T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KUADRATİK HESAP TARZI ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Havanur ÇOBAN

Danışman
Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

SAMSUN
2021

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KUADRATİK HESAP TARZI ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

HAVANUR ÇOBAN

Danışman
Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Havanur ÇOBAN tarafından, **Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR** danışmanlığında hazırlanan **"Kuadratik Hesap Tarzı Üzerine"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 25.11.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**İmza**	**Sonuç**
Başkan **(Danışman)**	Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Prof. Dr. İlker ERYILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Oğuz OĞUR Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
… / … / …
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3.bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

15 /11 / 2021
Havanur ÇOBAN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Kuadratik Hesap Tarzı Üzerine

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 15.11.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 29

Tek kaynak oranı : % 4 çıkmıştır.

15 / 11 / 2021
Birsen SAĞIR DUYAR

ÖZET

KUADRATİK HESAP TARZI ÜZERİNE
Havanur ÇOBAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans, Kasım/2021
Danışman: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

Grossman ve Katz non-Newtonian Calculus adlı çalışmasında kuadratik, anakuadratik, bikuadratik gibi dalları içeren Newtonyen olmayan hesap tarzını (kalkülüsü) tanıtmışlardır. Dört bölümden oluşan bu tezin amacı kuadratik hesap tarzında temel analiz özelliklerini incelemektir. İlk bölümde genel olarak Newtonyen olmayan hesap tarzına göre literatür özetlenmiştir.

İkinci bölümde Newtonyen olmayan kalkülüsün bir alt dalı olan geometrik aritmetik tanıtılıp geometrik reel sayılar ve özellikleri verilmiştir. Tezin bulgular kısmını oluşturan üçüncü bölümünde ise kuadratik hesap tarzı tanıtılıp kuadratik reel sayılar ve temel özellikleri elde edilmiştir. Kuadratik mutlak değer tanımlanıp özellikleri verilmiştir. Buna ek olarak kuadratik üçgen eşitsizliği ve kuadratik Minkowski eşitsizlikleri ifade ve ispat edilmiştir. Kuadratik aritmetiğe göre bazı topolojik temel kavramlara değinilmiştir. Çalışma boyunca kuadratik aritmetiğe kısaca q-aritmetik denildiği dikkate alınırsa; q-dizi, q-Cauchy dizisi, kuadratik bir dizinin q-sınırlılığı, q-dizilerde q-yakınsama, q-yığılma noktası, q-limit kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı temel teoremlere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kuadratik kalkülüs, Kuadratik eşitsizlikler, Kuadratik kalkülüste cebirsel yapılar.

ABSTRACT

A NOTE ON QUADRATIC CALCULUS

Havanur ÇOBAN
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, November/2021
Supervisor**:** Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

Grossman and Katz introduced non-Newtonian calculation style (calculus), which includes branches such as quadratic, anaquadratic, and biquadratic in their study called non-Newtonian Calculus. The aim of this thesis, which consists of four parts, is to examine the basic analysis features in the quadratic calculus style. In the first part, the literature is summarized according to the non-Newtonian calculation style.

In the second part, geometric arithmetic, which is a sub-branch of non-Newtonian calculus, is introduced and geometric real numbers and their properties are given. In the third part, which is the findings part of the thesis, the quadratic calculation style is introduced and the quadratic real numbers and their basic properties are obtained. Quadratic absolute value is defined, its properties are given. In addition, the quadratic triangle inequality and the quadratic Minkowski inequality are expressed and proven. Some topological basic concepts are mentioned. Considering that throughout the study, quadratic arithmetic is briefly called q-arithmetic; the concepts of q-sequence, q-Cauchy sequence, q-boundedness of a quadratic sequence, q-convergence in q-sequences, q-limit point, q-limit are introduced. In addition, some basic theorems related to these concepts are given.

Keywords: Quadratic calculus, Quadratic inequalities, Algebraic structures with respect to quadratic calculus.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasında ve çalışılması sürecinde hiçbir zaman desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen, ihtiyacım olan her an değerli vaktini ayıran, fikirlerinden, karakterinden ve deneyimlerinden çok şey öğrendiğim kıymetli hocam Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni bugünlere getiren, hayatın her anında beni destekleyen, bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kasım 2021

Havanur ÇOBAN
Matematik Öğretmeni

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}_{\alpha}$	: Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{q}$	: Kuadratik reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}(G)$	: Geometrik reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{q}$	: Kuadratik tam sayılar kümesi
$\dot{x}^{p_q}$	: Kuadratik üs
$\sqrt{\dot{x}}^{q}$	: Kuadratik karekök
$\left\|\dot{x}\right\|_{q}$	: Kuadratik mutlak değer
${}^{q}\lim$	: Kuadratik limit

TABLOLAR DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kalkülüsün keşfi, matematikte ve diğer bilim dallarında bütünüyle yeni ufuklar açmıştır. Bu zaman diliminde çoğu bilim insanı sonsuzluk ve limit kavramlarını yorumlamaya çalışmışlardır. Bu kavramların üzerine ciddi tartışmaların ve fikir ayrılıklarının yaşandığı bu dönemde yani 17. yüzyılın sonlarına doğru Newton ve Leibniz'in birbirlerinden habersiz bir şekilde ortaya attıkları bazı düşünceler, çoğu bilim insanı tarafından heyecanla ve biraz da tereddütle karşılanmıştır. Bu süreç kalkülüsün gelişimini daha da hızlandırıp fen ve teknoloji alanında kendini hissettirmeye başlamıştır.

1967-1970 yılları arasında Grossman ve Katz klasik hesap tarzına bir alternatif olarak yeni bir hesap tarzı (kalkülüs) inşa etmişlerdir. Daha sonraki yıllarda Grossman bu yapıları genişleterek geometrik, kuadratik ve harmonik hesap sınıflarını oluşturmuştur . Bu sınıfların tümünü içine alan yapıya Newtonyen olmayan hesap tarzı (non-Newtonian calculus) adı verilmiştir. Klasik hesap tarzına göre bilinen tanım ve özellikler Newtonyen olmayan hesap sınıfı içinde bir karşılığa sahiptir.

Son yirmi yılda mühendislik, fen ve teknoloji, iktisadi ve ekonomik yapılar ve matematiğin çoğu dalında ciddi çalışmalar artış göstermiştir.

Bu çalışmada Newtonyen olmayan hesap tarzının bir türü olan kuadratik hesap tarzının temel özellikleri ve bu yapının klasik hesap tarzıyla olan ilişkisi incelenmiştir. İlk olarak $\alpha = q(x)$ üretecine bağlı olarak $\mathbb{R}_q$ tanıtılmıştır. Klasik aritmetikteki temel tanım ve eşitsizliklerin kuadratik hesaptaki karşılığına ulaşılmıştır. Kuadratik mutlak değer tanımlanmış ve bu kalkülüsü göre mutlak değerli bazı eşitsizlikler ispatlanmıştır. Kuadratik üçgen eşitsizliği ve kuadratik minkowski eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir. Kuadratik aritmetiğe göre bazı topolojik temel kavramlara değinilmiştir. Çalışma boyunca kuadratik aritmetiğe kısaca q-aritmetik denildiği dikkate alınırsa; q-dizi, q-Cauchy dizisi, kuadratik bir dizinin q-sınırlılığı, q-dizilerde q-yakınsama, q-yığılma noktası, q-limit kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı temel teoremlere yer verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan temel kavramlar, tanım, teorem ve gösterimlere yer verilecektir.

2.1. Aritmetik Sistem

Tanım kümesi $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesi olan bir tam sıralı cisim ve bu cisim üzerinde tanımlanan cebirsel ifadelerle elde edilen yapıya aritmetik sistem denir. Genel olarak α ile gösterilen üreteç fonksiyonu $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinden $A \subset \mathbb{R}$ alt kümesine giden bire bir, örten bir dönüşümdür. I birim fonksiyonu ve e^x exp fonksiyonu birer üreteç fonksiyonudur.

Tablo 2.1. *-Kalkülüs

*-Kalkülüs	α	β
Klasik	I	I
Geometric	I	exp
Anageometrik	exp	I
Bigeometrik	exp	exp
Kuadratik	I	q
Anakuadratik	q	I
Bikuadratik	q	q
Harmonik	I	h
Anaharmonik	h	I
Biharmonik	h	h

Grossman ve Katz keyfi seçilmiş iki üreteç fonksiyonları yardımıyla *-kalkülüsü tanımlamışlardır. *-Kalkülüste genelde α-aritmetik tanım kümesi, β-aritmetik de değer kümesi için kullanılır.

Fonksiyonların tanım kümesi *-kalkülüse göre α-aritmetik üzerinde, değer kümesi ise β-aritmetik üzerindedir.

Bu kısımda Grossman ve Katz takip edilerek Newtonyen olmayan hesap tarzına göre temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. (α-Aritmetik) α, tanım kümesi $A \subset \mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ olan bir üreteç olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}$ ve $\dot{/}$ işlemleri ile $\dot{<}$ sıralama bağıntısı aşağıda ifade edilen aritmetiğe bir α- aritmetik denir.

Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için;

$$\alpha - toplama \qquad x \dot{+} y = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\right\}$$

$$\alpha - çıkarma \qquad x \dot{-} y = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\right\}$$

$$\alpha - çarpma \qquad x \dot{\times} y = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\right\}$$

$$\alpha - bölme\left(y \neq \dot{0}\right) \qquad x \dot{/} y = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) / \alpha^{-1}(y)\right\}$$

$$\alpha - sıralama \qquad x \dot{<} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

$\left(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{<}\right)$ tam sıralı bir cisim olup α - aritmetik oluşturur. (Grossman ve Katz, 1972)

Klasik aritmetikteki her bir işlemin doğal bir karşılığını α -aritmetikte bulmak mümkündür. Şimdi bunun üzerinde duralım.

Her $y \in \mathbb{R}_\alpha$ için ,

$y \dot{+} \dot{0} = y$ ve $y \dot{\times} \dot{1} = y$

ise $\dot{0}$ (α -sıfır) ve $\dot{1}$ (α -bir) sayılarına sırasıyla toplama ve çarpmaya göre birim eleman denir.

Ayrıca $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için $\dot{0} \dot{<} x$ ise x sayısına α -pozitif sayı, $x \dot{<} \dot{0}$ ise x sayısına α -negatif sayı denir. Dolayısıyla α -tamsayılar $\mathbb{Z}_\alpha$ ile gösterilir ve her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\dot{-}\dot{n} = \dot{0} \dot{-} \dot{n} = \alpha(-n)$$

ve

$$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{..., \dot{-}\dot{2}, \dot{-}\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, ...\right\} = \left\{..., \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), ...\right\}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{\dot{n} \mid \dot{n} = \alpha(n), n \in \mathbb{Z}\right\}$ şeklinde yazılır.

2.2. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi ve Özellikleri

Bu kısımda Grossman ve Katz (Grossman ve Katz, 1972) çalışmasından yararlanılarak $\mathbb{R}_\alpha$ reel cismi üzerinde bazı temel kavramlar ve önemli bazı eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}_\alpha$ ile gösterilen Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi , $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlanır. (Grossman ve Katz, 1972). $\mathbb{R}^+{}_\alpha$ Newtonyen olmayan pozitif reel sayı kümesini , $\mathbb{R}^-{}_\alpha$ ise Newtonyen olmayan negatif reel sayı kümesini temsil eder. Eğer $x \dot{>} \alpha(0)$ ise x Newtonyen olmayan pozitif reel sayı, $x \dot{<} \alpha(0)$ ise x Newtonyen olmayan negatif reel sayı ve $x = \alpha(0)$ ise x işaretsiz Newtonyen olmayan reel sayı olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}_\alpha$ da $\dot{+}$ toplama ve $\dot{\times}$ çarpma ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\dot{+} : \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$$

$$(x, y) \to x \dot{+} y = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\right\}$$

$$\dot{\times} : \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$$

$$(x, y) \to x \dot{\times} y = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\right\}$$

Teorem 2.2.2. $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{\times})$ tam sıralı cisimdir. (Duyar ve Erdoğan, 2016) (Başar ve Çakmak, 2012).

Önerme 2.2.3. $a, b, c, d \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

1) $a \dot{\le} b$ ise $a \dot{+} c \dot{\le} b \dot{+} c$ ve $a \dot{-} c \dot{\le} b \dot{-} c$,

2) $a \dot{\le} b$ ve $c \dot{\le} d$ ise $a \dot{+} c \dot{\le} b \dot{+} d$ ve $a \dot{-} d \dot{\le} b \dot{-} c$,

3) $a \dot{\le} b$ ve $\dot{0} \dot{<} c$ ise $a \dot{\times} c \dot{\le} b \dot{\times} c$ ve $\frac{a}{c}\alpha \dot{\le} \frac{b}{c}\alpha$,

4) $\dot{0} \dot{<} a, b$ ve $a \dot{\le} b$ ise $\frac{\dot{1}}{b}\alpha \dot{\le} \frac{\dot{1}}{a}\alpha$

5) $a \dot{\le} b$ ise $\dot{0} \dot{-} b \dot{\le} \dot{0} \dot{-} a$ olur.

Tanım 2.2.4. Herhangi $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısı için x in α-karesi $x^{\dot{2}} = x \dot{\times} x$, α-karekökü $\dot{\sqrt{x}}$ ile gösterilir ve α-karesi x e eşit olan α-negatif olmayan sayı olarak tanımlanır.

Yani $t^{\dot{2}} = x \Leftrightarrow t = \dot{\sqrt{x}}$ olan sayıdır. Her α-negatif olmayan t sayısı için $\dot{\sqrt{x}}$ sembolü $t = \alpha\left\{\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\right\}$ sayısını göstermek için kullanılır.

Benzer düşünceyle $x \in \mathbb{R}_\alpha$ nın ve p. Newtonyen olmayan üssü ve q. Newtonyen olmayan kökü sırasıyla $x^{\dot{p}}$ ve $\sqrt[\dot{q}]{x}$ sembolü ile gösterilir. Buna göre;

$$x^{\dot{2}} = x \dot{\times} x = \alpha\left\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)\right\} = \alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(x)\right]^2\right\}$$

$$x^{\dot{3}} = x^{\dot{2}} \dot{\times} x = \alpha\left\{\alpha^{-1}\left\{\alpha\left[\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)\right]\right\}\alpha^{-1}(x)\right\} = \alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(x)\right]^3\right\}$$

$$\vdots$$

$$x^{\dot{p}} = x^{(\dot{p-1})} \dot{\times} x = \alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(x)\right]^p\right\}$$

$$\vdots$$

olarak tanımlanır. (Başar ve Çakmak, 2012)

Tanım 2.2.5. Bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının α-mutlak değeri $|x|_\alpha$ ile gösterilir ve

$$|x|_\alpha = \begin{cases} x & , x \dot{>} \dot{0} \\ \dot{0} & , x = \dot{0} \\ \dot{0} \dot{-} x & , x \dot{<} \dot{0} \end{cases} \qquad \text{yani} \qquad |x|_\alpha = \begin{cases} x & , x \dot{>} \alpha(0) \\ \alpha(0) & , x = \alpha(0) \\ \alpha(0) \dot{-} x & , x \dot{<} \alpha(0) \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanır. Buna göre $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$\dot{\sqrt{x^{\dot{2}}}} = |x|_\alpha = \alpha\left(\left|\alpha^{-1}(x)\right|\right)$ olur. (Grossman ve Katz, 1972).

2.3. Geometrik Aritmetik ve Geometrik Reel Sayılar

Bu kısımdaki geometrik kalkülüs üzerine tanıtılan temel kavram ve özelliklerde (Boruah, 2016), (Boruah, 2017), (Hazarika, 2016), (Türkmen, 2011) kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.3.1. Her üreteç tek bir aritmetik oluşturur ve her aritmetik de tek bir üreteç tarafından oluşturulur. α -üreteci ; $\alpha(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ ve $\alpha^{-1}(x)=\ln x$ ile tanımlanmış üstel fonksiyon olarak seçilirse α -aritmetik aşağıdaki gibi tanımlanan geometrik aritmetiği ortaya çıkarır.

$x\in\mathbb{R}$ ve $\dot{x}\in\mathbb{R}(G)$ için $\alpha(x)=e^x$, $\alpha^{-1}(x)=\ln x$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki işlemler yazılır.

geometrik-toplam $\quad \dot{x}\oplus\dot{y}=\alpha\left[\alpha^{-1}(\dot{x})+\alpha^{-1}(\dot{y})\right]=\alpha\left(x+y\right)=e^{x+y}=e^x.e^y$

geometrik-çıkarma $\quad \dot{x}\ominus\dot{y}=\alpha\left[\alpha^{-1}(\dot{x})-\alpha^{-1}(\dot{y})\right]=\alpha\left(x-y\right)=e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y},\dot{y}\neq 0$

geometrik-çarpma $\quad \dot{x}\odot\dot{y}=\alpha\left[\alpha^{-1}(\dot{x})\times\alpha^{-1}(\dot{y})\right]=\alpha\left(x.y\right)=e^{x.y}$

geometrik-bölme $\quad \dot{x}\oslash\dot{y}=\alpha\left[\alpha^{-1}(\dot{x})/\alpha^{-1}(\dot{y})\right]=\alpha\left(x/y\right)=e^{x/y},\dot{y}\neq 1$

$x,y\in\mathbb{R}^+$ için $\ln(x)<\ln(y)$ iken $x<y$ dir. Yani $\dot{x}\,\dot{<}\,\dot{y}\Leftrightarrow\alpha^{-1}(\dot{x})<\alpha^{-1}(\dot{y})$ geometrik sıralaması vardır.

Tanım 2.3.2. Geometrik tam sayı kümesi ve geometrik reel sayı kümesi sırasıyla $\mathbb{Z}(G)$ ve $\mathbb{R}(G)$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{Z}(G)=\left\{e^x : x\in\mathbb{Z}\right\}$$

her $x\in\mathbb{Z}^+$ için $e^{-x}=\ominus e^x$ dir. Böylece geometrik tam sayılar kümesi aşağıdaki gibi oluşur.

$\mathbb{Z}(G)=\left\{...,e^{-3},e^{-2},e^{-1},e^0,e^1,e^2,e^3,...\right\}=\left\{...,\ominus e^3,\ominus e^2,\ominus e,1,e,e^2,e^3,...\right\}$ dir.

$$\mathbb{R}(G)=\left\{e^x : x\in\mathbb{R}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{R}^+(G)$ geometrik pozitif reel sayı kümesini, $\mathbb{R}^-(G)$ ise geometrik negatif reel sayı kümesini temsil eder ve

$$\mathbb{R}^+(G)=\left\{\dot{x}\in\mathbb{R}(G):\dot{x}\,\dot{>}\,1\right\}=\left\{e^x\in\mathbb{R}(G):e^x\,\dot{>}\,e^0\right\}$$

$$\mathbb{R}^-(G)=\left\{\dot{x}\in\mathbb{R}(G):\dot{x}\,\dot{<}\,1\right\}=\left\{e^x\in\mathbb{R}(G):e^x\,\dot{<}\,e^0\right\}$$

olarak tanımlanır.

Geometrik reel sayılar kümesi $\mathbb{R}(G)$ için $\oplus$ toplama ve $\odot$ çarpma ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\oplus : \mathbb{R}(G)\times\mathbb{R}(G)\to\mathbb{R}(G)$$

$$(\dot{x},\dot{y})\to\dot{x}\oplus\dot{y}=\alpha\left[\alpha^{-1}(e^{x})+\alpha^{-1}(e^{y})\right]$$

$$\odot : \mathbb{R}(G)\times\mathbb{R}(G)\to\mathbb{R}(G)$$

$$(\dot{x},\dot{y})\to\dot{x}\odot\dot{y}=\alpha\left[\alpha^{-1}(e^{x})\times\alpha^{-1}(e^{y})\right]$$

Tanım 2.3.3. (Geometrik reel sayı doğrusu): Geometrik tam sayıların eşit aralıklarla bir kural içerisinde, bir doğrunun noktalarıyla geometrik reel sayılar arasında bire-bir eşleme kurularak oluşturulan doğrudur.

Geometrik sayı doğrusunun tam ortasında $\dot{0}=e^{0}=1$ vardır. 1 in sağında geometrik pozitif reel sayılar, 1 in solunda ise geometrik negatif reel sayılar yer alır. 1 den sağa doğru her birim uzunluk sonuna e^{1} ve ardışığı olan geometrik tam sayılar sola doğru da e^{-1} ve ardışığı olan tam sayılar yazılarak geometrik sayı doğrusu oluşturulur.

Ardışık tam sayılar sayı doğrusuna eşit birimdeki aralıklarla yerleştirilmiştir. Fakat geometrik tam sayılar sıradan anlamda eşit aralıklarla yerleştirilmemiştir.

Örneğin; $e^{2}-e=4.6708$ iken $e^{3}-e^{2}=12.6965$ dir.

Fakat geometrik tam sayılar geometrik reel sayı doğrusuna yerleştirilirken aralarındaki fark geometrik olarak eşittir.

$$e^{2}\ominus e=e^{2}/e=e^{2-1}=e$$

$$e^{3}\ominus e^{2}=e^{3}/e^{2}=e^{3-2}=e$$

şeklindedir.

Böylece yeni tip bir geometrik reel sayı doğrusu oluşturulur.

Teorem 2.3.4. $\left(\mathbb{R}(G),\oplus,\odot\right)$ geometrik sıfırı 1 ve geometrik birimi e olan bir cisimdir;

1) $\left(\mathbb{R}(G),\oplus\right)$ geometrik sıfırı 1 olan Abelyan gruptur.

2) $\left(\mathbb{R}(G)\setminus 1,\odot\right)$ geometrik birimi e olan Abelyan gruptur.

3) $\odot$ geometrik çarpma işlemi, $\oplus$ geometrik toplama işlemi üzerine dağılmalıdır.

Tanım 2.3.5. (Geometrik Üs) : $A \subset \mathbb{R}(G)$ alt kümesindeki bir $\dot{x}$ sayısının geometrik karesi $\dot{x} \odot \dot{x}$ dir ve $\dot{x}^{2_G}$ ile gösterilir.

$$\dot{x}^{2_G} = \dot{x} \odot \dot{x} = \alpha\left[\alpha^{-1}(\dot{x}) \times \alpha^{-1}(\dot{x})\right]$$

$$= e^{\ln \dot{x} \times \ln \dot{x}} = (e^{\ln \dot{x}})^{\ln \dot{x}} = \dot{x}^{\ln \dot{x}}$$

olarak tanımlanır.

$\dot{x} \in \mathbb{R}(G)$ nin p. geometrik üssü $\dot{x}^{p_G}$ ile gösterilir.

Her $\dot{x} \in \mathbb{R}(G)$ olmak üzere;

$$\dot{x} \odot \dot{x} = \dot{x}^{\ln \dot{x}} = \dot{x}^{2_G}$$

$$\dot{x} \odot \dot{x} \odot \dot{x} = \left(\dot{x}^{\ln \dot{x}}\right)^{\ln \dot{x}} = \dot{x}^{\ln^2 \dot{x}} = \dot{x}^{3_G}$$

$$\dot{x} \odot \dot{x} \odot \dot{x} \odot \dot{x} = \left((\dot{x}^{\ln \dot{x}})^{\ln \dot{x}}\right)^{\ln \dot{x}} = \dot{x}^{\ln^3 \dot{x}} = \dot{x}^{4_G}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\dot{x} \odot \dot{x} \odot \dot{x} \odot \ldots \odot \dot{x}}_{p-\tan e} = \left(\left(\left((\dot{x}^{\ln \dot{x}})^{\ln \dot{x}}\right)^{\ln \dot{x}}\right)^{\cdots}\right)^{\ln \dot{x}} = \dot{x}^{\ln^{p-1} \dot{x}} = \dot{x}^{p_G}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6. (Geometrik karekök): $A \subset \mathbb{R}(G)$ alt kümesindeki $\dot{x}$ sayısının geometrik karekökü, geometrik karesi $\dot{x}$ e eşit olan geometrik negatif olmayan sayı olarak tanımlanır ve $\sqrt{\dot{x}}^{G}$ ile gösterilir.

$$\sqrt{\dot{x}}^{G} = \alpha\left[\sqrt{\alpha^{-1}(\dot{x})}\right] = e^{\sqrt{\ln \dot{x}}} = e^{(\ln \dot{x})^{\frac{1}{2}}}$$

olarak tanımlanır. O halde

$$f(x) = \dot{x}^{2_G} = \dot{x}^{\ln \dot{x}} \Rightarrow f^{-1}(\dot{x}) = \sqrt{\dot{x}}^{G} = e^{(\ln \dot{x})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{dir.}$$

Önerme 2.3.7. $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}, \dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}(G)$ ve $\dot{b}, \dot{d} \neq \dot{0}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.

1) $\left(\frac{\dot{a}}{\dot{b}} G\right) \odot \dot{y} = \frac{\dot{a} \odot \dot{y}}{\dot{b} \odot \dot{y}} G$,

2) $\dot{a}, \dot{c} \neq \dot{0}$ olmak üzere $\frac{\dot{a}}{\dot{b}} G \odot \frac{\dot{c}}{\dot{d}} G = \frac{\dot{b}}{\dot{a}} G \odot \frac{\dot{d}}{\dot{c}} G$,

3) $\dot{x} \odot e = x$ ve $\dot{x} \oplus \dot{0} = x$,

4) $\dot{x}^{-1_G} = e^{\frac{1}{\ln x}}$,

5) $e^n \odot \dot{x} = x^n$,

6) $\dfrac{\dot{a}}{\dot{2}}G \oplus \dfrac{\dot{a}}{\dot{2}}G = \dot{a}$,

7) $\dot{b} \odot \dfrac{\dot{a}}{\dot{2} \odot \dot{b}}G = \dfrac{\dot{a}}{\dot{2}}G$

Tanım 2.3.8. (Geometrik Mutlak Değer): $A \subset \mathbb{R}(G)$ deki bir $\dot{x}$ sayısının geometrik mutlak değeri $|\dot{x}|^G$ ile gösterilir.

$$|\dot{x}|^G = \begin{cases} \dot{x}, \dot{x} \dot{>} 1 \\ 1, \dot{x} = 1 \\ \dfrac{1}{\dot{x}}, \dot{x} \dot{<} 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $|\dot{x}|^G \dot{\geq} 1$ dir.

$A \subset \mathbb{R}(G)$ deki her $\dot{x}$ sayısı için;

$$\sqrt{\dot{x}^{2G}}^{\,G} = \alpha\left[\sqrt{\alpha^{-1}\left(\dot{x}^{2G}\right)}\right] = \alpha\left[\sqrt{\alpha^{-1}\left(\alpha\left(\alpha^{-1}(\dot{x})\right)^2\right)}\right]$$

$$= \alpha\left[\sqrt{\left(\alpha^{-1}(\dot{x})\right)^2}\right] = \alpha\left[\left|\alpha^{-1}(\dot{x})\right|\right] = \left|\dot{x}\right|^G$$

yazılır.

Her $y \in \mathbb{R}$ için,

$$\left|e^y\right|^G = \alpha\left(\left|\alpha^{-1}(e^y)\right|\right) = \alpha\left(\left|\ln e^y\right|\right) = e^{\left|\ln e^y\right|} = e^{|y|} \quad \text{olup}$$

$$\left|e^y\right|^G = e^{|y|} = \begin{cases} e^y, e^y > e^0 \\ 1, e^y = e^0 \\ e^{-y}, e^y < e^0 \end{cases}$$

yazılır.

3. BULGULAR

Bu kısımda α -aritmetiğin alt sınıflarından biri olan kuadratik aritmetik (q-aritmetik) yapısı üzerinde durulacaktır. Kuadratik aritmetik için q-üreteç fonksiyonu kullanılarak, α -aritmetik için verilen tanım, eşitsizlik ve teoremlerin kuadratik sınıftaki karşılığı incelenecektir.

3.1. Kuadratik Aritmetik ve Kuadratik Reel Sayılar

Tanım 3.1.1. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$q_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_q \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu ve onun ters fonksiyonu q_p^{-1} olmak üzere (Grossman, 1972)

$$q_p(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{p}}, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad q_p^{-1}(x) = \begin{cases} x^p, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^p, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan q- üreteç fonksiyonlarına sırasıyla $p.$kök ve $p.$kuvvet üreteçleri denir. Bu üreteçler yardımıyla q_p-aritmetik diye adlandırılan bir alt $\alpha(x) = q_p(x)$sınıfı elde edilir. (Grossman, 1972), (Kadak, 2015)

$p = 2$ ve $p = -1$ durumlarında sırasıyla q-kuadratik aritmetik ve q-harmonik aritmetik elde edilir. Bu çalışma boyunca $p = 2$ özel durumunda q-kuadratik aritmetiğin temel özellikleri incelenecektir.

Her $x \in \mathbb{R}$ ve $p = 2$ için

$$q(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{2}}, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad q^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^2, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Reel sayıların bir $\mathbb{R}_q \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi

$$\mathbb{R}_q = \{\dot{x} = q(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda q-aritmetik için cebirsel işlemler aşağıdaki tanımlanır.

Her $\dot{x},\dot{y}\in\mathbb{R}_q$ olmak üzere

$q-toplam \qquad \dot{x}\dot{+}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x})+q^{-1}(\dot{y})\right\}$

$q-fark \qquad \dot{x}\dot{-}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x})-q^{-1}(\dot{y})\right\}$

$q-çarpım \qquad \dot{x}\dot{\times}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x}).q^{-1}(\dot{y})\right\}$

$q-bölüm \qquad \dot{x}\dot{/}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x})/q^{-1}(\dot{y})\right\}$

$q-sıralama \qquad \dot{x}\dot{<}\dot{y}\Leftrightarrow q^{-1}(\dot{x})<q^{-1}(\dot{y})\Leftrightarrow x<y$

Tanım 3.1.2. $\mathbb{R}^{+}{}_q$ kuadratik pozitif reel sayı kümesini, $\mathbb{R}^{-}{}_q$ ise kuadratik negatif reel sayı kümesini temsil eder ve

$$\mathbb{R}^{+}{}_q=\left\{x^{\frac{1}{2}}\in\mathbb{R}_q : x>0\right\}$$

$$\mathbb{R}^{-}{}_q=\left\{-(-x)^{\frac{1}{2}}\in\mathbb{R}_q : x<0\right\}$$

olarak tanımlanır.

Her $\dot{x},\dot{y}\in\mathbb{R}^{+}{}_q$ için cebirsel işlemler

$q-toplam \qquad \dot{x}\dot{+}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x})+q^{-1}(\dot{y})\right\}=q\left(\left(x^{1/2}\right)^2+\left(y^{1/2}\right)^2\right)=\left(x+y\right)^{1/2}=\sqrt{x+y}$

$q-fark \qquad \dot{x}\dot{-}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x})-q^{-1}(\dot{y})\right\}=q\left(\left(x^{1/2}\right)^2-\left(y^{1/2}\right)^2\right)=\left(x-y\right)^{1/2}=\sqrt{x-y}$

$q-çarpım \qquad \dot{x}\dot{\times}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x}).q^{-1}(\dot{y})\right\}=q\left(\left(x^{1/2}\right)^2.\left(y^{1/2}\right)^2\right)=\left(x.y\right)^{1/2}=\sqrt{x.y}$

$q-bölüm \qquad \dot{x}\dot{/}\dot{y}=q\left\{q^{-1}(\dot{x})/q^{-1}(\dot{y})\right\}=q\left(\left(x^{1/2}\right)^2/\left(y^{1/2}\right)^2\right)=\left(x/y\right)^{1/2}=\sqrt{x/y}$

şeklindedir.

Her $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için cebirsel işlemler

$q-toplam$ $$\dot{x} \dot{+} \dot{y} = q\left\{q^{-1}(\dot{x}) + q^{-1}(\dot{y})\right\} = q\left\{\left(-(-x)^{1/2}\right)^{2} + \left(-(-y)^{1/2}\right)^{2}\right\}$$

$$= q\left\{\left((-x)^{1/2}\right)^{2} + \left((-y)^{1/2}\right)^{2}\right\} = q\left((-x)+(-y)\right)$$

$$= q\left(-x-y\right) = \sqrt{-x-y}$$

$q-fark$ $$\dot{x} \dot{-} \dot{y} = q\left\{q^{-1}(\dot{x}) - q^{-1}(\dot{y})\right\} = q\left\{\left(-(-x)^{1/2}\right)^{2} - \left(-(-y)^{1/2}\right)^{2}\right\}$$

$$= q\left\{\left((-x)^{1/2}\right)^{2} - \left((-y)^{1/2}\right)^{2}\right\} = q\left((-x)-(-y)\right)$$

$$= q\left(-x+y\right) = \sqrt{y-x}$$

$q-çarpım$ $$\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = q\left\{q^{-1}(\dot{x}).q^{-1}(\dot{y})\right\} = q\left\{\left(-(-x)^{1/2}\right)^{2} . \left(-(-y)^{1/2}\right)^{2}\right\}$$

$$= q\left\{\left((-x)^{1/2}\right)^{2} . \left((-y)^{1/2}\right)^{2}\right\} = q\left((-x).(-y)\right)$$

$$= q\left(x.y\right) = \sqrt{x.y}$$

$q-bölüm$ $$\dot{x} \dot{/} \dot{y} = q\left\{q^{-1}(\dot{x}) / q^{-1}(\dot{y})\right\} = q\left\{\left(-(-x)^{1/2}\right)^{2} / \left(-(-y)^{1/2}\right)^{2}\right\}$$

$$= q\left\{\left((-x)^{1/2}\right)^{2} / \left((-y)^{1/2}\right)^{2}\right\} = q\left((-x)/(-y)\right)$$

$$= q\left(x/y\right) = \sqrt{x/y}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.3. Kuadratik tam sayı kümesi $\mathbb{Z}_q$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{Z}_q = \left\{q\left(x\right) : x \in \mathbb{Z}\right\}$$

her $x \in \mathbb{Z}^{+}$ için $\dot{x} = x^{1/2}$ ve $x \in \mathbb{Z}^{-}$ için $\dot{x} = -(-x)^{\frac{1}{2}}$ dir.

Böylece kuadratik tam sayılar kümesi aşağıdaki gibi oluşur.

$$\mathbb{Z}_q = \left\{\ldots, -(-3)^{\frac{1}{2}}, -(-2)^{\frac{1}{2}}, -(-1)^{\frac{1}{2}}, 0^{\frac{1}{2}}, 1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, \ldots\right\}$$ dir.

Teorem 3.1.4. $\left(\mathbb{R}_q, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ bir cisimdir.

İspat: 1) $\left(\mathbb{R}_q, \dot{+}\right)$ değişmeli gruptur.

I) Herhangi $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}^+{}_q$ kuadratik reel sayıları verilmiş olsun.

$\dot{x} \dot{+} \dot{y} = q\left[q^{-1}(\dot{x}) + q^{-1}(\dot{y})\right] = q\left(\left(x^{1/2}\right)^2 + \left(y^{1/2}\right)^2\right) = \sqrt{x+y} \in \mathbb{R}^+{}_q$ dolayısıyla $\dot{x} \dot{+} \dot{y} \in \mathbb{R}^+{}_q$ olur.

$\dot{x}, \dot{y}, \in \mathbb{R}^-{}_q$ için aynı işlemler kolayca görülür.

II) Herhangi $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in \mathbb{R}^+{}_q$ kuadratik reel sayıları için ;

$$\left(\dot{x} \dot{+} \dot{y}\right) \dot{+} \dot{z} = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right] \dot{+} z^{1/2}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right) + q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right]\right\}$$

$$= q\left[\left(q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right) + q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + \left(q^{-1}\left(y^{1/2}\right) + q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right)\right]$$

$$= \dot{x} \dot{+} \left(\dot{y} \dot{+} \dot{z}\right)$$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in \mathbb{R}^-{}_q$ için aynı işlemler kolayca görülür.

III) Herhangi $\dot{x} \in \mathbb{R}^+{}_q$ için;

$$\dot{x} \dot{+} \dot{0} = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + q^{-1}\left(0^{1/2}\right)\right] = q\left(\left(x^{1/2}\right)^2 + \left(0^{1/2}\right)^2\right) = q\left(x+0\right) = q\left(x\right) = x^{1/2} = \dot{x}$$

$$\dot{0} \dot{+} \dot{x} = q\left[q^{-1}\left(0^{1/2}\right) + q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right] = q\left(\left(0^{1/2}\right)^2 + \left(x^{1/2}\right)^2\right) = q\left(0+x\right) = q\left(x\right) = x^{1/2} = \dot{x}$$

olduğundan $\dot{+}$ işleminin birimi $\dot{0} = 0^{1/2} \in \mathbb{R}_q$ sayısıdır.

$\dot{x} \in \mathbb{R}^-{}_q$ için aynı işlemler kolayca görülür.

IV) Herhangi $\dot{x} \in \mathbb{R}^+{}_q$ için;

$$\dot{x} \dotplus \left(\dot{0} \dot{-} \dot{x}\right) = q\left\{q^{-1}\left(\dot{x}\right) + q^{-1}\left(\dot{0} \dot{-} \dot{x}\right)\right\}$$

$$= q\left\{\left(x^{1/2}\right)^2 + q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(\dot{0}\right) - q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right]\right\}$$

$$= q\left\{x + \left(q^{-1}\left(\dot{0}\right) - q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right\} = q\left\{x + \left(\left(0^{1/2}\right)^2 - \left(x^{1/2}\right)^2\right)\right\}$$

$$= q\left(x + 0 - x\right) = q\left(0\right) = \dot{0}$$

$$\left(\dot{0} \dot{-} \dot{x}\right) \dotplus \dot{x} = q\left\{q^{-1}\left(\dot{0} \dot{-} \dot{x}\right) + q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(\dot{0}\right) - q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right] + \left(x^{1/2}\right)^2\right\}$$

$$= q\left\{\left(q^{-1}\left(\dot{0}\right) - q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right) + x\right\} = q\left\{\left(\left(0^{1/2}\right)^2 - \left(x^{1/2}\right)^2 + x\right)\right\}$$

$$= q\left(0 - x + x\right) = q\left(0\right) = \dot{0}$$

olup $\dot{x} \in \mathbb{R}^+{}_q$ sayısının $\dotplus$ işlemine göre tersi $\left(\dot{0} \dot{-} \dot{x}\right)$ sayısıdır.

$\dot{x} \in \mathbb{R}^-{}_q$ için aynı işlemler kolayca görülür.

V) Herhangi $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}^+{}_q$ için

$$\dot{x} \dotplus \dot{y} = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(y^{1/2}\right) + q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right] = \dot{y} \dotplus \dot{x}$$

Herhangi $\dot{x}, \dot{y}, \in \mathbb{R}^-{}_q$ için

$$\dot{x} \dotplus \dot{y} = q\left[q^{-1}\left(-\left(-x\right)^{1/2}\right) + q^{-1}\left(-\left(-y\right)^{1/2}\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(-\left(-y\right)^{1/2}\right) + q^{-1}\left(-\left(-x\right)^{1/2}\right)\right] = \dot{y} \dotplus \dot{x}$$

Herhangi $\dot{x} \in \mathbb{R}^+{}_q$ ve $\dot{y} \in \mathbb{R}^-{}_q$ için

$$\dot{x} \dotplus \dot{y} = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right) + q^{-1}\left(-\left(-y\right)^{1/2}\right)\right]$$

$$=q\left[q^{-1}\left(-(-y)^{1/2}\right)+q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right]=\dot{y}\dot{+}\dot{x}$$

olduğundan $\dot{+}$ işlemi değişmelidir.

Diğer tüm şıklar bu durumlar için kolayca gösterilir.

2) $\left(\mathbb{R}_q\setminus\{0\},\dot{\times}\right)$ değişmeli gruptur.

I) Herhangi $\dot{x},\dot{y}\in\mathbb{R}^{+}{}_{q}$ kuadratik reel sayıları verilmiş olsun.

$$\dot{x}\dot{\times}\dot{y}=q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right]=\sqrt{x.y}\in\mathbb{R}^{+}{}_{q}$$

$\dot{x},\dot{y},\in\mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için aynı işlemler kolayca görülür.

II) Herhangi $\dot{x},\dot{y},\dot{z}\in\mathbb{R}^{+}{}_{q}$ kuadratik reel sayıları için ;

$$\left(\dot{x}\dot{\times}\dot{y}\right)\dot{\times}\dot{z}=q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right]\dot{\times}z^{1/2}$$

$$=q\left\{q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right)\right].q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right\}$$

$$=q\left[\left(q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right).q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right]$$

$$=q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).\left(q^{-1}\left(y^{1/2}\right).q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right)\right]$$

$$=\dot{x}\dot{\times}\left(\dot{y}\dot{\times}\dot{z}\right)$$

$\dot{x},\dot{y},\dot{z}\in\mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için aynı işlemler kolayca görülür.

III) Herhangi $\dot{x}\in\mathbb{R}^{+}{}_{q}$ için;

$$\dot{x}\dot{\times}\dot{1}=q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(1^{1/2}\right)\right]$$

$$=q\left(\left(x^{1/2}\right)^{2}.\left(1^{1/2}\right)^{2}\right)=q\left(x.1\right)=q\left(x\right)=x^{1/2}=\dot{x}$$

$$\dot{1}\dot{\times}\dot{x}=q\left[q^{-1}\left(1^{1/2}\right).q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right]$$

$$=q\left(\left(1^{1/2}\right)^{2}.\left(x^{1/2}\right)^{2}\right)=q\left(1.x\right)=q\left(x\right)=x^{1/2}=\dot{x}$$

olduğundan $\dot{\times}$ işleminin birimi $\dot{1} = 1^{1/2} = 1$ sayısıdır.

$\dot{x} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için aynı işlemler kolayca görülür.

IV) Herhangi $\dot{x} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ için;

$$\dot{x} \dot{\times} \left(\dot{1} \dot{/} \dot{x}\right) = q\left\{q^{-1}\left(\dot{x}\right).q^{-1}\left(\dot{1} \dot{/} \dot{x}\right)\right\}$$

$$= q\left\{\left(x^{1/2}\right)^{2}.q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(\dot{1}\right) / q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right]\right\}$$

$$= q\left\{x.\left(q^{-1}\left(\dot{0}\right) / q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right\} = q\left\{x.\left(\left(0^{1/2}\right)^{2} / \left(x^{1/2}\right)^{2}\right)\right\}$$

$$= q\left(x.\left(1 / x\right)\right) = q\left(1\right) = \dot{1}$$

$$\left(\dot{1} \dot{/} \dot{x}\right) \dot{\times} \dot{x} = q\left\{q^{-1}\left(\dot{1} \dot{/} \dot{x}\right).q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(\dot{1}\right) / q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right].\left(x^{1/2}\right)^{2}\right\}$$

$$= q\left\{\left(q^{-1}\left(\dot{1}\right) / q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right).x\right\} = q\left\{\left(\left(1^{1/2}\right)^{2} / \left(x^{1/2}\right)^{2}\right).x\right\}$$

$$= q\left(\left(1 / x\right).x\right) = q\left(1\right) = \dot{1}$$

olduğundan $\dot{x} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ sayısının $\dot{\times}$ işlemine göre tersi $\left(\dot{1} \dot{/} \dot{x}\right)$ sayısıdır.

$\dot{x} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için aynı işlemler kolayca görülür.

V) Herhangi $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ için

$$\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(y^{1/2}\right).q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right] = \dot{y} \dot{\times} \dot{x}$$

Herhangi $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için

$$\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = q\left[q^{-1}\left(-\left(-x\right)^{1/2}\right).q^{-1}\left(-\left(-y\right)^{1/2}\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(-\left(-y\right)^{1/2}\right).q^{-1}\left(-\left(-x\right)^{1/2}\right)\right] = \dot{y} \dot{\times} \dot{x}$$

Herhangi $\dot{x} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ ve $\dot{y} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için

$$\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(-(-y)^{1/2}\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(-(-y)^{1/2}\right).q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right] = \dot{y} \dot{\times} \dot{x}$$

olduğundan $\dot{\times}$ işlemi değişmelidir.

Diğer tüm şıklar bu durumlar için kolayca gösterilir.

3) $\dot{\times}$ kuadratik çarpma işlemi, $\dot{+}$ kuadratik toplama işlemi üzerine dağılmalıdır.

Herhangi $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ verilmiş olsun.

$$\dot{x} \dot{\times} \left(\dot{y} \dot{+} \dot{z}\right) = q\left[q^{-1}\left(x^{1/2}\right).\left(q^{-1}\left(y^{1/2}\right) + q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right)\right]$$

$$= q\left[\left(q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(y^{1/2}\right)\right) + \left(q^{-1}\left(x^{1/2}\right).q^{-1}\left(z^{1/2}\right)\right)\right]$$

$$= \left(\dot{x} \dot{\times} \dot{y}\right) \dot{+} \left(\dot{x} \dot{\times} \dot{z}\right)$$

$$= q\left[\left(q^{-1}\left(y^{1/2}\right).q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right) + \left(q^{-1}\left(z^{1/2}\right).q^{-1}\left(x^{1/2}\right)\right)\right]$$

$$= \left(\dot{y} \dot{\times} \dot{x}\right) \dot{+} \left(\dot{z} \dot{\times} \dot{x}\right)$$

olup $\dot{\times}$ işlemi $\dot{+}$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılmalıdır.

$\forall \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ için aynı işlemler kolayca görülebilir.

Tanım 3.1.4. (Kuadratik Üs) : $A \subseteq \mathbb{R}_q$ alt kümesindeki bir $\dot{x}$ sayısının kuadratik karesi $\dot{x} \dot{\times} \dot{x}$ dır ve $\dot{x}^{2_q}$ ile gösterilir.

$\dot{x} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ olmak üzere

$$\dot{x}^{2_q} = \dot{x} \dot{\times} \dot{x} = q\left[q^{-1}(\dot{x}).q^{-1}(\dot{x})\right]$$

$$= \left((x^{1/2})^2.(x^{1/2})^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^2}$$

$\dot{x} \in \mathbb{R}^-_q$ olmak üzere

$$\dot{x}^{2_q} = \dot{x} \dot{\times} \dot{x} = q\left[q^{-1}(\dot{x}).q^{-1}(\dot{x})\right]$$

$$= \left(\left(-\left(-x^{1/2}\right)\right)^2 .\left(-\left(-x^{1/2}\right)\right)^2\right)^{1/2} = \left(-x.-x\right)^{1/2} = \sqrt{x^2}$$

olarak tanımlanır.

$\dot{x} \in \mathbb{R}_q$ nun *p*. kuadratik üssü $\dot{x}^{p_q}$ ile gösterilir.

Her $\dot{x} \in \mathbb{R}_q$ olmak üzere ;

$$\dot{x}^{2_q} = \dot{x} \dot{\times} \dot{x} = q\left\{q^{-1}(\dot{x}) \times q^{-1}(\dot{x})\right\} = q\left\{\left[q^{-1}(x)\right]^2\right\}$$

$$\dot{x}^{3_q} = \dot{x}^{2_q} \dot{\times} \dot{x} = q\left\{q^{-1}\left\{q\left[q^{-1}(\dot{x}) \times q^{-1}(\dot{x})\right]\right\} q^{-1}(\dot{x})\right\} = q\left\{\left[q^{-1}(\dot{x})\right]^3\right\}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}^{p_q} = \dot{x}^{(p-1)_q} \dot{\times} \dot{x} = q\left\{\left[q^{-1}(\dot{x})\right]^p\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.5. (Kuadratik Karekök): $A \subseteq \mathbb{R}_q$ alt kümesindeki $\dot{x}$ sayısının kuadratik karekökü, kuadratik karesi $\dot{x}$ e eşit olan kuadratik negatif olmayan sayı olarak tanımlanır ve $\sqrt{\dot{x}}^q$ ile gösterilir. Yani $\dot{b}^{2_q} = \dot{x} \Leftrightarrow \dot{b} = \sqrt{\dot{x}}^q$ dır.

Böylece $\dot{b} = \sqrt{\dot{x}}^q = q\left\{\sqrt{q^{-1}(\dot{x})}\right\}$ olur.

$\dot{4} \in \mathbb{R}_q$ olmak üzere

$$\sqrt{\dot{4}}^q = q\left\{\sqrt{q^{-1}\left(\dot{4}\right)}\right\} = q\left\{\sqrt{4}\right\} = q\left(2\right) = \dot{2} \text{ dir.}$$

$\mathbb{R}_q$ kuadratik reel sayılar cisminin temel özelliklerini elde etmiştik. Bunun sonucu olarak $\mathbb{R}_q$ cisminin aşağıdaki özellikleri vardır.

Önerme 3.1.6. $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d} \in \mathbb{R}_q$ ve $\dot{b}, \dot{d} \neq \dot{0}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.

1) $\left(\dfrac{\dot{a}}{\dot{b}}q\right) \dot{\times} \dot{c} = \dfrac{\dot{a} \dot{\times} \dot{c}}{\dot{b}} q,$

2) $\dfrac{\dot{a}}{\dot{b}} q \dot{\times} \dfrac{\dot{c}}{\dot{d}} q = \dfrac{\dot{a} \dot{\times} \dot{c}}{\dot{b} \dot{\times} \dot{d}} q \,,$

3) $\dfrac{\dot{a}}{\dot{2}}q \dotplus \dfrac{\dot{a}}{\dot{2}}q = \dot{a}$,

4) $\dot{b} \dot{\times} \dfrac{\dot{a}}{\dot{2}\dot{\times}\dot{b}}q = \dfrac{\dot{a}}{\dot{2}}q$,

İspat: $\dot{a},\dot{b},\dot{c},\dot{d},\dot{x},\dot{y} \in \mathbb{R}^{+}{}_{q}$ olsun.

1) $$\left(\frac{\dot{a}}{\dot{b}}q\right)\dot{\times}\dot{c} = q\left[q^{-1}\left(\frac{\dot{a}}{\dot{b}}q\right).q^{-1}(\dot{c})\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{a})/q^{-1}(\dot{b})\right)\right).q^{-1}(\dot{c})\right]$$

$$= q\left[\left(q^{-1}(\dot{a})/q^{-1}(\dot{b})\right).q^{-1}(\dot{c})\right]$$

$$= \left(\frac{(a^{1/2})^2}{(b^{1/2})^2}.(\dot{c})^2\right)^{1/2} = \left(\frac{(a^{1/2})^2.(c^{1/2})^2}{(b^{1/2})^2}\right)^{1/2}$$

$$= (a^{1/2}.c^{1/2})/b^{1/2} = \frac{\dot{a}\dot{\times}\dot{c}}{\dot{b}}q$$

2) $$\frac{\dot{a}}{\dot{b}}q\dot{\times}\frac{\dot{c}}{\dot{d}}q = q\left[q^{-1}\left(\frac{\dot{a}}{\dot{b}}q\right).q^{-1}\left(\frac{\dot{c}}{\dot{d}}q\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{a})/q^{-1}(\dot{b})\right).q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{c})/q^{-1}(\dot{d})\right)\right)\right)\right]$$

$$= q\left[\left(q^{-1}(\dot{a})/q^{-1}(\dot{b})\right).\left(q^{-1}(\dot{c})/q^{-1}(\dot{d})\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\left(a^{1/2}\right)^2}{\left(b^{1/2}\right)^2}.\frac{\left(c^{1/2}\right)^2}{\left(d^{1/2}\right)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\left(a^{1/2}\right)^2.\left(c^{1/2}\right)^2}{\left(b^{1/2}\right)^2.\left(d^{1/2}\right)^2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\left(\left(a^{1/2}\right)^2.\left(c^{1/2}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\left(b^{1/2}\right)^2.\left(d^{1/2}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{a^{1/2}.c^{1/2}}{b^{1/2}.d^{1/2}} = \frac{\dot{a}\dot{\times}\dot{c}}{\dot{b}\dot{\times}\dot{d}}q$$

3) $$\frac{\dot{a}}{\dot{2}}q\dotplus\frac{\dot{a}}{\dot{2}}q = q\left\{q^{-1}\left(\frac{\dot{a}}{\dot{2}}q\right)+q^{-1}\left(\frac{\dot{a}}{\dot{2}}q\right)\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left(q\left[q^{-1}(a^{1/2})/q^{-1}(2^{1/2})\right]\right)+q^{-1}\left(q\left[q^{-1}(a^{1/2})/q^{-1}(2^{1/2})\right]\right)\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}(a^{1/2})/q^{-1}(2^{1/2})+q^{-1}(a^{1/2})/q^{-1}(2^{1/2})\right\}$$

$$= q\left\{2.\frac{a}{2}\right\} = q(a) = a^{1/2} = \dot{a}$$

4) $\dot{b}\dot{\times}\dfrac{\dot{a}}{\dot{2}\dot{\times}\dot{b}}q = q\left[q^{-1}(\dot{b}).q^{-1}\left(\dot{a}\,\dot{/}\left(\dot{2}\dot{\times}\dot{b}\right)\right)\right]$

$$= q\left[q^{-1}(\dot{b}).q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{a})\,/\,q^{-1}\left(\dot{2}\dot{\times}\dot{b}\right)\right)\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}(\dot{b}).q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{a})\,/\,q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{2}).q^{-1}(\dot{b})\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$= q\left[q^{-1}(\dot{b}).\left(q^{-1}(\dot{a})\,/\left(q^{-1}(\dot{2}).q^{-1}(\dot{b})\right)\right)\right]$$

$$= q\left[(b^{1/2})^2.\left((a^{1/2})^2\,/\left((2^{1/2})^2.(b^{1/2})^2\right)\right)\right]$$

$$= q\left[(b^{1/2})^2.\frac{(a^{1/2})^2}{(2^{1/2})^2.(b^{1/2})^2}\right] = q\left[(a^{1/2})^2\,/\,(2^{1/2})^2\right]$$

$$= \left((a^{1/2})^2\,/\,(2^{1/2})^2\right)^{1/2} = a^{1/2}\,/\,2^{1/2} = \frac{\dot{a}}{\dot{2}}q$$

Önermedeki özellikler $\dot{a},\dot{b},\dot{c},\dot{d},\dot{x},\dot{y} \in \mathbb{R}^{-}{}_{q}$ olması durumunda da vardır.

3.2. Kuadratik Mutlak Değer ve Bazı Kuadratik Eşitsizlikler

Tanım 3.2.1. $A\subseteq\mathbb{R}_q$ deki bir $\dot{x}$ sayısının kuadratik mutlak değeri $|\dot{x}|_q$ ile gösterilir.

$$|\dot{x}|_q = \begin{cases} x^{1/2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{1/2}, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$A\subseteq\mathbb{R}_q$ daki her $\dot{x}$ sayısı için;

$$\sqrt{\dot{x}^{2_q}}^{\,q} = q\left[\sqrt{q^{-1}\left(\dot{x}^{2_q}\right)}\right] = q\left[\sqrt{q^{-1}\left(q\left(q^{-1}(\dot{x})\right)^2\right)}\right]$$

$$= q\left[\sqrt{\left(q^{-1}(\dot{x})\right)^2}\right] = q\left[\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right] = |\dot{x}|_q$$

yazılır.

Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\left|\dot{x}\right|_q = \left|x^{1/2}\right|_q = q\left(\left|q^{-1}(x^{1/2})\right|\right) = q\left(\left|(x^{1/2})^2\right|\right) = q\left(\left|x\right|\right) = \left|x\right|^{1/2}$$

yazılır.

Önerme 3.2.2. $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}_q$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

1) $\left|\dot{x} \dot{-} \dot{y}\right|_q = \left|\dot{y} \dot{-} \dot{x}\right|_q$

2) $\left|\dot{x} \dot{\times} \dot{y}\right|_q = \left|\dot{x}\right|_q \dot{\times} \left|\dot{y}\right|_q$

3) $\left|\dot{x} \dot{/} \dot{y}\right|_q = \left|\dot{x}\right|_q \dot{/} \left|\dot{y}\right|_q$, $\dot{y} \neq \dot{0}$

İspat: 1) $\left|\dot{x} \dot{-} \dot{y}\right|_q = \left|x - y\right|^{1/2}$

$$= \left|y - x\right|^{1/2} = \left|\left(y - x\right)^{1/2}\right|_q$$

$$= \left|\left((y^{1/2})^2 - (x^{1/2})^2\right)^{1/2}\right|_q = \left|\left(y - x\right)^{1/2}\right|_q$$

$$= \left|\dot{y} \dot{-} \dot{x}\right|_q$$

2) $\mathbb{R}_q$ daki çarpma işlemi tanımı kullanılırsa,

$$\left|\dot{x} \dot{\times} \dot{y}\right|_q = \left|q\left(q^{-1}(\dot{x}) \times q^{-1}(\dot{y})\right)\right|_q$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}\left[q\left(q^{-1}(\dot{x}) \times q^{-1}(\dot{y})\right)\right]\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}(\dot{x}) \times q^{-1}(\dot{y})\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}(\dot{x})\right| \times \left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left(\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right)\right] \times q^{-1}\left[q\left(\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right)\right]\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right\} \dot{\times} q\left\{\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right\}$$

$$= \left|\dot{x}\right|_q \dot{\times} \left|\dot{y}\right|_q \qquad \text{bulunur.}$$

3) $\left|\dot{x} \dot{/} \dot{y}\right|_q = \left|q\left(q^{-1}(\dot{x}) / q^{-1}(\dot{y})\right)\right|_q$

$$= q\left\{\left|q^{-1}\left[q\left(q^{-1}(\dot{x}) / q^{-1}(\dot{y})\right)\right]\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}(\dot{x}) / q^{-1}(\dot{y})\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}(\dot{x})\right| / \left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left(\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right)\right] / q^{-1}\left[q\left(\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right)\right]\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right\} \dot{/}\, q\left\{\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right\}$$

$$= \left|\dot{x}\right|_q \dot{/} \left|\dot{y}\right|_q$$

bulunur.

Önerme 3.2.3. $\dot{x}, \dot{y}, \dot{a} \in \mathbb{R}_q$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

1) $\left|\dot{x}\right|_q \dot{<} \dot{a} \Leftrightarrow \dot{0} \dot{-} \dot{a} \dot{<} \dot{x} \dot{<} \dot{a}$

2) $\left|\dot{x} \dot{+} \dot{y}\right|_q \dot{\leq} \left|\dot{x}\right|_q \dot{+} \left|\dot{y}\right|_q$ (Kuadratik üçgen eşitsizliği)

3) $\left|\left|\dot{x}\right|_q \dot{-} \left|\dot{y}\right|_q\right|_q \dot{\leq} \left|\dot{x} \dot{-} \dot{y}\right|_q$

İspat: 1) $\left|\dot{x}\right|_q \dot{<} \dot{a} \Leftrightarrow q\left(\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right) \dot{<} \dot{a}$

$$\Leftrightarrow q^{-1}\left(q\left(\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right)\right) < q^{-1}(\dot{a})$$

$$\Leftrightarrow \left|q^{-1}(\dot{x})\right| < q^{-1}(\dot{a})$$

$$\Leftrightarrow |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$\Leftrightarrow q(-a) \dot{<} q(x) \dot{<} q(a) \Leftrightarrow \dot{0} \dot{-} \dot{a} \dot{<} \dot{x} \dot{<} \dot{a}$$

2) $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}_q$ olmak üzere

$$\left|\dot{x} \dot{+} \dot{y}\right|_q = q\left[\left|q^{-1}(\dot{x} \dot{+} \dot{y})\right|\right]$$

$$= q\left[\left|q^{-1}\left\{q\left(q^{-1}(\dot{x}) + q^{-1}(\dot{y})\right)\right\}\right|\right]$$

$$= q\left[\left|\left(q^{-1}(\dot{x}) + q^{-1}(\dot{y})\right)\right|\right]$$

eşitliğin her iki tarafına q^{-1} uygularsak,

$$q^{-1}\left(\left|\dot{x} \dot{+} \dot{y}\right|_q\right) = \left|q^{-1}(\dot{x}) + q^{-1}(\dot{y})\right|$$

$$\leq \left|q^{-1}(\dot{x})\right| + \left|q^{-1}(\dot{y})\right|$$

$$q\left(q^{-1}\left(\left|\dot{x} \dot{+} \dot{y}\right|_q\right)\right) \dot{\leq} q\left[\left|q^{-1}(\dot{x})\right| + \left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right]$$

$$|\dot{x}\dot{+}\dot{y}|_q \dot{\leq} q\left[\left|q^{-1}(\dot{x})\right|+\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right]$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left(\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right)\right]+q^{-1}\left[q\left(\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right)\right]\right\}$$

$$= q\left[q^{-1}\left(|\dot{x}|_q\right)+q^{-1}\left(|\dot{y}|_q\right)\right]$$

$$= |\dot{x}|_q \dot{+} |\dot{y}|_q$$ bulunur.

3) $$\left||\dot{x}|_q \dot{-} |\dot{y}|_q\right|_q = q\left\{\left|q^{-1}\left(|\dot{x}|_q \dot{-} |\dot{y}|_q\right)\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}\left(q\left|q^{-1}(\dot{x})\right| \dot{-} q\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right)\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|q^{-1}\left[q\left(q^{-1}\left(q\left|q^{-1}(\dot{x})\right|\right)\right)-\left(q^{-1}\left(q\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right)\right)\right]\right|\right\}$$

$$= q\left\{\left|\left|q^{-1}(\dot{x})\right|-\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right|\right\}$$

eşitliğin her iki tarafına q^{-1} uygularsak

$$q^{-1}\left(\left||\dot{x}|_q \dot{-} |\dot{y}|_q\right|_q\right) = \left|\left|q^{-1}(\dot{x})\right|-\left|q^{-1}(\dot{y})\right|\right|$$

$$\leq \left|q^{-1}(\dot{x})-q^{-1}(\dot{y})\right|$$

$$q\left(q^{-1}\left||\dot{x}|_q \dot{-} |\dot{y}|_q\right|_q\right) \dot{\leq} q\left[\left|q^{-1}(\dot{x})-q^{-1}(\dot{y})\right|\right]$$

$$\left||\dot{x}|_q \dot{-} |\dot{y}|_q\right|_q \dot{\leq} |\dot{x}\dot{-}\dot{y}|_q$$

bulunur.

Önerme 3.2.4. (Kuadratik Minkowski Eşitsizliği): $k \in \{1,2,3,...,n\}$ için $a_k, b_k \in \mathbb{R}^+{}_q$ ve $p>1$ olsun. O halde;

$$\sqrt[p]{{}_q\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{a}_k \dot{+} \dot{b}_k\right)^{p_q}}^{\,q} \dot{\leq} \sqrt[p]{{}_q\sum_{k=1}^{n}\dot{a}_k{}^{p_q}}^{\,q} \dot{+} \sqrt[p]{{}_q\sum_{k=1}^{n}\dot{b}_k{}^{p_q}}^{\,q}$$ dır.

İspat: $u = \sqrt[p]{{}_q\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{a}_k \dot{+} \dot{b}_k\right)^{p_q}}^{\,q} = \left\{{}_q\sum_{k=1}^{n}\left(q\left\{q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right\}\right)^{p_q}\right\}^{\frac{1}{p}q}$ olarak alınsın.

p. dereceden kök tanımı kullanılırsa,

$$u^{p_q} = {}_q\sum_{k=1}^{n}\left(q\left\{q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right\}\right)^{p_q}$$

$$= {}_q\sum_{k=1}^{n} q\left\{\left(q^{-1}\left[q\left\{q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right\}\right]\right)^{p}\right\}$$

$$= {}_q\sum_{k=1}^{n} q\left\{\left(q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right)^{p}\right\}$$

$$= q\left\{q^{-1}\left[q\left\{\left(q^{-1}(\dot{a}_1)+q^{-1}(\dot{b}_1)\right)^{p}\right\}\right]+\ldots+q^{-1}\left[q\left\{\left(q^{-1}(\dot{a}_n)+q^{-1}(\dot{b}_n)\right)^{p}\right\}\right]\right\}$$

$$= q\left\{\left(q^{-1}(\dot{a}_1)+q^{-1}(\dot{b}_1)\right)^{p}+\ldots+\left(q^{-1}(\dot{a}_n)+q^{-1}(\dot{b}_n)\right)^{p}\right\}$$

$$= q\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right]^{p}\right\}$$

bulunur.

Burada her iki tarafın q^{-1} altında görüntüsü alınırsa;

$$q^{-1}\left(u^{p_q}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right]^{p}$$

$$\left[q^{-1}\left(u^{p_q}\right)\right]^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{a}_k)+q^{-1}(\dot{b}_k)\right]^{p}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{a}_k)\right]^{p}\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{b}_k)\right]^{p}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Burada $\dot{\leq}$ tanımı göz önüne alınırsa;

$$q\left\{\left[q^{-1}\left(u^{p_q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right\} \dot{\leq} q\left\{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{a}_k)\right]^{p}\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[q^{-1}(\dot{b}_k)\right]^{p}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$= q\left\{ q^{-1}\left(q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[q^{-1}(\dot{a}_k) \right]^{p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \right) + q^{-1}\left(q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[q^{-1}(\dot{b}_k) \right]^{p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \right) \right\}$$

$$= q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[q^{-1}(\dot{a}_k) \right]^{p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \dot{+} q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[q^{-1}(\dot{b}_k) \right]^{p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} q^{-1}\left[q\left(\left[q^{-1}(\dot{a}_k) \right]^{p} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \dot{+} q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} q^{-1}\left[q\left(\left[q^{-1}(\dot{b}_k) \right]^{p} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} q^{-1}\left[\dot{a}_k^{\ p_q} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \dot{+} q\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} q^{-1}\left[\dot{b}_k^{\ p_q} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= q\left[\left\{ q^{-1}\left[q\left(\sum_{k=1}^{n} q^{-1}\left[\dot{a}_k^{\ p_q} \right] \right) \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \dot{+} q\left[\left\{ q^{-1}\left[q\left(\sum_{k=1}^{n} q^{-1}\left[\dot{b}_k^{\ p_q} \right] \right) \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= q\left[\left\{ q^{-1}\left[{}_{q}\sum_{k=1}^{n} \dot{a}_k^{\ p_q} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \dot{+} q\left[\left\{ q^{-1}\left[{}_{q}\sum_{k=1}^{n} \dot{b}_k^{\ p_q} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= \left\{ {}_{q}\sum_{k=1}^{n} \dot{a}_k^{\ p_q} \right\}^{\frac{1}{p}q} \dot{+} \left\{ {}_{q}\sum_{k=1}^{n} \dot{b}_k^{\ p_q} \right\}^{\frac{1}{p}q}$$

$$= \sqrt[p]{{}_{q}\sum_{k=1}^{n} \dot{a}_k^{\ p_q}}^{\,q} \dot{+} \sqrt[p]{{}_{q}\sum_{k=1}^{n} \dot{b}_k^{\ p_q}}^{\,q}$$

3.3. Kuadratik Aritmetikte Temel Analiz Kavramları

Bu kısımda kuadratik aritmetiğe göre bazı topolojik temel kavramlara değinilecektir. Çalışma boyunca kuadratik aritmetiğe kısaca q-aritmetik denildiği dikkate alınırsa; q-dizi, q-Cauchy dizisi, kuadratik bir dizinin q-sınırlılığı, q-dizilerde q-yakınsama, q-yığılma noktası, q-limit kavramları tanıtılacaktır. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı temel teoremlere yer verilecektir.

3.3.1. Tanım (Kuadratik reel dizi): $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}_q$ olmak üzere, tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar ve değer kümesi $\mathbb{R}_q$ kuadratik reel sayılar olan fonksiyona kuadratik reel dizi adı verilir.

Bir kuadratik dizi, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $(\dot{s}_n)$ veya $(\dot{s}_1,\dot{s}_2,...,\dot{s}_n,...)$ ile gösterilir. $(\dot{s}_n)$ q-dizi şeklinde ifade edilir.

1) $\dot{a}_n=\sqrt{\dot{n}}^{\,q}$ olmak üzere $(\dot{a}_n)$ dizisi,

2) $\dot{b}_n=\dfrac{\dot{1}}{\dot{n}}q$ olmak üzere $(\dot{b}_n)$ dizisi,

3) $\dot{c}_n=\dfrac{\dot{1}}{\dot{n}\dot{+}\dot{1}}q$ olmak üzere $(\dot{c}_n)$ dizisi

q-dizilere örnek olarak verilebilir.

3.3.2. Tanım (Kuadratik dizinin sınırlılığı): $\mathbb{R}_q$ da bir $(\dot{s}_n)$ q-dizisi (kuadratik dizisi) verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $|\dot{s}_n|_q\,\dot{\leq}\,\dot{K}$ olacak şekilde en az bir $\dot{K}\in\mathbb{R}^{+}{}_q$ varsa $(\dot{s}_n)$ q-dizisine $\mathbb{R}_q$ da q-sınırlıdır denir.

3.3.3. Tanım (Kuadratik yakınsak dizi): $\mathbb{R}_q$ da bir $(\dot{s}_n)$ q-dizisi (kuadratik dizisi) ve bir $\dot{x}\in\mathbb{R}_q$ noktası verilsin. Her $\dot{\varepsilon}\,\dot{>}\,\dot{0}$ sayısına karşılık her $n\geq n_0$ iken $|\dot{s}_n\dot{-}\dot{x}|_q\,\dot{<}\,\dot{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $(\dot{s}_n)$ q-dizisine q-yakınsak (kuadratik yakınsak) dizi denir.

Bu durum ${}^{q}\lim\limits_{n\to\infty}\dot{s}_n=\dot{x}$ veya $n\to\infty$ için $\dot{s}_n\xrightarrow{q}\dot{x}$ ile gösterilir.

Her $n \geq n_0$ için

$$\left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \Leftrightarrow q\left(\left|q^{-1}\left(\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right)\right|\right) \dot{<} \dot{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow q^{-1}\left(q\left(\left|q^{-1}\left(\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right)\right|\right)\right) < q^{-1}\left(\dot{\varepsilon}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|q^{-1}\left(\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right)\right| < q^{-1}\left(\dot{\varepsilon}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|q^{-1}\left(q\left(q^{-1}\left(\dot{s}_n\right) - q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right)\right)\right| < q^{-1}\left(\dot{\varepsilon}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|q^{-1}\left(\dot{s}_n\right) - q^{-1}\left(\dot{x}\right)\right| < q^{-1}\left(\dot{\varepsilon}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|s_n - x\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < s_n - x < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x - \varepsilon < s_n < x + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow q\left(x - \varepsilon\right) \dot{<} q\left(s_n\right) \dot{<} q\left(x + \varepsilon\right)$$

olup sonsuz sayıda terim $q\left(x+\varepsilon\right)$ nun solunda, sonsuz sayıda terim $q\left(x-\varepsilon\right)$ sağında yer almaktadır.

3.3.4. Tanım (Kuadratik Cauchy dizisi) : $\mathbb{R}_q$ da bir $\left(\dot{s}_n\right)$ q-dizisi verilsin. Her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $m,n \geq n_0$ için $\left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{s}_m\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\left(\dot{s}_n\right)$ q- dizisine q-Cauchy dizisi (kuadratik Cauchy dizisi) denir.

3.3.5. Teorem : 1) $\mathbb{R}_q$ da kuadratik yakınsak her q-dizi q-sınırlıdır.

2) Kuadratik yakınsak her q-dizinin q-limiti tektir.

3) $\mathbb{R}_q$ da kuadratik yakınsak her dizi kuadratik Cauchy dizisidir.

İspat : 1) $\mathbb{R}_q$ da kuadratik yakınsak bir $\left(\dot{s}_n\right)$ kuadratik dizisi verilsin ve ${}^{q}\lim\limits_{n\to\infty} \dot{s}_n = \dot{x}$ olsun. O halde her $n \geq n_0$ için $q\left(x-\varepsilon\right) \dot{<} \dot{s}_n \dot{<} q\left(x+\varepsilon\right)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$\dot{L} = \min\left\{q\left(x-\varepsilon\right), \dot{s}_1, \dot{s}_2, ...\dot{s}_{n_0 -1}\right\}$$

$$\dot{U} = \max\left\{q\left(x+\varepsilon\right), \dot{s}_1, \dot{s}_2, ...\dot{s}_{n_0 -1}\right\}$$

Alınırsa her n için $\dot{L} \dot{\le} \dot{s}_n \dot{\le} \dot{U}$ olur. Dolayısıyla dizi sınırlıdır.

2) Kuadratik dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim.

$n \to \infty$ için $\dot{s}_n \xrightarrow{q} \dot{x}$ ve $\dot{s}_n \xrightarrow{q} \dot{y}$ olsun.

$\dot{s}_n \xrightarrow{q} \dot{x}$ olduğundan verilen her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ sayısı için her $n \ge N_1$ iken $\left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$\dot{s}_n \xrightarrow{q} \dot{y}$ olduğundan verilen her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ sayısı için her $n \ge N_2$ iken $\left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{y}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$N = \max\left\{N_1, N_2\right\}$ alınırsa bu durumda her $n \ge N$ için 3.1.6. Önerme (4) kullanılarak

$$\left|\dot{x} \dot{-} \dot{y}\right|_q = \left|\dot{x} \dot{-} \dot{s}_n \dot{+} \dot{s}_n \dot{-} \dot{y}\right|_q \dot{\le} \left|\dot{x} \dot{-} \dot{s}_n\right|_q \dot{+} \left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{y}\right|_q$$

$$\dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} \dot{+} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} = \dot{\varepsilon}$$

$$\left|\dot{x} \dot{-} \dot{y}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} = \left|\sqrt{x-y}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}$$

$$= q\left(\left|q^{-1}\left(\sqrt{x-y}\right)\right|\right) \dot{<} \sqrt{\varepsilon} = q\left(\left|\left(\sqrt{x-y}\right)^2\right|\right) \dot{<} \sqrt{\varepsilon}$$

$$= q\left(\left|x-y\right|\right) \dot{<} \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\left|x-y\right|} \dot{<} \sqrt{\varepsilon}$$

$$= q\left[q^{-1}\left(\sqrt{\left|x-y\right|}\right)\right] < q\left(q^{-1}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)$$

$$= q\left[\left(\sqrt{\left|x-y\right|}\right)^2\right] < q\left[\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2\right] = q\left(\left|x-y\right|\right) < q\left(\varepsilon\right)$$

$$= \sqrt{\left|x-y\right|} < \sqrt{\varepsilon} = \left|x-y\right| < \varepsilon$$

Her $\varepsilon > 0$ için sağlandığından $x = y$ bulunur. Bu ise $x^{1/2} = y^{1/2}$ yani $\dot{x} = \dot{y}$ demektir. O halde dizinin limiti tektir.

3) $\left(\dot{s}_n\right)$, $\mathbb{R}_q$ da limiti $\dot{x}$ olan kuadratik yakınsak bir dizi olsun. Her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ için her $n \ge n_0$ olduğunda $\left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

O halde kuadratik üçgen eşitsizliği kullanılarak her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ ve her $m,n \geq n_0$ için ;

$$\left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{s}_m\right|_q \dot{\leq} \left|\dot{s}_n \dot{-} \dot{x}\right|_q \dot{+} \left|\dot{x} \dot{-} \dot{s}_m\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}$$

yazılır. Buradan $(\dot{s}_n)$ kuadratik Cauchy dizisi olur.

3.3.6. Teorem : $\mathbb{R}_q$ da iki kuadratik yakınsak dizi $(\dot{a}_n)$ ve $(\dot{b}_n)$ verilsin. ${}^q\lim_{n\to\infty} \dot{a}_n = \dot{a}$ ve ${}^q\lim_{n\to\infty} \dot{b}_n = \dot{b}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) ${}^q\lim_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{+} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{+} \dot{b}$

2) ${}^q\lim_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{-} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{-} \dot{b}$

3) ${}^q\lim_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{\times} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{\times} \dot{b}$

4) ${}^q\lim_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{/} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{/} \dot{b}$

İspat : 1) ${}^q\lim_{n\to\infty} \dot{a}_n = \dot{a}$ ve ${}^q\lim_{n\to\infty} \dot{b}_n = \dot{b}$ olduğundan her $\dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $n > n_1$ için $\left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve her $n > n_2$ için $\left|\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n > n_0$ için kuadratik üçgen eşitsizliğinden ve önerme 3.1.6. (4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left|\left(\dot{a}_n \dot{+} \dot{b}_n\right) \dot{-} \left(\dot{a} \dot{-} \dot{b}\right)\right|_q &= \left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a} \dot{+} \dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q \\
&\dot{\leq} \left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{+} \left|\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q \\
&\dot{\leq} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} \dot{+} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} = \dot{\varepsilon}
\end{aligned}$$

yazılır. O halde ${}^q\lim_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{+} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{+} \dot{b}$ olur.

2) ${}^q\lim_{n\to\infty} \dot{a}_n = \dot{a}$ ve ${}^q\lim_{n\to\infty} \dot{b}_n = \dot{b}$ olduğundan her $\dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $n > n_1$ için $\left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve her $n > n_2$ için $\left|\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n > n_0$ için kuadratik üçgen eşitsizliğinden ve önerme 3.1.6. (4) kullanılarak

$$\left|\left(\dot{a}_n \dot{-} \dot{b}_n\right) \dot{-} \left(\dot{a} \dot{-} \dot{b}\right)\right|_q = \left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a} \dot{+} \dot{b} \dot{-} \dot{b}_n\right|_q$$

$$\dot{\leq} \left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{+} \left|\dot{b} \dot{-} \dot{b}_n\right|_q$$

$$= \left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{+} \left|\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q$$

$$\dot{\leq} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} \dot{+} \dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2} = \dot{\varepsilon}$$

yazılır. O halde ${}^{q}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{-} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{-} \dot{b}$ olur.

3) q-yakınsak diziler q-sınırlı olduğundan $\left(\dot{b}_n\right)$ q-yakınsak dizisi q- sınırlıdır. O halde $\left|\dot{b}_n\right|_q \dot{\leq} \dot{M}$ koşulunu sağlayan bir $\dot{M} \dot{>} \dot{0}$ sayısı vardır. Ayrıca ${}^{q}\lim\limits_{n\to\infty} \dot{a}_n = \dot{a}$ ve ${}^{q}\lim\limits_{n\to\infty} \dot{b}_n = \dot{b}$ olduğundan herhangi bir $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} \dot{/} \left(\dot{2} \dot{\times} \dot{M}\right)$ ve $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} \dot{/} \left(\dot{2} \dot{\times} \left(\left|\dot{a}\right|_q \dot{+} \dot{1}\right)\right)$ sayıları verildiğinde;

Her $n > n_1$ için $\left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}_1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$, her $n > n_2$ için $\left|\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}_2$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n > n_0$ için 3.1.6. Önerme (3) ve (4) kullanılarak;

$$\left|\left(\dot{a}_n \dot{\times} \dot{b}_n\right) \dot{-} \left(\dot{a} \dot{\times} \dot{b}\right)\right|_q = \left|\left(\dot{a}_n \dot{\times} \dot{b}_n\right) \dot{-} \left(\dot{a} \dot{\times} \dot{b}_n\right) \dot{+} \left(\dot{a} \dot{\times} \dot{b}_n\right) \dot{-} \left(\dot{a} \dot{\times} \dot{b}\right)\right|_q$$

$$= \left|\dot{b}_n \dot{\times} \left(\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right) \dot{+} \dot{a} \dot{\times} \left(\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right)\right|_q$$

$$\dot{\leq} \left|\dot{b}_n \dot{\times} \left(\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right)\right|_q \dot{+} \left|\dot{a} \dot{\times} \left(\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right)\right|_q$$

$$\dot{\leq} \left|\dot{b}_n\right|_q \dot{\times} \left|\dot{a}_n \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{+} \left|\dot{a}\right|_q \dot{\times} \left|\dot{b}_n \dot{-} \dot{b}\right|_q$$

$$\dot{<} \left|\dot{b}_n\right|_q \dot{\times} \left(\dot{\varepsilon} \dot{/} \left(\dot{2} \dot{\times} \dot{M}\right)\right) \dot{+} \left|\dot{a}\right|_q \dot{\times} \left(\dot{\varepsilon} \dot{/} \left(\dot{2} \dot{\times} \left(\left|\dot{a}\right|_q \dot{+} \dot{1}\right)\right)\right)$$

$$\dot{<} \dot{M} \dot{\times} \left(\dot{\varepsilon} \dot{/} \left(\dot{2} \dot{\times} \dot{M}\right)\right) \dot{+} \left|\dot{a}\right|_q \dot{\times} \left(\dot{\varepsilon} \dot{/} \left(\dot{2} \dot{\times} \left|\dot{a}\right|_q\right)\right)$$

$$\dot{<} \left(\dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}\right) \dot{+} \left(\dot{\varepsilon} \dot{/} \dot{2}\right) = \dot{\varepsilon}$$

bulunur. Bu ${}^{q}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dot{a}_n \dot{\times} \dot{b}_n\right) = \dot{a} \dot{\times} \dot{b}$ olduğunu gösterir.

3.3.7. Tanım (Kuadratik Açık Yuvar) : Her $\dot{a} \in \mathbb{R}_q$ ve her $\dot{\delta} \dot{>} \dot{0}$ sayısı için

$$B_q\left(\dot{a},\dot{\delta}\right) = \left\{\dot{x} \in \mathbb{R}_q : \left|\dot{x} \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{<} \dot{\delta}\right\}$$

$$= \left\{\dot{x} \in \mathbb{R}_q : \dot{0} \dot{-} \dot{\delta} \dot{<} \dot{x} \dot{-} \dot{a} \dot{<} \dot{\delta}\right\}$$

$$= \left\{\dot{x} \in \mathbb{R}_q : q\left(a-\delta\right) \dot{<} \dot{x} \dot{<} q\left(a+\delta\right)\right\}$$

ile tanımlı kümeye $\dot{a}$ merkezli $\dot{\delta}$ yarıçaplı kuadratik açık yuvar denir.

3.3.8. Tanım (Kuadratik Yığılma Noktası) : $A \subset \mathbb{R}_q$ ve $\dot{a} \in \mathbb{R}_q$ olmak üzere her $\dot{\delta} \dot{>} \dot{0}$ sayısı için;

$$B_q\left(\dot{a},\dot{\delta}\right) \dot{-} \{\dot{a}\} = \left[\left(q\left(a-\delta\right), q\left(a+\delta\right)\right) - \left\{q\left(a\right)\right\}\right] \cap A \neq \varnothing$$

oluyorsa $\dot{a} \in \mathbb{R}_q$ noktasına A kümesinin q-yığılma noktası (kuadratik yığılma noktası) denir. A kümesinin tüm kuadratik yığılma noktalarının kümesi $A^{'q}$ ile gösterilir.

3.3.9. Tanım (Kuadratik Limit) : $X \subset \mathbb{R}_q$, $f : X \to \mathbb{R}_q$ bir fonksiyon, $\dot{a} \in X^{'q}$ ve $\dot{b} \in \mathbb{R}_q$ olsun. Her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ sayısı için $\dot{0} \dot{<} \left|\dot{x} \dot{-} \dot{a}\right|_q \dot{<} \dot{\delta}$ koşulunu sağlayan her $\dot{x} \in X$ için $\left|f(x) \dot{-} \dot{b}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}$ olan bir $\dot{\delta} = \delta\left(\dot{\varepsilon}\right) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x)$ fonksiyonunun $\dot{a}$ noktasındaki q-limiti (kuadratik limiti) $\dot{b}$ dır denir ve

$${}^{q}\lim_{x \to a} f(x) = \dot{b} \quad \text{veya} \quad f(x) \xrightarrow{q} \dot{b} \quad \text{ile gösterilir.}$$

3.3.10. Örnek: ${}^{q}\lim\limits_{x \to 2} f(x) = {}^{q}\lim\limits_{x \to 2}\left(\dot{x} \dot{+} \dot{3}\right) = \dot{5}$ olduğunu gösteriniz.

Her $\dot{\varepsilon} \dot{>} \dot{0}$ verilsin. $\dot{0} \dot{<} \left|\dot{x} \dot{-} \dot{2}\right|_q \dot{<} \dot{\delta}$ koşulunu sağlayan her $\dot{x} \in \mathbb{R}_q$ için $\left|\left(\dot{x} \dot{+} \dot{3}\right) \dot{-} \dot{5}\right|_q \dot{<} \dot{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $\dot{\delta} = \delta\left(\dot{\varepsilon}\right) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulmalıyız.

$\dot{0} \dot{<} \left|\dot{x} \dot{-} \dot{2}\right|_q \dot{<} \dot{\delta}$ olsun.

$$\left|\left(\dot{x} \dot{+} \dot{3}\right) \dot{-} \dot{5}\right|_q = \left|q\left(q^{-1}\left(\dot{x}\right) + q^{-1}\left(\dot{3}\right)\right) \dot{-} \dot{5}\right|_q$$

$$= \left|q\left(q^{-1}\left(q\left(q^{-1}\left(\dot{x}\right) + q^{-1}\left(\dot{3}\right)\right) - q^{-1}\left(\dot{5}\right)\right)\right)\right|_q$$

$$=\left|q\left(q^{-1}(\dot{x})+q^{-1}(\dot{3})-q^{-1}(\dot{5})\right)\right|_q$$

$$=\left|q\left(x+3-5\right)\right|_q=\left|q\left(x-2\right)\right|_q=\left|\sqrt{x-2}\right|_q$$

$$=\left|\dot{x}\dot{-}\dot{2}\right|_q\dot{<}\dot{\delta}$$

yazılır. $\dot{\delta}=\dot{\delta}(\dot{\varepsilon})=\dot{\varepsilon}$ alınırsa $\left|\left(\dot{x}\dot{+}\dot{3}\right)\dot{-}\dot{5}\right|_q\dot{<}\dot{\varepsilon}$ bulunur.

3.3.11. Teorem: Bir fonksiyonun bir noktada tek bir q-limiti vardır.

İspat: Kabul edelim ki ${}^q\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dot{L}$ ve ${}^q\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dot{M}$ olsun.

${}^q\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dot{L}$ olduğundan her $\dot{\varepsilon}\dot{>}\dot{0}$ sayısı verildiğinde her $\dot{x}\in\mathbb{R}_q$ için $\dot{0}\dot{<}\left|\dot{x}\dot{-}\dot{a}\right|_q\dot{<}\dot{\delta}_1$ iken $\left|f(x)\dot{-}\dot{L}\right|_q\dot{<}\dot{\varepsilon}\dot{/}\dot{2}$ olan bir $\dot{\delta}_1=\dot{\delta}(\dot{\varepsilon})\dot{>}\dot{0}$ sayısı vardır.

${}^q\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dot{M}$ olduğundan her $\dot{\varepsilon}\dot{>}\dot{0}$ sayısı verildiğinde her $\dot{x}\in\mathbb{R}_q$ için $\dot{0}\dot{<}\left|\dot{x}\dot{-}\dot{a}\right|_q\dot{<}\dot{\delta}_2$ iken $\left|f(x)\dot{-}\dot{M}\right|_q\dot{<}\dot{\varepsilon}\dot{/}\dot{2}$ olan bir $\dot{\delta}_2=\dot{\delta}(\dot{\varepsilon})\dot{>}\dot{0}$ sayısı vardır.

$\dot{\delta}=\min\left\{\dot{\delta}_1,\dot{\delta}_2\right\}$ alınırsa her $\dot{x}\in\mathbb{R}_q$ için $\dot{0}\dot{<}\left|\dot{x}\dot{-}\dot{a}\right|_q\dot{<}\dot{\delta}$ iken

$$\left|\dot{L}\dot{-}\dot{M}\right|_q=\left|\dot{L}\dot{-}f(x)\dot{+}f(x)\dot{-}\dot{M}\right|_q$$

$$\dot{\leq}\left|\dot{L}\dot{-}f(x)\right|_q\dot{+}\left|f(x)\dot{-}\dot{M}\right|_q$$

$$\dot{<}\dot{\varepsilon}\dot{/}\dot{2}\dot{+}\dot{\varepsilon}\dot{/}\dot{2}=\dot{\varepsilon}$$

bulunur. Her $\dot{\varepsilon}\dot{>}0$ için gerçekleştiğinden $\dot{L}=\dot{M}$ dır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kuadratik hesap tarzının klasik aritmetik ile olan ilişkisi incelendi. Klasik aritmetikte ki bazı temel tanım, teorem ve eşitsizliklerin kuadratik aritmetikteki karşılığı elde edildi. Kuadratik mutlak değer ve mutlak değerli eşitsizlikler tanımlandı. Kuadratik üçgen eşitsizliği ve kuadratik Minkowski eşitsizliği elde edildi. Kuadratik aritmetiğe göre bazı topolojik temel kavramlara değinildi. Kuadratik dizi, kuadratik Cauchy dizisi, kuadratik bir dizinin sınırlılığı, kuadratik dizilerde kuadratik yakınsama, kuadratik limit kavramları tanıtıldı. Bu kavramlarla ilgili bazı temel teoremlere yer verildi.

Kuadratik metrik uzaylar, kuadratik hesap tarzına göre yakınsaklık, tamlık, kuadratik reel sayı cismi üzerinde dizi uzayları incelenebilir.

P=2 durumunda kuadratik hesap tarzının incelenmiş olan bu temel özellikleri p>2 olması durumunda da elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alp M., Musayev B., ve Mustafayev N., 2003. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz* Cilt II, Tekağaç Eylül Yay., Kütahya,

Başar, F., ve Çakmak, A.F., (2012). Some new results on sequences spaces with respect to non-Newtonian calculus, *Journal of Inequalities and Applications*, 228, 1-12.

Başar F., ve Çakmak A.F., (2014). *On line and double integrals in the non-Newtonian sense,* International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Shymkent, Kazakhstan,

Başar F., ve Tekin S., (2013). *Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field*, Abstract and Applied Analysis,

Binbaşıoğlu D., Demiriz S., ve Türkoğlu D., (2015). *Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces*, Journal of Fixed Point Theory and Applications.

Boruah, K. ve Hazarika, B., (2016). *Bigeometric Calculus and its applications*, Department of Mathematics, Rojiv Gandhi University, Rono Hills, Doimukh-79112, Arunachal Pradesh, India.

Boruah, K., (2017). *On Some Basic Properties of Geometric Real Sequences*, Department of Mathematics, Rojiv Gandhi University, Rono Hills, Doimukh-79112, Arunachal Pradesh, India.

Duyar, C., ve Erdoğan, M., (2016). *On Non-Newtonian Series*, IOSR Journal of Mathematics, IV, 34-48, doi: 0.9790/5728-1206043448

Erdoğan, F., ve Sağır, B., (2019). *On The Function Sequences and Series in the Non-Newtonian Calculus,* Journal of Science and Arts, 4(49), 915-936.

Grossman, M., ve Katz, R., (1972). *Non-Newtonian Calculus,* 1st ed., Lee Press, Pigeon Cove Massachussets.

Grossman, J., (1981). *Meta-Calculus: Differantial and Integral*, 1st ed., Archimedes Foundation, Rockport Massachussets.

Grossman, M., (1983). *Bigeometric Calculus: A System with a Scale Free Deriative* , 1st ed., Archimedes Foundation, Rockport Massachussets.

Kadak, U., (2015). *Newtonyen Olmayan Analiz ve Çeşitli Uygulamaları.* Gazi Üniversitesi.

Türkmen, C., (2011). *Some New Sequence Spaces Wıth Multiplicative Calculus*, Fatih University.

ÖZ GEÇMİŞ

Havanur ÇOBAN, Samsun Yeşilkent Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'nden 2014 yılında mezun oldu. 2017 yılında OMÜ LEE Matematik Yüksek Lisans programına girdi. Mezuniyetinden bu yana matematik öğretmeni olarak görev yapan Havanur ÇOBAN, orta derecede İngilizce bilmektedir. Temel ilgi alanları, edebiyat, psikoloji, sanat, müzik, okuma. (15.11.2021)

İletişim Bilgileri

Öğrenci no : 17210936

ORCID ID : 0000-0002-4076-7447

Yayınlar:

1. Çoban, H. ve Sağır, B. (2021, Mayıs). "Kuadratik Kalkülüs Üzerine" . *7. IFS ve Çağdaş Matematik Konferansı.* Mersin, Türkiye.