. K-katlı çapraz geçerlilik (K-fold-CV)

Bazen çok sayıda Pareto Düzeltmeli Önem örnekleme (PSIS-LOO-IC) başarısız olabilir ve tekrar model kurmak çok uzun sürebilir. LOO-IC çapraz-geçerliliğini, veriyi tamamen rastgele katlara ayırıp K-katlı çapraz geçerlilik kullanarak ve ardından her bir çapraz geçerlilik tahminlerine ayrı ayrı bakarak tahmin edebiliriz (Vehtari vd., 2018). Bayesci K-kat çapraz doğrulama, verileri k alt kümelerine $y_k (k = 1, 2, \dots, K)$ olarak bölümlere ayırır. BHM, $p_{post(e)}(\theta) = p(\theta|y_{(k_e)})$ bir sonsal dağılım döndüren her eğitim veri kümesi $y_{(k_e)}$ 'ye ayrı olarak oluşturur (Vehtari ve Gelman, 2014). WAC ve LOO-IC ile tutarlılığı korumak için, her veri noktası için öngörücü doğruluğu tanımlarız, böylece y_i için log öngörücü yoğunluğu şu şekilde gösterir.

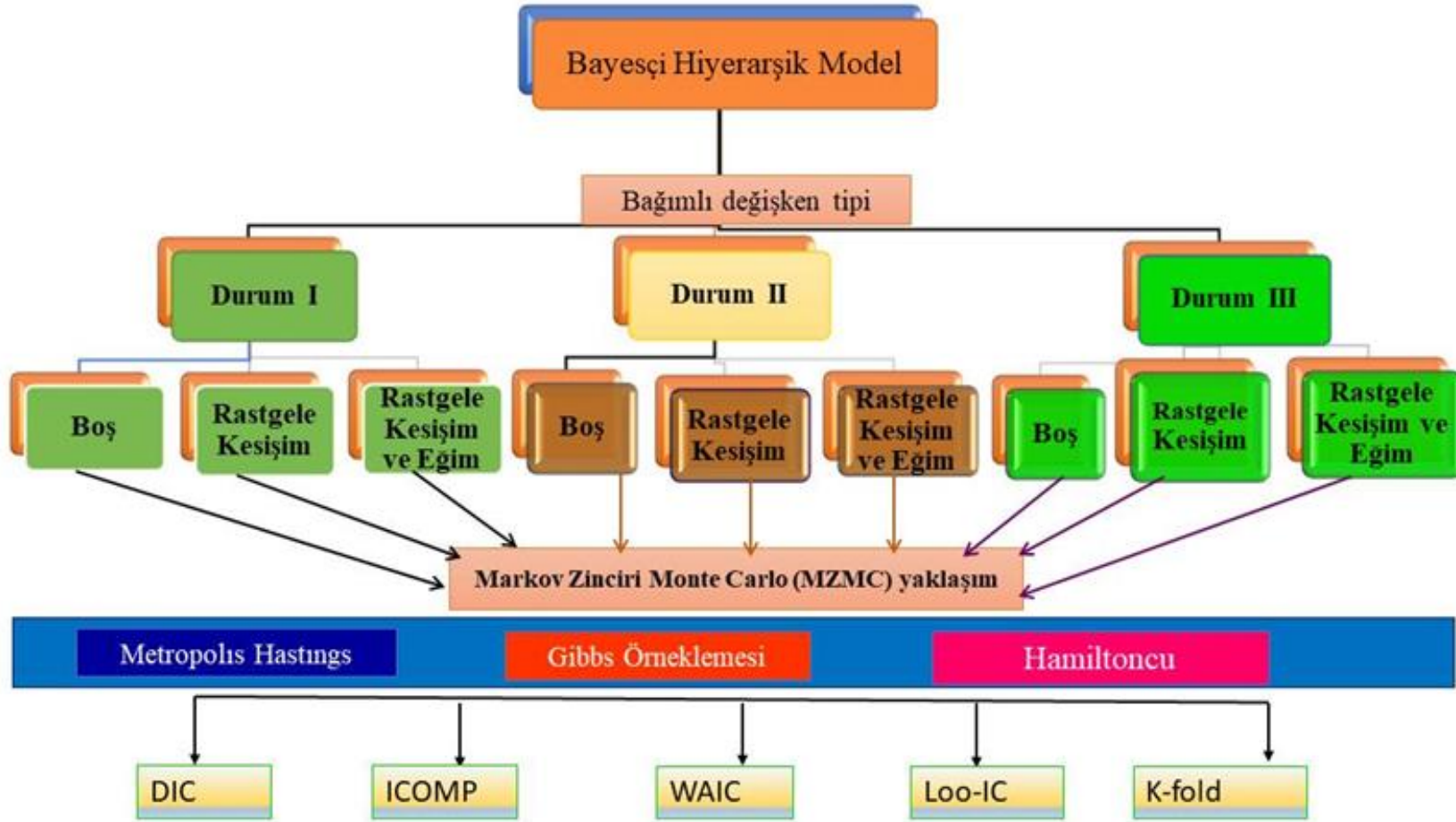
$$\log p_{post(k.e)}(y_i) - \log \int p_{pred}(y_i|\theta) p_{post(k.e)}(\theta) d\theta, i \in k \quad (3.43)$$

i . veri noktasını ve $p(\theta|y_{(k_e)})$ sonsal dağılımını içeren k (genelde $K = 10$) alt kümesine karşılık gelen "S" simülasyonlar kullanılarak, yeni bir veri kümesi için beklenen log noktasal öngörü yoğunluğunun toplam tahmini aşağıdaki gibi belirlenir.

$$e\widehat{lpd}_{val} = \sum_{i=1}^n \widehat{lpd}_i = \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|\theta^{k,s}) \right) \quad (3.44)$$

WAIC, LOO-IC ve K-katlı çapraz doğrulama ile ilgili model tanı miktarları R Bayesci çıkarım paketi BRMS'de hesaplanabilir. Burada, R2MLwiN, BRMS ve MCMCglmm paketlerinin kullanıldığı Bayesci hiyerarşik modelde, parameter değerlerinin sonsal simülasyonlarında değerlendirilen log-olabilirlik kullanılarak kurulmuş bir Bayesci Hiyerarşik modelinden elde edilen nokta bazlı örneklem dışı tahmin doğruluğunu tahmin etmek için DIC, bir adet dışarıda bırakma kriteri (LOO-IC) ve yaygın olarak uygulanabilir bilgi kriteri (WAIC) yöntemleri uygulanmıştır.

Genel olarak bu tezde DIC, WAIC, ICOMP, LOO-IC ve K-katlı çapraz doğrulama model seçim tekniklerini uyguladık. DIC bilgi kriteri BRMS'de uygulanabilir değilken, çapraz doğrulama teknikleri (yani, WAIC, LOO-IC ve K-fold) R2MLwiN ve MCMCglmm modellerinde geçerli/uygulanabilir değildir. Çünkü, Bu, Bayesci analizinin noktasal ve ortak prediktif dağılım yaklaşımlarından kaynaklanmaktadır.



Şekil 3.3. Çalışmanın genel bütün metodoloji adımları

Not: Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC), Bir tane ayırarak çapraz geçerliliği (LOO-IC), K-katlı çapraz geçerlilik(K-Fold), Bayesci Sapma kriteri (DIC) ve Bozdoğan'ın Bilgi karmaşıklığı kriter (ICOMP)

4. TEK DEĞİŞKENİLİ SÜREKLİ BAĞIMLI DEĞİŞKENE UYGULAMASI

4.1. Durum I için Uygulama Veri Tanımlaması

Uygulama Veriler: Depresyonlu Kişilerde Ruh Hali ve Fiziksel Aktivitenin Ekolojik Anlık Değerlendirmesi olur. ACTIVE (Advanced Cognitive Training for Independent and Vital Elderly: Bağımsız ve Hayati Yaşlılar için Gelişmiş Bilişsel Eğitim), 1999-2001 (Birleşik Devletler), koordinasyon merkezi olarak New England Araştırma Enstitüleri (NERI) ile altı saha sahasında yürütülen çok bölgeli randomize kontrollü bir denemeydi. Denemenin birincil amacı, daha önce laboratuvar veya küçük ölçekli saha koşullarında yaşlıların temel biliş ölçümleri üzerindeki performansını iyileştirmede başarılı olduğu bulunan üç farklı bilişsel müdahalenin bilişsel olarak zorlayıcı günlük aktivitelerinin ölçümleri üzerindeki etkilerini test etmektir. Üç bilişsel müdahale, hafızaya, yürütücü akıl yürütmeye ve işlem hızına odaklandı. Tasarım temassız bir kontrol grubu içeriyordu. Katılımcılar başlangıçta, eğitimden hemen sonra ve sonrasında yıllık olarak değerlendirildi. Araştırmaya toplam 1575 yaşlı yetişkin alındı ve hepsi analitik örneğe dahil edildi. Katılımcıların %26'sı Afrika kökenli Amerikalıydı. Bu veri setinde 13 değişken bulunmaktadır (Jobe vd., 2001; Hollands vd., 2020). Tablo 4.1, Durum 1 için ACTIVE veri setindeki değişkenleri açıklamaktadır.

Tablo 4.1. Durum I: ACTIVE veri seti

Veri setindeki değişken adı	Değişkenlerin açıklaması
Site:Yer	yukarıda listelenen toplam 6 site
Yaş:age	Katılımcıların yaşı
eğitim:edu	Eğitim yılı
grup: group	dört grup vardır - kontrol grubu ve diğer üç eğitim grubu (hafıza, akıl yürütme ve hız)
Yükseltici: booster	destekleyici eğitim alıp almadığı
Cinsiyet: Sex. Gender	1= erkek, 2= kadın
Sebep(reason)	muhakeme yeteneği
Hvltt	Hopkins Sözel Öğrenme Testi 1. zamandaki toplam puanı
hvltt2	Hopkins Sözel Öğrenme Testi 2. zamandaki toplam puanı
hvltt3	Hopkins Sözel Öğrenme Testi 3. zamandaki toplam puanı
hvltt4	Hopkins Sözel Öğrenme Testi 4. zamandaki toplam puanı
MMSE	Mini zihinsel durum muayenesi toplam puan (Bilişsel Durum)

Model uydurma uygulaması R2MLwiN (Zhang vd., 2016), MCMCglmm ve R-BRMS (Stan) bilgisayar paketleri kullanılarak yapılmıştır. Bağımlı Değişken: Toplam Hopkins Sözlü Öğrenme Test Skoru (THVLTS). R2MLwiN Metropolis hasting'i kullanırken, MCMCglmm Gibbs sampler (öreneklemesini) kullanır. Halbuki, Stan-BRMS kullanırken Bayesci çerçevesi, rastgele ve sabit etkiler (Eager ve Roy, 2017); (Nicenboim ve Vasishth, 2016) arasındaki korelasyon için zayıf bilgilendirici önseller kullanarak ve çıkarım için tam sonsel dağılımı kullanır. BMLM'lerin kullanımını göstermek için, herhangi bir bağımsız değişken eklemekten sadece sabit etkilere ve kesişim ve eğim üzerinde model oluşturduk.

Bu uygulamada, durum I, Eşitlik (3.7), (3.8) ve (3.12) kullanarak boş model, rastgele kesişim modeli ve rastgele kesişim ve katsayısı (tam) modeli aşadaki gibi belirtildi,

1. Boş Model

$$\begin{aligned}
THVLTS_i &\sim Normal(\mu_i, \sigma_e), i = 1, 2, 3, \dots, n \\
\mu_i &= \alpha + \alpha_{subject[i]} + \alpha_{time[i]} \\
\alpha_{subject} &\sim Normal(0, \sigma_{subject}) \\
\alpha_{time} &\sim Normal(0, \sigma_{time}) \\
\alpha &\sim Normal(0, 10) \\
\sigma_{subject} &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_{time} &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_e &\sim HalfCauchy(0, 1)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

2. Rastgele kesişim model

$$\begin{aligned}
THVLTS_i &\sim Normal(\mu_i, \sigma_e) \\
\mu_i &= \alpha + \alpha_{subject[i]} + \alpha_{time[i]} + \beta X_i \\
\alpha_{subject} &\sim Normal(0, \sigma_{group}) \\
\alpha_{time} &\sim Normal(0, \sigma_{time}) \\
\beta &\sim Normal(0, 10) \\
\alpha &\sim Normal(0, 10) \\
\sigma_{subject} &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_{time} &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_e &\sim HalfCauchy(0, 1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

3. Rastgele kesişim ve katsayısı (tam) model

$$\begin{aligned}
THVLTS_i &\sim Normal(\mu_i, \sigma_e) \\
\mu_i &= \alpha + \alpha_{subject[i]} + \alpha_{time[i]} + \beta X_i + (\beta + \beta_{subject})X_i \\
\begin{bmatrix} \alpha_{subject} \\ \beta_{subject} \end{bmatrix} &\sim MVN\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \mathbf{S}\right) \\
\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \left(\begin{smallmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma_\beta \end{smallmatrix}\right) \mathbf{R} \left(\begin{smallmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma_\beta \end{smallmatrix}\right) \\ \sigma_\alpha \sigma_\beta \rho & \sigma_\alpha \sigma_\beta \rho \\ \sigma_\alpha \sigma_\beta \rho & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \\
\alpha_{subject} &\sim Normal(0, \sigma_{subject}) \\
\alpha_{time} &\sim Normal(0, \sigma_{time}) \\
\beta &\sim Normal(0, 10) \\
\alpha &\sim Normal(0, 10) \\
\sigma_{\alpha,subject} &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_{time} &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_e &\sim HalfCauchy(0, 1) \\
\sigma_{\beta_{subject}} &\sim HalfCauchy(0, 1) \text{ ve } \mathbf{R} \sim LKJ_{corr}(2)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.1. Durum I: Boş Modeller: Tekrarlı Ölçüm Sürekli Bağımlı değişken

Tablo 4.2. Durum I : Boş Modeller: R2MLwiN, MCMCglmm ve BRMS

I. Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri: Metropolis-Hastings (MH)						
	Katsayılar	Std.H.	pMZMC (1-side)	%95 GA		ESS
				Alt Sınır	Üst	
Kesişim	26.438	0.116	0.000	26.214	26.675	337
2.düzei:varyans	18,308	0,758	-	16,865	19,839	2991
1.düzei:Varyans	10,715	0,219	-	10,284	11,147	2920
II. Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri: Gibbs Örnekleme						
Kesişim : kişi	25.7967	-	<0.002*	25.4927	26.0369	500
Zaman:Tekrar	0.2559		<0.002*	0.1868	0.3246	465
2.düzei: Kesişim	29.602	-	<0.001*	27.44	31.566	500
1.düzei: 2.düzei	-4.397	-	<0.001*	-4.86	-3.955	500
1.düzei:zaman	2.139		<0.001*	2.02	2.299	500
III. Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri: Hamiltoncu Monte Carlo (HMC)						
Kesişim	26.3312	0.7331	<0.001*	24.8501	27.7214	1371
2.düzei: kişi	4.3105	0.0852	<0.001*	4.1524	4.4751	810
1.düzei: zaman	1.3035	0.6456		0.5754	3.0562	2047
σ_e (sigma)	3.1134	0.0256		3.0462	3.1662	3315

* Paramtereler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

HMC'ye göre, sabit etkilerin Tablo 4.2 sonsal ortalamasının sözlü test puanının 0.73 SS ile 26.33 olduğu tahmin edilmektedir. %95 güvenilir aralığı sonsal dağılımın ortalama (kesme) anlamlıydı. Öte yandan, rastgele etki gruplar (katılımcı denekler) ve durumlar (farklı zaman noktalarının farklı ölçümleri arasında) arasında önemli sözlü puan testi değişimi göstermiştir. Böylece, Boş modele göre, Hopkins Sözel Öğrenme Testi (HVLТ) skoru grup içi (tekrarlanan ölçümler arasında) varyasyondan daha fazla grup/konu varyasyonu gösterdi. Durum I için, boş modeli Tablo 4.2'de gösterildiği gibi üç MZMC yaklaşımını kullanarak kuruldu. Sözlü öğrenme testi varyasyonu yaşlı yetişkinler arasında bir kişide ölçülen tekrarlı ölçümlerinden daha yüksek olduğunu göstermiştir. Yani, 2.düzeyi varyasyonu 1.düzeyiden yüksek oldu.

4.1.2. Durum I: Rastgele Kesişim Modeller: Sürekli Bağımlı Değişken

Tablo 4.3. Durum I: Rasgele Kesişim Model: Metropolis-Hastings (MH) ile (R2MLwiN)

Ortak değişkenler	Katsayılar	Std.H.	pMZMC (1-side)	%95 GA		ESS
				Alt Sınır	Üst	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri						
Kesişim	9.446	1.8202	<0.001*	5.868	12.995	725
Age(yaş)	-0.124	0.0167	<0.001*	-0.157	-0.092	664
Eğitim (edu)	-0.004	0.0034	0.207	-0.011	0.002	647
Yükseltici: booster	0.195	0.1741	0.263	-0.139	0.541	617
Cinsiyet: Gender	2.664	0.2021	<0.001*	2.269	3.064	677
Sebep(reason)	0.147	0.0081	<0.001*	0.131	0.163	601
MMSE	0.601	0.0510	<0.001*	0.506	0.704	667
Group-Level Effects: Rastgele etkili parametreleri						
2.düzeyi: kişi	8.939	0.4206	-	8.103	9.784	2091
1.düzeyi:Takrar	10,715	0,2214	-	10.288	11.156	2775

* Paramtereler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Tablo 4.4. Durum I : Rastgele Kesişim Model: Gibbs Örnekleme ile(MCMCglmm)

Ortak değişkenler	SBD	pMZMC	%95 GA		ESS
			Alt Sınır	Üst	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri					
Kesişim(intercept)	8.3100	<0.002*	4.5186	11.8957	439.6
Time (tekrar)	0.2577	<0.002*	0.1899	0.3337	500
Age(yaş)	-0.1185	<0.002*	-0.1528	-0.0874	500
Eğitim (edu)	-0.0036	0.300	-0.0103	0.0033	436
Yükseltici: booster	0.1702	0.328	-0.1711	0.5019	433
Cinsiyet: (Gender)	2.5769	<0.002*	2.1551	2.9797	500
Sebep(reason)	0.1455	<0.001*	0.1306	0.1643	500
MMSE	0.6116	<0.002*	0.5109	0.7255	500
Group-Level Effects: Rastgele etkili parametreleri					
2.düzeyi(SS): kişi	22.154(0.781)		20.613	23.71 3	648.9
2.düzeyi X 1.düzeyi:	-4.775(0.222)		-5.234	-4.362	500
1.düzeyi:Time	2.135(0.079)		1.990	2.287	500
sigma	0.05(0.00)				500

* Paramtereler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Tablo 4.3'te, 4.4'de ve 4.5'te durum I için üç yaklaşımını kullanarak rastgele kesişim modellerini ayrı ayrı kuruldu. Sonuçlara göre, Metropolis-Hastings ve Gibbs Örnekleme altındaki rastgele kesişim modelinin sonuçları HMC yaklaşımıyla tutarlı görünmektedir.

Tablo 4.5. Durum I: Rastgele Kesişim Model: Hamiltoncu Monte Carlo (HMC)

Ortak değişkenler	Estimate/Tehmin	Std.hata	%95 GA		Bulk _{ESS}	Tail _{ESS}	\hat{R}
			Alt Sınır	Üst Sınır			
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri							
Kesişim(intercept)*	9.2314	1.9411	5.4712	12.951	1260	189	1.00
Age (Yaş) *	-0.1211	0.0212	-0.1611	-0.0854	926	1702	1.01
Edu (Eğitim)	-0.0034	0.0011	-0.0101	0.0042	4139	2838	1.01
Booster (Yükseltici)	0.1865	0.1754	-0.1511	0.5432	645	1838	1.00
Gender (Cinsiyet) *	2.6564	0.2015	2.2752	3.0654	910	1607	1.00
Sebep (Yeteneği)*	0.1464	0.0112	0.1310	0.4232	980	1673	1.00
MMSE*	0.6012	0.0462	0.5013	0.7012	1032	2128	1.00
Group-Level Effects: Rastgele etkili parametreleri							
2.düzeyi: kişi*	3.0312	3.0312	2.8845	3.1645	1146	2271	1.00
1.düzeyi: Tekrar*	1.2654	1.2654	0.5832	3.0812	1852	2121	1.00
Sigma*	3.1102	3.1102	3.0462	3.1761	4264	3029	1.00

* Paramtereler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Tablo 4.5'e göre, destekleyici eğitim katsayısının sıfır üst üste binen %95 GA ile pozitif olduğunu göstermiştir. Bu, ortalama olarak, destekleyici eğitim almanın yaşlı yetişkinlerin sözlü öğrenme ve hafıza testi puanlarını 0.1865 artırdığına dair çok az kanıt olduğunu göstermiştir. Öte yandan, yetişkinlerin eğitim yılları (edu) tahmini negatiftir ve %95 GA sıfırı kapsamaktadır. Bu negatif tahmin, ortalama olarak, rastgele kesişim modelinde, eğitim yıllarının artırılmasının yaşlı yetişkinlerin sözlü öğrenme ve hafıza testi puanlarını 0.0034 birim azalttığına dair çok az kanıt vardır.

4.1.3. Durum I: Rastgele Kesişim ve Eğim Modelleri: Sürekli Bağımlı Değişken

Tablo 4.6. Durum I: Rastgele Kesişim Ve Rastgele Eğim Modeller: MH

Ortak Değişkenler	Katsaylar	Std.H.	pMZMC (1-side)	%95 GA		ESS
				Alt Sınır	Üst	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri						
Kesişim	9.961	1.9745	<0.001*	6.060	13.786	607
Age (yaş)	-0.117	0.0175	<0.000*	-0.151	-0.0833	664
Edu (Eğitim)	-0.005	0.0032	0.068	-0.011	0.0015	770
Booster(Yükseltici)	0.158	0.1707	0.1752	-0.179	0.4925	678
Gender (Cinsiyet) *	2.529	0.1978	<0.001*	2.138	2.920	663
Sebepler (Yeteneği)*	0.141	0.0076	<0.001*	0.125	0.155	741
MMSE	0.581	0.0513	<0.001*	0.484	0.684	677
Group-Level Effects: Rastgele etkili parametreleri						
2.düzeysel: Varyans	70.105	46,349		23.256	196.469	110
Cov(Kesişim, yaş)	-0.834	0.6113		-2.4295	-0.2051	110
Age: varyans	0.0125	0.0082		0.0036	0.0328	120
Cov(Kesişim, reason)	-0.047	0.1048		-0.3596	0.1200	100
Cov (Reason , yaş)	-0.00094	0.0013		-0.0033	0.0027	120
Reason: Varyans	0.0012	0.00035		0.0006	0.002	160
1.düzeysel	10,717	0,221		10.303	11.167	2933

* Parametreler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Tablo 4.7. Durum I: Rastgele Kesişim Ve Rastgele Eğim Model: Gibbs Örnekleme

Ortak değişkenler	Sonsal Beklenen Değeri	pMZMC	%95 GA		ESS
			Alt Sınır	Üst	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri					
Kesişim(intercept)	8.8987	<0.002*	5.0719	12.5994	500
Time (tekrar)	0.2536	<0.002*	0.1800	0.3221	500
Age(yaş)	-0.1098	<0.002*	-0.1464	-0.0761	506.8
edu	-0.0039	0.224	-0.0110	0.0024	500
booster	0.1007	0.528	-0.1927	0.4501	566.7
gender	2.4708	<0.002*	2.1291	2.9200	369
reason	0.1439	<0.002*	0.1283	0.1581	500
MMSE	0.5794	<0.002*	0.4774	0.6757	436.3
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri					
2.düzei: Kesişim(SS)	42.3307(37.7531)	*	6.5049	121.0989	500
Time (tekrar): Kesişim	-5.8717(1.7748)	*	-9.4561	-2.8618	500
Cov (Reason , yaş)	-0.2827(0.4246)		-1.1951	0.0569	500
Cov(Kesişim, reason)	-0.1122(0.1644)		-0.4262	0.1080	500
1.düzei	2.1452(0.0762)	*	1.9877	2.2775	500

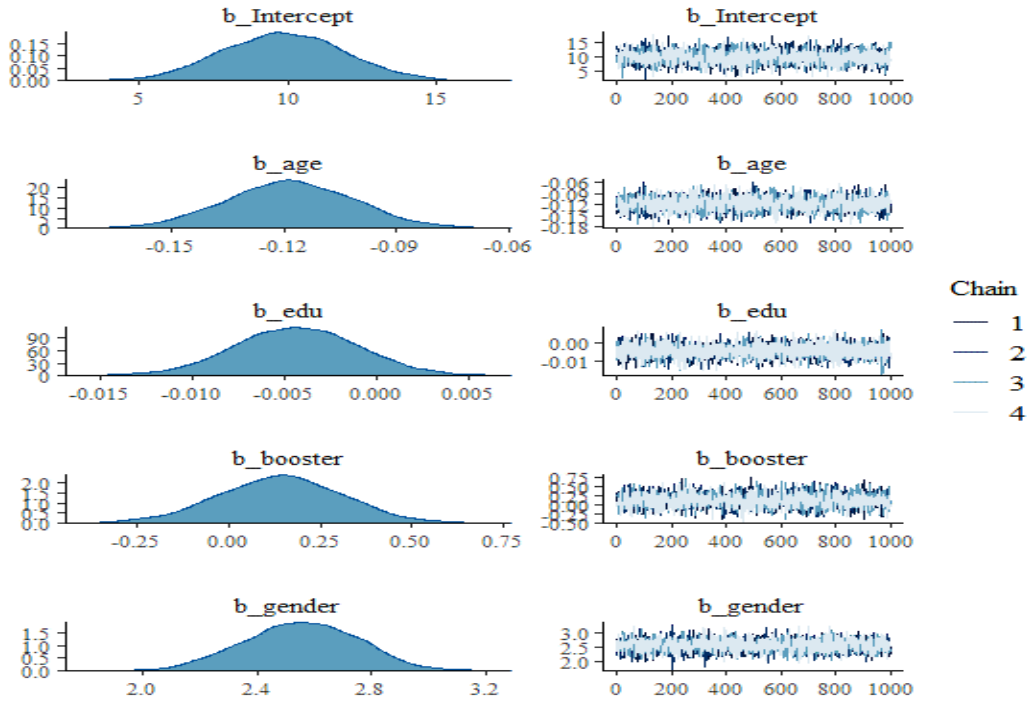
* Paramtereler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Tablo 4.6’de, 4.7’de ve 4.8’de durum I için üç yaklaşımı kullanarak rastgele kesişim ve eğim modellerini ayrı ayrı kuruldu. Sonuçlara göre, Metropolis-Hastings ve Gibbs Örnekleme altındaki rastgele kesişim ve eğim modelinin sonuçları HMC yaklaşımıyla tutarlı görünmektedir.

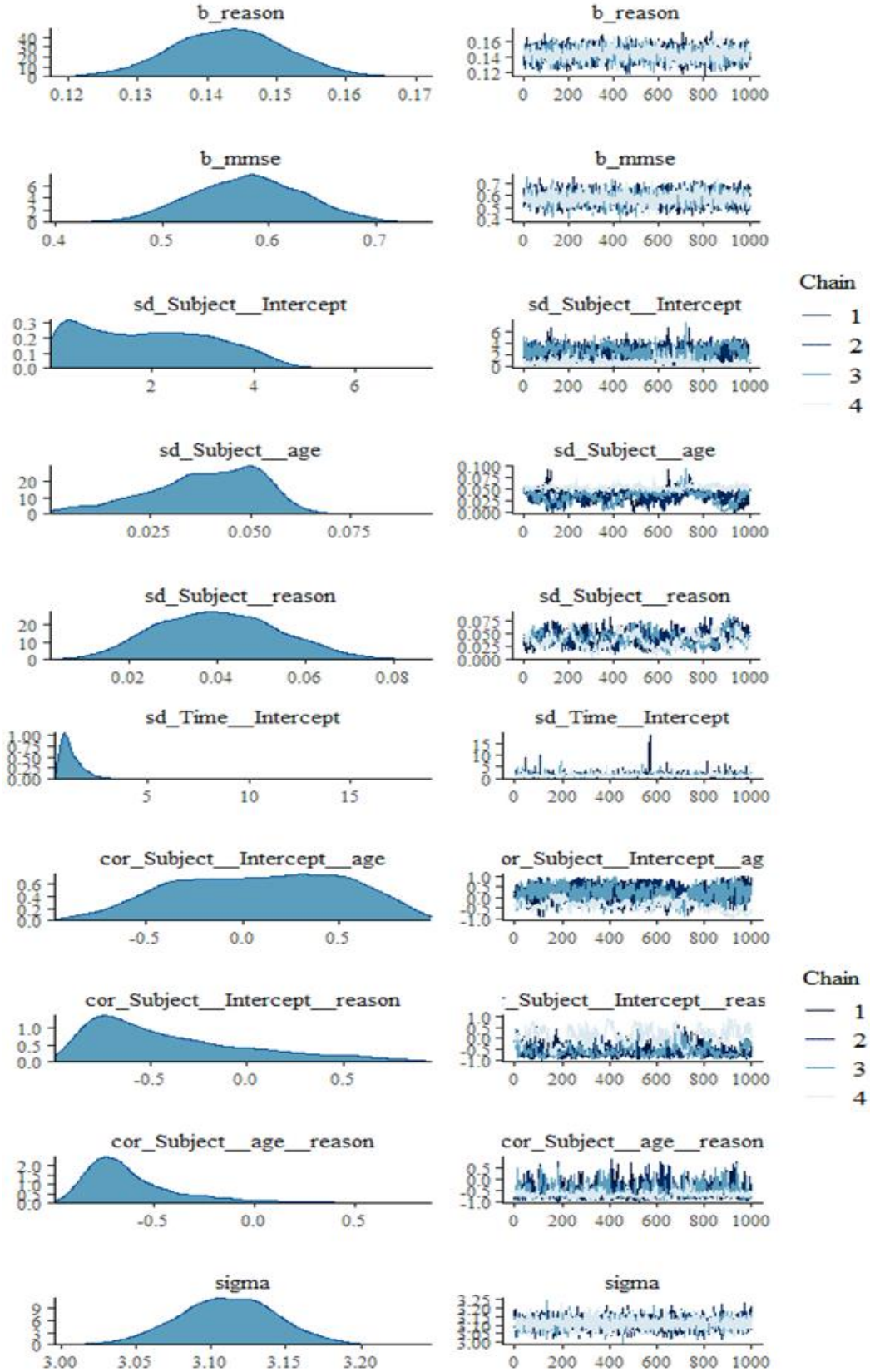
Tablo 4.8. Durum I: Rastgele Kesişim Ve Rastgele Eğim Model: Hamiltoncu Monte Carlo

Bağımlı Değişken	Ortak değişkenler	SBD	Std.H.	%95 GA		Bulk_ ESS	Tail_ ESS	R- Hat (\widehat{R})
				Alt Sınır	Üst Sınır			
Sabit Kısım								
Toplam Hopkins Sözlü Öğrenme Test Skoru (THVLTS)	Intercept(kesişim)*	9.8412	2.0602	5.8523	13.934	3157	2918	1.00
	Age(Yaş)*	-0.1211	0.0213	-0.1513	-0.082	2846	2720	1.01
	Edu(Eğitim)	-0.0033	0.0012	-0.0122	0.001	5523	2770	1.00
	Booster(Yükseltici)	0.1412	0.1703	-0.2145	0.483	3362	2876	1.00
	Gender(Cinsiyet)*	2.5505	0.2004	2.1712	2.933	3236	2866	1.01
	Sebep(Reason)*	0.1444	0.0113	0.1313	0.440	3087	2867	1.00
Rasgele Kısım								
Düzey-2 Varyans-kovaryans	$\sigma_{0vi}^2 = var(v_{0i})^*$	1.9222	1.2833	0.0724	4.311	111	488	1.00
	$\sigma_{1i}^2 = var(v_{1i})^*$	1.3022	0.8004	0.5702	3.134	2027	2270	1.00
	$\sigma_{5v}^2 = var(v_{5i})^*$	0.0424	0.0133	0.0123	0.063	100	833	1.00
	$\sigma_{0v} = cov(v_{0i}, v_{1i})^*$	0.0405	0.0132	0.0212	0.073	138	391	1.00
	$\sigma_{05v} = cov(v_{0i}, v_{5i})^*$	0.1033	0.4333	-0.7042	0.830	111	255	1.00
	$\sigma_{15v} = cov(v_{1i}, v_{5i})^*$	-0.3902	0.4204	-0.9011	0.621	100	388	1.00
Düzey-1 Varyans	$\sigma_{0ui}^2 = var(v_{0i})^*$	-0.5922	0.2645	-0.9042	0.140	519	1053	1.00
	$\delta_\epsilon(\text{sigma})^*$	3.1102	0.0333	3.0533	3.171	3767	2748	1.00

* Paramtereler %5 veya %1 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

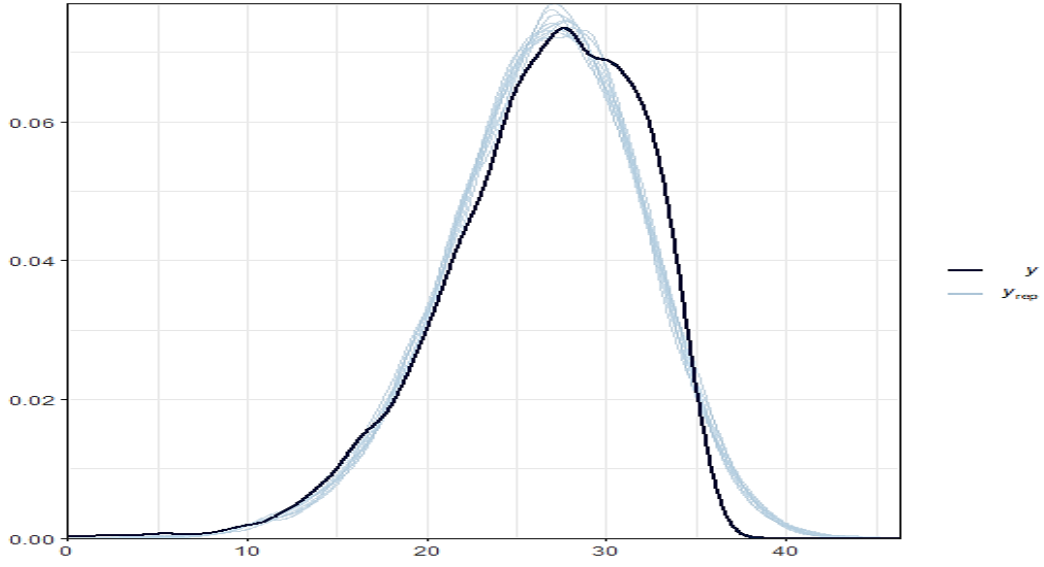


Şekil 4.1. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim model yakınsama teşhisi: Durum I

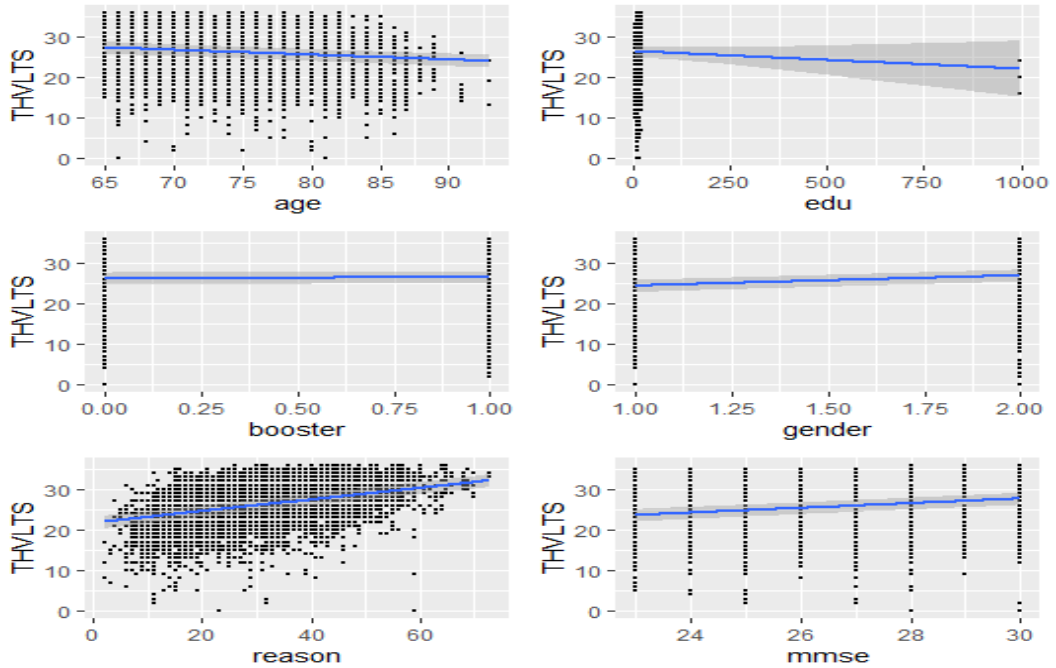


Şekil 4.2. Bayesci hiyerarşik rastgele eğim model yakınsama teşhisi (Devam): Durum I

Şekil 4.3 'e göre, rastgele eğim ve kesişim modeli iyi uyum sağlar ve ACTIVE çalışmadan THVLTS'nin bağımlı değişkeninin neredeyse aynı sonsal gözlemlenen yoğunluğu ve sonsal prediktif dağılım grafikleri üretir. Ayrıca, her bir tahmin edebilecek değişkeninin marjinal etkisi, yaş ve akıl yürütme (sebebe) becerilerinin ACTIVE çalışmanın THVLTS'sini tahmin eden en önemli açıklayıcı değişkenler olduğunu ortaya koymuştur (Şekil 4.4).



Şekil 4.3. Gözlenen ve tahmin edilen sonuçlar için Bayesci hiyerarşik model: Durum I



Şekil 4.4. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim modeli için marjinal tahmin etkileri: Durum I

4.2. Model Karşılaştırmaları: Tekrarlı Ölçüm Sürekli Bağımlı Değişken

Bir dizi model oluşturduktan sonra, hangi modelin daha doğru olduğunu ve sonuç çıkarmak için kullanılması gerektiğini bilmemiz gerekir. Gerçek verilere mutlak uyumu daha iyi olan modeli seçmek (örneğin R^2 kullanarak) biraz zor olabilir. Çünkü bu model yeni verilerde mutlaka iyi performans göstermez. Bunun yerine, en iyi tahmin yeteneklerine sahip modeli, yani henüz gözlemlenmemiş verileri tahmin etme konusunda en iyi performansı gösteren modeli, seçmek isteyebiliriz. Bu yeteneğe modelin örneklem dışı tahmin performansı diyoruz (McElreath, 2018a). Ek veriler mevcut olmadığında, WAIC ve LOO-IC gibi çapraz doğrulama teknikleri kullanılabilir. Tablo 4.9’da, yukarıdaki kurulan modeller arasında, Hamiltoncu Monte Carlo algoritmasındaki son model (Model 3) en iyi model gibi görünmektedir. Bu nedenle, altı açıklayıcı değişkenin bir fonksiyonu ve yaş ve akıl yürütme yeteneği için rastgele katsayı olarak Model 3, bilişsel Hopkins Sözlü Öğrenme Testi için en iyi tahmin performansına sahiptir.

Tablo 4.9. Durum I : Genel Olarak Model Karşılaştırmaları: Bayesci Hiyerarşik Doğrusal Model

MZMC Yaklaşımlarını	Bayesci Hiyerarşik Model Türler	Belgi Kriteri (R^2 MLwiN, MCMCgImm and R-BRMS)				
		DIC	ICOMP	WAIC	LOO-IC	K-fold
Metropolis Hasting(MH)	Model 1	34194.28	32998.99	N/A	N/A	N/A
	Model 2	34033.05	32876.56	N/A	N/A	N/A
	Model3	34023.35	32827.51	N/A	N/A	N/A
Gibbs Örneklemesi	Model 1	738273.3	697620.7	N/A	N/A	N/A
	Model 2	738272.4	697509.6	N/A	N/A	N/A
	Model 3	738271.2	697454.9	N/A	N/A	N/A
Hamiltoncu MC	Model 1	N/A	31845.8	33479.8	33852.7	32051.1
	Model 2	N/A	31394.2	31458.6	33349.8	31854.3
	Model 3	N/A	309524.3	31054.9	32890.4	31065.2

Not: Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC), Bir tane ayırarak çapraz geçerliliği (LOO-IC), K-katlı çapraz geçerlilik(K-Fold), Bayesci Sapma kriteri (DIC); N/A = geçerli değil veya mevcut değil

Tablo 4.9’da, LOO-IC, WAIC ve DIC değeri ne kadar küçükse, sonsal tahminsel doğruluk açısından model o kadar iyi olur. Modeller arasındaki LOO-IC fark fikri, farkın derecesini belirlemek için $2 \times \text{standart hata}$ olabilir. Bu karşılaştırmada, LOO-IC, üç tane standart hatadan daha büyüktür ve bu, LOO-IC’in rastgele kesişim/sabit etkili eğimli hibrit model HMC için gözle görülür şekilde daha

iyi bir model olduğunu göstermektedir. Genel Olarak, Model 2'den (Rasgele Kesişim) Model 3 (Rasgele Kesişim ve Rasgele Eğim) modelleri daha iyidir. Fakat Boş modeller, M_1 , açıkça en kötüdür.

4.3. En İyi Model Seçimi

Model Karşılaştırma teknikleri kullanarak rasgele kesişim ve rasgele eğim modelinin Hamiltoncu Monte Carlo (HMC) Algoritması ile veri setine en iyi uyum sağlayan modeli belirleyebiliriz.

$$TSÖTP \sim Normal(\mu_i, \delta_\epsilon)$$

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 age + \dots + \beta_6 mmse$$

$$\beta_i \sim Normal(0,10) \text{ ve } \delta_\epsilon \sim HalfCauchy(0,10)$$

Tablo 4.9'dan, Model 2- Hamiltoncu'nun (yani, son model) daha düşük LOO-IC'ye sahip olduğu için diğer modellerden çok daha iyi performans gösterdiğini görüyoruz. Bu özet, skor süreleri için kesişimler ve eğimler arasında negatif bir korelasyon ortaya koymaktadır; bu, büyük bir “temel değişkenlik seviyesi” olan zamanların (yani, büyük bir ortalama puan değeri ile), kadınlar tarafından erkeklerden daha fazla değişkenlikle telaffuz edilme eğiliminde olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte, bu modelin eğim tahmininin, ilgili standart hata ve güvenilir aralığın genişliği ile gösterildiği gibi, önceki modellerden daha belirsiz olduğunu fark ediyoruz.

4.4. Bayesci hiyerarşik modellerindeki önseller ve duyarlılık analizi:

Durum I

(Bürkner ve Vuorre, 2019) ve McElreath (2018b), BRMS'de SS önselleri için yarı normal bir dağılım önerdi. Kesik bir normal dağılımın seçilmesi, standart sapmanın 0'dan az olamayacağı konusunda iyi bir fikir olarak kabul edilir. Bununla birlikte, uzun bir sağ kuyruk ile rastgele etki parametresinde bir öncül, SS'nin hacimli değer tahminlerine izin verdiği için “konservatif” olarak ortaya çıkmıştır. parametreler.

Gelman ve Hill (2006), verilerin hiyerarşik yapısındaki az sayıda grupta için yeterli bilgi sağlamadan önce, yarı Cauchy'nin kısıtlayıcı yapısını makul bir şekilde açıklayarak, 0'da bir mod ve önemli bir değere ayarlanmış ölçek ile önce yarı Cauchy'yi önerdi. Gerçekçi olamayacak kadar büyük SS tahminlerinin oluşumunu azaltmak için Bayesci hiyerarşik modeli, BRMS-Stan dokümantasyonu, yarı-

Cauchy'nin otomatik olarak 0'a bağlanan öncel olduğunu önerdi. R-Stan, sınırlar arasındaki alanın toplamı 1 olacak şekilde kullanılan dağılımı yeniden normalleştirir.

Yarım Cauchy (0, 1) önsel dağılımı, standart sapma (SS) metriğinde parametrelendirilmiş $\nu = 1$ serbestlik derecesi olan yarı Öğrenci t dağılımının bir örneğidir. Kökeni çok iyi performans gösteren farklı önsel sınıfların makul bir orta zemini kaplar. Parametre alanının nüfus seviyesi (konum) ve grup seviyesi etkisi ile ilgili ciddi uzlaşma tahminlerine yol açmaz (Polson ve Scott, 2012).

Etkin örneklem büyüklüğü 1000'den büyük ve R-hat'ı 1.00'e en yakın ancak 1.10'dan büyük olmayan modeller, bir Markov zincirleri grubunun tutarlılığını gösterdi (Dominique, 2015). Ayrıca, hem Bulk-ESS hem de Tail-ESS'nin güvenilir olması ve ilgili sonsal kantillerin tahminlerinin güvenilir olduğunu göstermesi için Markov zinciri başına en az 100 (yaklaşık olarak) olması gerekir (Vehtari ve diğerleri, 2021). Bu yazıda, boş, değişken kesişim ve değişken katsayılı modellerin R-hat, Bulk-ESS ve Tail-ESS sonuçları bu yakınsama tanı ölçütlerini karşıladı. Bu nedenle, etkin örnek boyutları (ESS) ve potansiyel ölçek küçültme (R-hat) yakınsama tanı ölçütleri, kurulan her modelde kararlı tahminler için yeterlidir.

Farklı önsel dağılımlar kullanılarak elde edilen sonuçlarla, önsel varsayımlara (veya referansa) dayalı olarak nihai tamamen hiyerarşik olarak belirtilen model (Model 3) sonuçlarını incelemek için önseller için duyarlılık analizini kullandık. Sabit etkiler ve rastgele etkiler için medyana göre sonsal dağılımlar ve %95 sonsal yoğunluk (HPD) aralıkları, sözel öğrenme testi puanının SS'si de dahil olmak üzere, belirtilen önsellere bağlı olarak fazla değişmedi, bu da pratikte aynı yoruma işaret ediyor ve önsellere bağlı olarak tahminler. Bu nedenle, alternatif önsel spesifikasyona bağlı olarak modeller arasında önemli bir yüzde sapma olmaması nedeniyle, iyi model yakınsaması ve yeterli ESS değerleri (yani, 100'den büyük veya 100'e eşit) sağlayan önsel yarı Cauchy ile model sonuçlarını bildirdik. Ayrıca, Roos vd., (2015) açıklandığı gibi, duyarlılık analizi sonuçları, Shiny uygulama grafiklerine benzer şekilde görseller aracılığıyla sağlanabilir veya tahminlerdeki tutarsızlık derecesini veya parametreler arasındaki %95 sonsal yoğunluk (HPD) aralıklarını gösteren bir tablo formatında olabilir. Aşağıdaki Ek tablosunda sunduğumuz gibi. Aşağıda (Tablo 4.10) önselerin duyarlılık analizi, takılan modellerde farklı önsel dağılımları seçerken bir Bayesci analizin sağlamlığını göstermektedir.

Tablo 4.10. Durum I : Önsellerin doğruluğuyla birlikte sonsal tahminler: Duyarlılık analizi

Alternatif önseller	Parametre/ değişkenler	Tahmin (SS)	Medyan (%50)	%5-%95 HDP	Varsayılan Tahmin (SS)	yüzde sapma
	keseşim	9.841 (1.521)	9.8331	5.85, 13.93	9.832(1.93)	0.0926
	Yaş	-0.121 (0.021)	-0.1201	-0.15, -0.08	-0,12 (0,423)	-0.9812
	eğitim	-0.003 (0.001)	-0.0033	-0.012 0.001	-0.003(.005)	-2.9412
	Yükseltici	0.141(0.102)	0.1413	-0.21, 0.48	0.141 (0.62)	0.0709
	Cinsiyet	2.550 (0.112)	2.5504	2.17, 2.93	2.548 (0.22)	0.0706
	Sebep	0.144 (1.902)	0.1443	0.13, 0.44	0.144 (2.08)	0.0693
	MMSE	0.580 (0.028)	0,5921	0.48, 0.68	0,580 (0,08)	0.0345
Alternatif önsel I: Yarım Cauchy (0,1)	$\sigma_{\text{intercept,subject}}$	1.9222	1.9221	0.07, 4.31	1.9212	0.0521
	$\sigma_{\text{intercept,time}}$	1.3022	1.3102	0.57, 3.13	1.3032	-0.0767
	σ_{age}	0.0424	0.0403	0.01, 0.063	0.0425	0.0126
	σ_{reason}	0.0405	0.0402	0.02, 0.073	0.0401	-0.9975
	$\text{cor}_{\text{Intercept,age}}$	0.1033	0.1032	-0.71, 0.83	0.1031	0.1040
	$\text{cor}_{\text{Intercept,rea}}$	-0.3902	-0.8902	-0.90, 0.62	-0.390	-0.0512
	$\text{cor}_{\text{age,reason}}$	-0.5922	-0.5887	-0.91, 0.14	-0.592	-0.0169
	$\sigma_e(\text{sigma})$	3.1102	3.2041	3.05, 3.17	3.111	-0.0321
	keseşim	9.842 (1.543)	9.8231	6.14, 13.65	9.832(1.932)	-0.0112
	Yaş	-0.121(0.034)	-0.1212	-0.15, -0.086	-0,122 (0,42)	-0.0825
eğitim	-0.003(0.011)	-0.0034	-0.012, 0.002	0.003(0.005)	-2.9412	
Yükseltici	0.141(0.124)	0.1412	-0.216, 0.487	0.141 (0.62)	-0.0708	
Cinsiyet	2.551(0.142)	2.5505	2.172, 2.937	2.548(0.22)	-0.0353	
Sebep	0.144(2.013)	0.1444	0.145, 0.456	0.144 (2.08)	-0.0692	
MMSE	0.580(0.035)	0.5872	0.485, 0.695	0,580(0,082)	0.0172	
Alternatif önselII: Normal (5, 0.01)	$\sigma_{\text{intercept,subject}}$	1.921	1.9221	0.072, 4.341	1.921	0.0468
	$\sigma_{\text{intercept,time}}$	1.303	1.3102	0.562, 3.134	1.303	-0.0844
	σ_{age}	0.042	0.0403	0.012, 0.062	0.042	-0.2353
	σ_{reason}	0.040	0.0402	0.021, 0.073	0.040	-0.2463
	$\text{cor}_{\text{Intercept,age}}$	0.103	0.1032	-0.704, 0.830	0.103	0.0969
	$\text{cor}_{\text{Intercept,rea}}$	-0.390	-0.8902	-0.902, 0.622	-0.3904	-0.0256
	$\text{cor}_{\text{age,reason}}$	-0.592	-0.5987	-0.8045, 0.140	-0.5923	-0.0169
	$\sigma_e(\text{sigma})$	3.211	3.2141	3.0533, 3.571	3.1112	-3.1543

Not: Göreceli yüzde sapma şu şekilde hesaplanabilir: $[(\text{önsel yeni alternatifi kullanarak tahmin et}) - (\text{varsayılan/önsel referansı kullanarak tahmin et})] / (\text{önsel varsayılanı/referansı kullanarak tahmin et}) * 100$. Bununla birlikte, %10'un altındaki bir yüzde sapmanın muhtemelen ihmal edilebilir olduğu düşünülebilir (Depaoli ve van de Schoot, 2017). Varsayılan tahmin = BRMS varsayılanı/önsel referansı ile analizin sonsal tahmini (ortalama) (*Öğrencinin t (3)*); %5-%95 en yüksek sonsal yoğunluk (HPD) aralığıdır.

5. TEK KATEGORİK BAĞIMLI DEĞİŞKENLİ UYGULAMASI

5.1. Durum II ve III: Uygulama veri seti, yapı ve değişken açıklamaları

Damar Tıkanıklığı hastalıkları, genellikle ateroskleroz nedeniyle ortaya çıkan ve kan hareketlerinin azalmasından kaynaklanan, bacaklardaki (veya nadiren kollardaki) damarların tıkanması veya daralmasıdır (Percy, 1992). Etkilenen vücut kısmına kan akışını ölçmek ve ameliyat, göreceli tıkanıklığa göre hastalık durumunu belirlemek ve semptomları azaltmak için kullanılır. Sağlıklı damarlar, kanın pıhtılaşmasını önleyen ve sabit kan akışını destekleyen pürüzsüz bir astara sahiptir.

Periferik damar hastalığı (PDH), aterosklerozun neden olduğu alt ekstremitelerin (kalça, diz, bacak ve ayak bileği eklemleri gibi) kronik damar tıkanıklığı hastalığıdır (Stoffers vd., 1997). Hem sağ hem de sol bacakta tekrarlayan tıkanıklığı periferik damar hastalığı teşhisi konuldu. Daha sonra semptomlara ve fiziki ve enstrümantal muayene sonuçlarına göre gerekli teşhis yapılır, hastanın sağlıklı veya hastalıklı olup olmadığına karar verilebilir. Veriler 1988/89 yıllarında Liverpool, İngiltere'deki Broadgreen Hastanesinde toplanmıştır (Percy, 1992). Veriler, alt ve üst taraftan sağ ve sol bacakta 4 noktada özellikleri ölçülen 32 hastayı ele aldı. Veri toplama sırasında ölçülen tüm hasta özelliklerinden yalnızca hastanın sağlık durumunu, ultrason ölçümlerini, kaf basıncı ölçümlerindeki azalmayı ve hastalık şiddeti puanlarını dikkate aldık.

Burada yapay (dummy) bir değişken sağlık durumu ve üç sürekli değişkenimiz var. Hastanın sağlık durumu ve hastalık şiddeti skorları bağımlı değişkenleri, ultrason ve kaf basıncı ölçümlerindeki azalma bağımsız değişkenler olarak kabul edildi.

Bu değişkenler (Tablo 5.1'e göre) şu şekilde gösterilebilir:

Score: $Y_{ij}^{(1)}$: j . inci bacak yan kısmında hastalık şiddeti puanı

Ultrasound: U_{ij} : j . inci bacak yan kısmında ultrason ölçümleri

RCP: X_{ij} : j . inci bacak yan kısmında kaf basıncı ölçümünde azalma

Status: $Y_{ij}^{(2)}$: j . inci bacak yan kısmında hastanın sağlık durumunu

Tablo 5.1. Damar Tıkanıklığı Hastalıklarının örnek veri seti, yapısı ve değişken doğası

<i>i</i>	Sağ bacağı								Sol bacak							
	Üst kısım				Alt kısım				Üst kısım				Alt kısım			
	X_{ij}	U_{ij}	$Y_{ij}^{(1)}$	$Y_{ij}^{(2)}$	X_{ij}	U_{ij}	$Y_{ij}^{(1)}$	$Y_{ij}^{(2)}$	X_{ij}	U_{ij}	$Y_{ij}^{(1)}$	$Y_{ij}^{(2)}$	X_{ij}	U_{ij}	$Y_{ij}^{(1)}$	$Y_{ij}^{(2)}$
1	170	.25	1	.00	45	.66	0	.02	170	1.0	1	.00	45	.81	1	.02
2	-5	.72	1	.54	25	.23	0	.10	-5	.78	1	.53	25	.37	1	.11
3	30	.29	0	-.12	-10	.23	0	.20	30	.58	1	-.12	-10	.12	0	.20
4	160	.47	0	.67	100	.37	0	.21	160	.91	1	.37	100	1.0	1	.21
5	50	.63	1	.59	70	.61	1	.70	50	.69	0	.59	70	1.0	0	.70
...

5.2. DTH verileri için Bayesci hiyerarşik lojistik modelinin belirtilmesi

Bayesci hiyerarşik doğrusal logit model, hem sabit hem de rastgele etkileri (dolayısıyla karışık etkiler) içerecek şekilde genelleştirilmiş doğrusal modellerin bir uzantısıdır. Modelin genel matris formu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y_{N \times 1} = \underbrace{X_{N \times p} \beta_{p \times 1}}_{\text{Sabit(fixed)etkileri}} + \underbrace{Z_{N \times m} U_{m \times 1}}_{\text{Rastgele etkileri}} + \underbrace{\epsilon_{N \times 1}}_{\text{residuals(artıklar)}} \quad (5.1)$$

Burada Y_{ij} , j . tekrarlı ölçümde i . birey için bağımlı değişkennin bir sütun vektörüdür. X_{ij} bir öngörücü (açıklayıcı) değişkenler matrisidir. β , regresyon katsayıları ve kesişim noktasının (β_0), bir sütun vektörüdür. Z sabit etki X 'in rastgele bir iltifatıdır. U , sabit β etkilerin tehmini rasgele bir bileşenidir, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n_i$ ve $N = \sum_{i=1}^m n_i$. Burada, $U \sim N(0, G)$ ve $\epsilon \sim N(0, \sigma_0^2 R)$, U ve ϵ bağımsızdır.

Bu tezde, özellikle, Damar Tıkanklığı Hastalıklar (DTH) verileri için cerrahi planlamayı düşünelim. İnvaziv yöntemleri, her bir bacağına sağlık (0) veya hastalıklı (1) olarak sınıflandırmak için kullanılır:

$$Y_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } i. \text{ hastası } j. \text{ bacak ölçülerinde hastalıklı gösterildiyse} \\ 0, & \text{Eğer } i. \text{ hastası } j. \text{ bacak ölçülerinde sağlıklı gösterildiyse} \end{cases}$$

Burda, her hasta için genel varsayım olarak, i .inci hastadaki sağlık durumunun $Y_{ij}^{(2)}$ olarak Bernoulli dağılım ölçümleridir. Hastalığın daha basit fakat daha az doğru bir değerlendirmesi, brakial ve popliteal damarlar arasındaki kaf basıncı ölçümlerindeki azalmadır, bu nedenle her hasta i yukarıda açıklanan özellikleri ölçtüm.

İkili (binary) bağımlı değişkeni Y_{ij} 'nin başarı olasılığı p_{ij} olan bir Bernoulli dağılımına sahip olduğu varsayılır; ölçüm j bacağından alınırken $\Pr(Y_{ij} = 1) = p_{ij}$, hasta i 'in Damar Tıkanklığı Hastalıkları geliştirme olasılığıdır; hastalığa yakalanma olasılığı $\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}}$ 'dir. Kategorik bağımlı değişken için iki düzeyli hiyerarşik lojistik modeller $Y_{ij}^{(2)} = \text{Binom}(n_{ij}, p_{ij})$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{logit}(p_{ij}) = \ln\left(\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}}\right) = \beta_0 + u_{0j} + \beta_{1j}U_{ij} + \beta_{1j}X_{ij} \quad (5.2)$$

Durum II uygulamada, Eşitlik (5.1) ve (5.2) modellemesi kullanarak boş model, rastgele kesişim model ve rastgele kesişim ve katsayısı (tam) modeli olarak aşağıdaki gibi belirtildi,

M₁: Boş model

$$\text{Sağlık durum}_{ij} \sim \text{Binomial}(n_i, \pi_i) \quad (5.3)$$

$$\text{logit}(\pi_i) = \alpha_{hasta[i]} + \beta_{hasta[i]} (\text{bacak yan kısmında})$$

$$\left. \begin{array}{c} \alpha_{hasta,[i]} \\ \dots \\ \beta_{hasta,i} \end{array} \right\} \sim \text{farklı önsel dağılımı}$$

M₂: Rastgele kesişim modeli

$$\text{Sağlık durum}_{ij} \sim \text{Binomial}(n_i, \pi_i) \quad (5.4)$$

$$\text{logit}(\pi_i) = \alpha_{hasta[i]} + \beta_{hasta[i]} (\text{bacak} + U_{ij} + X_{ij})$$

$$\left. \begin{array}{c} \alpha_{hasta,[i]} \\ \dots \\ \beta_{hasta,i} \end{array} \right\} \sim \text{farklı önsel dağılımı}$$

M_{3 full}: Rastgele kesişim ve Rastgele katsayısı modeli

$$\text{Sağlık durum}_{ij} \sim \text{Binomial}(n_i, \pi_i) \quad (5.5)$$

$$\text{logit}(\pi_i) = \alpha_{hasta[i]} + \beta_{hasta[i]} (\text{bacak} + U_{ij} + X_{ij})$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{hasta} \\ \beta_{hasta} \end{bmatrix} \sim \text{MVNormal} \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \mathbf{S} \right)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma_\beta \end{pmatrix} \mathbf{R} \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma_\beta \end{pmatrix}$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(0,10)$$

$$\beta \sim \text{Normal}(0,10)$$

$$(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) \sim \text{HalfCauchy}(0,1)$$

$$\mathbf{R} \sim \text{LKJ}_{corr}(2)$$

Burada, R paketlerinde bulunan farklı önsellere ve MZMC yöntemlerine göre farklı modeller oluşturulmuştur.

5.3. Durum II: Tekrarlı Ölçüm Kategorik Bağımlı Değişken ile BHM'leri

Kategorik bağımlı değişkenler için Bayesci hiyerarşik modelinin yapısı, sürekli bağımlı değişken ile aynıdır. Tek fark, logit (Y = 1) olarak tahmin edildiği bağımlı değişkenin doğasıdır ve seviye-1 artık varyansının tahmini yoktur.

5.3.1. Metropolis–Hastings algoritmasını kullanarak DTH verileri için Bayesci hiyerarşik lojistik regresyon modellerinin sonuçları

Burada, Metropolis–Hastings (MH) örnekleme algoritmasını kullanarak 3 tip model taktık. Sınıf içi korelasyon: ICC (Varyans bölme katsayıları: VPC), hiyerarşik yapı tarafından açıklanan toplam varyasyonu bize bildiren boş modelden belirlenebilir.

Tablo 5.2. Durum II: Tüm modeller: Metropolis-Hastings

Parametre	tahmin	Std.H.	Z	Pr(> z)	%95 GA		ESS	Model türü
					Alt	Üst		
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim	-0.2908	0.189	-1.53	0.1257	-0.6794	0.0929	1561	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düzei	0.1209*	0.2189	-		0.00082	0.8216	35	Boş Model
1.düzei	Sabit	1e-05	-	-	sabit	sabit	10000	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim	-4.197	0.8682	-4.83	0.000*	-5.969	-2.8529	100	
bacak	0.4397	0.2275	1.93	0.053	0.0068	0.904	196	
Ultrason	5.4556	1.305	4.18	0.000*	3.159	8.126	171	
RCP	0.00675	0.0055	1.22	0.2226	-0.004	0.0176	528	Rasgele Kesişme
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düzei	0.0723*	0.142	-	-	4e-04	0.4741	68	
1.düzei	1.000	1e-05	-	-	0.999	1	1000	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim	-11.712	0.233	-50.24	0.000*	-12.099	-11.512	17	
bacak	2.967	0.097	30.71	0.000*	2.849	3.065	10	
Ultrason	19.987	0.348	57.40	0.000*	19.528	20.448	3	
RCP	-0.0041	0.0074	-5.55	0.000*	-0.0057	-0.0037	10	Rasgele Kesişim & Rasgele Eğim
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düzei	0.0482	0.0124			0.0339	0.0692	10	
$\sigma_{\text{kisi,ultrason}}$	-5.425	0.133			-5.594	-5.194	10	
σ_{ultrason}	0.011	0.0085			0.0095	0.0115	10	

* Paramtereler %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Table 5.2’de, durum II için Metropolis-Hastings yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğim modellerini ayrı ayrı kuruldu.

5.3.2. Gibbs örneklemesi kullanarak DTH verileri için Bayesci hiyerarşik lojistik regresyon modellerinin sonuçları

Tablo 5.3. Durum II: Tüm modeller: Gibbs örneklemesi

Ortak değişkenler	SBD/tehmimi	pMZMC	%95 GA		ESS.	Model türü
			Alt Sınır	Üst		
Population-Level (Location) Effects: Sabit etkili parametreleri						Boş Model
Kesişim(intercept)	-29.9	0.394	-153.98	86.01	595.5	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri						Rasgele Kesişim & Sabit Eğim Modeller
2.düzeyi: Kesişim	9.163	<0.001*	8.386	9.984	1000	
1.düzeyi: Kesişim	2.735	<0.001*	0.174	9.90	1000	
Population-Level (Location) Effects: Sabit etkili parametreleri						Rasgele Kesişim & Sabit Eğim Modeller
Kesişim(intercept)	-416	<0.020*	-729.95	-69.29	757.3	
Bacak	42.38	0.204	-46.97	139.46	1000	
Ultrason	503.38	<0.001*	141.69	800.77	554.6	
RCP	0.733	0.194	-0.422	2.122	868.5	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri						Rasgele Kesişim & Sabit Eğim Modeller
2.düzeyi: Kesişim	704.5	<0.001*	0.0014	3361	771.7	
1.düzeyi: Kesişim	14216	<0.001*	0.00028	48627	1000	
Population-Level (Location) Effects: Sabit etkili parametreleri						Rasgele Kesişim & Sabit Eğim Modeller
Kesişim(intercept)	-411.182	<0.024*	5.5010	12.9788	614.1	
Bacak	42.089	0.120	-14.88	121.033	1000	
Ultrason	508.138	<0.001*	181.300	856.047	439.9	
RCP	0.7791	0.162	-0.339	2.100	816.8	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri						Rasgele Kesişim & Sabit Eğim Modeller
2.düzeyi: Kesişim (hasta)	326.5		0.00021	2009	582.4	
σ_{ultrason}	3517		0.00024	22453	62.03	
σ_{RCP}	618.7		0.00037	3587	496.9	
1.düzeyi: Kesişim	2.735	<0.001*	0.174	9.90	1000	

* Paramtereler %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Table 5.3'te, durum II için Gibbs örnekleme yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğim modellerini ayrı ayrı kuruldu. Sonuçlar gösterdi ki hastalar arasındaki varyasyonu, hastanın bacak ölçümlerindeki varyanstan daha fazladır.

5.3.3. Hamiltoncu Monte Carlo kullanarak DTH verileri için Durum II modelleri

Tablo 5.4. Durum II: Tüm modeller: Hamiltoncu Monte Carlo (HMC)

Ortak değişkenler	Estimate/ Tehmin	Std.hata	%95 GA(CI)		Bulk_ESS	Tail_ESS	Model türü	
			Alt Sınır	Üst				
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim(intercept)	-0.33	0.51	-1.45	0.67	3783	3624	Boş model	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düzei: kişi*	0.44	0.30	0.02	1.08	3923	4014		
1.düzei: bacak*	0.82	0.41	0.17	1.79	3718	3892		
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim(intercept)*	9.22	2.14	4.88	13.57	449	612	Rasgele Kesişim & Sabit Eğitim Modeller	
Ultrasond *	-0.12	0.02	-0.16	-0.09	525	551		
RCP *	0.011	0.01	-0.01	0.02	555	548		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düzei: kişi*	3.03	0.07	2.89	3.16	259	414		
1.düzei: bacak*	1.68	1.15	0.61	4.50	234	462		
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim(intercept)*	-3.33	0.86	-5.14	-1.74	3741	3257	Rasgele Kesişim & Rasgele Eğitim Modeller	
Ultrason *	5.73	1.48	3.04	8.78	3760	3486		
RCP *	0.02	0.01	0.00	0.03	4062	3773		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düzei: kişi: *	0.37	0.30	0.01	1.09	3847	3722		
$\sigma_{\text{ultrason}}^*$	0.73	0.65	0.02	2.30	2878	2841		
σ_{RCP}^*	0.01	0.01	0.00	0.03	3987	3377		
$\sigma_{\text{kisi,ultrason}}$	-0.08	0.41	-0.80	0.72	3816	3657		
$\sigma_{\text{kisi,RCP}}$	-0.02	0.41	-0.77	0.74	3881	3545		
$\sigma_{\text{ultrason,RCP}}$	-0.08	0.41	-0.81	0.72	3535	3224		
1.düzei: bacak *	0.92	0.63	0.08	2.48	3500	3660		

* Paramtereler %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

Table 5.3'te, durum II için Gibbs örnekleme yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğitim modellerini ayrı ayrı kuruldu. Tablo 5.2, 5.3 ve Tablo 5.4 sonuçlara göre, her modeldeki ortalama genel hastalarda damar hastalık olasılığının tahmini oranları aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

Odds oranı_{MH} = 0.4278; Odds oranı_{Gib} = 0.0000231 ve Odds oranı_{HMC} = 0.4182. Bu nedenle, $P(Y_{ij}^{(1)} = 1) = \frac{\exp(\beta_{00})}{(1 + \exp(\beta_{00}))}$, Bayesci tahmini

Metropolis-Hasting(MH), Gibbs Örnekleme ve Hamiltoncu Monte Carlo yaklaşımlarını kullanarak hastaların bacaklardaki tüm ölçümlerde Damar Tıkanıklığı Hastalıklarına yakalanma olasılıkları ortalama %42'tir. Ve Eşitlik (3.22) Kulanarak

Sınıf içi Korelasyon Katsayısı (ICC) aşağıdaki gibi belirlenmiştir: $ICC_{MH} = \%3.54$; $ICC_{Gib} = \%4.719$ ve $ICC_{HMC} = 0.02$ CI %95: $[-0.09 0.37]$.

Bu sonuçlar, Damar Tıkanlığı Hastalıkları olan rastgele hasta örnekleri arasında büyük bir değişiklik olmadığını göstermiştir.

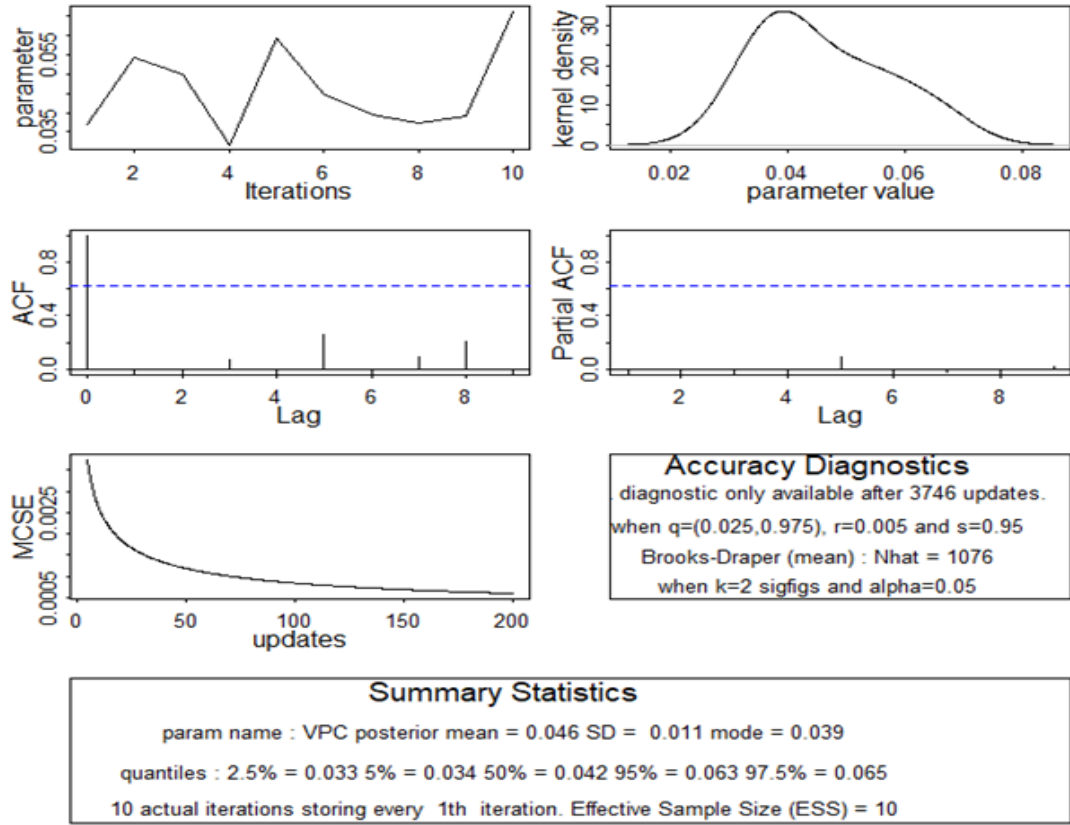
Tablo 5.5. Durum II: Model Karşılaştırmaları: Bayesci Hiyerarşik Doğrusal Lojit Model

MZMC		Belgi Kriteri (R2MLwiN, MCMCglmm and R-BRMS)				
Yaklaşımları	Model Türü	DIC	ICOMP	WAIC(SE)	LOO-IC(SE)	K-fold (SE)
Metropolis	Model 1	177.606	194.429	N/A	N/A	N/A
Hasting (MH)	Model 2	131.818	164.774	N/A	N/A	N/A
	Model 3	119.995	163.69	N/A	N/A	N/A
Gibbs Örnekleme	Model 1	6.13	68.595	N/A	N/A	N/A
	Model 2	2.68	61.839	N/A	N/A	N/A
	Model 3	2.52	18.105	N/A	N/A	N/A
Hamiltoncu	Model 1	N/A	1851.43	171.91(6.28)	172.19(6.3)	172.93(6.1)
	Model 2	N/A	931.07	133.4(15.25)	133.71(15.3)	129.85(14.4)
MC	Model 3	N/A	1712.27	136.4(15.46)	137.5(15.51)	142.33(16.3)

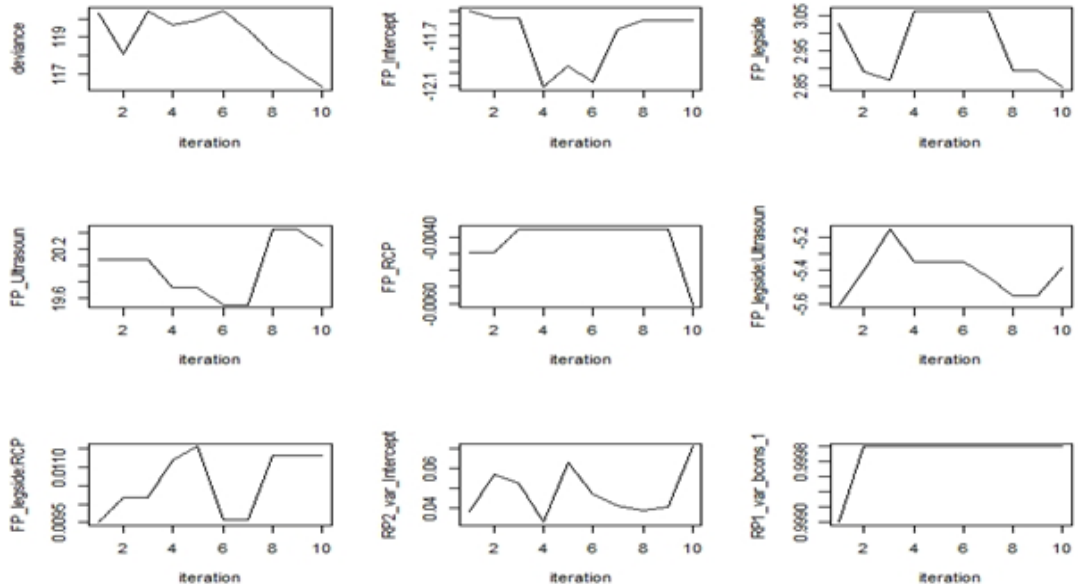
Not: Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC), Bir tane ayırarak çapraz geçerliliği (LOO-IC), K-katlı çapraz geçerlilik(K-10-Fold), Bayesci Sapma kriteri (DIC), Bozdoğan'ın Bilgi karmaşıklığı(ICOMP) kriteri; N/A = geçerli değil veya mevcut değil

Bir veri kümesi için üç farklı MZMC R paket prosedürü yaklaşımına sahip üç farklı model türü kuruldu. Tablo 5.5'ten, Metropolis Hasting (MH) ve Gibbs Örnekleme kullanarak rasgele kesişim & rasgele eğim daha düşük Belgi Kriteri (DIC ve ICOMP) sahip olduğu için diğer modellerden çok daha iyi performans gösterdiğini görüyoruz. Öte yandan, Hamiltoncu'nun (yani, Hibrit Monte Carlo) kullanarak sadece rasgele kesişim model daha düşük Belgi Kriteri (DIC, ICOMP, WAIC, LOO-IC ve K-fold) sahip olduğu için diğer modellerden çok daha iyi performans gösterdiğini görüyoruz. Aynı veri kümesinin model performanslarındaki bu farklılıklar, üç MZMC yaklaşımının farklı prosedürleri ve uygulanan önsel dağılımlar nedeniyle ortaya çıkmış olabilir.

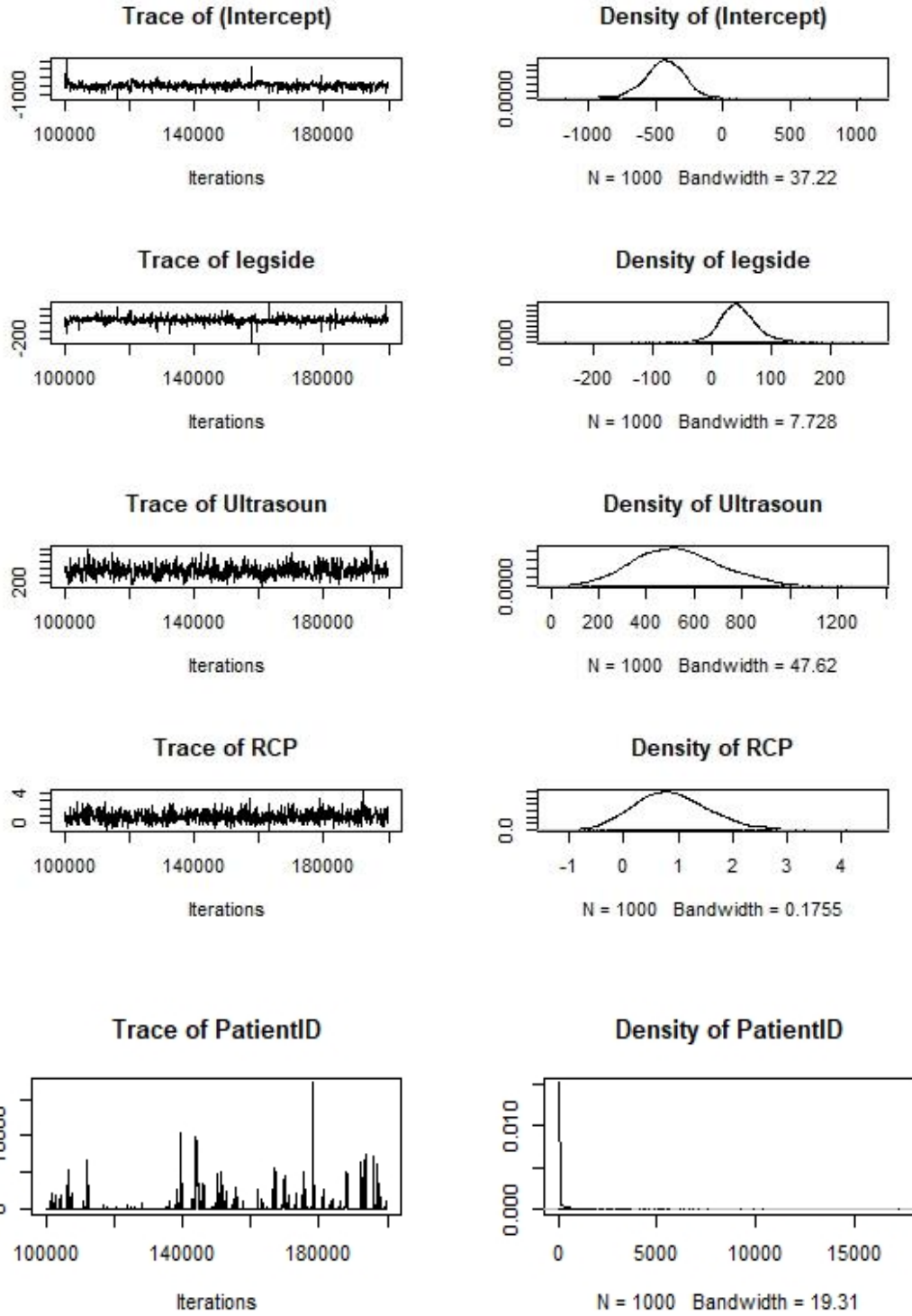
5.3.4. Durum II'de seçilen modellerin yakınsama ve koşullu etkileri



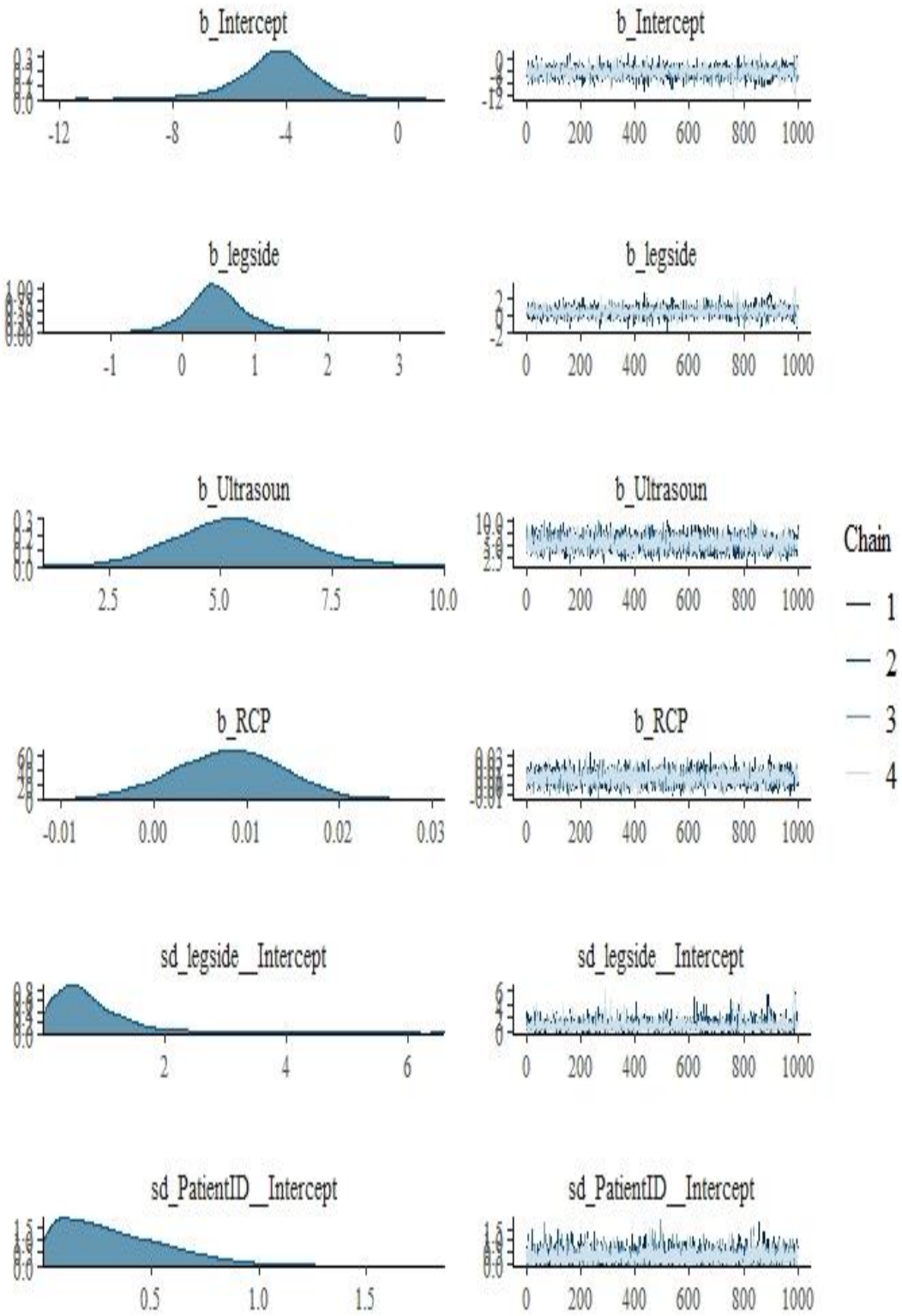
Şekil 5.1. Metropolis Hasting'den Rasgele Kesişim ve Eğim Modelinin Doğruluğu Teşhisi



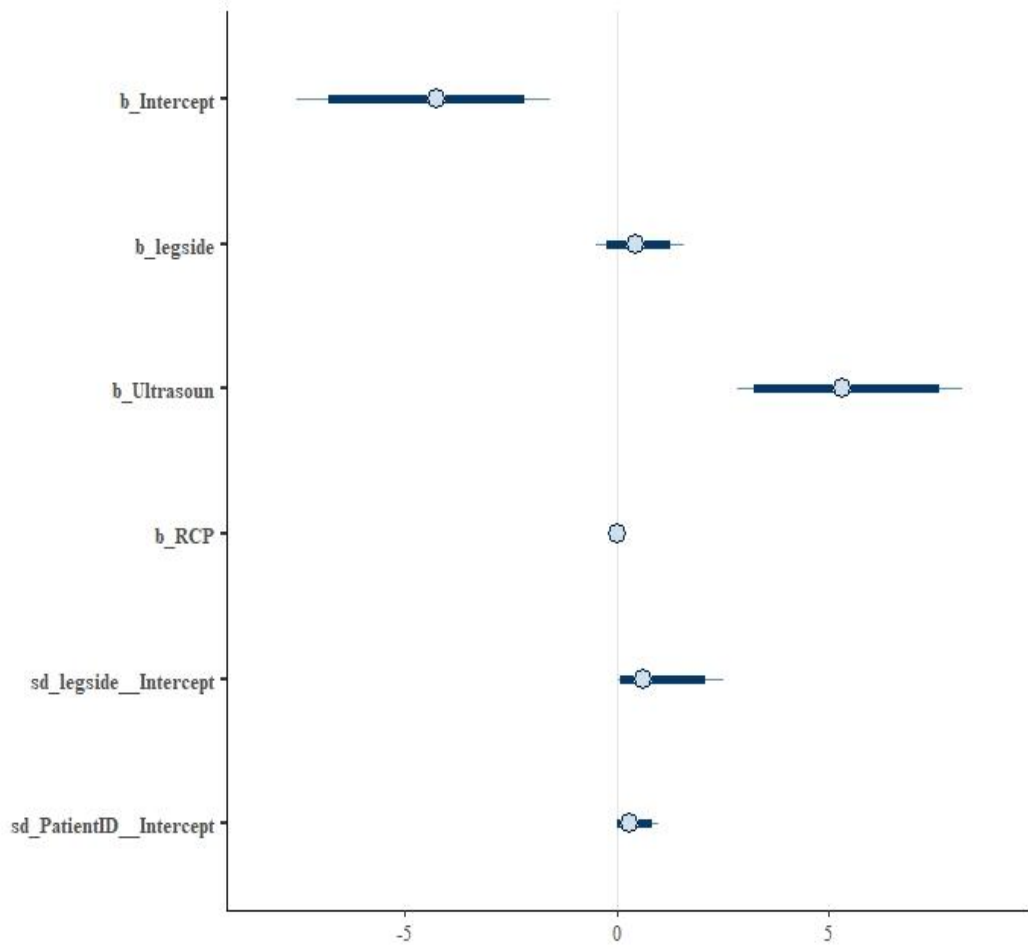
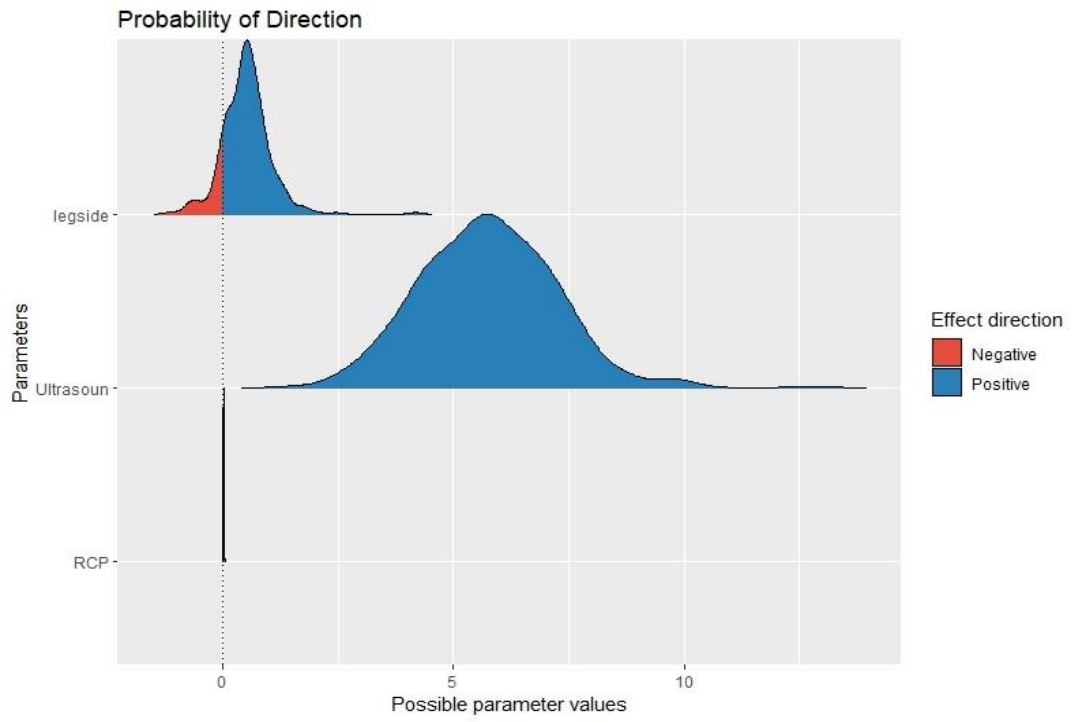
Şekil 5.2. Rastgele kesişim ve eğim MH modelinde ilgili tüm parametrelerin iz ve yoğunluk grafikleri.



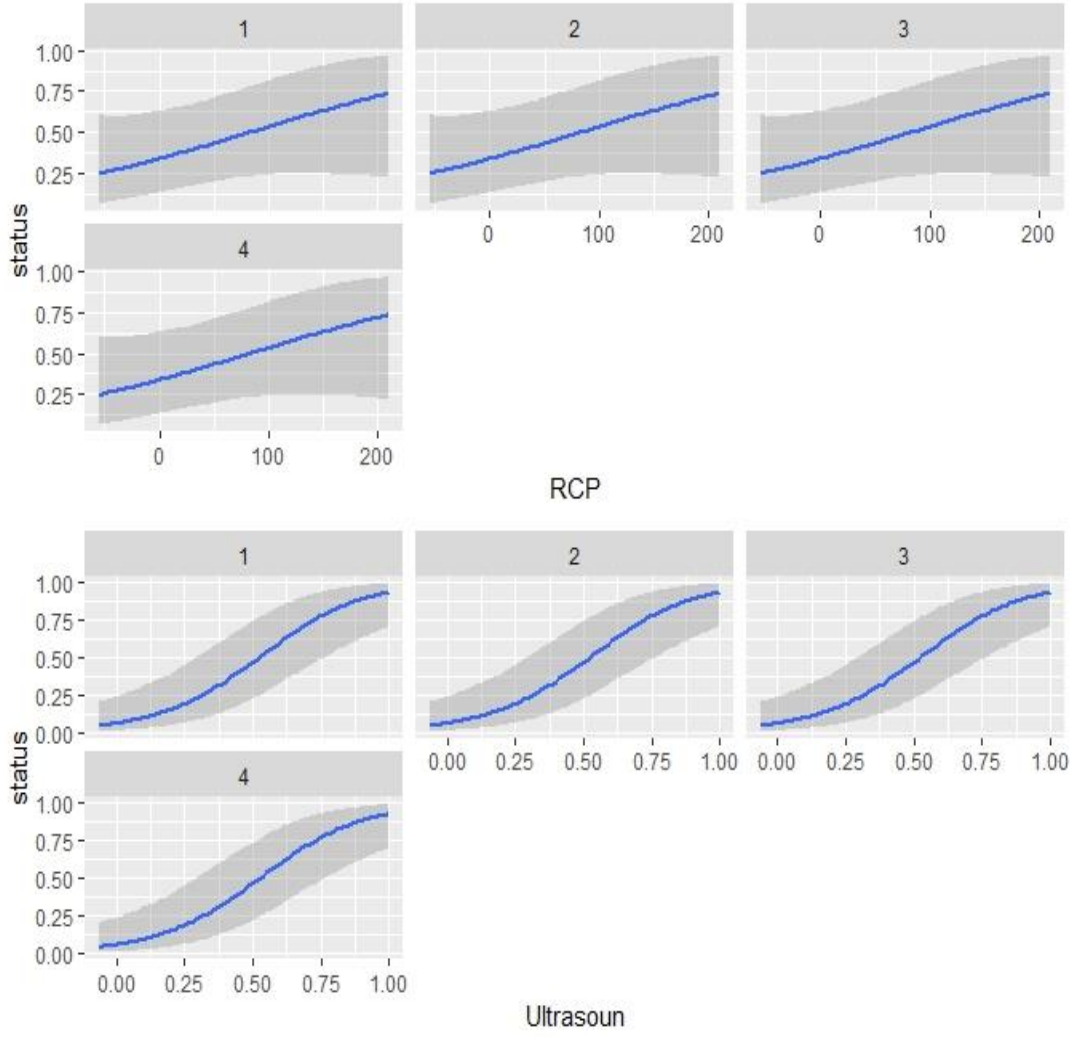
Şekil 5.3. Rastgele kesişim ve eğim Gibbs modelinde ilgili tüm parametrelerin iz ve yoğunluk grafikleri



Şekil 5.4. HMC yakınsamasında Rastgele kesişim ve eğim modelinin ilgili tüm parametrelerinin iz ve yoğunluk grafikleri



Şekil 5.5. Sabit ve rastgele terimlerin etkileri ile sonsal olasılık yönü: Durum II



Şekil 5.6. Ultrason ve RCP (kaf basıncı ölçümünde azalma)'nin farklı bacak ölçülerinde hastaların hastalık durumu üzerindeki koşullu etkisi.

Yukarıda seçilen modeller üzerindeki yakınsama (Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4) ve koşullu etkilerin değerlendirilmesi (Şekil 5.5 ve Şekil 5.6), HMC yaklaşımı altındaki rastgele kesişim modelinin en iyi şekilde birleştiğini göstermiştir. Ayrıca, bir hastanın hastalık durumunda bacaklar arasında hastalardan daha fazla varyasyon vardır. Ultrason ölçümlerinin hastaların damar tıkanıklığı hastalık durumu üzerinde net bir olumlu etkisi varken, RCP olmamıştır. Şekil 5.5'e göre, ultrasonun hastaların sağlık durumu üzerinde daha olumlu etkisinin gözlemlendiğini göstermiştir. Ayrıca, hastaların sağlık durumu, bir hastanın bacak tarafı ölçümleri arasında, farklı hastaların ölçümleri arasında olduğundan daha fazla varyasyona sahiptir.

6. ÇOK DEĞİŞKENLİ KARIŞIK BAĞIMLI DEĞİŞKEN TEKRARLI ÖLÇÜMLERDE UYGULAMASI

Önceki çalışmalar, aynı aile dağılımının çok değişkenli modellerinin otokorelasyonla ortak olduğunu göstermiştir (Sammel vd., 1999; Sperling, 2010; Williams vd., 2020). Bununla birlikte, bu, yalnızca STATA, SAS'ın PROC veya R'nin lme4'ü gibi tek değişkenli sonuç vektörlerini alan standart yazılım paketlerindeki korelasyonları dikkate alan farklı üstel ailelerden gelen karma bağımlı değişkenlerini modellemenin sınırlamalarının üstesinden gelmek için yaygın bir “hile”dir (Goldstein vd., 2009; Yucel, 2011; Achana vd., 2021). Bu yaklaşım, Stan gibi matris yapılandırılmış programlar ve BRMS, MCMCglmm ve R2MLwiN gibi Bayesci hiyerarşik çerçevelerindeki ilgili R paketleri için gerekli değildir (Kruschke, 2014; McElreath, 2018a).

6.1. Durum III: DTH verileri için çok değişkenli karışık bağımlı değişkenle modelinin belirtilmesi

Hastalık tanısı amacıyla enstrümantal sağlık durumu önlemleri kullanıldığında, hastalar için ortalama hastalık şiddeti puanlarının farklı durumlara diğer hasta özellikleri ile tanımlanması gerekir. Durum III için: Karışık Sonuçlar, Bir bağımlı değişken Y_{ij} kategorik olduğunda (hasta hastalıkları durumu) ve başka bir bağımlı değişken Y_{ik} sürekli olduğunda (hastalık şiddeti skoru), genellikle gizli bir değişken olan Y_{ij}^* 'yi koşullu kümelenmiş sürekli model olarak benimseyerek karışık tip çok değişkenli sonuçları birlikte modelleyebiliriz. Böylece, poli-seri korelasyon r_{jk} göz önüne alındığında iki değişkenli normal dağılımı izlerler:

$$\begin{pmatrix} Y_{ij}^* \\ Y_{ik} \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} \mu_{ij}^* \\ \mu_{ik} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j^2 & r_{jk}\sigma_j\sigma_k \\ r_{jk}\sigma_j\sigma_k & \sigma_k^2 \end{pmatrix} \right] \quad (6.1)$$

Faktörizasyon yöntemi, sürekli bağımlı değişken $P(Y_{ik})$ için marjinal yoğunluk ve sürekli bağımlı değişken verilen gizli değişken için koşullu yoğunluk $P(Y_{ij}^*|Y_{ik})$ ile eklem iki değişkenli normal dağılım için uygulanabilir. Aşağıdaki varsayımlar doğrudur:

- $Y_{ik} = Y_1$ sürekli bir bağımlı değişkendir ve $Y_{ik} \sim N(\mu_{ik}, \sigma_k^2)$.
- $Y_{ij}^* = Y_2$ kategorik bağımlı değişken, Y_{ij} için gizli değişkendir. Burada

$$Y_{ij}^* | Y_{ik} = N \left(\mu_{ij|k} = \mu_{ij}^* + r_{jk} \frac{\sigma_j}{\sigma_k} (Y_{ik} - \mu_{ik}), \sigma_{j|k}^2 = \sigma_j^2 (1 - r_{jk}^2) \right)$$

$d_{ij} = -\frac{\mu_{ij|k_i}}{\sigma_{j|k}^2}$ nin, koşullu olasılık $P(Y_{ij}^*|Y_{ik})$ olarak yazıldığını varsayalım.

$$P(Y_{ij}^*|Y_{ik}) = \begin{cases} \Phi(d_{ij}), & \text{if } Y_{ik} = 0 \\ \Phi(-d_{ij}), & \text{if } Y_{ik} = 1 \end{cases}$$

Tablo 6.1. Durum III: Çok değişkenli karışık bağımlı değişken tüm modelleri: MH

Parametre/Bağımlı Değişken	tahmin	Std.Hata	Z	Pr(> z)	%95 GA		ESS	Model türü
					Alt Sınır	Üst		
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim. Y ₁	0.3069	0.0532	5.77	0.000*	0.2027	0.4111	1561	Boş Model
Kesişim. Y ₂	0.0210	0.0125	1.68	0.005*	0.0124	0.0321	1120	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düze yi	0.0904	0.2189	-	*	0.00082	0.8216	530	
1.düze yi	sabit	1e-05	-	-	Sabit	sabit	1000	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim. Y ₁	0.3115	0.0520	5.99	0.000*	0.2410	0.3850	1011	Rasgele Kesişim
bacak. Y ₁	0.4312	0.2275	1.89	0.046*	0.0041	1.0310	110	
Ultrason . Y ₁	4.8906	1.0211	4.79	0.000*	4.510	9.2540	208	
RCP. Y ₁	0.0051	0.0034	1.50	0.211	-0.0045	0.0198	650	
Kesişim. Y ₂	0.0121	0.1151	0.105	0.454*	0.0105	0.0456	450	
bacak. Y ₂	-0.0251	0.0121	2.074	0.002	-0.0157	0.0541	1000	
Ultrason . Y ₂	2.751	0.321	8.57	0.546	-0.1251	11.45	800	
RCP. Y ₂	0.3954	0.1892	2.089	0.068	-0.3296	1.553	850	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düze yi	0.0723	0.142	-	-	4e-04	0.4741	680	
1.düze yi	1.000	1e-05	-	-	0.999	1.000	1000	
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri								
Kesişim. Y ₁	0.1392	0.211	0.6597	-	-0.0770	0.3293	1000	Rasgele Kesişim & Rasgele Eğitim
bacak. Y ₁	-0.0234	0.634	-0.0369	-	-0.1228	9.136	1000	
Ultrason . Y ₁	0.2842	0.128	2.223	-	-0.6076	0.5474	1192	
RCP. Y ₁	0.0161	0.041	0.3961	-	0.0017	0.0329	1000	
Kesişim. Y ₂	-4.1972	0.8682	-4.83	0.001*	-5.9696	-2.5298	1000	
bacak. Y ₂	0.43968	0.2275	1.93	0.053*	0.0068	0.9043	505	
Ultrason . Y ₂	5.45584	1.3053	4.18	0.023*	3.1590	8.1262	890	
RCP. Y ₂	0.00675	0.0055	1.22	0.2226	-0.0040	0.0176	1000	
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri								
2.düze yi	0.0482	0.0124	-	-	0.0339	0.0692	1000	
$\sigma_{\text{kisi,ultrason}}$	-5.425	0.133	-	-	-5.594	-5.194	1000	
σ_{ultrason}	0.011	0.0085	-	-	0.0095	0.0115	1020	
1.düze yi	0.9999	0.0032	-	-	0.999	1	420	

* Paramtereler %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

$Y_1 = \text{hastalık şiddeti puanlarının/Skor(Score)}$ ve $Y_2 = \text{hastalık durumu(Status)}$

Table 6.1’de, durum III için MH yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğitim modellerini ayrı ayrı kuruldu.

Tablo 6.2. Durum III: Çok değişkenli karışık bağımlı değişken tüm modelleri: Gibbs örnekleme

Ortak değişkenler/bağımlı	SBD/tehm ini	pMZM C	%95 GA		Etki Örnekleme	Model türü	
			Alt Sınır	Üst			
Population-Level (Location) Effects: Sabit etkili parametreleri							
Kesişim(intercept). Y_1	0.0825	0.032*	0.0082	0.1541	2000	Boş Model	
Kesişim(intercept). Y_2	-0.0731	0.604	-0.3376	0.2042	1331		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri							
2.düzei: Kesişim	0.040557	<0.001*	0.02238	0.0625	2000	Rasgele Kesişim	
1.düzei: Kesişim	0.359404	<0.001*	0.10301	0.7196	1000		
Population-Level (Location) Effects: Sabit etkili parametreleri							
Kesişim(intercept). Y_1	0.1192	0.252	-0.0770	0.3293	1000	Rasgele Kesişim & Eğitim Modeller	
Bacak. Y_1	-0.0224	0.682	-0.1228	9.136	1000		
Ultrason. Y_1	0.2542	0.118	-0.6076	0.5474	1192		
RCP. Y_1	0.01804	0.044*	0.0016	0.0349	1000		
Kesişim(intercept). Y_2	-2.818	<0.001*	-5.170	-4.853	757.3		
Bacak. Y_2	2.759	0.132	-8.807	7.727	1000		
Ultrason. Y_2	3.670	<0.001*	5.389	6.797	554.6		
RCP. Y_2	0.4705	0.198	-0.3296	1.553	868.5		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri							
2.düzei: Kesişim(Y_1, Y_2)	0.1594	<0.001*	0.07292	0.2618	991		
1.düzei: Kesişim (Y_1, Y_2)	2.400		-1.342	3.353	1000		
Population-Level (Location) Effects: Sabit etkili parametreleri							
Kesişim(intercept). Y_1	0.1379	0.318	-0.127	0.4270	1000	Rasgele Kesişim & Eğitim Modeller	
Bacak. Y_1	-0.0324	0.423	-0.143	7.112	1000		
Ultrason. Y_1	0.1109	0.712	-0.3666	0.6086	1000		
RCP. Y_1	0.04212	0.948	-0.0872	0.1048	1000		
Kesişim(intercept). Y_2	-2.663	<0.001*	-4.164	-1.268	614.1		
Bacak. Y_2	42.089	0.120	-14.88	121.03	1000		
Ultrason. Y_2	4.676	<0.001*	2.181	7.787	512		
RCP. Y_2	0.3552	0.622	-0.9402	1.610	816.8		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri							
2.düzei: (hasta). Y_1	0.3074		0.1085	0.5632	1100		
2.düzei: (hasta). Y_2	6.562		-6.475	6.462	1232		
$\sigma_{ultrason}(Y_1, Y_2)$	-0.126(1.065)		-0.463(8.2)	0.106(9.2)	100		
$\sigma_{RCP}(Y_1, Y_2)$	0.005932		-0.7625	0.005597	1000		
1.düzei: Kesişim. Y_1	0.09915		0.05054	0.1643	1000		
1.düzei: Kesişim. Y_2	-0.09121		-0.0523	7.385	850		

* Paramtereler %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır.

$Y_1 = hastalık \ şiddeti \ puanlarının/Skor(Score)$ ve $Y_2 = hastalık \ durumu(Status)$

Table 6.2’de, durum III için Gibbs örnekleme yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğitim modellerini ayrı ayrı kuruldu.

Tablo 6.3. Durum III: Çok değişkenli karışık bağımlı değişken tüm modelleri: HMC

Ortak /bağımlı değişken	Tehmin	Std. hata	%95 GA		Bulk_ESS	Tail_ESS	Rhats	Model türü	
			Alt Sınır	Üst					
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri									
Kesişim. Y_1^*	0.31	0.06	0.19	0.42	19419	12476	1.01	Boş model	
Kesişim. Y_2^*	-1.21	0.50	-2.23	-0.27	22094	10972	1.00		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri									
2.düzeyi: kişi. Y_1^*	0.17	0.04	0.12	0.24	7140	9756	1.00		
1.düzeyi: bacak. Y_2^*	0.59	0.31	0.06	1.23	2928	1806	1.00		
Cor(Y_1, Y_2): ρ_{y_1,y_2}	0.62	0.34	-0.36	0.99	1407	918	1.01		
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri									
Kesişim. Y_1^*	0.12	0.06	0.01	0.23	15235	12391	1.00	Rasgele Kesişim	
Bacak. Y_1	-0.03	0.02	-0.06	0.02	16326	11692	1.01		
Ultrason. Y_1^*	0.28	0.11	0.08	0.48	13898	11334	1.01		
RCP. Y_1^*	0.01	0.01	0.001	0.03	15445	12553	1.00		
Kesişim. Y_2^*	-4.31	0.88	-6.17	-2.70	15065	10209	1.00		
Bacak. Y_2^*	0.44	0.22	0.01	0.88	16661	11103	1.00		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri									
2.düzeyi: kişi: Y_1^*	0.12	0.03	0.06	0.18	488	4108	1.01		
2.düzeyi: kişi: Y_2^*	0.38	0.29	0.02	1.09	3775	5936	1.00		
ρ_{y_1,y_2}^*	0.25	0.52	0.22	0.88	1023	1886	1.00		
Population-Level Effects: Sabit etkili parametreleri									
Kesişim. Y_1	0.12	0.08	-0.05	0.28	1449	1121	1.01	Rasgele Kesişim & Rasgele Eğitim Modeller	
Bacak. Y_1	0.02	0.04	-0.06	0.05	4511	4795	1.01		
Ultrason. Y_1	-0.02	0.12	-0.01	0.04	1014	1858	1.00		
RCP. Y_1	0.02	0.03	-0.02	0.04	1064	1245	1.01		
Kesişim. Y_2^*	-9.89	4.89	-23.73	-4.03	1006	1028	1.00		
Bacak. Y_2	1.12	0.97	-0.16	3.77	1712	2081	1.00		
Ultrason. Y_2^*	12.51	5.72	5.01	26.81	2910	2912	1.01		
RCP. Y_2^*	0.02	0.02	-0.01	0.09	1977	2608	1.00		
Group-Level Effects: Rasgele etkili parametreleri(SS)									
2.düzeyi: kişi: Y_1^*	0.12	0.03	0.06	0.18	488	4108	1.01		
2.düzeyi: kişi: Y_2^*	0.38	0.29	0.02	1.09	3775	5936	1.00		
ρ_{y_1,y_2}	0.08	0.25	-0.42	0.56	1112	2776	1.00		
1.düzeyi: bacak *	0.92	0.63	0.08	2.48	3500	3660	1.00		
Cor(Y_1, Y_2): ρ_{y_1,y_2}	0.08	0.25	-0.42	0.56	1347	2770	1.01		

* Paramtereler %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır. $Y_1 = hastalık \ şiddeti \ puanlarının /Skor(Score) ve$
 $Y_2 = hastalık \ durumu(Statu)$

Table 6.3'te, durum III için HMC yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğitim modellerini ayrı ayrı kuruldu. Hastaların hastalık şiddeti skorlarına göre daha yüksek bir hastalık durumu varyasyonu gözlemlendi.

Tablo 6.4. Durum III: Bayesci Hiyerarşik çok değişkenli karışık bağımlı değişkenli modelleri Karşılaştırmaları

MZMC Yaklaşımları	Model Türü	Belgi Kriteri (R2MLwiN, MCMCgImm and R-BRMS)				
		DIC	ICOMP	WAIC (SE)	LOO-IC (SE)	K-fold (SE)
Metropolis Hasting(MH)	Model 1	221.231	2129.770	N/A	N/A	N/A
	Model 2	147.892	1935.236	N/A	N/A	N/A
	Model 3	132.102	1713.69	N/A	N/A	N/A
Gibbs Örnekleme	Model 1	21.95	2412.412	N/A	N/A	N/A
	Model 2	22.96	2314.102	N/A	N/A	N/A
	Model 3	12.86	1718.231	N/A	N/A	N/A
Hamiltoncu MC	Model 1	N/A	2108.548	171.91(6.28)	172.19(6.3)	172.93(6.1)
	Model 2	N/A	2125.725	136.4(15.46)	137.5(15.51)	142.33(16.3)
	Model 3	N/A	1712.27	133.4(15.25)	133.71(15.3)	129.85(14.4)

Not: Yaygın Uygulanabilir Bayesci bilgi kriteri (WAIC), Bir tane ayırarak çapraz geçerliliği (LOO-IC), K-katlı çapraz geçerlilik(K-10-Fold), Bayesci Sapma kriteri (DIC), Bozdoğan'ın Bilgi karmaşıklığı (ICOMP) kriteri: N/A = geçerli değil veya mevcut değil

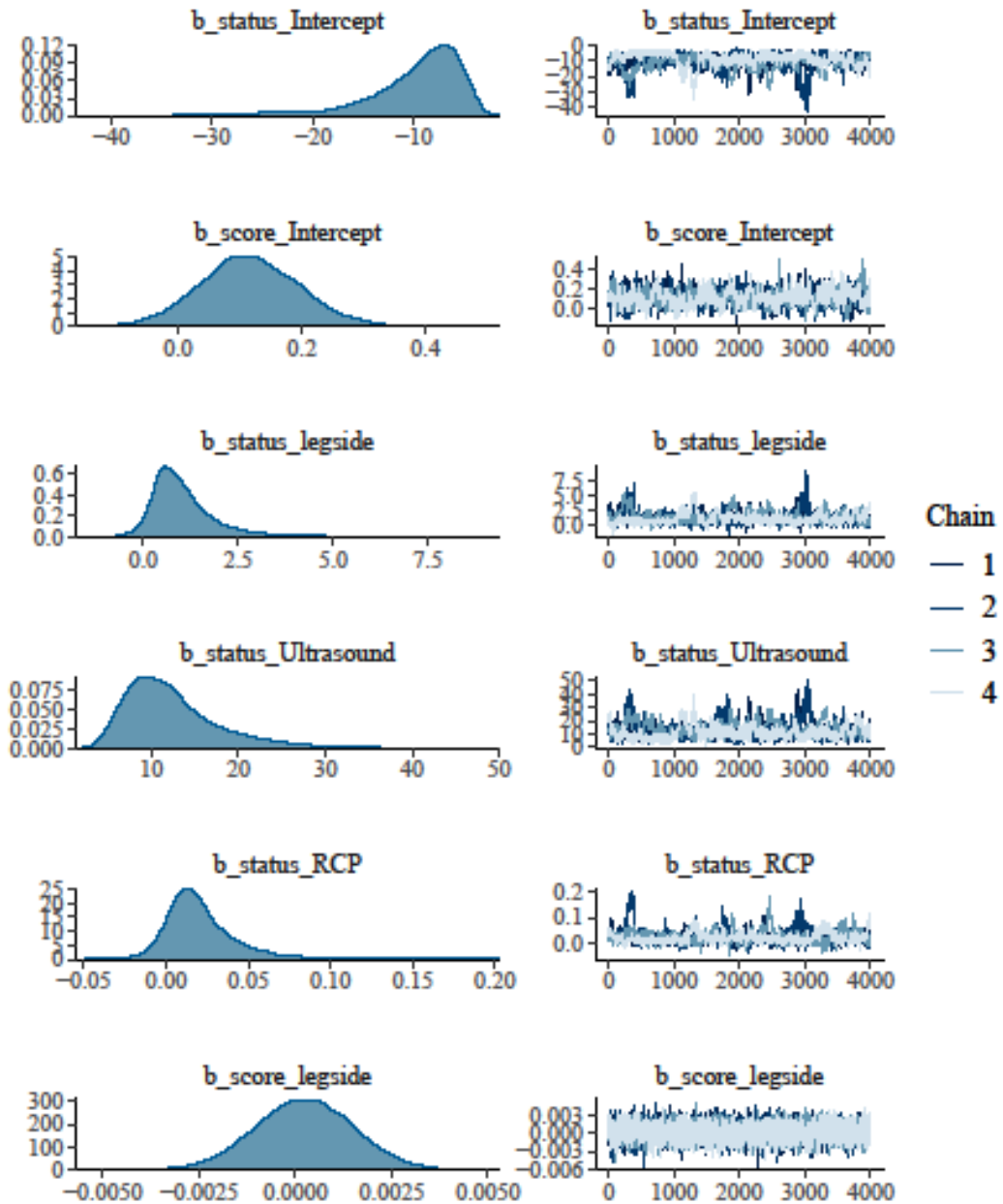
Table 6.2'de, durum III için Gibbs örnekleme yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğim modellerini ayrı ayrı kuruldu. Ayrıca, Table 6.3'te, durum III için HMC yaklaşımı kullanarak Boş Model, rastgele kesişim model ve rastgele eğim modellerini ayrı ayrı kuruldu.

Tablo 6.4'e göre, tam rastgele eğim hiyerarşik modeli, Metropolis Hasting ve Gibbs örnekleme de en düşük DIC ve ICOMP'a ve Hamiltoncu Monte Carlo algoritmasında WAIC, LOO-IC ve 10 katlı tahminlere sahiptir. Ancak, her model için kriter tahminlerindeki farkı ve karşılık gelen standart hataları (SE sütununda) karşılaştırdığımızda, fark nispeten küçüktür.

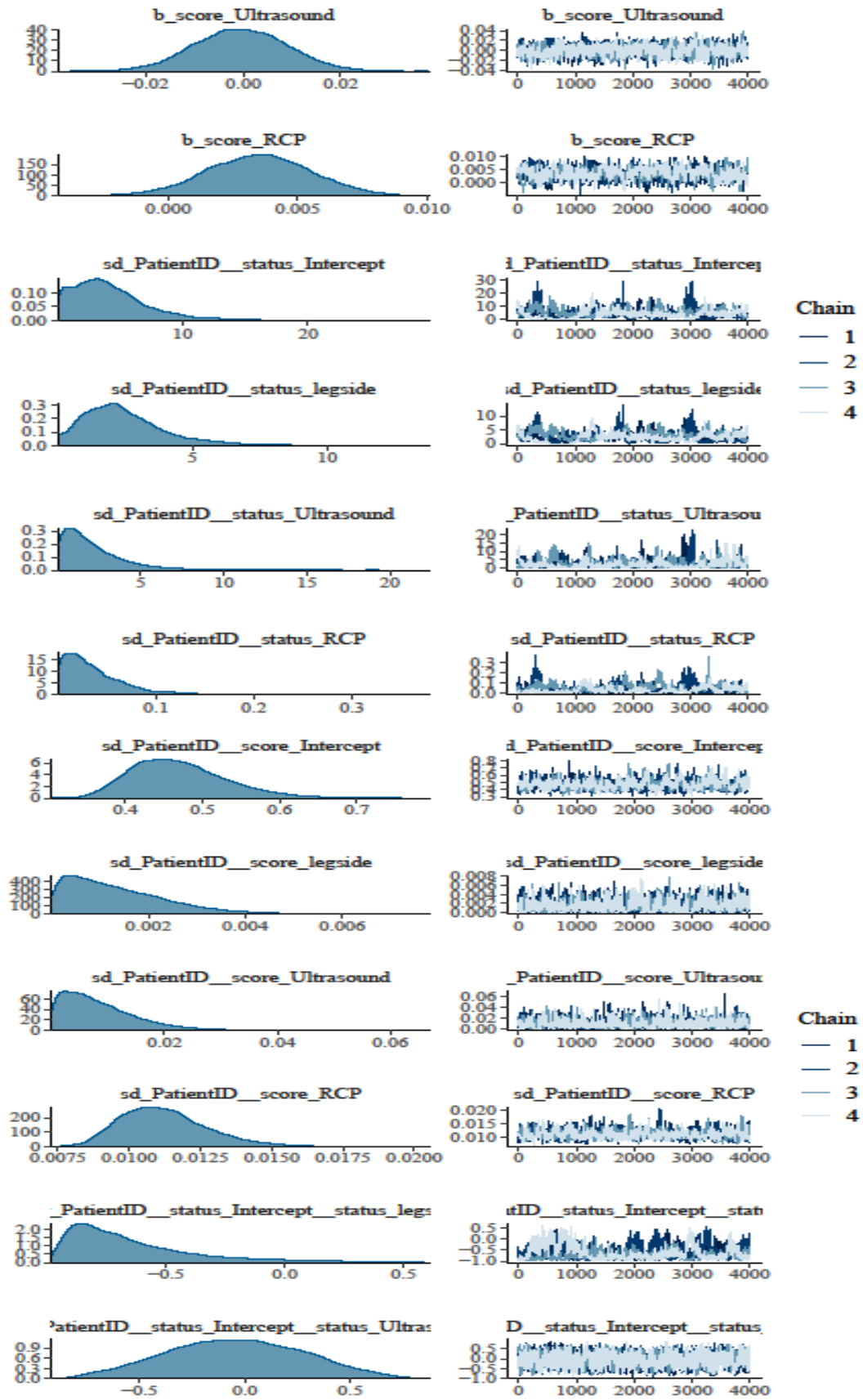
Yukarıdaki kurulan modeller arasında, Hamiltoncu Monte Carlo algoritmasındaki son tam model (Model 3) en iyi model gibi görünüyor. Bu nedenle, iki açıklayıcı değişkenin (ultrason ve kaf basıncı ölçümü) ve bacak, ultrason ve kaf basıncı ölçümü için rastgele katsayısının ortak çok değişkenli bir işlevi olarak Model 3, hastalık şiddeti puanları (Y1) ve hastalar için en iyi tahmin performansına sahiptir. Etkili örnek büyüklüğü 1000'den büyük ve R-hat değeri 1.00'a yakın ancak 1.10'dan büyük olmayan modeller, bir Markov zincirleri grubunun tutarlılığını gösterdi (Dominique, 2015). Dahası, modellerin genel etkili örnek boyutları (ESS) ve hem Toplu-ESS hem de Kuyruk-ESS, güvenilir olmak için Markov zinciri başına en az 100 (yaklaşık) olmalıdır ve ilgili sonsal kantiller güvenilirdir (Vehtari vd., 2021).

Table 6.3'te göre, tüm MZMC yaklaşımlarına sahip tüm modellerde, null'un R-hat, Bulk-ESS ve Tail-ESS sonuçları, rasgele kesişim ve rasgele katsayı modelleri yakınsama teşhisi metriklerini yerine getirdi. Bu nedenle, etkili örnek boyutları (ESS) ve potansiyel ölçek azaltma (R-hat) yakınsama teşhisi metrikleri, kurulan her modelde kararlı tahminler için yeterlidir.

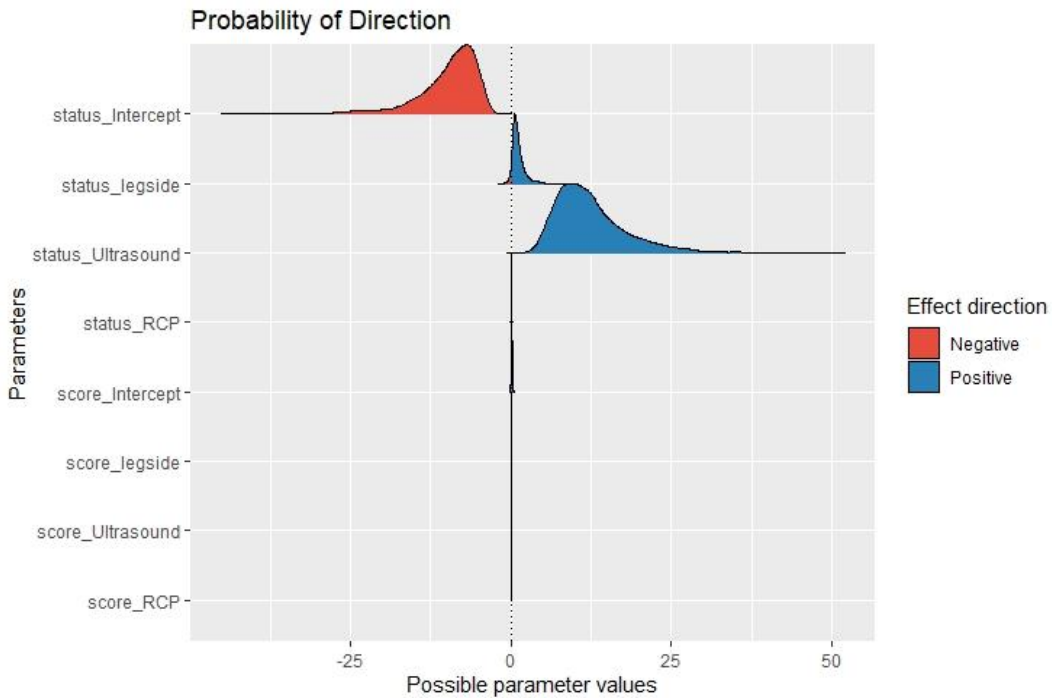
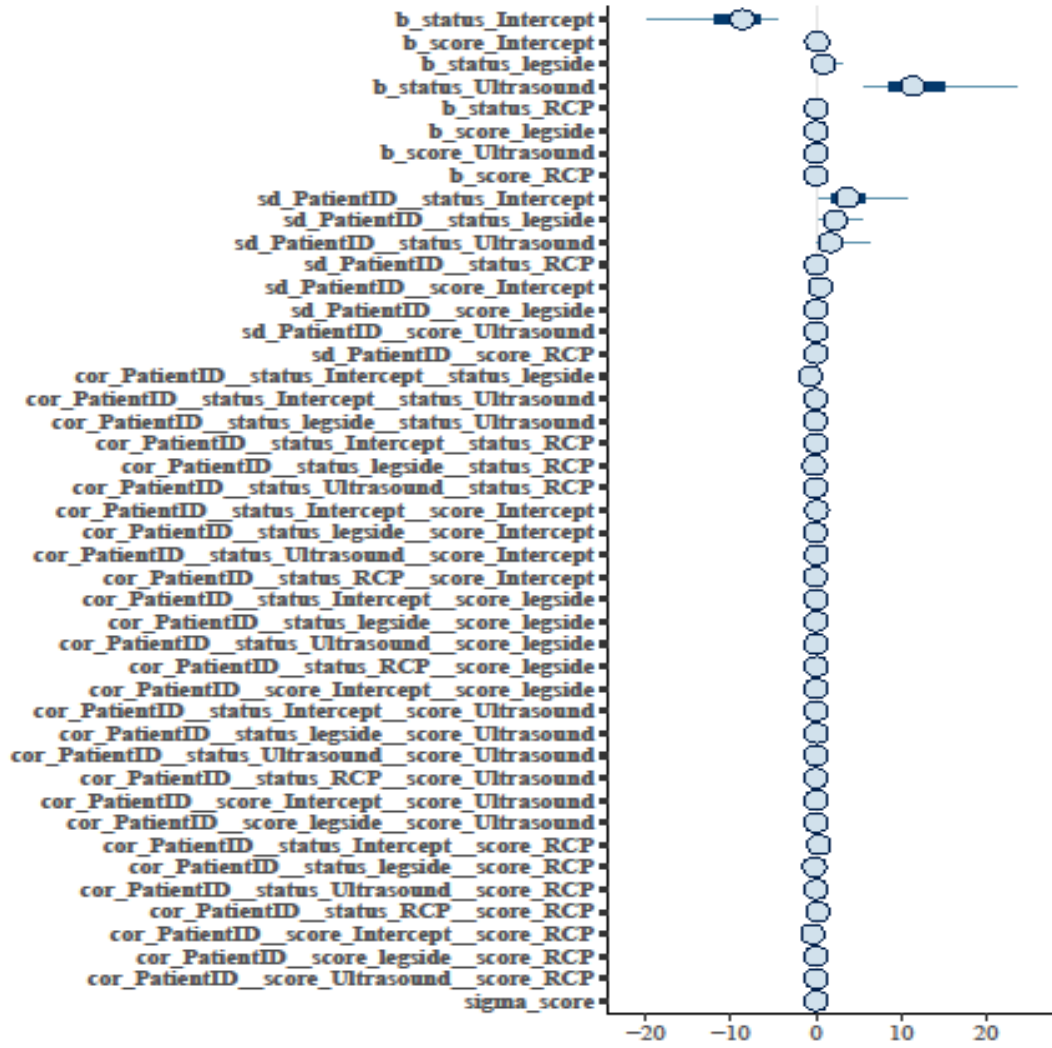
6.2. Durum III'te seçilen modellerde yakınsama ve koşullu etkilerin değerlendirilmesi



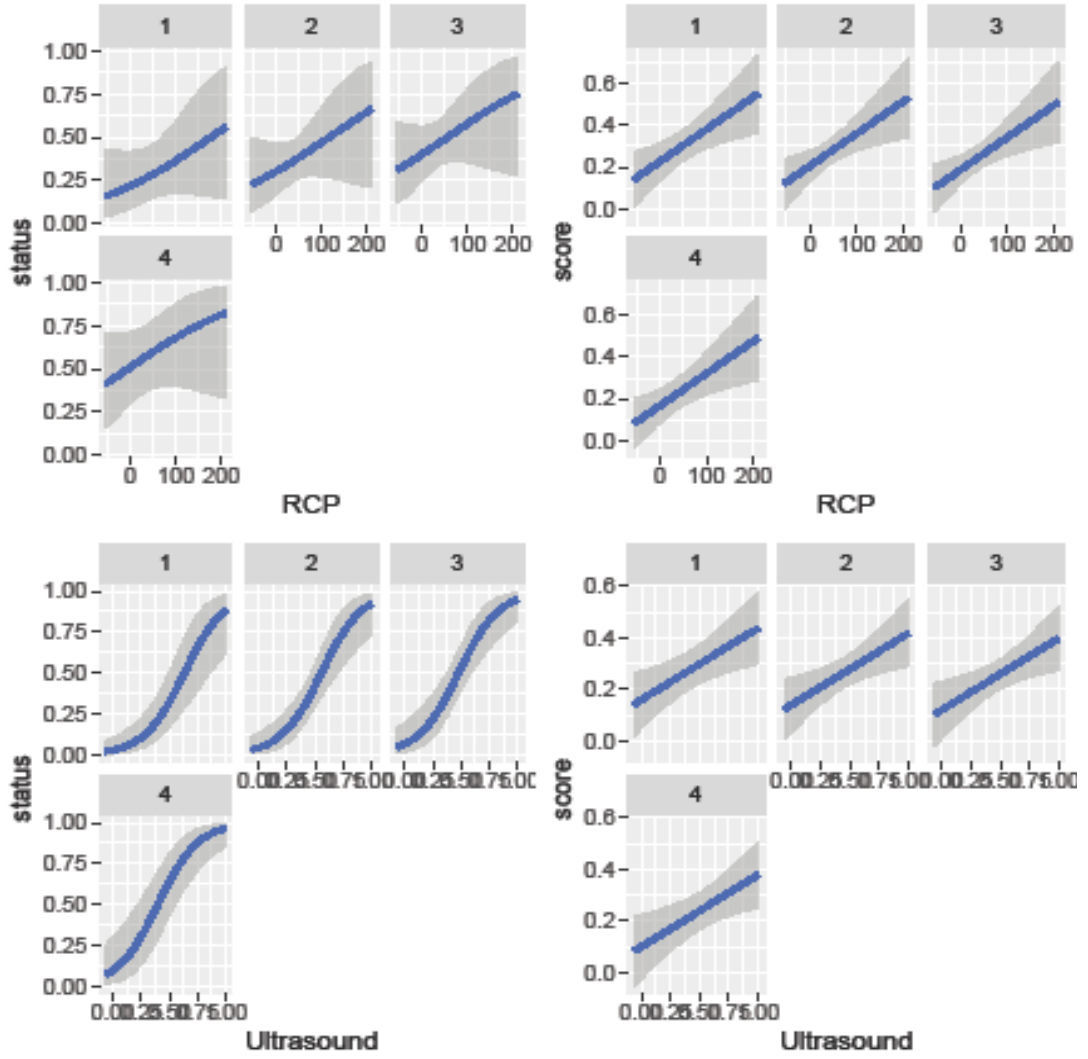
Şekil 6.1. Bayesci hiyerarşik rasgele eğitim modeli yakınsama teşhisi: Durum III



Şekil 6.2. Bayesci hiyerarşik rasgele eğitim modeli yakınsama teşhisi: Durum III



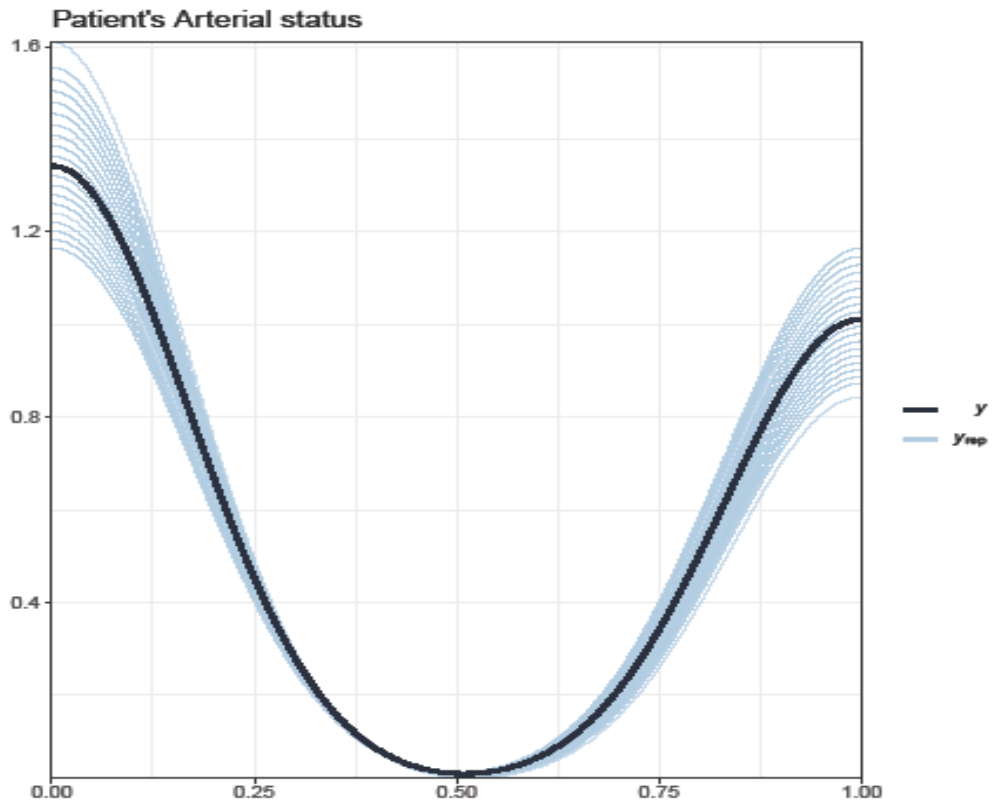
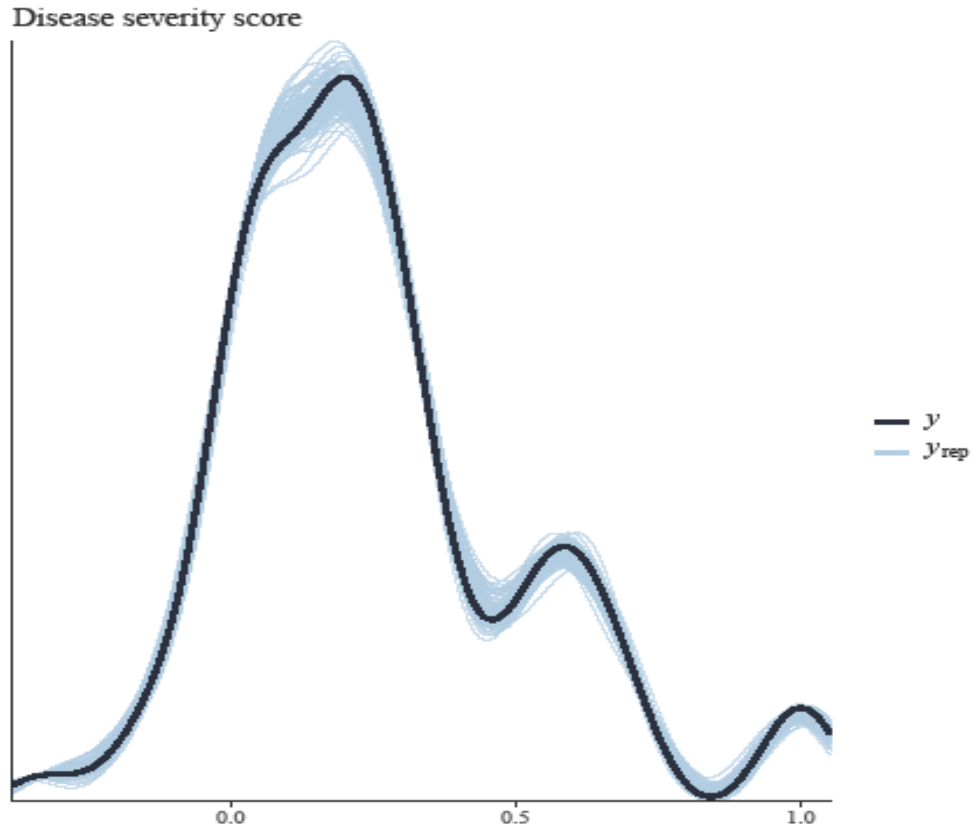
Şekil 6.3. Bayesci hiyerarşik rasgele eğime uygun model etkiler yön: Durum III



Şekil 6.4. Bayesci hiyerarşik rasgele eğim modeli marjinal tahmin etkileri: Durum III

HMC yaklaşımının en iyi yakınsaması yukarıdaki şekil 6.1 ve 6.2'de gösterilmiştir. Şekil 6.3 ve 6.4, her sabit ve rastgele terimin marjinal etkilerini göstermektedir. Buna göre, ultrason ve bacak tipi, hastaların durumu üzerinde giderek daha olumlu bir etki gösterdi, ancak hastalık şiddeti skoru üzerinde hiçbir etkisi olmamıştır.

Şekil 6.5 'e göre, rasgele eğim ve kesişim modeli iyi uyum sağlar ve neredeyse aynı sonsal gözlemlenen yoğunluk ve sonsal tahmin dağılım grafikleri üretir. Tahmin grafikleri, eklem çok değişkenli Bayesci hiyerarşik modelinde Damar Tıkanklığı Hastalıklar veri seti bağımlı değişkenlerini (hastanın hastalık durumu ve hastalık şiddeti skoru) göstermektedir.



Şekil 6.5. Gözlenen ve tahmin edilen sonuçlar üzerinde Bayesci hiyerarşik rasgele eğime uygun modeli

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Bayesci Hiyerarşik modelleri üç farklı durum için uygulanmaktadır: sürekli bağımlı değişken (durum I), kategorik bağımlı değişken (durum II) ve karışık bağımlı değişkenleri (durum III).

ACTIVE çalışmasından Toplam Hopkins Sözlü Öğrenme Test Skoru (THVLTS), yaşlı yetişkinlerin bilişsel sözel öğrenme yeteneğinin bir ölçüsü olarak kullanılabilir. Başlangıçta yetişkinlerin yaş, cinsiyet, eğitim durumu ve bilişsel durum (MMSE puanı) gibi dört demografik özelliği ölçülmüştür. Akıl yürütme yeteneği ve güçlendirici eğitim gibi bilişsel eğitimden sonra ölçülen özellikler dikkate alınmıştır. Hopkins Sözel Öğrenme Testi (HVLTS), bir bireyin farklı zaman noktalarındaki performans sonuçlarını incelemek için bir nörofizyolojik deneyin parçası olarak tekrarlı uygulanan genel bir sözel bilgi ve hafıza değerlendirmesidir. Bağımlı değişken ölçümü olarak, sözlü öğrenme ve hafıza testlerine ait çoklu deneye dayalı puanlar kabul edildi. Bulgulara göre, rasgele kesişim ve eğim modeli en iyi uyuma sahiptir. Yaş, cinsiyet, güçlendirici ve akıl yürütme yeteneği, bilişsel sözel öğrenmeyi ölçen Toplam Hopkins Sözlü Öğrenme Test Skoru (THVLTS) için ana önemli değişkenlerdir. Takviye eğitimi almanın olumlu bir tahmin edici etkisi olurken, yıllarca süren eğitimin (edu) Toplam Hopkins Sözlü Öğrenme Test Skoru (THVLTS) üzerinde olumsuz bir tahmin edici etkisi görüldü. Ayrıca, Durum I'e göre, rasgele kesişimlere ve eğimlere sahip tam hiyerarşik model, hibrit Hamiltoncu Monte Carlo yaklaşımını kullanan sözlü öğrenme testleri için (ACTIVE çalışma veri setinden) en iyi tahmin performansını elde edildi.

Daha sonra, kategorik bağımlı değişken (Durum II) ve karışık bağımlı değişken (Durum III) uygulamaları ile BHM için Damar Tıkanklığı Hastalıkları (DHT) veri seti kullanmıştır. Burada hastaların sağlık durumu ve hastalık şiddet puanları kategorik ve sürekli bağımlı değişkenler olarak kabul edildi. Bu nedenle, kategorik bağımlı değişken (Durum II) ve ortak çok değişkenli karışık (kategorik ve sürekli) bağımlı değişkenlerin (Durum III) uygulamaları için Bayesci hiyerarşik modelleri kuruldu.

Bu durumlarda, DTH gerçek veri uygulamasına dayanarak, kurulan altı model arasında, Hamiltoncu Monte Carlo algoritmasındaki rastgele katsayı modeli (Model 3) diğer modellere göre en iyi şekilde uyarılmıştır. Ayrıca, Bayesci bilgi karmaşıklığı

kriteri, Bayesci sapmasına göre daha küçük değerlere veya kurulan her model için yaygın olarak uygulanabilir bilgi kriterlerine sahiptir. Bu nedenle, Hamiltonian (Hamiltoncu) Monte Carlo (HMC) algoritması tarafından kurulan rastgele katsayı modeli, mutlak en iyi model olarak tanımlanan veya DTH veri kümesinde daha doğru olan en az ICOMP değerine sahiptir.

MZMC yaklaşımıyla her bir uygulama veri seti altında en uygun aday modeller belirlendi. Bu durumda, Hamiltoncu Monte Carlo yöntemi kullanılarak tahmin edilen hem rasgele kesişimlere hem de rasgele eğimlere sahip Bayesci hiyerarşik (karma etkili) doğrusal model, iki uygulama veri kümesine en iyi şekilde uydu. Ek olarak, bilgi karmaşıklığı kriteri, gradyan tabanlı Hamiltoncu Monte Carlo tahminine sahip hiyerarşik modellerin en uygun olduğunu ve gradyansız Gibbs örnekleme ve Metropolis-Hasting yöntemlerine göre daha yüksek yakınsamasına sahip olduğunu gösterildi.

Hiyerarşik modelleme, esneklik ve bireysel gelişime vurgu gibi çeşitli nedenlerle güçlü ve çekici bir yaklaşım olduğu için tekrarlı ölçüm verilerini analiz etmek için çekicidir. Bununla birlikte, Bayesci hiyerarşik modelleri veri doğası, önsel dağılım ve çalışmada kullanılan MZMC yaklaşımından büyük ölçüde etkilenmektedir. Böylece, tekrarlı ölçüm verilerinin hiyerarşik modellenmesinde klasik ve Bayesci istatistik okullarını karşılaştıran başka çalışmalar yapılmalıdır.

Ayrıca, varsayılanların yanı sıra, gelecekteki araştırmacılar Bayesci hiyerarşik modellerini daha çeşitli önsel dağıtımlarla uygulamalıdır.

KAYNAKLAR

- Achana, F., Gallacher, D., Oppong, R., Kim, S., Petrou, S., Mason, J., vd. (2021). Multivariate Generalized Linear Mixed-Effects Models for the Analysis of Clinical Trial-Based Cost-Effectiveness Data. *Med. Decis. Mak.* 41, 667. doi: 10.1177/0272989X211003880.
- Alfö, M., ve Giordani, P. (2022). Random effect models for multivariate mixed data: A Parafac-based finite mixture approach. *Stat. Modelling* 22, 46–66. doi: 10.1177/1471082X211037405.
- Almond, R. G. (2014). A comparison of two MCMC algorithms for hierarchical mixture models. *CEUR Workshop Proc.* 1218, 1–19.
- Alsefri, M., Sudell, M., García-Fiñana, M., ve Kolamunnage-Dona, R. (2020). Bayesian joint modelling of longitudinal and time to event data: A methodological review. *BMC Med. Res. Methodol.* 20, 94. doi: 10.1186/s12874-020-00976-2.
- Alvarez, I., Niemi, J., ve Simpson, M. (2014). BAYESIAN INFERENCE FOR A COVARIANCE MATRIX. *Conf. Appl. Stat. Agric.* doi: 10.4148/2475-7772.1004.
- Ariyo, O., Lesaffre, E., Verbeke, G., ve Quintero, A. (2019). Model selection for Bayesian linear mixed models with longitudinal data: Sensitivity to the choice of priors. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1676439>. doi: 10.1080/03610918.2019.1676439.
- Austin, P. C. (2010). Estimating Multilevel Logistic Regression Models When the Number of Clusters is Low: A Comparison of Different Statistical Software Procedures. *Int. J. Biostat.* 6. doi: 10.2202/1557-4679.1195.
- Bai, H., Zhong, Y., Gao, X., ve Xu, W. (2020). Multivariate Mixed Response Model with Pairwise Composite-Likelihood Method. *Stats* 3, 203–220. doi: 10.3390/stats3030016.
- Boik, R. J. (1988). The mixed model for multivariate repeated measures: validity conditions and an approximate test. *Psychometrika* 53, 469–486. doi: 10.1007/BF02294401.
- Bolker, M. Ben (2019). Package “broom.mixed” Title Tidying Methods for Mixed Models. Available at: <https://github.com/bbolker/broom.mixed> [Erişim Aralık 4, 2021].
- Bosker, R. J., ve Snijders, T. A. B. (2012). Multilevel analysis: An introduction to basic multilevel modeling.
- Bozdogan, H. (1988). Icomp: A new model-selection criteria.
- Bozdogan, H. (1990). On the information-based measure of covariance complexity and its application to the evaluation of multivariate linear models. *Commun. Stat. Theory Methods* 19, 221–278. doi: 10.1080/03610929008830199.
- Bozdogan, H. (2000). Akaike’s information criterion and recent developments in information complexity. *J. Math. Psychol.* 44, 62–91. doi: 10.1006/jmps.1999.1277.
- Bozdogan, H. (2009). A new class of information complexity (ICOMP) criteria with an application to customer profiling and segmentation. *Istanbul Univ. J. Sch. Bus. Adm.* 39, 370–398. Available at: www.ifdergisi.org [Erişim Kasım 22, 2021].
- Bozdogan, H., ve Haughton, D. M. A. (1998a). Informational complexity criteria for regression models. *Comput. Stat. Data Anal.* 28, 51–76. doi: 10.1016/S0167-9473(98)00025-5.
- Bozdogan, H., ve Haughton, D. M. A. D. M. A. (1998b). Informational complexity criteria for regression models. *Comput. Stat. Data Anal.* 28, 51–76. doi: 10.1016/S0167-9473(98)00025-5.
- Bürkner, P.-C. (2018). Advanced Bayesian Multilevel Modeling with the R Package brms. *R*

- J., 395–411. doi: 10.32614/RJ-2018-017.
- Bürkner, P.-C., ve Vuorre, M. (2019). Ordinal Regression Models in Psychology: A Tutorial: <https://doi.org/10.1177/2515245918823199> 2, 77–101. doi: 10.1177/2515245918823199.
- Bürkner, P. C. (2017). brms: An R package for Bayesian multilevel models using Stan. *J. Stat. Softw.* 80, 1–28. doi: 10.18637/jss.v080.i01.
- Busemeyer, J. R., ve Wang, Y. M. (2000). Model Comparisons and Model Selections Based on Generalization Criterion Methodology. *J. Math. Psychol.* 44, 171–189. doi: 10.1006/JMPS.1999.1282.
- Chen, D.-G., ve Chen, J. K. (2021). *Statistical Regression Modeling with R: Longitudinal and Multi-level Modeling*. Available at: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-67583-7>.
- Chib, S., ve Carlin, B. P. (1999). On MCMC sampling in hierarchical longitudinal models. *Stat. Comput.* 9, 17–26. doi: 10.1023/A:1008853808677.
- Congdon, P. D. (2020). *Book Bayesian Hierarchical Models: With Applications Using R Second Edition*. an Informa business: Chapman & Hall/CRC is an imprint of Taylor & Francis Group.
- Cox, D. R., ve Wermuth, N. (1992). Response models for mixed binary and quantitative variables. Oxford Academic doi: 10.1093/biomet/79.3.441.
- Depaoli, S., ve van de Schoot, R. (2017). Improving transparency and replication in Bayesian statistics: The WAMBS-Checklist. *Psychol. Methods* 22, 240–261. doi: 10.1037/MET0000065.
- Dominique, A. (2015). *Doing Bayesian Data Analysis*. doi: 10.1016/c2012-0-00477-2.
- Eager, C., ve Roy, J. (2017). Mixed Effects Models are Sometimes Terrible. doi: 10.48550/arxiv.1701.04858.
- Fieuws, S., Verbeke, G., ve Molenberghs, G. (2007). Random-effects models for multivariate repeated measures. *Stat. Methods Med. Res.* 16, 387–397. doi: 10.1177/0962280206075305.
- Fitzmaurice, G. M., ve Laird, N. M. (1997). Regression Models for Mixed Discrete and Continuous Responses with Potentially Missing Values. *Biometrics* 53, 110. doi: 10.2307/2533101.
- Ganjali, M. (2003). a Model for Mixed Continuous and Discrete Responses With Possibility of. *J. Sci. Islam. Repub. Iran* 14, 53–60. Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-MODEL-FOR-MIXED-CONTINUOUS-AND-DISCRETE-RESPONSES-Ganjali/fbad601d20ee5ce1368628a8e1ceced5f5bb85d8> [Erişim Mart 28, 2022].
- Gardini, A., Trivisano, C., ve Fabrizi, E. (2021). Bayesian Analysis of ANOVA and Mixed Models on the Log-Transformed Response Variable. *Psychometrika* 86, 619–641. doi: 10.1007/S11336-021-09769-Y/FIGURES/1.
- Gelman, A., ve Hill, J. (2006). *Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511790942.
- Goldstein, H. (2010). An Introduction to Multilevel Models. *John Wiley Sons.* 922, 1–14. doi: 10.1002/9780470973394.ch1.
- Goldstein, H., Carpenter, J., Kenward, M. G., ve Levin, K. A. (2009). Multilevel models with multivariate mixed response types. *Stat. Modelling* 9, 173–197. doi: 10.1177/1471082X0800900301.

- Gromping, U. (2015). Multilevel Modeling Using R . *J. Stat. Softw.* 62. doi: 10.18637/jss.v062.b01.
- Hadfield, J. (2017). MCMCglmm: MCMC generalised linear mixed models.
- Hadfield, J. D. (2010). MCMCglmm: Markov chain Monte Carlo methods for Generalised Linear Mixed Models.
- Hadfield, J. D. (2015). MCMCglmm Course Notes. 1443.
- Hilbe, J. M. (2009). Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models. *J. Stat. Softw.* 30, 530–548. doi: 10.18637/jss.v030.b03.
- Hofmann, D. A. (2016). An Overview of the Logic and Rationale of Hierarchical Linear Models: <https://doi.org/10.1177/014920639702300602> 23, 723–744. doi: 10.1177/014920639702300602.
- Hollands, L., Lambert, J., Price, L., Powell, D., ve Greaves, C. (2020). Ecological momentary assessment of mood and physical activity in people with depression. *J. Affect. Disord.* 271, 293–299. doi: 10.1016/j.jad.2020.03.085.
- Howe, E., Deniz, Bozdogan H, G. K. (2017). Improving transparency and replication in Bayesian statistics: The WAMBS-checklist. *Psychol. Methods* 22, 240–261. doi: 10.1037/met0000065.
- Howe, E. D., Bozdogan, H., ve Kiro, G. (2012). Performance of Information Complexity Criteria in Structural Equation Models with Applications. *Eur. J. Pure Appl. Math.* 5, 282–301.
- Hox, J. J. (2010). Multilevel analysis: Techniques and applications: Second edition. *Multilevel Anal. Tech. Appl. Second Ed.*, 1–382. doi: 10.4324/9780203852279/MULTILEVEL-ANALYSIS-JOOP-HOX-MIRJAM-MOERBEEK-RENS-VAN-DE-SCHOOT.
- Ingrisawang, L., ve Potawee, D. (2012). Multiple imputation for missing data in repeated measurements using MCMC and copulas. içinde *Lecture Notes in Engineering and Computer Science* (IMECS, Hong Kong: Vol II), 1606–1610.
- Islam, M. A., ve Chowdhury, R. I. (2017). “Analysis of Repeated Measures Data, Institute of Statistical Research and Training (ISRT) University of Dhaka, Dhaka, Bangladesh”, içinde *Springer Nature Singapore Pte Ltd* (DOI 10.1007/-10-3794-8_13), 978–981.
- Jobe, J. B., Smith, D. M., Ball, K., Tennstedt, S. L., Marsiske, M., Willis, S. L., vd. (2001). Active: A cognitive intervention trial to promote independence in older adults. *Control. Clin. Trials* 22, 453–479. doi: 10.1016/S0197-2456(01)00139-8.
- Kang, L., Kang, X., Deng, X., ve Jin, R. (2018). A Bayesian hierarchical model for quantitative and qualitative responses. *J. Qual. Technol.* 50, 290–308. doi: 10.1080/00224065.2018.1489042.
- Kapur, K., Li, X., Blood, E. A., ve Hedeker, D. (2015). Bayesian mixed-effects location and scale models for multivariate longitudinal outcomes: An application to ecological momentary assessment data. *Stat. Med.* 34, 630–651. doi: 10.1002/sim.6345.
- Kartal Koc, E., ve Bozdogan, H. (2015). Model selection in multivariate adaptive regression splines (MARS) using information complexity as the fitness function. *Mach. Learn.* 101, 35–58. doi: 10.1007/s10994-014-5440-5.
- Korner-Nievergelt, F., Roth, T., von Felten, S., Guélat, J., Almasi, B., ve Korner-Nievergelt, P. (2015). Markov Chain Monte Carlo Simulation. *Bayesian Data Anal. Ecol. Using Linear Model. with R, BUGS, STAN*, 197–212. doi: 10.1016/b978-0-12-801370-0.00012-5.
- Kruschke, J. K. (2014). *Doing Bayesian data analysis: A tutorial with R, JAGS, and Stan*,

- second edition*. 2. baskı Elsevier Science doi: 10.1016/B978-0-12-405888-0.09999-2.
- Kruschke, J. K., ve Vanpaemel, W. (2015). Bayesian estimation in hierarchical models. *Oxford Handb. Comput. Math. Psychol.*, 279–299.
- Lages, M., ve Scheel, A. (2016). Logistic mixed models to investigate implicit and explicit belief tracking. *Front. Psychol.* 7, 1681. doi: 10.3389/fpsyg.2016.01681.
- Laird, N. M., ve Ware, J. H. (1982). Random-Effects Models for Longitudinal Data. *Biometrics* 38, 963. doi: 10.2307/2529876.
- Leckie, G., ve Charlton, C. (2013). Runmlwin: A program to run the MLwiN multilevel modeling software from within Stata. *J. Stat. Softw.* 52, 1–40. doi: 10.18637/jss.v052.i11.
- Lemoine, N. P. (2019). Moving beyond noninformative priors: why and how to choose weakly informative priors in Bayesian analyses. *Oikos* 128, 912–928. doi: 10.1111/oik.05985.
- Leyland, A. H., ve Groenewegen, P. P. (2020). *Multilevel Modelling for Public Health and Health Services Research*. Springer International Publishing doi: 10.1007/978-3-030-34801-4.
- Li, Q., Pan, J., ve Belcher, J. (2016). Bayesian inference for joint modelling of longitudinal continuous, binary and ordinal events. *Stat. Methods Med. Res.* 25, 2521–2540. doi: 10.1177/0962280214526199.
- Li, Y., Clyde, M. A., Berger, J. O., Iversen, E. S., ve Hauser, E. R. (2013). Bayesian Hierarchical Models for Model Choice. Available at: <https://dukespace.lib.duke.edu/dspace/handle/10161/8063> [Erişim Kasım 30, 2021].
- Link, W. A., ve Sauer, J. R. (2016). Bayesian cross-validation for model evaluation and selection, with application to the North American Breeding Bird Survey. *Ecology* 97, 1746–1758. doi: 10.1515/aiht-2015-66-26.
- Liu, H. H. H. H. (2000). Efficiency of Markov chain Monte Carlo algorithms for Bayesian inference in random regression models. *Retrospect. Theses Diss.* 12347. Available at: <https://lib.dr.iastate.edu/rtd/12347>.
- Liu, X. (2016a). Linear mixed-effects models. *Methods Appl. Longitud. Data Anal.*, 61–94. doi: 10.1016/B978-0-12-801342-7.00003-4.
- Liu, X. (2016b). Longitudinal transition models for categorical response data. *Methods Appl. Longitud. Data Anal.*, 379–410. doi: 10.1016/b978-0-12-801342-7.00012-5.
- Luo, S., ve Wang, J. (2014). Bayesian hierarchical model for multiple repeated measures and survival data: An application to Parkinson’s disease. *Stat. Med.* 33, 4279–4291. doi: 10.1002/sim.6228.
- Maas, C. J. M., ve Snijders, T. A. B. (2003). The Multilevel Approach to Repeated Measures for Complete and Incomplete Data. *Qual. Quant.* 37, 71–89. doi: 10.1023/A:1022545930672.
- MacCallum, R. C., Kim, C., Malarkey, W. B., ve Kiecolt-Glaser, J. K. (1997). Studying multivariate change using multilevel models and latent curve models. *Multivariate Behav. Res.* 32, 215–253. doi: 10.1207/s15327906mbr3203_1.
- Mai, Y., ve Zhang, Z. (2018). Software Packages for Bayesian Multilevel Modeling. *Struct. Equ. Model.* 25, 650–658. doi: 10.1080/10705511.2018.1431545.
- Mastrangelo, C. M. (2011). *Multilevel Statistical Models, 4th edition*. A John Wiley and Sons, Ltd., Publication doi: 10.1080/00224065.2011.11917872.
- Matsuyama, Y., ve Ohashi, Y. (1997). Mixed models for bivariate response repeated

- measures data using Gibbs sampling. *Stat. Med.* 16, 1587–1601. doi: 10.1002/(SICI)1097-0258(19970730)16:14<1587::AID-SIM592>3.0.CO;2-L.
- McElreath, R. (2018a). *Statistical rethinking: A bayesian course with examples in R and stan*. 2. baskı Chapman and Hall/CRC doi: 10.1201/9781315372495.
- McElreath, R. (2018b). Statistical Rethinking. *Stat. Rethink*. doi: 10.1201/9781315372495.
- Neal, R. M. (2011). “Handbook of Markov Chain Monte Carlo”, içinde *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (CRC Press.), 1–592. doi: 10.1201/b10905.
- Nicenboim, B., ve Vasishth, S. (2016). Statistical methods for linguistic research: Foundational Ideas—Part II. *Lang. Linguist. Compass* 10, 591–613. doi: 10.1111/LNC3.12207.
- Nishio, M., ve Arakawa, A. (2019). Performance of Hamiltonian Monte Carlo and No-U-Turn Sampler for estimating genetic parameters and breeding values. *Genet. Sel. Evol.* 51, 73. doi: 10.1186/s12711-019-0515-1.
- Percy, D. F. (1992). Blocked Arteries and Multivariate Regression. *Biometrics* 48, 683. doi: 10.2307/2532336.
- Peter, D. C. (2010). *Applied bayesian hierarchical methods*. an Informa business: Chapman & Hall/CRC is an imprint of Taylor & Francis Group doi: 10.1201/9781584887218.
- Polson, N. G., ve Scott, J. G. (2012). On the half-cauchy prior for a global scale parameter. *Bayesian Anal.* 7, 887–902. doi: 10.1214/12-BA730.
- Rasbash, J., Steele, F., Browne, W. J., ve Goldstein, H. (2020). *A User’s Guide to MLwiN, v3.05*. University of Bristol: Centre for Multilevel Modelling.
- Raudenbush, S. W., ve Bryk, A. S. (2002). Hierarchical linear models : applications and data analysis methods. 485.
- Rolfe, M. (2010). Bayesian Models for Longitudinal Data. *Queensl. Univ. Technol. Discip. Math. Sci.*, 293.
- Roos, M., Martins, T. G., Held, L., ve Rue, H. (2015). Sensitivity analysis for Bayesian hierarchical models. *Bayesian Anal.* 10, 321–349. doi: 10.1214/14-BA909.
- Ryoo, J. H. (2011). Model selection with the linear mixed model for longitudinal data. *Multivariate Behav. Res.* 46, 598–624. doi: 10.1080/00273171.2011.589264.
- Sammel, M., Lin, X., ve Ryan, L. (1999). Multivariate linear mixed models for multiple outcomes. *Stat. Med.* 18, 2479–2492. doi: 10.1002/(sici)1097-0258(19990915/30)18:17/18<2479::aid-sim270>3.0.co;2-f.
- Scott, M. A., Simonoff, J. S., ve Marx, B. D. (2013). *The SAGE handbook of multilevel modeling*. SAGE Publications Inc. doi: 10.4135/9781446247600.
- Sengupta, B., Friston, K. J., ve Penny, W. D. (2015). Gradient-free MCMC methods for dynamic causal modelling. *Neuroimage* 112, 375–381. doi: 10.1016/j.neuroimage.2015.03.008.
- Shang, J. (2016). A diagnostic of influential cases based on the information complexity criteria in generalized linear mixed models. *Commun. Stat. - Theory Methods* 45, 3751–3760. doi: 10.1080/03610926.2014.911902.
- Song, Y., Nathoo, F. S., ve Masson, M. E. J. (2017). A Bayesian approach to the mixed-effects analysis of accuracy data in repeated-measures designs. *J. Mem. Lang.* 96, 78–92. doi: 10.1016/j.jml.2017.05.002.
- Sperling, M. (2010). The Mixed Model for Multivariate Repeated Measures.
- Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P., ve Van Der Linde, A. (2002). Bayesian

- measures of model complexity and fit. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* 64, 583–616. doi: 10.1111/1467-9868.00353.
- Stoffers, H. E. J. H., Kester, A. D. M., Kaiser, V., Rinkens, P. E. L. M., ve Knottnerus, J. A. (1997). Diagnostic value of signs and symptoms associated with peripheral arterial occlusive disease seen in general practice: a multivariable approach. *Med. Decis. Making* 17, 61–70. doi: 10.1177/0272989X9701700107.
- Suesse, T., ve Liu, I. (2013). Modelling strategies for repeated multiple response data. *Int. Stat. Rev.* 81, 230–248. doi: 10.1111/insr.12015.
- Tan, M., Tian, G. L., ve Wang Ng, K. (2006). Hierarchical models for repeated binary data using the IBF sampler. *Comput. Stat. Data Anal.* 50, 1272–1286. doi: 10.1016/j.csda.2004.12.006.
- Tango, T. (2017). *Repeated measures design with generalized linear mixed models for randomized controlled trials*. Minato-ku Tokyo, Japan: Center for Medical Statistics doi: 10.1201/9781315152097.
- Tate, R. L., ve Pituch, K. A. (2007). Multivariate hierarchical linear modeling in randomized field experiments. *J. Exp. Educ.* 75, 317–337. doi: 10.3200/JEXE.75.4.317-338.
- Terzi, E., ve Cengiz, M. A. (2013). Bayesian hierarchical modeling for categorical longitudinal data from sedation measurements. *Comput. Math. Methods Med.* 2013. doi: 10.1155/2013/579214.
- Tidemann-Miller, B., Reich, B., ve Staicu, A.-M. (2016). Modeling Multivariate Mixed-Response Functional Data.
- Twisk, J. W. (2006). *Applied Multilevel Analysis: A Practical Guide for Medical Researchers*. Cambridge University Press.
- Vehtari, A., Gelman, A., Simpson, D., Carpenter, B., ve Burkner, P. C. (2021). Rank-Normalization, Folding, and Localization: An Improved (Formula presented) for Assessing Convergence of MCMC (with Discussion)*†. *Bayesian Anal.* 16, 667–718. doi: 10.1214/20-BA1221.
- Vehtari, A., ve Gelman, A. (2014). WAIC and cross-validation in Stan. *arXiv*, 1–15. Available at: http://www.stat.columbia.edu/~gelman/research/unpublished/waic_stan.pdf [Erişim Kasım 15, 2021].
- Vehtari, A., Gelman, A., ve Gabry, J. (2017). Practical Bayesian model evaluation using leave-one-out cross-validation and WAIC. *Stat. Comput.* 27, 1413–1432. doi: 10.1007/s11222-016-9696-4.
- Vehtari, A., Simpson, D. P., Yao, Y., ve Gelman, A. (2018). Limitations of “Limitations of Bayesian Leave-one-out Cross-Validation for Model Selection”. *Comput. Brain Behav.* 2019 21 2, 22–27. doi: 10.1007/S42113-018-0020-6.
- Wand, M. P. (2007). Fisher information for generalised linear mixed models. *J. Multivar. Anal.* 98, 1412–1416. doi: 10.1016/J.JMVA.2007.01.001.
- Wang, W. L., ve Fan, T. H. (2012). Bayesian analysis of multivariate t linear mixed models using a combination of IBF and Gibbs samplers. *J. Multivar. Anal.* 105, 300–310. doi: 10.1016/j.jmva.2011.10.006.
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *J. Mach. Learn. Res.* 11, 3571–3594. Available at: <http://jmlr.org/papers/v11/watanabe10a.html> [Erişim Aralık 5, 2021].
- Williams, D. R., Martin, S. R., Liu, S., ve Rast, P. (2020). Bayesian Multivariate Mixed-

- Effects Location Scale Modeling of Longitudinal Relations among Affective Traits, States, and Physical Activity. *Eur. J. Psychol. Assess.* 36, 981–997. doi: 10.1027/1015-5759/a000624.
- Xin, X., ve Qiu, F. (2017). Multiple-response repeated measurement or multivariate growth curve model with distribution-free errors. *https://doi.org/10.1080/03610926.2017.1300273* 46, 12370–12386. doi: 10.1080/03610926.2017.1300273.
- Yao, Y., ve Stephan, K. E. (2021). Markov chain Monte Carlo methods for hierarchical clustering of dynamic causal models. *Hum. Brain Mapp.* 42, 2973. doi: 10.1002/HBM.25431.
- Yimer, B. B., ve Shkedy, Z. (2021). Bayesian inference for generalized linear mixed models: A comparison of different statistical software procedures. *https://doi.org/10.1080/27658449.2021.1896102* 8, 1896102. doi: 10.1080/27658449.2021.1896102.
- Yucel, R. M. (2011). Random covariances and mixed-effects models for imputing multivariate multilevel continuous data. *Stat. Modelling* 11, 351–370. doi: 10.1177/1471082X1001100404.
- Zhang, C., Li, Z., Shen, Z., ve Xie, J. (2021). A Hybrid Stochastic Gradient Hamiltonian Monte Carlo Method A Hybrid Stochastic Gradient Hamiltonian Monte Carlo Method. 1–2.
- Zhang, E., Zhang, Z., Parker, R. M. A. A., Charlton, C. M. J. J., Leckie, G., ve Browne, W. J. (2016). R2MLwiN: A package to run MLwiN from within R. *J. Stat. Softw.* 72, 1–43. doi: 10.18637/jss.v072.i10.
- Zhang, M. Z. (2014). Package “R2MLwiN”. Available at: <http://www.bristol.ac.uk/cmm/software/mlwin/> [Erişim Aralık 1, 2021].
- Zhuge, Y., Qian, H., Zheng, X., Huang, C., Zhang, Y., Li, B., vd. (2020). Effects of parental smoking and indoor tobacco smoke exposure on respiratory outcomes in children. *Sci. Reports 2020 101* 10, 1–9. doi: 10.1038/s41598-020-60700-4.

ÖZ GEÇMİŞ

Endris Assen EBRAHİM, Memehir Akalewold Lisesi'ni bitirdikten sonra Hawassa Üniversitesi Fen Bilimler Fakültesi, İstatistik bölümünden 15.07.2009 tarihinde mezun oldu. 2013 yılında Hawassa Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına bitirdi.2018 OMÜ LEE İstatistik Ana Bilim Dalı doktora programına başladı. Mezuniyetinden bu yana öğretim üyesi olarak görev yapan Endris Assen EBRAHİM, orta derecede İngilizce ve Türkçe bilmektedir. Temel ilgi alanları, Hesaplamalı İstatistikler, Uygulamalı İstatistikler ve modelleme.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : [0000-0002-8959-6052](https://orcid.org/0000-0002-8959-6052)

Yayımlar:

1. Ebrahim EA and Cengiz MA (2022) Predicting Verbal Learning and Memory Assessments of Older Adults Using Bayesian Hierarchical Models. *Front. Psychol.* 13:855379. doi: 10.3389/fpsyg.2022.855379
2. Ebrahim EA and Biru BZ (2022) Multivariate Analysis of Drivers of Migration, Challenges, and Prediction of Future Scenarios of Female Ethiopian Return Migrants From the Middle East. *Front. Appl. Math. Stat.* 8:870111. doi: 10.3389/fams.2022.870111
3. EBRAHİM EA ve CENGİZ MA (2021, Kasım). "Effect Of Maternal Smoking On Children's Wheezing Status At Different Ages: A Bayesian Hierarchical Logistic Regression Model". 5. BALKAN ULUSLARARASI UYGULAMALI BİLİMLER KONGRESİ, EDİRNE, ISBN: 978-625-7341-75-2.
4. EBRAHİM EA ve CENGİZ MA (2021, November). "Bayesian Hierarchical Modeling with Hybrid Hamiltonian Monte Carlo Method for Hopkins Verbal Learning Test Scores". BALKAN SUMMIT 5th INTERNATIONAL APPLIED SCIENCES CONGRESS, EDİRNE, ISBN: 978-625-7341-75-2.

Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar

1. Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı (YTB) doktora bursu, 2017