T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

NEWTONYEN OLMAYAN HESAP TARZINA GÖRE MODÜLÜS FONKSİYONU VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Murat Erdem YILMAZ

Danışman
Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

SAMSUN
2022

TEZ KABUL VE ONAYI

Murat Erdem YILMAZ tarafından, **Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR** danışmanlığında hazırlanan **"NEWTONYEN OLMAYAN HESAP TARZINA GÖRE MODÜLÜS FONKSİYONU BAZI ÖZELLİKLERİ"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 6.7.2022 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**İmza**	**Sonuç**
Başkan	Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Prof. Dr. İlker ERYILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR Gümüşhane Üniversitesi Sistem Analizi Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
… / … / …
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

İmza
10 /06 / 2022
Murat Erdem YILMAZ

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : NEWTONYEN OLMAYAN HESAP TARZINA GÖRE MODÜLÜS FONKSİYONU VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 16/06/2022 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 29

Tek kaynak oranı : % 3 çıkmıştır.

İmza
16 /06 / 2022
Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

ÖZET

NEWTONYEN OLMAYAN HESAP TARZINA GÖRE MODÜLÜS FONKSİYONU VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Murat Erdem YILMAZ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans, Haziran/2022
Danışman: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasının amacı; klasik kalkülüse göre bilinen modülüs fonksiyonu tanımı kullanılarak Newtonyen olmayan hesap tarzına dayalı alternatif bir *-modülüs fonksiyonu tanımlamak ve *-modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanacak olan dizi uzaylarında topolojik ve geometrik özelliklere temel teşkil edecek bazı sonuçları elde etmektir.

Bu nedenle tezin birinci bölümünde, klasik kalkülüse göre modülüs fonksiyonu ve *-kalkülüs tanıtılmış, günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, çalışma ile ilgili bazı temel tanım, önerme, gösterimler ve teoremlere yer verildi. Aritmetik sistemler tanıtıldı.

Tezin üçüncü bölümünde, klasik kalkülüse göre modülüs fonksiyonu tanımlanıp bazı temel özellikleri verildi.

Tezin dördüncü bölümünde, Newtonyen olmayan hesap tarzına göre modülüs fonksiyonu tanıtılıp klasik modülüs fonksiyonu tanımı genelleştirilmiştir. Bazı temel özellikleri ifade edilip, ispatlanmıştır. Elde edilen bu teorik sonuçları desteklemek için bazı destekleyici örnekler sunulmuştur.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar ifade edilip, önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: $\alpha -$Aritmetik, $\alpha -$Süreklilik, *-Sınırlılık, *-Modülüs fonksiyonu, *-Kalkülüs

ABSTRACT

MODULUS FUNCTION ACCORDING TO NON-NEWTONIAN ACCOUNT STYLE AND ITS SOME FEATURES

Murat Erdem YILMAZ
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, June/2022
Supervisor: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

The aim of this thesis which consists of five chapters is to define an alternative *- modulus function based on non-Newtonian calculus by using the known modulus function definition according to classical calculus and to obtain some results that will form the basis of topological and geometric properties in sequence spaces to be defined with the help of *-modulus function.

For this reason, in the first part of the thesis, the modulus function and according to classical calculus and *-calculus are introduced, and brief information is given about the studies carried out until today.

In the second part of the thesis, some basic definitions, propositions, notations and theorems related to study are given, and Arithmetic systems are introduced.

In the third part of the thesis, the modulus function according to classical calculus is defined and some basic properties are given.

In the fourth part of the thesis, the modulus function according to the non-Newtonian calculation style is introduced and the classical modulus function definition is generalized. Some basic features are expressed and proven. Some supporting examples are presented to support these theoretical results.

In the last part, the obtained results are expressed and the recommendations are given place.

Keywords: $\alpha-$Arithmetic, $\alpha-$Continuity, *-Limitation, *-Module function, *-Calculus.

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesinde her zaman yol gösterici olan, fikirlerinden, bilim insanı kişiliğinden ve insaniyetinden çok şey öğrendiğim değerli hocam Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarımın her anında her zaman desteğini esirgemeden yanımda olan sevgili eşim Şule YILMAZ'a ; bugünlere erişmemde emekleri sonsuz olan annem Dürdane YILMAZ, babam Emrullah YILMAZ, kardeşim Can YILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Murat Erdem YILMAZ

Samsun, Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}(N)$	: Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi
$*-\lim$	: Yıldız limit
${}^{\beta}\lim$	: $\beta-$ limit
$\ddot{[}c,d\ddot{]}$	: $\beta-$aralık
$*\log$	: Yıldız logaritma
$\sqrt{x}^{\beta}$	: $\beta-$karekök
$[\![x]\!]_{\alpha}$	: $\alpha-$tamdeğer

TABLOLAR DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu çalışmada $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ sembolleri ile sırasıyla doğal sayılar ve reel sayılar kümeleri gösterilsin. Modülüs fonksiyonu kavramı ilk kez 1953'te Japon matematikçi Nakano tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Maddox (1986), Ruckle (1973) kaynaklarında modülüs fonksiyonunun bazı temel özellikleri incelenmiştir. Aşağıdaki koşulları sağlayan $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonuna bir modülüs fonksiyonu denir.

Her $x,y\in[0,\infty)$ için

i) $g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,

ii) $g(x+y)\le g(x)+g(y)$,

iii) g, artandır,

iv) g, sıfır noktasında sağdan süreklidir.

Son yıllarda toplanabilme teorisinde modülüs fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar dikkat çekmektedir. Bir çok matematikçi klasik modülüs fonksiyonu yardımıyla çeşitli dizi uzayları tanımlayıp, özelliklerini incelemiştir.

Micheal Grossman ve Robert Katz 1967-1970 yılları arasında Newtonyen olmayan kalkülüs adı verilen yeni bir hesap ailesi kurmuşlardır. Newtonyen olmayan hesaplar farklı aritmetik türlerini ve bunların üreteçlerini kullanır. İlk olarak klasik hesap, geometrik hesap, harmonik hesap ve kuadratik hesap içeren kalkülüsün bir sonsuz ailesini tanımlamışlardır. Newtonyen olmayan kalkülüs yerine *-kalkülüs veya *-hesap ifadesi de kullanılmaktadır.

α, reel sayılar kümesinin X ve $Y=\mathbb{R}_\alpha$ alt kümeleri arasında birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Burada $\mathbb{R}_\alpha=\{\alpha(x):x\in\mathbb{R}\}$ dır. Aşağıda verilen işlemler ve sıralama ile birlikte $\alpha:X\to Y\subset\mathbb{R}$ fonksiyonu üreteç adını alır ve $\alpha-$aritmetik adı verilen bir aritmetik tanımlar.

Her $r,s\in\mathbb{R}_\alpha$ için

$\alpha-$toplama $\qquad r\dot{+}s=\alpha\left\{\alpha^{-1}(r)+\alpha^{-1}(s)\right\}$

$\alpha -$çıkarma $\qquad r \dot{-} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r) - \alpha^{-1}(s)\right\}$

$\alpha -$çarpma $\qquad r \dot{\times} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r) \times \alpha^{-1}(s)\right\}$

$\alpha -$bölme ($s \neq \dot{0}$) $\qquad r \dot{/} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r) / \alpha^{-1}(s)\right\}$

$\alpha -$sıralama $\qquad r \dot{<} s \Leftrightarrow \alpha^{-1}(r) < \alpha^{-1}(s)$.

Keyfi seçilmiş α ve β üreteç fonksiyonları yardımıyla *-kalkülüs aritmetiklerin sıralı ikilisi (α-aritmetik, β-aritmetik) olarak tanımlanmıştır. Fonksiyonların tanım kümesi *-kalkülüse göre α-aritmetik üzerinde, değer kümesi β-aritmetik üzerindedir. Newtonyen olmayan hesap ile ilgili literatür zengin ve ulaşılabilirdir. *-Kalkülüs teorisi, topolojisi ve analizi hakkında daha fazla bilgi için okuyucuyu literatüre yönlendiriyoruz (Grossman, 2006; Türkmen ve Başar, 2012; Çakmak ve Başar, 2012; Duyar vd., 2015; Binbaşıoğlu vd., 2016; Güngör, 2020).

Son yıllarda yapılan araştırmalara bakıldığında Newtonyen olmayan modülüs Fonksiyonunun tanımı ve bazı özellikleri ile ilgili literatürde herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu sebeple çalışmamızın temel amacı Newtonyen olmayan hesap tarzına dayalı alternatif bir *-modülüs fonksiyonu tanımlamaktır. Bu tezde Newtonyen olmayan hesap tarzına göre modülüs fonksiyonunun (*-modülüs) tanımı yapılıp akabinde *-modülüs fonksiyonu örnekleri verilmiş ve bazı önemli teoremler ve önermeler ispatlanmıştır. Ayrıca *-modülüs fonksiyonlarının *-toplamı, *-farkı ve *-bileşkesi tanımlanmıştır. Elde edilen bu teorik sonuçları desteklemek için bazı destekleyici örnekler ve sonuçlar sunulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

Çalışmanın bu kısmında diğer kısımlarda kullanılacak olan temel tanım, teorem ve gösterimlere yer verilecek ve *-kalkülüs teorisi özetlenecektir.

2.1. Klasik Kalkülüste Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1.: Museyev vd. (2003), $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $L \in \mathbb{R}$ ve c noktası, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\text{i) } 0 < |x - c| < \delta \text{ olan her } x \in A \text{ için } |f(x) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, c noktasına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L dir denir ve $\lim_{x \to c} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

$$\text{ii) Her } x \in (c, c + \delta) \cap A \text{ için } |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, c noktasına sağdan yaklaşırken f fonksiyonunun limiti L_1 dir denir ve $f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.

$$\text{iii) Her } x \in (c - \delta, c) \cap A \text{ için } |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, c noktasına soldan yaklaşırken f fonksiyonunun limiti L_2 dir denir ve $f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.

f fonksiyonunun c noktasında limiti varsa

$$f(c^-) = f(c^+) = L$$

dir.

Tanım 2.1.2. Museyev vd. (2003), Bir c reel sayısı ve $(c_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi verilsin. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$n \geq N \text{ olan her } n \in \mathbb{N} \text{ için } |c_n - c| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (c_n) dizisi c noktasına yakınsar denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. Museyev vd. (2003), $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $c \in A$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$|x-c| < \delta \text{ olan her } x \in A \text{ için } |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir.

Eğer f, A nın her noktasında sürekli ise f, A kümesinde süreklidir denir.

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A nın tüm ayrık noktalarında sürekli olacağından, limit tanımı göz önüne alınırsa süreklilik tanımı aşağıdaki şekilde de yapılabilir:

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $c \in A$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ dir.

Sağdan ve soldan limit tanımları göz önüne alındığında

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

oluyorsa f, $c \in A$ noktasında sağdan süreklidir denir.

$\mathbb{R}$ de süreklilik tanımına denk olan dizisel süreklilik tanımını verelim.

Tanım 2.1.4. Museyev vd. (2003), $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $c \in A$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ özelliğindeki her $(x_n) \subset A - \{c\}$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ ise f, c noktasında dizisel süreklidir denir.

Tanım 2.1.5. Maddox (1980), X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ kompleks veya reel sayıların bir cismi olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{array}{ll} + : X \times X \to X & \qquad \cdot : \mathbb{F} \times X \to X \\ \quad (x, y) \to x + y & \qquad\quad (\lambda, x) \to \lambda.x \end{array}$$

İşlemleri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, X kümesine $\mathbb{F}$ Cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

i) $\quad x + y = y + x$

ii) $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$

iii) $x+\theta=x$ olacak şekilde $\theta\in X$ vardır.

iv) $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde $(-x)\in X$ vardır.

v) $1.x=x$

vi) $\lambda(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$

vii) $(\lambda+\mu)x=\lambda.x+\mu.x$

viii) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

Tanım 2.1.6. Bir $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x\in X$ için $|f(x)|\le M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.7. Kızmaz (1993), X boş olmayan bir küme ve $d:X\times X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye bir yarı metrik, (X,d) ikilisine de yarı metrik uzay denir.

i) $d(x,x)=0$

ii) $d(x,y)=d(y,x)$

iii) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

Eğer (i) koşulu ‘‘ $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ ’’ olarak alınırsa d ye metrik, (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.1.8. Kızmaz (1993), (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi d metriğine göre X uzayının bir elemanına yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.1.9. Wilansky (1964) X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $p:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa p ye bir paranorm, (X,p) ikilisine de paranormlu uzay denir.

i) $p(\theta)=0$

ii) $p(x)=p(-x)$

iii) $p(x+y)\le p(x)+p(y)$

iv) $(t_n)\subset\mathbb{F}$ ve $t_n\to t$ olmak üzere $p(x_n-x)\to 0$ olan $(x_n)\subset X$ için

$p(t_n x_n - tx) \to 0$ (skalerle çarpımın sürekliliği)

Tanım 2.1.10. Wilansky (1964), X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $q : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa q ya bir yarı norm, (X, q) ikilisine de yarı normlu uzay denir.

i) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$

ii) $q(x + y) \le q(x) + q(y)$

Tanım 2.1.11. Kızmaz (1993), X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|.\|$ ya bir norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Her norm aynı zamanda bir yarı normdur.

Önerme 2.1.12. Kızmaz (1993),

i) Her $x, y \in \mathbb{C}$ için

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \le \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

ii) $0 < r \le 1$ ve $a, b \ge 0$ için

$$(a+b)^r \le a^r + b^r$$

eşitsizlikleri vardır.

2.2. Aritmetik Sistemler

Evreni (realm) $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesi olan bir tam sıralı cisim aritmetik olarak adlandırılır. Sonsuz çoklukta aritmetik bulunmaktadır. Bunlardan biri klasik aritmetik olarak adlandırılan reel sayı sistemidir. Bunun yanı sıra exp fonksiyonu ile üretilen aritmetik geometrik aritmetik, q_p ile üretilen aritmetik ise $q_p -$aritmetik olarak aritmetiklere örnek gösterilebilir.

Aşağıdaki kavramlar tanıtılırken genel olarak Grossman ve Katz kullanılmıştır.

Tanım 2.2.1. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi de $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesi olan birebir fonksiyona üreteç denir. I özdeşlik fonksiyonu, exp fonksiyonu, x^5 ile tanımlı fonksiyon üreteç fonksiyonuna örnek gösterilebilir. Görüntü kümesi U olan bir α üreteci göz önüne alınsın. Bu üreteç $r,s \in U$ olmak üzere aşağıda verilen işlemler ve sıralama bağıntısıyla birlikte $\alpha-$aritmetik olarak adlandırılır.

$$\alpha-\text{toplama} \qquad r \dot{+} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r)+\alpha^{-1}(s)\right\}$$

$$\alpha-\text{çıkarma} \qquad r \dot{-} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r)-\alpha^{-1}(s)\right\}$$

$$\alpha-\text{çarpma} \qquad r \dot{\times} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r)\times\alpha^{-1}(s)\right\}$$

$$\alpha-\text{bölme } (s \neq \dot{0}) \qquad r \dot{/} s = \alpha\left\{\alpha^{-1}(r)/\alpha^{-1}(s)\right\}$$

$$\alpha-\text{sıralama} \qquad r \dot{<} s \Leftrightarrow \alpha^{-1}(r) < \alpha^{-1}(s)$$

$\dot{0} \dot{<} x$ olan sayılar $\alpha-$pozitif, $x \dot{<} \dot{0}$ olanlar ise $\alpha-$negatif sayılardır. $\alpha-$bir sayısı $\dot{1}=\alpha(1)$ olarak gösterilir. $\alpha-$tamsayılar, $\dot{0}$ sayısından ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının $\alpha-$toplamasıyla ve $\dot{0}$ sayısından ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının $\alpha-$çıkarmasıyla elde edilir.

$\alpha-$tamsayılar

$$\ldots,\alpha(-2),\alpha(-1),\alpha(0),\alpha(1),\alpha(2),\ldots$$

şeklindedir. Her bir n tamsayısı $\alpha-$aritmetiğine göre $\dot{n}=\alpha(n)$ ile gösterilir. Eğer $\dot{n}$ bir $\alpha-$pozitif tamsayı ise

$$\dot{n} = \underbrace{\dot{1} \dot{+} \dot{1} \dot{+} \ldots \dot{+} \dot{1}}_{n-defa}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.2.2. U kümesindeki her $u \dot{<} v$ sayısı için $u \dot{\leq} x \dot{\leq} v$ koşulunu sağlayan $x \in U$ sayılarının kümesi $\alpha-$aralık olarak adlandırılır ve $[u,v]^{\cdot}$ ile gösterilir. $[u,v]^{\cdot}$ $\alpha-$aralığı $v \dot{-} u$ $\alpha-$uzunluğa sahiptir.

Tanım 2.2.3. exp fonksiyonu ile üretilen aritmetiğe geometrik aritmetik denir.

Geometrik aritmetiğe göre bazı semboller ve işlemler c ve d keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere Tablo 2.1.'de verilmiştir (Boruah, 2017).

Tablo 2.1. Geometrik Aritmetik

Üreteç	exp
Evreni(realm)	$\mathbb{R}^+$
Geometrik sıfır	1
Geometrik bir	e
c ile d nin geometrik toplamı	$\exp\{\ln c + \ln d\} = cd$
c ile d nin geometrik farkı	$\exp\{\ln c - \ln d\} = c / d$
c ile d nin geometrik çarpımı	$\exp\{\ln c . \ln d\} = c^{\ln d} = d^{\ln c}$
c ile d nin geometrik bölümü ($d \neq 1$)	$\exp\{\ln c / \ln d\} = c^{1/\ln d}$
Geometrik sıralama	Klasik sıralama ile özdeş
Geometrik pozitif sayılar	1 den büyük sayılar
Geometrik negatif sayılar	1 den küçük sayılar
Geometrik aralıklar	Pozitif aralıklarla özdeş
$[c,d]$ geometrik uzunluğu	d / c

Tanım 2.2.4. Her $x \in \mathbb{R}$ için $q_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_q \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu ve onun ters fonksiyonu q_p^{-1} olmak üzere

$$q_p(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{p}}, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad q_p^{-1}(x) = \begin{cases} x^p, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^p, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $q-$üreteç fonksiyonlarına sırasıyla $p.$kök ve $p.$kuvvet üreteçleri denir. Bu üreteçler yardımıyla q_p-aritmetik diye adlandırılan bir alt $\alpha(x) = q_p(x)$ sınıfı elde edilir (Grossman, 1979).

$p = 2$ ve $p = -1$ durumlarında sırasıyla $q-$kuadratik aritmetik ve $q-$harmonik aritmetik elde edilir.

2.3. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.3.1. $\mathbb{R}(N) = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesine Newtonyen olmayan reel sayı kümesi denir. Newtonyen olmayan reel sayı kümesi $\mathbb{R}(N)$ için $(\dot{+})$ toplama ve $(\dot{\times})$ çarpma ikili işlemleri ile $\dot{\leq}$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\dot{+} : \mathbb{R}(N)\times\mathbb{R}(N)\to\mathbb{R}(N)$$
$$(r,s)\to r\dot{+}s=\alpha\left\{\alpha^{-1}(r)+\alpha^{-1}(s)\right\}$$

$$\dot{\times} : \mathbb{R}(N)\times\mathbb{R}(N)\to\mathbb{R}(N)$$
$$(r,s)\to r\dot{\times}s=\alpha\left\{\alpha^{-1}(r)\times\alpha^{-1}(s)\right\}$$

$$\dot{\leq} : r,s\in\mathbb{R}(N),\ \ r\dot{\leq}s \Leftrightarrow \alpha^{-1}(r)\leq\alpha^{-1}(s)$$

Teorem 2.3.2. $(\mathbb{R}(N),\dot{+},\dot{\times},\dot{\leq})$ tam sıralı cisimdir (Duyar & Erdoğan , 2016).

Önerme 2.3.3. $p,r,s,t\in\mathbb{R}(N)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

1) $p\dot{\leq}r$ ise $p\dot{+}s\dot{\leq}r\dot{+}s$ ve $p\dot{-}s\dot{\leq}r\dot{-}s$,

2) $p\dot{\leq}r$ ve $s\dot{\leq}t$ ise $p\dot{+}s\dot{\leq}r\dot{+}t$ ve $p\dot{-}s\dot{\leq}r\dot{-}t$,

3) $p\dot{\leq}r$ ve $\dot{0}\dot{<}s$ ise $p\dot{\times}s\dot{\leq}r\dot{\times}s$ ve $\frac{p}{s}N\dot{\leq}\frac{r}{s}N$,

4) $\dot{0}\dot{<}p,r$ ve $p\dot{\leq}r$ ise $\frac{\dot{1}}{r}N\dot{\leq}\frac{\dot{1}}{p}N$,

5) $p\dot{\leq}r$ ise $\dot{0}\dot{-}r\dot{\leq}\dot{0}\dot{-}p$ olur.

Tanım 2.3.4. $U\subset\mathbb{R}(N)$ kümesindeki bir u sayısının $\alpha-$karesi u^{2_N} ile gösterilir ve $u^{2_N}=u\dot{\times}u$ olarak tanımlanır.

$U\subset\mathbb{R}(N)$ kümesindeki bir u sayısının $\alpha-$karekökü, $\alpha-$karesi u ya eşit olan $\alpha-$ negatif olmayan sayı olarak tanımlanır ve $\sqrt{u}^{N}$ ile gösterilir. Yani $t^{2_N}=u\Leftrightarrow t=\sqrt{u}^{N}$ dır. Böylece

$$t=\sqrt{u}^{N}=\alpha\left\{\sqrt{\alpha^{-1}(u)}\right\}$$

olur.

$u\in\mathbb{R}(N)$ nin $p.$Newtonyen olmayan üssü ve $q.$ Newtonyen olmayan kökü sırasıyla u^{p_N} ve $\sqrt[q]{u}^{N}$ ile gösterilir.

$$u^{2_N}=u\dot{\times}u=\alpha\left\{\alpha^{-1}(u)\times\alpha^{-1}(u)\right\}=\alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(u)\right]^{2}\right\}$$

$$u^{3_N}=u^{2_N}\dot{\times}u=\alpha\left\{\alpha^{-1}\left\{\alpha\left[\alpha^{-1}(u)\times\alpha^{-1}(u)\right]\right\}\times\alpha^{-1}(u)\right\}=\alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(u)\right]^{3}\right\}$$

$$\vdots$$

$$u^{p_N} = u^{(p-1)_N} \dot{\times} u = \alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(u)\right]^p\right\}$$

$$\vdots$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5. $U \subset \mathbb{R}(N)$ kümesindeki bir x sayısının Newtonyen olmayan mutlak değeri $|x|_N$ ile gösterilir.

$$|x|_N = \begin{cases} x & , x \dot{>} \dot{0} \\ \dot{0} & , x = \dot{0} \\ \dot{0} \dot{-} x & , x \dot{<} \dot{0} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $U \subset \mathbb{R}(N)$ kümesindeki her x sayısı için

$$\sqrt{x^{2_N}}^N = |x|_N = \alpha\left(\left|\alpha^{-1}(x)\right|\right)$$

yazılır.

Önerme 2.3.6. $p, r, s, t \in \mathbb{R}(N)$, $m \in \mathbb{N}$ ve $s, t \neq \dot{0}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.

1) $\dfrac{p}{s}N \dot{+} \dfrac{r}{t}N = \dfrac{(p \dot{\times} t) \dot{+} (r \dot{\times} s)}{s \dot{\times} t}N$,

2) $\dfrac{p}{s}N \dot{-} \dfrac{r}{t}N = \dfrac{(p \dot{\times} t) \dot{-} (r \dot{\times} s)}{s \dot{\times} t}N$,

3) $\dfrac{p}{s}N \dot{\times} \dfrac{r}{t}N = \dfrac{p \dot{\times} r}{s \dot{\times} t}N$,

4) $r \neq \dot{0}$ olmak üzere $\dfrac{\frac{p}{s}N}{\frac{r}{t}N}N = \dfrac{p}{s}N \dot{\times} \dfrac{t}{r}N = \dfrac{p \dot{\times} t}{s \dot{\times} r}N$,

5) $\left(\dfrac{p}{s}N\right)^{m_N} = \dfrac{p^{m_N}}{s^{m_N}}N$,

6) $(p \dot{\times} r)^{m_N} = p^{m_N} \dot{\times} r^{m_N}$,

7) $p^{2_N} \dot{-} r^{2_N} = (p \dot{-} r) \dot{\times} (p \dot{+} r)$

Önerme 2.3.7. $r, s \in \mathbb{R}(N)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

1) $|r|_N \dot{\leq} s \Leftrightarrow \dot{0} \dot{-} s \dot{\leq} r \dot{\leq} s$,

2) $|r \dot{\times} s|_N = |r|_N \dot{\times} |s|_N$,

3) $s \neq \dot{0}$ olmak üzere $\left| \frac{r}{s} N \right|_N = \frac{|r|_N}{|s|_N} N$ dir.

Önerme 2.3.8. $u, v \in \mathbb{R}(N)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

1) $|u \dot{+} v|_N \dot{\leq} |u|_N \dot{+} |v|_N$

2) $\left| |u|_N \dot{-} |v|_N \right|_N \dot{\leq} |u \dot{-} v|_N$

Önerme 2.3.9. $x, y \in \mathbb{R}(N)$ olsun. O halde;

$$\frac{|x \dot{+} y|_N}{\dot{1} \dot{+} |x \dot{+} y|_N} N \dot{\leq} \frac{|x|_N}{\dot{1} \dot{+} |x|_N} N \dot{+} \frac{|y|_N}{\dot{1} \dot{+} |\dot{y}|_N} N$$

dir.

Önerme 2.3.10. (Newtonyen Olmayan Minkowski Eşitsizliği): $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ için $b_k, c_k \in \mathbb{R}^+(N)$ ve $p > 1$ olsun. O halde;

$$\sqrt[p]{N \sum_{k=1}^{n} (b_k \dot{+} c_k)^{p_N}}^{N} \dot{\leq} \sqrt[p]{N \sum_{k=1}^{n} b_k^{\,p_N}}^{N} \dot{+} \sqrt[p]{N \sum_{k=1}^{n} c_k^{\,p_N}}^{N}$$

dir.

Teorem 2.3.11. $0 < p \leq 1$, $b, c \dot{\geq} \dot{0}$ ise $(b \dot{+} c)^{p_N} \dot{\leq} b^{p_N} \dot{+} c^{p_N}$ dir.

İspat: Newtonyen olmayan Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(N \sum_{k=1}^{n} (b_k \dot{+} c_k)^{r_p} \right)^{\left(\frac{1}{r}\right)_N} \dot{\leq} \left(N \sum_{k=1}^{n} (b_k)^{r_p} \right)^{\left(\frac{1}{r}\right)_N} \dot{+} \left(N \sum_{k=1}^{n} (c_k)^{r_p} \right)^{\left(\frac{1}{r}\right)_N}$$

$$b_1, b_2, ... b_n \dot{\geq} \dot{0}, \; c_1, c_2, ... c_n \dot{\geq} \dot{0}, \; r > 1$$

eşitsizliğinde $n=2$ için $b_1=\dot{1}, b_2=\dot{0}, c_1=\dot{0}, c_2=t$ alınırsa

$\left(\dot{1}\dot{+}t^{r_N}\right)^{\left(\frac{1}{r}\right)_N} \dot{\leq} \dot{1}\dot{+}\left(t^{r_N}\right)^{\left(\frac{1}{r}\right)_N}=\dot{1}\dot{+}t$ elde edilir. Burada $r=\dfrac{1}{p}>1$ ve $z=t^{\left(\frac{1}{p}\right)_N}$ alınırsa

$\left(\dot{1}\dot{+}z\right)^{p_N} \dot{\leq} \dot{1}\dot{+}z^{p_N}$ bulunur. $z=\dfrac{c}{b}N$ alınırsa $\left(b\dot{+}c\right)^{p_N} \dot{\leq} b^{p_N}\dot{+}c^{p_N}$ bulunur.

2.4. *-Kalkülüs

Grosmann ve Katz keyfi seçilmiş iki üreteç fonksiyonları yardımıyla *-kalkülüsü tanımlamışlardır. *-Kalkülüste sıklıkla α-aritmetik tanım kümesi, β-aritmetik de değer kümesi için kullanılır.

Bu kısımda tezin bulgular bölümünde kullanılacak olan *-kalkülüsteki bazı temel tanım ve kavramlar Grossman ve Katz'ın çalışmasından faydalanılarak ifade edilecektir.

Tanım 2.4.1. α ve β keyfi seçilmiş üreteçler ve * (yıldız) ise aritmetiklerin sıralı ikilisi (α-aritmetik, β-aritmetik) olarak tanımlansın. Tablo 2.2.'deki semboller ilerleyen kısımlarda kullanılacaktır.

Tablo 2.2. *-Kalkülüs

	α-aritmetik	β-aritmetik
Evreni(realm)	$\psi=\mathbb{R}_\alpha$	$\phi=\mathbb{R}_\beta$
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

*-Kalkülüse göre fonksiyonların tanım kümesi α-aritmetik üzerinde, değer kümesi β-aritmetik üzerindedir. Aşağıdaki üç özelliği sağlayan izomorfizm, α-aritmetikten β-aritmetiğe giden tek bir ι (iota) fonksiyonu ile belirlidir.

1. ι birebirdir.

2. ι ψ den ϕ ye örtendir.

3. ψ kümesindeki herhangi r ve s sayıları için;

$$\iota(r\dot{+}s)=\iota(r)\ddot{+}\iota(s),$$

$$\iota(r \dot{-} s) = \iota(r) \ddot{-} \iota(s),$$

$$\iota(r \dot{\times} s) = \iota(r) \ddot{\times} \iota(s),$$

$$\iota(r \dot{/} s) = \iota(r) \ddot{/} \iota(s) \ , \quad s \neq \dot{0}, \iota(s) \neq \ddot{0}$$

$$r \dot{<} s \Leftrightarrow \iota(r) \ddot{<} \iota(s)$$

dir.

$\alpha : \mathbb{R} \to \psi$, $\beta : \mathbb{R} \to \phi$ olduğundan ι izomorfizma fonksiyonu her $x \in \psi$ için $\iota(x) = \beta\left\{\alpha^{-1}(x)\right\}$ olarak yazılır ve her m tamsayısı için $\iota(\dot{m}) = \ddot{m}$ dir.

Ayrıca $r \dot{+} s = \iota^{-1}\left\{\iota(r) \ddot{+} \iota(s)\right\}$ olduğundan α -aritmetikteki herhangi bir ifade kolayca β -aritmetiğe dönüşebilir.

α ve β üreteçlerinin aşağıdaki gibi özel olarak seçimiyle klasik, geometrik, anageometrik, bigeometrik, quadratik, anaquadratik ve biquadratik kalkülüs Tablo 2.3'de verilmiştir (Grossman, 1979).

Tablo 2.3.Özel Kalkülüsler

Kalkülüs	α	β
Klasik	I	I
Geometrik	I	exp
Anageometrik	exp	I
Bigeometrik	exp	exp
Qadratik	I	q_p
Anaquadratik	q_p	I
Biquadratik	q_p	q_p

Geometrik kalkülüste dönüşümler pozitif değerli fonksiyonlara uygulanır. Eğer negatif değerli fonksiyonlarla çalışılmak istenirse $\alpha = I$ ve $\beta = -\exp$ alınarak geometrik kalkülüs elde edilir. Benzer mantıkla tanım kümesi negatif elemanlardan oluşan fonksiyonlar için $\alpha = -\exp$ ve $\beta = I$ alındığında anageometrik tip kalkülüs, $\alpha = -\exp$ ve $\beta = -\exp$ alındığında ise tanım ve değer kümesi negatif elemanlardan oluşan bigeometrik tip kalkülüs elde edilebilir.

Tanım 2.4.2. X, boş olmayan bir küme, α herhangi bir üreteç fonksiyonu olsun. $d_\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu her $r,s,t \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa (X,d_α) ikilisine bir Newtonyen olmayan metrik uzay, d_α fonksiyonuna da X üzerinde bir Newtonyen olmayan metrik denir (Sağır&Erdoğan, 2016).

i) $d_\alpha(r,s) = \dot{0} \Leftrightarrow r = s$

ii) $d_\alpha(r,s) = d_\alpha(s,r)$

iii) $d_\alpha(r,t) \dot{\leq} d_\alpha(r,s) \dot{+} d_\alpha(s,t)$

Tanım 2.4.3. $X = (X,d_\alpha)$ Newtonyen olmayan metrik uzay olsun. Her $r \in X$ ve $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı için $B_\alpha(r,\varepsilon) = \{s \in X : d_\alpha(r,s) \dot{<} \varepsilon\}$ ile tanımlı kümeye Newtonyen olmayan r merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Benzer şekilde her $r \in X$ ve $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı için $B_\alpha[r,\varepsilon] = \{s \in X : d_\alpha(r,s) \dot{\leq} \varepsilon\}$ ile tanımlı kümeye de Newtonyen olmayan r merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir.

Tanım 2.4.4. $X = (X,d_\alpha)$ Newtonyen olmayan metrik uzay olsun. $S \subset X$ ve $r \in X$ olmak üzere her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı için $(B_\alpha(r,\varepsilon) - \{r\}) \cap S \neq \varnothing$ oluyorsa $r \in X$ noktasına S kümesinin α-yığılma noktası denir. S kümesinin α-yığılma noktalarının kümesi $S^{'\alpha}$ ile gösterilir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.5. (Newtonyen olmayan yakınsak dizi): $X = (X,d_\alpha)$ Newtonyen olmayan metrik uzayında (b_n) dizisi ve bir $b \in X$ noktası verilsin. Her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ olduğunda $d_\alpha(b_n, b) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (b_n) dizisine α-yakınsaktır denir ve bu durum ${}^{\alpha}\lim_{n\to\infty} b_n = b$ veya $n \to \infty$ iken $b_n \xrightarrow{\alpha} b$ ile gösterilir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.6. (Cauchy anlamında *-limit) : α ve β iki üreteç olmak üzere $X \subset \mathbb{R}_\alpha$, $f : X \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon, $r \in X^{'\alpha}$ ve $b \in \mathbb{R}_\beta$ olsun. Her $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} r|_\alpha \dot{<} \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) \ddot{-} b|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonunun r noktasındaki *-limiti b dir denir ve *-$\lim_{x\to r} f(x) = b$ ile gösterilir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.7. (Heine anlamında *-limit (veya *-dizisel limit)): α ve β iki üreteç olmak üzere $X \subset \mathbb{R}_\alpha$, $f: X \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon, $r \in X'^{\alpha}$ ve $b \in \mathbb{R}_\beta$ olsun. r noktasına α-yakınsayan tüm $(b_n) \subset X - \{r\}$ dizileri için $\left(f\left(b_n\right)\right)$ dizisi b sayısına $\beta-$yakınsıyorsa f fonksiyonunun r noktasındaki *-limiti (Heine anlamında) b dir denir ve *-$\lim\limits_{x \to r} f(x) = b$ ile gösterilir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Önerme 2.4.8. Cauchy ve Heine anlamında olan *-limit tanımları denktir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Teorem 2.4.9. Sağır&Erdoğan, (2016) : Verilen $f, g: \; X \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonları için *-$\lim\limits_{x \to r} f(x) = \lambda$ ve *-$\lim\limits_{x \to r} g(x) = \gamma$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1) *-$\lim\limits_{x \to r}\left(f(x) \ddot{+} g(x)\right) = \lambda \ddot{+} \gamma$

2) *-$\lim\limits_{x \to r}\left(f(x) \ddot{\times} g(x)\right) = \lambda \ddot{\times} \gamma$

3) Her $r \in X$ için *-$\lim\limits_{x \to r}\left(g(x)\right) \neq \ddot{0}$ ise *-$\lim\limits_{x \to r}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\beta\right) = \dfrac{\lambda}{\gamma}\beta$

4) *-$\lim\limits_{x \to r}\left|f(x)\right|_\beta = \left|\lambda\right|_\beta$

5) Bir $\delta \in \mathbb{R}_\beta$ sayısı için *-$\lim\limits_{x \to r}\left(\delta \ddot{\times} f(x)\right) = \delta \ddot{\times} \lambda$

Teorem 2.4.10. (*-Süreklilik): $X \subset \mathbb{R}_\alpha$, $f: X \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyonu ve $r \in X$ noktası verilsin. Herhangi $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $\left|x \dot{-} r\right|_\alpha \dot{<} \delta$ olan her $x \in X$ için $\left|f\left(x\right) \ddot{-} f\left(r\right)\right|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $r \in X$ noktasında *-süreklidir denir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.11. Bir f fonksiyonunun $r \in X$ noktasında *-sürekli olması için gerekli ve yeterli şart $r \in X$ noktasının f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı ve *-$\lim\limits_{x \to r} f\left(x\right) = f(r)$ olmasıdır (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.12. Bir f fonksiyonunun $r \in X$ noktasında *-sağdan sürekli olması için gerekli ve yeterli şart $r \in X$ noktasının f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı ve *- $\lim_{x \to r^+} f(x) = f(r)$ olmasıdır (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.13. (*-dizisel süreklilik): $X \subset \mathbb{R}_\alpha$, $f : X \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon ve $r \in X$ noktası verilsin. Eğer $b_n \in X$, $n = 1,2,3,...$ ve ${}^\alpha\lim_{n\to\infty}(b_n) = r$ koşullarını sağlayan her $(b_n) - \{r\} \subset X$ dizisi için ${}^\beta\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(r)$ ise f fonksiyonuna $r \in X$ noktasında *-dizisel süreklidir denir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.14. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinde bir Newtonyen olmayan (c_n) dizisi verilsin.

$$ {}^\alpha\lim_{n\to\infty}\left({}^\alpha\sup\{c_m : m \geq n\}\right) = {}^\alpha\lim_{n\to\infty}\left({}^\alpha\sup_{m\geq n} c_m \right) $$

$\alpha -$limitine (c_n) dizisinin $\alpha -$üst limiti denir ve ${}^\alpha\limsup c_n$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}_\alpha$ kümesinde verilen bir (c_n) dizisi için ${}^\alpha\lim_{n\to\infty}\left({}^\alpha\inf\{c_m : m \geq n\}\right) = {}^\alpha\lim_{n\to\infty}\left({}^\alpha\inf_{m\geq n} c_m \right)$

$\alpha -$limitine (c_n) dizisinin $\alpha -$alt limiti denir ve ${}^\alpha\liminf c_n$ ile gösterilir (Sağır&Erdoğan, 2016).

Tanım 2.4.15. Bir $f : X \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu $x_1 \dot{<} x_2$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) \ddot{<} f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ddot{>} f(x_2)\right)$ oluyorsa, f fonksiyonuna *-artan (*-azalan) fonksiyon denir (Duyar&Erdoğan, 2018).

Tanım 2.4.16. Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}(N)$ alt kümesi verilsin. Her $x \in X$ için $x \dot{\leq} M$ olacak şekilde bir $M \in X$ elemanı varsa M elemanına X kümesinin $\alpha -$maksimal elemanı denir ve kısaca $M = {}^\alpha maks\{x : x \in X\} = {}^\alpha maksX$ yazılır.

Tanım 2.4.17. Verilen bir $\alpha -$alttan sınırlı $X \subset \mathbb{R}(N)$ kümesi için

$B = \{ b : b, X$ kümesinin bir $\alpha -$alt sınırı$\}$ olsun. B kümesinin $\alpha -$maksimal elemanına X kümesinin $\alpha -$infimumu denir ve ${}^\alpha\inf X$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.18. ($\alpha -$infimum özelliği): Boş olmayan ve $\alpha -$alttan sınırlı bir $X \subset \mathbb{R}_\alpha$ kümesi verildiğinde $c = {}^\alpha\inf B$ olması için gerekli ve yeterli koşul

(1) c sayısının B kümesi için bir $\alpha-$alt sınır olması ve

(2) Her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı için $b_\varepsilon \dot{<} c \dot{+} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $b_\varepsilon \in B$ sayısının bulunmasıdır (Duyar&Erdoğan, 2018).

Tanım 2.4.19. $\mathbb{R}(N)$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesinde $\alpha-$artı (pozitif) sonsuz $\dot{+}\infty = \lim_{x\to\infty} \alpha(x)$, $\alpha-$eksi (negatif) sonsuz ise $\dot{-}\infty = \lim_{x\to-\infty} \alpha(x)$ olarak tanımlanır.

Bu tanımdan yola çıkarak $\mathbb{R}(N)$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}(N) = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\} = \dot{(}\dot{-}\infty, \dot{+}\infty\dot{)}$ şeklinde $\alpha-$açık aralık olarak da ifade edilebilir (Duyar & Erdoğan , 2018).

3. MODÜLÜS FONKSİYONU

Modülüs fonksiyonu fikri ilk defa Nakano tarafından 1953'te ortaya atılmıştır. Bu kısımda Deeb ve Hussein (1980), Maddox (1986), Nakano (1953), Ruckle (1973), Bilgin (1993) kaynakları yardımıyla derlenen modülüs fonksiyonu tanımı yapılıp, özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1. Nakano (1953), $g:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona modülüs fonksiyonu denir.

Her $x, y\in[0,\infty)$ için

i) $g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,

ii) $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$,

iii) g, artandır,

iv) g, sıfır noktasında sağdan süreklidir.

Önerme 3.2. g, modülüs fonksiyonu ise

i) Her $x, y\in[0,\infty)$ için

$$\left|g(x)-g(y)\right|\leq g(x-y)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) g, $[0,\infty)$ aralığında süreklidir.

İspat: i) g, modülüs fonksiyonu olduğundan her $x, y\in[0,\infty)$ için sağlanan $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$ eşitsizliğinde önce x yerine $x-y$ yazılırsa

$$g(x)-g(y)\leq g(x-y),$$

sonra y yerine $x-y$ yazılırsa

$$g(y)-g(x)\leq g(x-y)$$

elde edilir. Buradan

$$-g(x-y)\leq g(x)-g(y)\leq g(x-y)$$

olur. Bu ise istenendir.

ii) $b \in [0,\infty)$ keyfi fakat sabit olarak alınan bir nokta olsun. $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ olan herhangi $(b_n) \subset [0,\infty)$ dizisi verildiğinde $\lim_{n\to\infty}(b_n - b) = 0$ olur. Diğer taraftan g, 0 noktasında dizisel sürekli olup,

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n - b) = g(0) = 0$$

yazılır. Bir dizinin yakınsaklık tanımına göre her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için

$$|g(b_n - b)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_0$ için Önerme 3.2. (i) den

$$|g(b_n) - g(b)| < \varepsilon$$

yazılır.

Buradan $\lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(b)$ olup g, b noktasında dizisel sürekli, dolayısıyla g, b noktasında süreklidir.

Modülüs Fonksiyonları sınırlı veya sınırsız olabilir.

Örnek 3.3. $0 < p \leq 1$ için, $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = x^p$ sınırsız modülüs fonksiyonudur:

i) $g(x) = x^p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

ii) $g(x+y) = (x+y)^p \leq x^p + y^p = g(x) + g(y)$

iii) g fonksiyonu artandır, çünkü her $x \in [0,\infty)$ için $g'(x) = p.x^{p-1} \geq 0$ dır.

iv) $\lim_{x\to 0^+} x^p = 0 = f(0)$ olduğundan g fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir.

Örnek 3.4. $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ ile tanımlı g fonksiyonu sınırlı modülüs fonksiyonudur:

i) $g(x) = \dfrac{x}{1+x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $g(x+y)=\dfrac{x+y}{1+x+y}=\dfrac{x}{1+x+y}+\dfrac{y}{1+x+y}\leq\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}=g(x)+g(y)$

iii) g fonksiyonu artandır, çünkü her $x\in[0,\infty)$ için $g'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ dır.

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+x}=0=g(0)$ olduğundan g fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir.

Her $x\in[0,\infty)$ için $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|\leq 1$ olduğundan g sınırlı fonksiyondur.

Örnek 3.5. $b>1$ için $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(x)=\log_b(1+x)$ modülüs fonksiyonudur:

i) $g(x)=\log_b(1+x)=0\Leftrightarrow 1+x=b^0\Leftrightarrow 1+x=1\Leftrightarrow x=0$

ii) $1+x+y\leq(1+x).(1+y)$ eşitsizliğinin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\log_b(1+x+y)\leq\log_b[(1+x).(1+y)]=\log_b(1+x)+\log_b(1+y)$$

iii) g fonksiyonu artandır, çünkü her $x\in[0,\infty)$ için $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}\log_b e>0$

iv) Logaritma fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+}\log_b(1+x)=0=g(0)$$

olup g fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir.

Şimdi de g ve h modülüs fonksiyonlarının cebirsel özellikleri ile ilgili önermeler verelim:

Önerme 3.6. Bilgin (1993), g ve h modülüs fonksiyonları olsun.

1) $\lambda>0$ olmak üzere $\lambda.g$, $g+h$ ve $g\circ h$ modülüs fonksiyonudur.

2) $\dfrac{g}{1+g}$ modülüs fonksiyonudur.

3) $g-h$, $g.h$, $\dfrac{g}{h}$, g^{-1} fonksiyonlarının modülüs fonksiyonları olması gerekmez.

İspat: 1) g ve h modülüs fonksiyonları olsun.

i) $(g+h)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)+h(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$, $h(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $(g+h)(x+y)=g(x+y)+h(x+y)$

$$\leq g(x)+g(y)+h(x)+h(y)$$

$$=(g+h)(x)+(g+h)(y)$$

iii) $\left((g+h)(x)\right)' = g'(x)+h'(x)>0$ olup $g+h$ artandır.

iv) g ve h modülüs fonksiyonları olduğundan $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=0$ dır. Böylece $\lim\limits_{x\to 0^+}(g+h)(x)=0$ yazılır. Dolasıyla $g+h$ fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir.

2) g modülüs fonksiyonu olduğundan

i) $\left(\dfrac{g}{1+g}\right)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $1+\dfrac{1}{g(x+y)} \geq 1+\dfrac{1}{g(x)+g(y)}$

$$\frac{g(x+y)+1}{g(x+y)} \geq \frac{g(x)+g(y)+1}{g(x)+g(y)}$$

$$\frac{g(x+y)}{g(x+y)+1} \leq \frac{g(x)+g(y)}{g(x)+g(y)+1}$$

$$=\frac{g(x)}{g(x)+g(y)+1}+\frac{g(y)}{g(x)+g(y)+1}$$

$$\leq \frac{g(x)}{g(x)+1}+\frac{g(y)}{g(y)+1}$$

olup

$$\left(\frac{g}{1+g}\right)(x+y) \leq \left(\frac{g}{1+g}\right)(x)+\left(\frac{g}{1+g}\right)(y)$$

elde edilir.

iii) $x<y$ olsun. g modülüs fonksiyonu artan olduğundan $g(x)<g(y)$ dir.

$$\frac{1}{g(x)} > \frac{1}{g(y)}$$

$$1+\frac{1}{g(x)} > 1+\frac{1}{g(y)}$$

$$\frac{g(x)+1}{g(x)} > \frac{g(y)+1}{g(y)}$$

$$\frac{g(x)}{g(x)+1} < \frac{g(y)}{g(y)+1}$$

dir.

iv) g modülüs fonksiyonu olduğundan, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ dır.

Böylece $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{g}{1+g}\right)(x) = 0$ yazılır. Dolayısıyla $\frac{g}{1+g}$ fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir.

3) $g(x) = \sqrt{x}$ ve $h(x) = x$ ile tanımlı g ve h modülüs fonksiyonları göz önüne alındığında $g-h$, $g.h$, $\frac{g}{h}$, g^{-1} fonksiyonları modülüs fonksiyonu değildir.

Önerme 3.7. g modülüs fonksiyonu olsun.

i) $b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$g(b) \leq b.g(1)$$

dir.

ii) $x \in [0,\infty)$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$g(t.x) \leq K.g(x)$$

olacak şekilde K sayısı vardır.

Teorem 3.8. Maddox (1987), g_1 ve g_2 modülüs fonksiyonları, $0 < \delta < 1$ olsun. Bu durumda $x \in [0,\infty)$ için $g_1(x) > \delta$ ise

$$(g_1 \circ g_2)(x) \leq \frac{2g_2(1)}{\delta} g_1(x)$$

eşitsizliği yazılır.

İspat: $0<\delta<1$ olduğundan $g_1(x)\le \frac{g_1(x)}{\delta}$ olur.

$$g_1(x)\le 1+\left[\!\left[\frac{g_1(x)}{\delta}\right]\!\right]$$

dır.

Ayrıca $g_1(x)>\delta$ olduğundan $\frac{g_1(x)}{\delta}>1$ olup

$$\begin{aligned} g_2(g_1(x)) &< g_2\left(1+\left[\!\left[\frac{g_1(x)}{\delta}\right]\!\right]\right) \\ &\le \left(1+\left[\!\left[\frac{g_1(x)}{\delta}\right]\!\right]\right)g_2(1) \\ &\le \frac{2g_2(1)}{\delta}g_1(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.9. g bir modülüs fonksiyonu ve $0<\delta<1$ olsun. Bu durumda $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in[0,\infty)$ için $g^{n-1}(x)>\delta$ ise

$$g^n(x)\le \frac{2g(1)}{\delta}g^{n-1}(x)$$

olur.

Teorem 3.10. Her $n\in\mathbb{N}$ için $g_n:[0,\infty)\to[0,\infty)$ olmak üzere g_n modülüs fonksiyonlarının bir dizisi ve $0<\delta<1$ olsun. Her bir $x\ge\delta$ için

$$g_n(x)\le 2g_n(1).\frac{x}{\delta}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 3.11. Maddox (1987), Her g modülüs fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$$

limiti vardır.

Teorem 3.12. Maddox (1987), g, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}=\theta>0$ koşulunu sağlayan bir modülüs fonksiyonu olsun. O zaman her $t>0$ için $g(t)\geq \beta.t$ olacak şekilde bir $\beta>0$ sabiti vardır.

Teorem 3.13. g özdeşlik fonksiyonundan farklı, sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda her $x\in[0,\infty)$ için $g\left(\frac{x}{n}\right)>\frac{1}{n}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır.

İspat: $x\in[0,\infty)$ keyfi olsun ve böyle bir n pozitif tamsayısının olmadığını kabul edelim.

Bu durumda her $n\in\mathbb{Z}^{+}$ için $g\left(\frac{x}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$ olur.

Yani $n.g\left(\frac{x}{n}\right)\leq 1$ olur.

$$\begin{aligned} g(x)=g\left(n.\frac{x}{n}\right)&=g\left(\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+...+\frac{x}{n}\right)\\ &\leq g\left(\frac{x}{n}\right)+g\left(\frac{x}{n}\right)+...+g\left(\frac{x}{n}\right)\\ &=n.g\left(\frac{x}{n}\right)\end{aligned}$$

olduğundan her $x\in[0,\infty)$ için $g(x)\leq 1$ elde ederiz. Bu ise g nin sınırsız olmasıyla çelişir. Ayrıca g özdeşlik fonksiyonu olursa

$$g\left(\frac{x}{n}\right)>\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{x}{n}>\frac{1}{n}\Leftrightarrow x>1$$

olup $x\in[0,1]$ için bu şart sağlanmaz.

Önerme 3.14. Bilgin (1993), g bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer p, X vektör uzayı üzerinde bir paranorm ise, $g\circ p$ de X üzerinde bir paranormdur.

İspat: i) $(g\circ p)(\theta)=g(p(\theta))=g(0)=0$

ii) $p(x)=p(-x)$

$$g(p(x)) = g(p(-x))$$

$$(g \circ p)(x) = (g \circ p)(-x)$$

iii) g modülüs fonksiyonu artan olduğundan

$$p(x+y) = p(x) + p(y)$$

$$g(p(x+y)) \leq g(p(x) + p(y))$$

$$\leq g(p(x)) + g(p(y))$$

dır. Yani

$$(g \circ p)(x+y) \leq (g \circ p)(x) + (g \circ p)(y)$$

iv) $b_n \to b$, $x_n \to x$ olmak üzere $(b_n) \subset F$ ve $(x_n) \subset X$ dizileri alınsın. p paranorm olduğundan

$$p(b_n.x_n - b.x) \to 0 \Leftrightarrow p(b_n.x_n) \to p(b.x)$$

$$(g \circ p)(b_n.x_n - b.x) = g(p(b_n.x_n - b.x))$$

g, 0 noktasında sürekli olduğundan dizisel süreklidir.

$$p(b_n.x_n - b.x) \to 0$$

olduğunda

$$g(p(b_n.x_n - b.x)) \to p(0) = 0$$

olup $g \circ p$ paranormdur.

Önerme 3.15. Bilgin (1993), g bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer d, boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde yarı metrik ise $g \circ d$ de X üzerinde bir yarı metriktir.

Önerme 3.16. Bilgin (1993), g bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer q, Y vektör uzayı üzerinde bir yarı norm ise genel olarak $g \circ q$, Y üzerinde bir yarı norm değildir.

İspat: $g(x) = \ln(1+x)$ modülüsü ve $q(x) = |x|$ yarınormu alınsın.

$(g \circ q)(x) = \ln\left(1+|x|\right)$ dir. $g \circ q$ fonksiyonunda en az bir $\lambda \in [0,\infty]$ için

$$(g \circ q)(\lambda.x) = \ln\left(1+|\lambda.x|\right) \neq |\lambda|.\ln\left(1+|x|\right)$$

olup $g \circ q$ yarı norm değildir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tezin orijinal kısmını oluşturan bu kısımda literatürde ilk kez yer alacak olan Newtonyen olmayan aritmetiğe göre modülüs fonksiyonu tanımlanıp, temel özellikleri incelenmiştir. Elde edilen teorik sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir.

4.1. Newtonyen Olmayan Modülüs Fonksiyonu

Tanım 4.1.1. $\varphi : \dot{\left[\right.}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{\left.\right)} \to \ddot{\left[\right.}\ddot{0}, \ddot{+}\infty\ddot{\left.\right)}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona Newtonyen olmayan modülüs (∗-modülüs) fonksiyonu denir.

Her $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{\left[\right.}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{\left.\right)}$ için

I. $\varphi(\dot{x}) = \ddot{0} \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{0}$

II. $\varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{y}) \ddot{\leq} \varphi(\dot{x}) \ddot{+} \varphi(\dot{y})$

III. φ, *-artandır.

IV. φ, $\dot{0}$ noktasında sağdan *-süreklidir.

Örnek olarak 4.1.1.Tanımındaki **II.** koşulunu geometrik, anageometrik, bigeometrik, biquadratik(QQ), anaquadratik(QI) ve quadratik(IQ) kalkülüslerine göre irdeleyelim:

Geometrik modülüse göre $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olduğundan $\dot{x} = I(x) = x$, $\dot{y} = I(y) = y$ olup

$$\varphi\left(\dot{x} \dot{+} \dot{y}\right) = \varphi\left(x \dot{+} y\right) = \varphi\left(x + y\right),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right) \ddot{+} \varphi(\dot{y}) = \exp\left\{\ln\left(\varphi\left(x\right)\right) + \ln\left(\varphi\left(y\right)\right)\right\} = \exp\left\{\ln\left(\varphi\left(x\right).\varphi\left(y\right)\right)\right\} = \varphi\left(x\right).\varphi\left(y\right)$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left(x + y\right) \ddot{\leq} \varphi\left(x\right).\varphi\left(y\right)$$

elde edilir.

Anageometrik modülüse göre $\alpha = \exp$ ve $\beta = I$ olduğundan $\dot{x} = \exp(x) = e^x$, $\dot{y} = \exp(y) = e^y$ olup

$$\varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{y}) = \varphi(e^x \dot{+} e^y) = \varphi(e^x . e^y),$$

$$\varphi(\dot{x}) \ddot{+} \varphi(\dot{y}) = I\left\{I^{-1}\left(\varphi\left(e^x\right)\right) + I^{-1}\left(\varphi\left(e^y\right)\right)\right\} = I\left\{\left(\varphi\left(e^x\right) + \varphi\left(e^y\right)\right)\right\} = \varphi\left(e^x\right) + \varphi\left(e^y\right)$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left(e^x . e^y\right) \ddot{\leq} \varphi\left(e^x\right) + \varphi\left(e^y\right)$$

elde edilir.

Bigeometrik modülüse göre $\alpha = \exp$, $\beta = \exp$ olduğundan $\dot{x} = \exp(x) = e^x$, $\dot{y} = \exp(y) = e^y$ olup

$$\varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{y}) = \varphi(e^x \dot{+} e^y) = \varphi(e^x . e^y),$$

$$\varphi(\dot{x}) \ddot{+} \varphi(\dot{y}) = \exp\left\{\ln\left(\varphi\left(e^x\right)\right) + \ln\left(\varphi\left(e^y\right)\right)\right\} = \exp\left\{\ln\left(\varphi\left(e^x\right) . \varphi\left(e^y\right)\right)\right\} = \varphi\left(e^x\right) . \varphi\left(e^y\right)$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left(e^x . e^y\right) \ddot{\leq} \varphi\left(e^x\right) . \varphi\left(e^y\right)$$

elde edilir.

Biquadratik (QQ) modülüse göre $\alpha = q_p$, $\beta = q_p$ olup $\dot{x} = \dot{y} = \dot{0}$ alınırsa $q_p(0) = 0$ dır.

$$\varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{y}) = \varphi(\dot{0} \dot{+} \dot{0}) = \varphi(0 \dot{+} 0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0),$$

$$\varphi(\dot{x}) \ddot{+} \varphi(\dot{y}) = q_p\left\{q_p^{-1}\left(\varphi(0)\right) + q_p^{-1}\left(\varphi(0)\right)\right\} = q_p\left\{0 + 0\right\} = 0$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi(0) \ddot{\leq} 0$$

elde edilir. $\dot{x} = \dot{0}$, $\dot{y} \dot{>} \dot{0}$ alınırsa bu durumda $q_p(\dot{0}) = 0$, $\dot{y} = q_p(y) = y^{1/p}$, $q_p^{-1}(y) = y^p$ ve $q_p^{-1}(x) = 0$ olup φ, *-artan olduğundan

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(\dot{0}\dot{+}y^{1/p}\right)=\varphi\left(y^{1/p}\right),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=q_p\left\{q_p^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)+q_p^{-1}\left(\varphi\left(y^{1/p}\right)\right)\right\}=q_p\left\{0+\varphi^p\left(y^{1/p}\right)\right\}=q_p\left\{\varphi^p\left(y^{1/p}\right)\right\}=\varphi\left(y^{1/p}\right)$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left(y^{1/p}\right)\ddot{\leq}\varphi\left(y^{1/p}\right)$$

elde edilir. $\dot{x},\dot{y}\in\left(\dot{0},\dot{+}\dot{\infty}\right)$ alınırsa bu durumda $\dot{y}=q_p(y)=y^{1/p}$, $\dot{x}=q_p(x)=x^{1/p}$, $q_p^{-1}(y)=y^p$ ve $q_p^{-1}(x)=x^p$ olup

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(x^{1/p}\dot{+}y^{1/p}\right)=\varphi\left((x+y)^{1/p}\right),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=q_p\left\{q_p^{-1}\left(\varphi\left(x^{1/p}\right)\right)+q_p^{-1}\left(\varphi\left(y^{1/p}\right)\right)\right\}=q_p\left\{\varphi^p\left(x^{1/p}\right)+\varphi^p\left(y^{1/p}\right)\right\}=\left[\varphi^p\left(x^{1/p}\right)+\varphi^p\left(y^{1/p}\right)\right]^{1/p}$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left((x+y)^{1/p}\right)\ddot{\leq}\left[\varphi^p\left(x^{1/p}\right)+\varphi^p\left(y^{1/p}\right)\right]^{1/p}$$

elde edilir.

Anaquadratik (QI) modülüse göre $\alpha=q_p$, $\beta=I$ olup $\dot{x}=\dot{y}=\dot{0}$ alınırsa $q_p(0)=0$ dır.

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(\dot{0}\dot{+}\dot{0}\right)=\varphi\left(0\dot{+}0\right)=\varphi(0+0)=\varphi(0),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=I\left\{I^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)+I^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)\right\}=I\left\{0+0\right\}=0$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left(0\right)\ddot{\leq}0$$

elde edilir. $\dot{x}=\dot{0}$, $\dot{y}\dot{>}\dot{0}$ alınırsa bu durumda $q_p(\dot{0})=0$, $\dot{y}=q_p(y)=y^{1/p}$ φ, *-artan olduğundan

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(\dot{0}\dot{+}y^{1/p}\right)=\varphi\left(y^{1/p}\right),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=I\left\{I^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)+I^{-1}\left(\varphi\left(y^{1/p}\right)\right)\right\}=I\left\{0+\varphi\left(y^{1/p}\right)\right\}=\varphi\left(y^{1/p}\right)$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left(y^{1/p}\right)\ddot{\leq}\varphi\left(y^{1/p}\right)$$

elde edilir. $\dot{x},\dot{y}\in\dot{\left(\dot{0},\dot{+}\infty\right)}$ alınırsa bu durumda $\dot{y}=q_p(y)=y^{1/p}$, $\dot{x}=q_p(x)=x^{1/p}$ olup

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(x^{1/p}\dot{+}y^{1/p}\right)=\varphi\left((x+y)^{1/p}\right),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=I\left\{I^{-1}\left(\varphi\left(x^{1/p}\right)\right)+I^{-1}\left(\varphi\left(y^{1/p}\right)\right)\right\}=I\left\{\varphi\left(x^{1/p}\right)+\varphi\left(y^{1/p}\right)\right\}=\varphi\left(x^{1/p}\right)+\varphi\left(y^{1/p}\right)$$

Bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi\left((x+y)^{1/p}\right)\ddot{\leq}\varphi\left(x^{1/p}\right)+\varphi\left(y^{1/p}\right)$$

elde edilir.

Quadratik (IQ) modülüse göre $\alpha=I$, $\beta=q_p$ olup $\dot{x}=\dot{y}=\dot{0}$ alındığında

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(\dot{0}\dot{+}\dot{0}\right)=\varphi\left(0\dot{+}0\right)=\varphi(0+0)=\varphi(0),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=q_p\left\{q_p^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)+q_p^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)\right\}=q_p\left\{0+0\right\}=0$$

olup bu ikisi birleştirilirse

$$\varphi(0)\ddot{\leq}0$$

elde edilir. $\dot{x}=\dot{0}$, $\dot{y}\dot{>}\dot{0}$ durumunda

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(\dot{0}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(0+y\right)=\varphi(y),$$

$$\varphi\left(\dot{x}\right)\ddot{+}\varphi(\dot{y})=q_p\left\{q_p^{-1}\left(\varphi\left(0\right)\right)+q_p^{-1}\left(\varphi\left(y\right)\right)\right\}=q_p\left\{0+\varphi^p\left(y\right)\right\}=q_p\left\{\varphi^p\left(y\right)\right\}=\varphi\left(y\right)$$

Bu ikisi birleştirildiğinde

$$\varphi\left(y\right)\ddot{\leq}\varphi\left(y\right)$$

elde edilir. $\dot{x},\dot{y}\in\dot{\left(\dot{0},\dot{+}\infty\right)}$ durumunda ise $\dot{x}=I(x)=x$, $\dot{y}=I(y)=y$, φ *-artan olup

$$\varphi\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right)=\varphi\left(x\dot{+}y\right)=\varphi\left(x+y\right),$$

$$\varphi(\dot{x}) \dot{+} \varphi(\dot{y}) = q_p\left\{q_p^{-1}\left(\varphi(x)\right) + q_p^{-1}\left(\varphi(y)\right)\right\} = q_p\left\{\varphi^p(x) + \varphi^p(y)\right\} = \left[\left\{\varphi^p(x) + \varphi^p(y)\right\}\right]^{1/p}$$

Bu ikisi birleştirildiğinde

$$\varphi(x+y) \ \ddot{\leq} \left[\left\{\varphi^p(x) + \varphi^p(y)\right\}\right]^{1/p}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.2. φ, *-modülüs fonksiyonu ise aşağıdaki özellikler vardır.

i) Her $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{\left[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{\right)}$ için

$$\left|\varphi(\dot{x}) \dot{-} \varphi(\dot{y})\right|_\beta \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y})$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) φ, $\dot{\left[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{\right)}$ aralığında *-süreklidir.

İspat: **i)** φ, *-modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda her $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{\left[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{\right)}$ için

$$\varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{y}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x}) \dot{+} \varphi(\dot{y})$$

eşitsizliği vardır. Burada önce $\dot{x}$ yerine $\dot{x} \dot{-} \dot{y}$ yazılırsa

$$\varphi(\dot{x}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x} - \dot{y}) \dot{+} \varphi(\dot{y})$$

$$\varphi(\dot{x}) \dot{-} \varphi(\dot{y}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x} - \dot{y}) \qquad \textbf{(4.1)}$$

elde edilir.

Sonra $\dot{y}$ yerine $\dot{x} \dot{-} \dot{y}$ yazılır ve φ fonksiyonunun *-artanlığı kullanılırsa

$$\varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{x} \dot{-} \dot{y}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x}) \dot{+} \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y})$$

$$\varphi(\dot{y}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x} \dot{+} \dot{x} \dot{-} \dot{y}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x}) \dot{+} \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y})$$

$$\varphi(\dot{y}) \dot{-} \varphi(\dot{x}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y})$$

$$\ddot{0} \dot{-} \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y}) \ \ddot{\leq} \ \varphi(\dot{x}) \dot{-} \varphi(\dot{y}) \qquad \textbf{(4.2)}$$

olup **(4.1)** ve **(4.2)**’den

$$\ddot{0} \ddot{-} \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y}) \ddot{\leq} \varphi(\dot{x}) \ddot{-} \varphi(\dot{y}) \ddot{\leq} \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y})$$

$$\left|\varphi(\dot{x}) \ddot{-} \varphi(\dot{y})\right|_{\beta} \ddot{\leq} \varphi(\dot{x} \dot{-} \dot{y})$$

elde edilir.

ii) $\dot{c} \in [\dot{0}, \dot{+}\infty)$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. ${}^{\alpha}\lim_{n\to\infty}(c_n) = \dot{c}$ olan herhangi $c_n \subset [\dot{0}, \dot{+}\infty)$ $\alpha-$dizisi verildiğinde ${}^{\alpha}\lim_{n\to\infty} c_n \dot{-} \dot{c} = \dot{0}$ olur. Diğer taraftan φ, $\dot{0}$ noktasında *-sağdan sürekli olduğundan φ, $\dot{0}$ noktasında *-dizisel sürekli olup,

$$\text{*-}\lim_{n\to\infty} \varphi(c_n \dot{-} \dot{c}) = \varphi(\dot{0}) = \ddot{0}$$

yazılır. Bir dizinin Newtonyen olmayan yakınsaklık tanımına göre her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için

$$\left|\varphi(c_n \dot{-} \dot{c})\right|_{\beta} \ddot{\leq} \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n_0 \in \mathbb{N}$ için Önerme 4.1.2 (i) den

$$\left|\varphi(c_n) \ddot{-} \varphi(\dot{c})\right|_{\beta} \ddot{\leq} \varepsilon$$

yazılır.

Buradan *-$\lim_{n\to\infty} \varphi(c_n) = \varphi(\dot{c})$ eşitliği elde edilir. O halde φ, $\dot{c}$ noktasında *-dizisel sürekli, dolayısıyla *-süreklidir.

Tanım 4.1.3. (*-sınırlı fonksiyon) **:** $\varphi : \mathbb{R}_{\alpha} \to \mathbb{R}_{\beta}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{R}_{\alpha}$ için $\left|\varphi(x)\right|_{\beta} \ddot{\leq} \iota(\dot{M})$ olacak şekilde bir $\dot{M} \dot{>} \dot{0}$ sayısı varsa φ fonksiyonuna *-sınırlı fonksiyon denir. Burada $\iota(\dot{M}) = \ddot{M}$ olarak da alınabilir. Aksi halde *-sınırsız fonksiyon adını alır.

Tanım 4.1.4. $\varphi : \mathbb{R}_{\alpha} \to \mathbb{R}_{\beta}$ fonksiyonu verilsin. Eğer verilen her $E \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $x \dot{>} M$ olan her $x \in \mathbb{R}_{\alpha}$ için $\varphi(x) \ddot{>} E$ olacak şekilde bir $M \dot{>} \dot{0}$

sayısı varsa φ nin $\dot{+}\infty$ daki limiti $\ddot{+}\infty$ dur denir ve bu durum *- $\lim\limits_{x\to\dot{+}\infty}\varphi(x)=\ddot{+}\infty$ şeklinde gösterilir.

Newtonyen olmayan modülüs fonksiyonları *-sınırlı veya *-sınırsız olabilir. Bununla ilgili aşağıdaki iki örnek verilsin:

Örnek 4.1.5. $0<p\leq 1$ için $\varphi:\dot{[}\dot{0},\dot{+}\infty\dot{)}\to\ddot{[}\ddot{0},\ddot{+}\infty\ddot{)}$, $\varphi(\dot{x})=\left[\imath(\dot{x})\right]^{p_\beta}$ ile tanımlı φ fonksiyonu *-sınırsız Newtonyen olmayan modülüs fonksiyonudur:

I. $\varphi(\dot{x})=\left[\imath(\dot{x})\right]^{p_\beta}=\ddot{0}\Rightarrow(\ddot{x})^{p_\beta}=\ddot{0}\Rightarrow\beta\left\{[\beta^{-1}(\ddot{x})]^p\right\}=\ddot{0}\Rightarrow\beta(x^p)=\beta(0)\Rightarrow x^p=0$

$$\Rightarrow x=0$$

$$\Rightarrow \alpha(x)=\alpha(0)$$

$$\Rightarrow \dot{x}=\dot{0}$$

bulunur.

Tersine $\dot{x}=\dot{0}$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(\dot{0})=\left[\imath(\dot{0})\right]^{p_\beta}=(\ddot{0})^{p_\beta}=\beta\left\{[\beta^{-1}(\ddot{0})]^p\right\}=\beta\left\{0^p\right\}=\beta\left\{0\right\}=\ddot{0}$$

elde edilir.

II. Teorem 2.3.11. gereği

$$[\imath(\dot{x})\ddot{+}\imath(\dot{y})]^{p_\beta}\ddot{\leq}[\imath(\dot{x})]^{p_\beta}\ddot{+}[\imath(\dot{y})]^{p_\beta}$$

olup, böylece *-modülüs fonksiyonu olmanın **II.** koşulu sağlanır.

III. Her $\dot{x},\dot{y}\in\dot{[}\dot{0},\dot{+}\infty\dot{)}$ için $\dot{x}\dot{<}\dot{y}$ olsun. $\imath$, *-artan fonksiyon olduğundan $\imath(\dot{x})\ddot{<}\imath(\dot{y})$ olduğunda

$$[\imath(\dot{x})]^{p_\beta}\ddot{<}[\imath(\dot{y})]^{p_\beta}$$

olup f, *-artandır.

IV. Herhangi $\varepsilon\ddot{>}\ddot{0}$ sayısına karşılık $\dot{x}\dot{<}\delta$ olan her $\dot{x}\in\dot{[}\dot{0},\dot{+}\infty\dot{)}$ için $[\imath(\dot{x})]^{p_\beta}\ddot{<}\varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta=\delta(\varepsilon)\dot{>}\dot{0}$ sayısının varlığı gösterilirse istenen elde edilir. Bunun için $\imath$ fonksiyonunun *-artan özelliği kullanılırsa

$$\dot{x} \dot{<} \delta \Rightarrow \iota(\dot{x}) \ddot{<} \iota(\delta) \Rightarrow [\iota(\dot{x})]^{p_\beta} \ddot{<} [\iota(\delta)]^{p_\beta}$$

olup $\delta = \iota^{-1}\left\{\sqrt[p]{\varepsilon}^{\beta}\right\}$ alınırsa istenen elde edilir.

Herhangi $E \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık bir $M \dot{>} \dot{0}$ sayısı vardır öyle ki $\dot{x} \dot{>} M$ olan

her $\dot{x} \in \left[\dot{0}, \dot{+}\dot{\infty}\right)$ için $[\iota(\dot{x})]^{p_\beta} \ddot{>} E$ olduğunu gösterelim:

Keyfi $E \ddot{>} \ddot{0}$ sayısını alalım. $\dot{x} \dot{>} M$ olmak üzere $\dot{x} \dot{\geq} \dot{0}$ sayısını alalım. ι fonksiyonunun özelliği kullanılırsa

$$\dot{x} \dot{>} M \Rightarrow \iota\left(\dot{x}\right) \ddot{>} \iota\left(M\right) \Rightarrow \left[\iota\left(\dot{x}\right)\right]^{p_\beta} \ddot{>} \left[\iota\left(M\right)\right]^{p_\beta} = E$$

olup $M = \iota^{-1}\left\{\sqrt[p]{E}^{\beta}\right\}$ alınırsa $\left[\iota\left(\dot{x}\right)\right]^{p_\beta} \ddot{>} E$ olur. Dolayısıyla φ, *-sınırsız Newtonyen olmayan modülüs fonksiyonudur.

Örnek 4.1.6. $\varphi : \left[\dot{0}, \dot{+}\dot{\infty}\right) \rightarrow \left[\ddot{0}, \ddot{+}\ddot{\infty}\right)$, $\varphi(\dot{x}) = \dfrac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1}) \ddot{+} \iota(\dot{x})}\beta$ ile tanımlı φ fonksiyonu *-sınırlı Newtonyen olmayan modülüs fonksiyonudur:

ι fonksiyonunun özellikleri kullanılırsa

I. $\varphi(\dot{x}) = \dfrac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1}) \ddot{+} \iota(\dot{x})}\beta = \ddot{0} = \beta(0) = \iota(\dot{0}) \Rightarrow \iota(\dot{x}) = \iota(\dot{0}) \Rightarrow \dot{x} = \dot{0}$

bulunur.

Tersine $\dot{x} = \dot{0}$ olsun. Bu durumda

$$\iota(\dot{x}) = \iota(\dot{0}) = \beta(0) = \ddot{0} \Rightarrow \varphi(\dot{0}) = \ddot{0}$$

elde edilir.

II. Önerme 2.3.9. gereği

$$\frac{\dot{x} \dot{+} \dot{y}}{\dot{1} \dot{+} (\dot{x} \dot{+} \dot{y})}\alpha \dot{\leq} \frac{\dot{x}}{\dot{1} \dot{+} \dot{x}}\alpha \dot{+} \frac{\dot{y}}{\dot{1} \dot{+} \dot{y}}\alpha$$

olup, böylece *-modülüs fonksiyonu olmanın **II.** koşulu sağlanır.

III. Her $\dot{x}, \dot{y} \in \left[\dot{0}, \dot{+}\dot{\infty}\right)$ için $\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ iken $\varphi(\dot{x}) \ddot{<} \varphi(\dot{y})$ olduğunu gösterelim:

Aksi halde $\varphi(\dot{x}) \ddot{\geq} \varphi(\dot{y})$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{x})}\beta \ddot{\geq} \frac{\iota(\dot{y})}{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{y})}\beta$$

$$\frac{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{x})}\beta \ddot{\leq} \frac{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{y})}{\iota(\dot{y})}\beta$$

$$\frac{\iota(\dot{1})}{\iota(\dot{x})}\beta \ddot{+} \ddot{1} \ddot{\leq} \frac{\iota(\dot{1})}{\iota(\dot{y})}\beta \ddot{+} \ddot{1}$$

$$\frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1})}\beta \ddot{\geq} \frac{\iota(\dot{y})}{\iota(\dot{1})}\beta$$

$$\iota(\dot{x}) \ddot{\geq} \iota(\dot{y})$$

$$\dot{x} \dot{\geq} \dot{y}$$

olur ki bu $\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ ile çelişir. Dolasıyla $\varphi(\dot{x}) \ddot{<} \varphi(\dot{y})$ olup φ, *-artandır.

IV. Herhangi $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $\dot{x} \dot{<} \delta$ olan her $\dot{x} \in \left[\dot{0}, \dot{+\infty}\right)$ için $\frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{x})}\beta \ddot{<} \varepsilon$

olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısının varlığını gösterelim:

Bunun için ι fonksiyonunun özelliği kullanılırsa

$$\dot{x} \dot{<} \delta \text{ iken } \iota(\dot{x}) \ddot{<} \iota(\delta) \text{ olup } \frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{x})}\beta \ddot{<} \iota(\dot{x}) \ddot{<} \iota(\delta)$$

bulunur. $\delta = \iota^{-1}\{\varepsilon\}$ seçilirse istenen elde edilir.

Her $\dot{x} \in \left[\dot{0}, \dot{+\infty}\right)$ için $\left|\frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{1})\ddot{+}\iota(\dot{x})}\beta\right|_{\beta} \ddot{\leq} \left|\frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{x})}\beta\right|_{\beta}$

$$\ddot{\leq} \ddot{1}$$

olduğundan φ, *-sınırlı Newtonyen olmayan modülüs fonksiyonudur.

Tanım 4.1.7. β aritmetiğe göre bir $\ddot{a}$ elemanının yine β aritmetiğe göre $\ddot{x}$ kuvveti, $\ddot{a}$ nın β aritmetiğe göre x_{β} kuvveti olarak tanımlanır ve $\left(\ddot{a}\right)^{\ddot{x}} = \left(\ddot{a}\right)^{x_{\beta}}$ olarak yazılır.

Tanım 4.1.8. (*-Üstel Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_{\alpha} \to \mathbb{R}_{\beta}^{+}$, $\ddot{a} \in \mathbb{R}_{\beta}^{+} - \{\ddot{1}\}$ olmak üzere

$f(\dot{x}) = \left(\ddot{a}\right)^{\ddot{x}} = \left(\ddot{a}\right)^{x_{\beta}}$ ile tanımlı f fonksiyonuna *-üstel fonksiyon denir.

Önerme 4.1.9. $\ddot{a} \in \mathbb{R}_\beta^+ \text{-} \{\ddot{1}\}$ ve $\ddot{s}, \ddot{t} \in \mathbb{R}_\beta$ olmak üzere $f(\dot{x}) = (\ddot{a})^{\ddot{x}}$ ile tanımlı *-üstel fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar:

i-) $(\ddot{a})^{\ddot{s}} \ddot{\times} (\ddot{a})^{\ddot{t}} = (\ddot{a})^{\ddot{s} \ddot{+} \ddot{t}}$ ve $\dfrac{(\ddot{a})^{\ddot{s}}}{(\ddot{a})^{\ddot{t}}}\beta = (\ddot{a})^{\ddot{s} \ddot{-} \ddot{t}}$

ii-) $\ddot{a} \ddot{>} \ddot{1}$ için f *-artan, $\ddot{0} \ddot{<} \ddot{a} \ddot{<} \ddot{1}$ için f *-azalan bir fonksiyondur.

İspat: i-) $\ddot{s}, \ddot{t} \in \mathbb{Z}_\beta^+$ için $(\ddot{a})^{\ddot{s}} \ddot{\times} (\ddot{a})^{\ddot{t}} = \underbrace{(\ddot{a} \ddot{\times} \ddot{a}.....\ddot{\times} \ddot{a})}_{s-defa} \ddot{\times} \underbrace{(\ddot{a} \ddot{\times} \ddot{a}.....\ddot{\times} \ddot{a})}_{t-defa} = (\ddot{a})^{\ddot{s} \ddot{+} \ddot{t}}$

elde edilir. Diğer taraftan benzer mantıkla

$\dfrac{(\ddot{a})^{\ddot{s}}}{(\ddot{a})^{\ddot{t}}}\beta = \underbrace{(\ddot{a} \ddot{\times} \ddot{a}.....\ddot{\times} \ddot{a})}_{s-defa} \ddot{/} \underbrace{(\ddot{a} \ddot{\times} \ddot{a}.....\ddot{\times} \ddot{a})}_{t-defa} = (\ddot{a})^{\ddot{s} \ddot{-} \ddot{t}}$

dir. $\ddot{s}, \ddot{t} \in \mathbb{R}_\beta$ olduğunda eşitliğin ispatı klasik kalkülüsteki ispata benzer yapılabilir.

ii-) $\ddot{a} \ddot{>} \ddot{1}$, $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ için

$$f(\dot{y}) = (\ddot{a})^{\ddot{y}} = (\ddot{a})^{\ddot{y} \ddot{-} \ddot{x}} \ddot{\times} (\ddot{a})^{\ddot{x}} \ddot{>} (\ddot{a})^{\ddot{x}} \Rightarrow (\ddot{a})^{\ddot{y}} \ddot{>} (\ddot{a})^{\ddot{x}}$$

olduğundan f *-artandır.

$\ddot{0} \ddot{<} \ddot{a} \ddot{<} \ddot{1}$ için $\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ olsun.

$$f(\dot{y}) = (\ddot{a})^{\ddot{y}} = (\ddot{a})^{\ddot{y} \ddot{-} \ddot{x}} \ddot{\times} (\ddot{a})^{\ddot{x}} \ddot{<} (\ddot{a})^{\ddot{x}}$$

olup f *-azalandır.

Tanım 4.1.10. (*-Logaritma Fonksiyonu): $\dot{a} \in \mathbb{R}_\alpha^+ - \{\dot{1}\}$ ve $\ddot{a} \in \mathbb{R}_\beta^+ \text{-} \{\ddot{1}\}$ olmak üzere *log: $\mathbb{R}_\alpha^+ \to \mathbb{R}_\beta$, $*\log_{\dot{a}} \dot{x} = \ddot{y} :\Leftrightarrow \ddot{x} = (\ddot{a})^{y_\beta}$ ile tanımlı fonksiyona *-kalkülüse göre logaritma fonksiyonu denir ve *log ile gösterilir.

*-Kalkülüse göre üstel fonksiyonun özellikleri kullanılırsa aşağıdaki önerme kolayca elde edilir.

Önerme 4.1.11. $\dot{a} \in \mathbb{R}_\alpha^+ - \{\dot{1}\}$ ve $\ddot{a} \in \mathbb{R}_\beta^+ \text{-} \{\ddot{1}\}$, $\dot{b}, \dot{c} \in \mathbb{R}_\alpha^+$ olmak üzere *-log fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i-) $*\log_{\dot{a}} \dot{1} = \ddot{0}$ ve $*\log_{\dot{a}} \dot{a} = \ddot{1}$

ii-) $*\log_{\dot a}(\dot b \dot\times \dot c) = *\log_{\dot a}\dot b \ddot{+} *\log_{\dot a}\dot c$ ve $*\log_{\dot a}\left(\frac{\dot b}{\dot c}\alpha\right) = *\log_{\dot a}\dot b \ddot{-} *\log_{\dot a}\dot c$

iii-) *log fonksiyonu $\dot a \dot> \dot 1$ için *-artan $\dot 0 \dot< \dot a \dot< \dot 1$ için *-azalan bir fonksiyondur.

İspat: i-) $*\log_{\dot a}\dot 1 = \ddot y$ olsun. Bu durumda

$(\ddot a)^{y_\beta} = \ddot 1$ olur. Buradan $\ddot y = \ddot 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $*\log_{\dot a}\dot a = \ddot y$ olsun. Buradan $(\ddot a)^{y_\beta} = \ddot a$ olup $\ddot y = \ddot 1$ elde edilir.

ii-) $*\log_{\dot a}\dot b = \ddot u$ ve $*\log_{\dot a}\dot c = \ddot v$ olsun. Buradan

$$(\ddot a)^{u_\beta} = \ddot b \text{ ve } (\ddot a)^{v_\beta} = \ddot c$$

yazılır. Eşitlikler taraf tarafa β -çarpılırsa

$$\ddot b \ddot\times \ddot c = (\ddot a)^{u_\beta} \ddot\times (\ddot a)^{v_\beta} = (\ddot a)^{\ddot u \ddot+ \ddot v} \Rightarrow \ddot u \ddot+ \ddot v = *\log_{\dot a}\left(\ddot b \ddot\times \ddot c\right)$$

elde edilir.

Benzer mantık $\ddot b$ ve $\ddot c$ için β -bölme yapılırsa

$$\frac{\ddot b}{\ddot c}\beta = \frac{(\ddot a)^{u_\beta}}{(\ddot a)^{v_\beta}}\beta = (\ddot a)^{\ddot u \ddot- \ddot v} \Rightarrow \ddot u \ddot- \ddot v = *\log_{\dot a}\left(\frac{\dot b}{\dot c}\alpha\right)$$

elde edilir.

iii-) $\ddot a \ddot> \ddot 1$, $\dot c, \dot d \in \mathbb{R}_\alpha^+$, $\dot c \dot< \dot d$ olsun. ι ve *-üstel fonksiyonun özellikleri kullanılır ve $*\log_{\dot a}\dot c = \ddot y :\Leftrightarrow (\ddot a)^{y_\beta} = \ddot c$ ve $*\log_{\dot a}\dot d = \ddot z :\Leftrightarrow (\ddot a)^{z_\beta}$ alınırsa

$\dot c \dot< \dot d \Rightarrow \iota(\dot c) \ddot< \iota(\dot d) \Rightarrow \ddot c \ddot< \ddot d \Rightarrow (\ddot a)^{y_\beta} \ddot< (\ddot a)^{z_\beta} \Rightarrow \ddot y \ddot< \ddot z \Rightarrow *\log_{\dot a}\dot c \ddot< *\log_{\dot a}\dot d$

olup *log *-artan bir fonksiyondur.

Benzer mantık ile $\dot 0 \dot< \dot a \dot< \dot 1$ için *log fonksiyonunun *-azalanlığı kolayca ispatlanabilir.

Örnek 4.1.12. $\dot a \dot> \dot 1$ için $\varphi : \dot{[}\dot 0, \dot+\infty\dot{)} \to \ddot{[}\ddot 0, \ddot+\infty\ddot{)}$, $\varphi(\dot x) = *\log_{\dot a}(\dot 1 \dot+ \dot x) = \ddot y$

ile tanımlı f fonksiyonu *-modülüs fonksiyonudur:

*-logaritma fonksiyonunun tanımına göre $\varphi(\dot{x}) = *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) = \ddot{y} :\Leftrightarrow (\ddot{a})^{y_\beta} = \ddot{1} \ddot{+} \ddot{x}$ yazılır. Buna göre

I. $\varphi(\dot{x}) = \ddot{0} \Rightarrow *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) = \ddot{0}$

$$\Rightarrow (\ddot{a})^{0_\beta} = \ddot{1} \ddot{+} \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{1} = \ddot{1} \ddot{+} \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{0} = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{0} = \dot{x}$$

Tersine $\dot{x} = \dot{0}$ olsun.Bu durumda

$\varphi(\dot{0}) = *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{0}) = *\log_{\dot{a}} \dot{1} = \ddot{0}$

elde edilir.

II. Her $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$, $\dot{a} \dot{>} \dot{1}$ için *log özellikleri kullanılırsa

$$\dot{1} \dot{+} \dot{x} \dot{+} \dot{y} \dot{\leq} (\dot{1} \dot{+} \dot{x}) \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} \dot{y})$$

$$*\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x} \dot{+} \dot{y}) \ddot{\leq} *\log_{\dot{a}}[(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} \dot{y})]$$

$$\ddot{\leq} *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) \ddot{+} *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{y})$$

elde edilir.

III. Her $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ olsun. $\dot{a} \dot{>} \dot{1}$ için *log fonksiyonu *-artan bir fonksiyon olduğundan

$$\dot{x} \dot{<} \dot{y} \Rightarrow \dot{1} \dot{+} \dot{x} \dot{<} \dot{1} \dot{+} \dot{y}$$

$$\Rightarrow *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) \dot{<} *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{y})$$

olup φ, *-artandır.

IV. Herhangi $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $\dot{x} \dot{<} \delta$ olan her $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\left| *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) \right|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunmalı:

Bunun için $\dot{a} \dot{>} \dot{1}$ olduğunda *log fonksiyonu *-artan olduğundan

$$\dot{1} \dot{+} \dot{x} \dot{<} \dot{1} \dot{+} \delta$$

$$*\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x}) \ddot{<} *\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \delta)$$

$$\left|*\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \dot{x})\right|_{\beta} \ddot{<} \left|*\log_{\dot{a}}(\dot{1} \dot{+} \delta)\right|_{\beta}$$

yazılır. Burada $\delta = \left(\dot{a}\right)^{\varepsilon} \dot{-} \dot{1}$ alınırsa istenen elde edilir.

Tanım 4.1.13. $A, B \subset \mathbb{R}_{\alpha}$, $A \cap B \neq \varnothing$ ve olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}_{\beta}$ ve $g : B \to \mathbb{R}_{\beta}$ fonksiyonları arasındaki işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

*-toplama $\quad *(f+g)(\dot{x}) = f(\dot{x}) \ddot{+} g(\dot{x})$

*-çıkarma $\quad *(f-g)(\dot{x}) = f(\dot{x}) \ddot{-} g(\dot{x})$

*-çarpma $\quad *(f.g)(\dot{x}) = f(\dot{x}) \ddot{\times} g(\dot{x})$

*-bölme $\quad *(f/g)(\dot{x}) = f(\dot{x}) \ddot{/} g(\dot{x})$, $g(\dot{x}) \neq \ddot{0}$

$\lambda \in \mathbb{R}_{\beta}$ olmak üzere $*(\lambda.f)(\dot{x}) = \lambda \ddot{\times} f(\dot{x})$

Tanım 4.1.14. $A \subset \mathbb{R}_{\beta}, B \subset \mathbb{R}_{\alpha}$, $g(B) \cap A \neq \varnothing$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}_{\beta}$ ve $g : B \to \mathbb{R}_{\beta}$ fonksiyonları verilsin.

$f \circ g : B \to \mathbb{R}_{\beta}$, $(f \circ g)(\dot{x}) = f(g(\dot{x}))$ ile tanımlı $f \circ g$ fonksiyonuna f ile g nin bileşke fonksiyonu denir.

Önerme 4.1.15. f ve g *-modülüs fonksiyonları olsun.

i-) $\lambda \ddot{>} \ddot{0}$ olmak üzere $*(\lambda.f), *(f+g), f \circ g$ fonksiyonları *-modülüs fonksiyonlardır.

ii-) $\dfrac{f}{\ddot{1} \ddot{+} f}\beta$ fonksiyonu *-modülüs fonksiyonudur.

iii-) $*\left(f-g\right), *\left(f.g\right), *\left(f/g\right)$ ve f^{-1} fonksiyonlarının *-modülüs fonksiyonu olması gerekmez.

İspat: i-) $*(\lambda.f)$ fonksiyonunun *-modülüs fonksiyonu olduğunu gösterelim:

f fonksiyonunun *-modülüs fonksiyonu olduğu kullanılırsa

I. $*(\lambda.f)(\dot{x})=\ddot{0} \Leftrightarrow \lambda \ddot{\times} f(\dot{x})=\ddot{0}$

$$\Leftrightarrow f(\dot{x})=\ddot{0}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}=\dot{0}$$

elde edilir.

II. $*(\lambda.f)(\dot{x}\dot{+}\dot{y})=\lambda \ddot{\times} f(\dot{x}\dot{+}\dot{y})$

$$\ddot{\leq} \lambda \ddot{\times}[f(\dot{x})\ddot{+}f(\dot{y})]$$

$$\ddot{\leq} \lambda \ddot{\times} f(\dot{x})\ddot{+}\lambda \ddot{\times} f(\dot{y})$$

$$\ddot{\leq} *(\lambda.f)(\dot{x})\ddot{+}*(\lambda.f)(\dot{y})$$

elde edilir.

III. Her $\dot{x}\dot{<}\dot{y}$ için $f(\dot{x})\ddot{<}f(\dot{y})$ β-eşitsizliğinin her iki tarafı λ ile β-çarpılırsa

$$\lambda \ddot{\times} f(\dot{x})\ddot{<}\lambda \ddot{\times} f(\dot{y})$$

elde edilir.

IV. f, *-modülüs fonksiyonu olduğundan

$$*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}} f(\dot{x})=f(\dot{0})$$

yazılır.

$$*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}} *(\lambda.f)(\dot{x})=*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}}(\lambda \ddot{\times} f(\dot{x}))=\lambda \ddot{\times}\left[*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}} f(\dot{x})\right]=\lambda \ddot{\times} f(\dot{0})=*(\lambda.f)(\dot{0})$$

elde edilir.

Şimdi $*(f+g)$ fonksiyonunun *-modülüs fonksiyonu olduğunu gösterelim:

f ve g *-modülüs fonksiyonu olduğundan

I. $*(f+g)(\dot{x})=\ddot{0} \Leftrightarrow f(\dot{x})\ddot{+}g(\dot{x})=\ddot{0} \Leftrightarrow f(\dot{x})=\ddot{0}$ ve $g(\dot{x})=\ddot{0} \Leftrightarrow \dot{x}=\dot{0}$

elde edilir.

II. $*(f+g)(\dot{x}\dot{+}\dot{y})=f(\dot{x}\dot{+}\dot{y})\ddot{+}g(\dot{x}\dot{+}\dot{y})$

$$\ddot{\leq} f(\dot{x})\ddot{+}f(\dot{y})\ddot{+}g(\dot{x})\ddot{+}g(\dot{y})$$

$$\ddot{\leq} *(f+g)(\dot{x}) \ddot{+} *(f+g)(\dot{y})$$

elde edilir.

III. $\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ için $*(f+g)(\dot{x}) = f(\dot{x}) \ddot{+} g(\dot{x})$

$$\ddot{<} f(\dot{y}) \ddot{+} g(\dot{y})$$

$$\ddot{<} *(f+g)(\dot{y})$$

elde edilir.

IV. $*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^+} *(f+g)(\dot{x}) = *-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^+} f(\dot{x}) \;\ddot{+}\; *-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^+} g(\dot{x})$

$$= f(\dot{0}) \ddot{+} g(\dot{0})$$

$$= *(f+g)(\dot{0})$$

elde edilir.

Son olarak $f \circ g$ fonksiyonunun *-modülüs fonksiyonu olduğunu gösterelim: f ve g *-modülüs fonksiyonu olup $f \circ g$ fonksiyonunun tanımı dikkate alınırsa

I. $(f \circ g)(\dot{x}) = \ddot{0} \Leftrightarrow f(g(\dot{x})) = \ddot{0} \Leftrightarrow g(\dot{x}) = \ddot{0} \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{0}$

elde edilir.

II. f ve g modülüs fonksiyonu olduğundan

$$(f \circ g)(\dot{x} \dot{+} \dot{y}) = f(g(\dot{x} \dot{+} \dot{y})) \ddot{\leq} f(g(\dot{x})) \ddot{+} f(g(\dot{y})) = (f \circ g)(\dot{x}) \ddot{+} (f \circ g)(\dot{y})$$

elde edilir.

III. f ve g *-artan fonksiyon olduğundan

$\dot{x} \dot{<} \dot{y}$ iken

$$(f \circ g)(\dot{x}) = f(g(\dot{x})) \ddot{<} f(g(\dot{y})) = (f \circ g)(\dot{y})$$

elde edilir.

IV. f *-sürekli ve g *-modülüs fonksiyon olduğundan

$$*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^+} (f \circ g)(\dot{x}) = f\left(*-\lim_{\dot{x}\to\dot{0}^+} g(\dot{x})\right) = f(g(\dot{0})) = (f \circ g)(\dot{0})$$

elde edilir.

ii-) f, *-modülüs fonksiyonu olduğundan

I. $\left(\dfrac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{x})=\ddot{0}\Rightarrow\dfrac{f(\dot{x})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{x})}\beta=\ddot{0}\Rightarrow f(\dot{x})=\ddot{0}\Rightarrow\dot{x}=\dot{0}$

Tersine $\dot{x}=\dot{0}$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{0})=\frac{f(\dot{0})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{0})}\beta=\frac{\ddot{0}}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{0}}\beta=\ddot{0}$$

elde edilir.

II. $\left(\dfrac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{x}\dot{+}\dot{y})=\dfrac{f(\dot{x})\ddot{+}f(\dot{y})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{x})\ddot{+}f(\dot{y})}\beta$

$$\ddot{\leq}\frac{f(\dot{x})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{x})}\beta\ \ddot{+}\ \frac{f(\dot{y})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{y})}\beta$$

$$\ddot{\leq}\left(\frac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{x})\ \ddot{+}\ \left(\frac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{y})$$

elde edilir.

III. f, *-modülüs fonksiyonu olduğundan $\dot{x}\dot{<}\dot{y}$ iken $f(\dot{x})\ddot{<}f(\dot{y})$ yazılır. Buradan

$$\frac{f(\dot{x})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{x})}\beta\ \ddot{<}\ \frac{f(\dot{y})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{y})}\beta$$

elde edilir.

IV. $*-\lim\limits_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}}\left(\dfrac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{x})=\dfrac{*-\lim\limits_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}}f(\dot{x})}{\ddot{1}\ddot{+}*-\lim\limits_{\dot{x}\to\dot{0}^{+}}f(\dot{y})}\beta$

$$=\frac{f(\dot{0})}{\ddot{1}\ddot{+}f(\dot{0})}\beta$$

$$=\left(\frac{f}{\ddot{1}\ddot{+}f}\beta\right)(\dot{0})$$

elde edilir.

iii-) $\beta=\exp$ üreteci ve $f(\dot{x})=\sqrt{\iota(\dot{x})}^{\beta}$ ve $g(\dot{x})=\iota(\dot{x})$ *-modülüs fonksiyonları göz önüne alındığında

$*\left(f-g\right)$ fonksiyonunda $\dot{1} \dot{<} \dot{2}$ iken $*\left(f-g\right)(\dot{1}) \ddot{>} *\left(f-g\right)(\dot{2})$ olup $*\left(f-g\right)$ fonksiyonu $\left[\dot{1},\dot{2}\right]$ $\alpha-$aralığında *-azalan bir fonksiyon olduğundan *-modülüs fonksiyonu olamaz.

$*\left(f.g\right)$ fonksiyonunda $\dot{x}=\alpha\left(16\right)$ ve $\dot{y}=\alpha\left(9\right)$ değerleri alındığında

$$*\left(f.g\right)\left(\dot{x}\dot{+}\dot{y}\right) \ddot{>} *\left(f.g\right)\left(\dot{x}\right)\ddot{+}*\left(f.g\right)\left(\dot{y}\right)$$

olup *-modülüs fonksiyonu olmanın **II.** koşulu sağlanmaz.

$*\left(f/g\right)$ fonksiyonunda $*\left(f/g\right)(\dot{0})$ tanımsız olduğundan *-modülüs fonksiyonu olamaz. $f(\dot{x})=\sqrt{\iota(\dot{x})}^{\beta}$ ile tanımlı f fonksiyonunda $\alpha=I$ ve $\beta=\exp$ alınırsa $\dot{x}=I(x)=x$ ve $\iota(\dot{x})=\exp(x)=e^{x}$ olup

$$f(x)=\sqrt{e^{x}}^{\exp}=\exp\left\{\sqrt{\ln e^{x}}\right\}=e^{\sqrt{x}}$$

dir. Buradan $f^{-1}(x)=\left[\ln x\right]^{2}$ olup $x=1$ ve $y=e$ alınırsa

$$f^{-1}(x+y)>f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$$

olacağından *-modülüs fonksiyonu olmanın **II.** koşulu sağlanmaz.

Tanım 4.1.16. Bir x Newtonyen olmayan reel sayısının α-tam değeri $[\![x]\!]_{\alpha}$ ile gösterilir ve $x\in\mathbb{R}_{\alpha}-\mathbb{Z}_{\alpha}$ için x den önce gelen en büyük α-tam sayısı t olmak üzere

$$[\![x]\!]_{\alpha}=\begin{cases} x\,, & x\in\mathbb{Z}_{\alpha} \text{ ise} \\ t\,, & x\notin\mathbb{Z}_{\alpha} \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 4.1.17. φ, *-modülüs fonksiyonu olsun.

i) $\dot{m}\in\mathbb{Z}_{\alpha}^{+}$ olmak üzere

$$\varphi(\dot{m}) \ddot{\leq} \iota(\dot{m})\ddot{\times}\varphi(\dot{1})$$

dir.

ii) $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ ve $\dot{t} \in \mathbb{R}_{\alpha}^{+}$ olmak üzere

$$\varphi\left(\dot{t} \dot{\times} \dot{x}\right) \ddot{\leq} K \ddot{\times} \varphi\left(\dot{x}\right)$$

olacak şekilde $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_{\beta}$ sayısı vardır.

İspat: i) $\varphi(\dot{m}) = \varphi(\underbrace{\dot{1} \dot{+} \dot{1} \dot{+} ... \dot{+} \dot{1}}_{m-defa})$

$$\ddot{\leq} \varphi(\dot{1}) \ddot{+} \varphi(\dot{1}) \ddot{+} .... \ddot{+} \varphi(\dot{1})$$

$$= \ddot{m} \ddot{\times} \varphi(\dot{1})$$

$$= \iota(\dot{m}) \ddot{\times} \varphi(\dot{1})$$

elde edilir.

ii) $\dot{t} \in \mathbb{R}_{\alpha}^{+}$ ve $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ verilsin. Eğer $\dot{t}$ bir $\alpha-$pozitif tamsayı ise Önerme 4.1.17. (i) den ispatı açıktır.

Eğer $\dot{t}$ bir $\alpha-$pozitif tamsayı değil ise

$$\dot{t} \dot{<} [\![\dot{t}]\!]_{\alpha} \dot{+} \dot{1}$$

olup φ, *-artan olması ve Önerme 4.1.17. (i) eşitsizliği kullanılırsa

$$\varphi(\dot{t} \dot{\times} \dot{x}) \ddot{<} \varphi[([\![\dot{t}]\!]_{\alpha} \dot{+} \dot{1}) \dot{\times} x]$$

$$\ddot{\leq} \iota\left([\![\dot{t}]\!]_{\alpha} \dot{+} \dot{1}\right) \ddot{\times} \varphi(\dot{x})$$

yazılır. Burada $K = \iota\left([\![\dot{t}]\!]_{\alpha} \dot{+} \dot{1}\right)$ olarak alınırsa istenen elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.18. $\varphi_1 : \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)} \rightarrow \ddot{[}\ddot{0}, \ddot{+}\infty\ddot{)}$, $\varphi_2 : \ddot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\ddot{)} \rightarrow \ddot{[}\ddot{0}, \ddot{+}\infty\ddot{)}$ ile tanımlı φ_1 ve φ_2 *-modülüs fonksiyonları, $\dot{0} \dot{<} \dot{\delta} \dot{<} \dot{1}$ olsun. Bu durumda $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\varphi_1(\dot{x}) \ddot{>} \iota(\dot{\delta})$ ise

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\dot{x}) \ddot{\leq} \frac{\ddot{2} \ddot{\times} \varphi_2(\ddot{1})}{\iota(\dot{\delta})} \beta \ddot{\times} \ \varphi_1(\dot{x})$$

eşitsizliği yazılır.

İspat: $\dot{0} \dot{<} \dot{\delta} \dot{<} \dot{1}$ olduğundan $\varphi_1(\dot{x}) \ddot{\leq} \frac{\varphi_1(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta$ olur.

$$\varphi_1(\dot{x}) \ddot{<} \ddot{1} \ddot{+} \left[\!\left[\frac{\varphi_1(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta \right]\!\right]_\beta$$

dır.

Ayrıca $\varphi_1(\dot{x}) \ddot{>} \iota(\dot{\delta})$ olduğundan $\frac{\varphi_1(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta \ddot{>} \ddot{1}$ olup

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\varphi_1(\dot{x})) &\ddot{<} \varphi_2\left(\ddot{1} \ddot{+} \left[\!\left[\frac{\varphi_1(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta \right]\!\right]_\beta \right) \\
&\ddot{\leq} \left[\ddot{1} \ddot{+} \left[\!\left[\frac{\varphi_1(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta \right]\!\right]_\beta \right] \ddot{\times} \varphi_2(\ddot{1}) \\
&\ddot{\leq} \frac{\ddot{2} \ddot{\times} \varphi_2(\ddot{1})}{\iota(\dot{\delta})}\beta \; \ddot{\times} \varphi_1(\dot{x})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.19. φ bir *-modülüs fonksiyonu ve $\dot{0} \dot{<} \dot{\delta} \dot{<} \dot{1}$ olsun. Bu taktirde $m \in \mathbb{N}$ ve $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\varphi^{(m-1)_\beta}(\dot{x}) \ddot{>} \iota(\dot{\delta})$ ise

$$\varphi^{m_\beta}(\dot{x}) \ddot{\leq} \frac{\ddot{2} \ddot{\times} \varphi(\dot{1})}{\iota(\dot{\delta})}\beta \; \ddot{\times} \varphi^{(m-1)_\beta}(\dot{x})$$

olur.

Teorem 4.1.20. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\varphi_k : \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)} \to \ddot{[}\ddot{0}, \ddot{+}\infty\ddot{)}$ olmak üzere *-modülüs fonksiyonları verilsin ve $\dot{0} \dot{<} \dot{\delta} \dot{<} \dot{1}$ olsun. Her $\dot{x} \dot{\geq} \dot{\delta}$ için

$$\varphi_k(\dot{x}) \ddot{\leq} \ddot{2} \ddot{\times} \varphi_k(\dot{1}) \ddot{\times} \frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta$$

eşitsizliği yazılır.

İspat: $\dot{0} \dot{<} \dot{\delta} \dot{<} \dot{1}$ olduğundan $\dot{x} \dot{\leq} \frac{\dot{x}}{\dot{\delta}}\alpha$ dır.

$$\dot{x} \dot{<} \dot{1} \dot{+} [\![\dot{x}]\!]_\alpha \dot{\leq} \dot{1} \dot{+} \left[\!\left[\frac{\dot{x}}{\dot{\delta}}\alpha \right]\!\right]_\alpha$$

olur.

Ayrıca $\dot{x} \dot{\ge} \dot{\delta}$ olduğundan $\frac{\dot{x}}{\dot{\delta}}\alpha \dot{\ge} \dot{1}$ olup Önerme 4.1.17. (i) eşitsizliği kullanılırsa her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi_k(\dot{x}) \ddot{<} \varphi_k\left(\dot{1} \dot{+} \left[\!\left[\frac{\dot{x}}{\dot{\delta}}\alpha \right]\!\right]_\alpha\right) \ddot{\le} \iota\left[\dot{1} \dot{+} \left[\!\left[\frac{\dot{x}}{\dot{\delta}}\alpha \right]\!\right]_\alpha\right] \ddot{\times} \varphi_k(\dot{1}) \ddot{\le} \ddot{2} \ddot{\times} \varphi_k(\dot{1}) \ddot{\times} \frac{\iota(\dot{x})}{\iota(\dot{\delta})}\beta$$

bulunur.

Tanım 4.1.21. $f : X \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X'^{\alpha}$ olsun. x_0 noktasında *-limiti $\beta(0)$ olan fonksiyona, x_0 noktasında *-sonsuz küçülen fonksiyon denir.

Teorem 4.1.22. $f : X \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X'^{\alpha}$ olsun. A sayısının, x_0 noktasında f fonksiyonunun *-limiti olması için gerek ve yeter şart $f(x) \ddot{-} A$ farkının bu noktada *-sonsuz küçülen olmasıdır.

İspat: $* - \lim_{x \to x_0} f(x) = A$ ise, $f(x) \ddot{-} A = g(x)$ alırsak *-limitin tanımına göre, $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} x_0|_\alpha \dot{<} \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) \ddot{-} A|_\beta \ddot{<} \varepsilon$, yani $|g(x)|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ olur ve tersine, $f(x) \ddot{-} A$ sonsuz küçülen ise $* - \lim_{x \to x_0} f(x) = A$ buradan görülmektedir.

Teorem 4.1.23. (*-Sıkıştırma Teoremi) $f, g, h : X \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonları ve $x_0 \in X'^{\alpha}$ verilsin. x_0' ı içeren herhangi bir $\alpha -$aralığındaki tüm x'ler için $f(x) \ddot{\le} h(x) \ddot{\le} g(x)$ eşitsizliği sağlanırsa ve $* - \lim_{x \to x_0} f(x) = * - \lim_{x \to x_0} g(x) = A$ ise o zaman $* - \lim_{x \to x_0} h(x) = A$ olur.

İspat: $f(x) \ddot{\le} h(x) \ddot{\le} g(x)$ eşitsizliği $f(x) \ddot{-} A \ddot{\le} h(x) \ddot{-} A \ddot{\le} g(x) \ddot{-} A$ gibi yazılabilir. x_0 noktasında $f(x) \ddot{-} A$ ve $g(x) \ddot{-} A$ $\beta -$farklarının *-sonsuz küçülen olmalarından dolayı Teorem 4.1.22 gereği $h(x) \ddot{-} A$ $\beta -$farkı da *-sonsuz küçülendir. Buradan $* - \lim_{x \to x_0} h(x) = A$ yazılabilir.

Teorem 4.1.24. Her φ *-modülüs fonksiyonu için

$$* - \lim_{\dot{x} \to \dot{+}\infty} \frac{\varphi(\dot{x})}{\iota(\dot{x})} \beta$$

*-limiti vardır.

İspat: $\theta =^{\beta} \inf \left\{ \frac{\varphi(\dot{x})}{\iota(\dot{x})} : \dot{x} \overset{\cdot}{>} \dot{0} \right\}$ olsun. Bu durumda $\ddot{0} \overset{\cdot\cdot}{\leq} \theta \overset{\cdot\cdot}{\leq} \varphi(\dot{1})$ dir. (Özel olarak $\dot{x} = \dot{1}$ için de doğrudur.)

Teorem 2.4.18 den dolayı $\varepsilon \overset{\cdot\cdot}{>} \ddot{0}$ verildiğinde $\dot{c} \overset{\cdot}{>} \dot{0}$ için

$$\varphi(\dot{c}) \overset{\cdot\cdot}{<} \iota(\dot{c}) \overset{\cdot\cdot}{\times} (\theta \overset{\cdot\cdot}{+} \varepsilon)$$

olur. Ayrıca her $\dot{x} \overset{\cdot}{>} \dot{c}$ ve $\dot{n} \in \mathbb{Z}_{\alpha}^{+}$ için $\dot{n} \overset{\cdot}{\times} \dot{c} \overset{\cdot}{<} \dot{x} \overset{\cdot}{\leq} (\dot{n} \overset{\cdot}{+} \dot{1}) \overset{\cdot}{\times} \dot{c}$ olur.

*-Modülüs fonksiyonunun (**II**) ve (**III**) özelliğinden;

$$\iota(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\times} \theta \overset{\cdot\cdot}{\leq} \varphi(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\leq} \iota(\dot{n}) \overset{\cdot\cdot}{\times} \varphi(\dot{c}) \overset{\cdot\cdot}{+} \varphi(\dot{c}) \overset{\cdot\cdot}{\leq} \iota(\dot{n}) \overset{\cdot\cdot}{\times} \iota(\dot{c}) \overset{\cdot\cdot}{\times} (\theta \overset{\cdot\cdot}{+} \varepsilon) \overset{\cdot\cdot}{+} \varphi(\dot{c}) \overset{\cdot\cdot}{<} \iota(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\times} (\theta \overset{\cdot\cdot}{+} \varepsilon) \overset{\cdot\cdot}{+} \varphi(\dot{c})$$

yazılır. Böylece

$$\iota(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\times} \theta \overset{\cdot\cdot}{\leq} \varphi(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{<} \iota(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\times} (\theta \overset{\cdot\cdot}{+} \varepsilon) \overset{\cdot\cdot}{+} \varphi(\dot{c})$$

ifadesinde $\dot{x} \to \dot{+}\infty$ iken *-limit alınırsa *-sıkıştırma teoremi gereği

$$* - \lim_{\dot{x} \to \dot{+}\infty} \frac{\varphi(\dot{x})}{\iota(\dot{x})} \beta$$

elde edilir.

Not 4.1.25. $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\varphi(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\leq} \iota(\dot{x})$ koşulu φ *-modülüs fonksiyonu için genel olarak sağlanmayabilir.

Örneğin; $\varphi(\dot{x}) = \iota(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{+} \sqrt{\dot{x}}^{\beta}$ bu özelliği sağlamayan bir *-modülüs fonksiyonudur. Öte yandan Teorem 4.1.24.'de herhangi bir φ *-modülüs fonksiyonu için

$$* - \lim_{\dot{x} \to \dot{+}\infty} \frac{\varphi(\dot{x})}{\iota(\dot{x})} \beta$$

limitinin mevcut olduğu gösterilmiştir.

Bu $\varphi(\dot{x}) \overset{\cdot\cdot}{\leq} \theta \overset{\cdot\cdot}{\times} \iota(\dot{x})$ olacak şekilde θ sabitinin var olmasını gerektirmektedir. Aşağıdaki teorem, son eşitsizliğin tersinin de olabileceğini ifade etmektedir.

Teorem 4.1.26. φ, $* - \lim\limits_{\dot t \to \dot{+}\infty} \dfrac{\varphi(\dot t)}{\iota(\dot t)}\beta = \iota(\dot s) \ddot{>} \ddot{0}$ koşulunu sağlayan bir *-modülüs fonksiyonu olsun. O zaman her $\dot t \dot{>} \dot{0}$ için $\varphi(\dot t) \ddot{\geq} \lambda \ddot{\times} \iota(\dot t)$ olacak şekilde bir $\lambda \ddot{>} \ddot{0}$ sabiti vardır.

İspat: $* - \lim\limits_{\dot t \to \dot{+}\infty} \dfrac{\varphi(\dot t)}{\iota(\dot t)}\beta = \iota(\dot s) \ddot{>} \ddot{0}$ olduğundan,

$\varepsilon = \dfrac{\iota(\dot s)}{\iota(\dot 2)}\beta \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık her $\dot t \dot{\geq} \dot t_0$ için $\left|\dfrac{\varphi(\dot t)}{\iota(\dot t)}\beta \ddot{-} \iota(\dot s)\right|_{\beta} \ddot{<} \dfrac{\iota(\dot s)}{\iota(\dot 2)}\beta$ olacak şekilde en az bir $\dot t_0 \dot{>} \dot{0}$ sayısı vardır.

Buradan her $\dot t \dot{\geq} \dot t_0$ için

$$\frac{\varphi(\dot t)}{\iota(\dot t)}\beta \ddot{>} \frac{\iota(\dot s)}{\iota(\dot 2)}\beta \Rightarrow \varphi(\dot t) \ddot{>} \frac{\iota(\dot s)}{\iota(\dot 2)}\beta \ \ddot{\times}\ \iota(\dot t)$$

olur.

$\dot 1 \dot{\leq} \dot t \dot{\leq} \dot t_0$ ise; φ *-modülüs fonksiyonu *-artan olduğundan

$$\varphi(\dot t) \ddot{\geq} \varphi(\dot 1) = \frac{\iota(\dot 1)}{\iota(\dot t)}\beta \ddot{\times} \varphi(\dot 1) \ddot{\times} \iota(\dot t) \ \ddot{\geq} \frac{\varphi(\dot 1)}{\iota(\dot t_0)} \ddot{\times} \iota(\dot t)$$

yazılır.

$\dot 0 \dot{<} \dot t \dot{<} \dot 1$ ise; $\dfrac{\dot 1}{\dot n \dot{+} \dot 1}\alpha \dot{<} \dot t \dot{\leq} \dfrac{\dot 1}{\dot n}\alpha$ olacak şekilde en az bir $\dot n \in \mathbb{Z}_{\alpha}^{+}$ vardır.

*-Modülüs fonksiyonunun *-artanlığı ve Önerme 4.1.17. (i) kullanılırsa

$$\varphi(\dot t) \ddot{>} \varphi\left(\frac{\dot 1}{\dot n \dot{+} \dot 1}\alpha\right) \ddot{\geq} \frac{\iota(\dot 1)}{\iota(\dot n) \ddot{+} \iota(\dot 1)}\beta \ddot{\times} \varphi(\dot 1) = \frac{\iota(\dot n)}{\iota(\dot n) \ddot{+} \iota(\dot 1)}\beta \ddot{\times} \frac{\iota(\dot 1)}{\iota(\dot n)}\beta \ddot{\times} \varphi(\dot 1) \ddot{\geq} \frac{\iota(\dot n)}{\iota(\dot n) \ddot{+} \iota(\dot 1)}\beta \ddot{\times} \varphi(\dot 1) \ddot{\times} \iota(\dot t) \ddot{\geq} \frac{\iota(\dot 1)}{\iota(\dot 2)}\beta \ddot{\times} \varphi(\dot 1) \ddot{\times} \iota(\dot t)$$

olur. Böylece

$$\lambda = \min\left\{\frac{\iota(\dot s)}{\iota(\dot 2)}\beta, \frac{\varphi(\dot 1)}{\iota(\dot t_0)}\beta, \frac{\iota(\dot 1)}{\iota(\dot 2)}\beta \ddot{\times} \varphi(\dot 1)\right\} \ddot{>} \ddot{0}$$

seçilirse istenen elde edilir.

Teorem 4.1.27. φ *-özdeşlik fonksiyonundan farklı, *-sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda her $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) \ddot{>} \frac{\iota(\dot{1})}{\iota(\dot{n})}\beta$ olacak şekilde bir $\dot{n}$ α-pozitif tamsayısı vardır.

İspat: $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ keyfi olsun ve böyle bir $\dot{n}$ α-pozitif tamsayısının olmadığını kabul edelim.

Bu durumda her $\dot{n} \in \mathbb{Z}_\alpha^+$ için $\varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) \ddot{\leq} \frac{\iota(\dot{1})}{\iota(\dot{n})}\beta$ olur.

Yani $\iota(\dot{n}) \ddot{\times} \varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) \ddot{\leq} \iota(\dot{1})$ olur.

$$\varphi(\dot{x}) = \varphi\left(\dot{n} \dot{\times} \frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha \dot{+} \frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right)$$

$$\ddot{\leq} \varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) \ddot{+} \varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) \ddot{+} \ldots \ddot{+} \varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right)$$

$$= \iota(\dot{n}) \ddot{\times} \varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right)$$

olduğundan her $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{+}\infty\dot{)}$ için $\varphi(\dot{x}) \ddot{\leq} \ddot{1}$ elde ederiz. Bu ise φ nin α-sınırsız olması ile çelişir. Ayrıca φ *-özdeşlik fonksiyonu olursa

$$\varphi\left(\frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha\right) \ddot{>} \frac{\iota(\dot{1})}{\iota(\dot{n})}\beta \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{\dot{n}}\alpha \dot{>} \frac{\dot{1}}{\dot{n}}\alpha \Leftrightarrow \dot{x} \dot{>} \dot{1}$$

olup $\dot{x} \in \dot{[}\dot{0}, \dot{1}\dot{]}$ için bu koşul sağlanmaz.

4.2. *-Modülüs Fonksiyonunun Bazı Fonksiyonlarla Bileşkesi

Bu bölümde verilen herhangi bir φ *-modülüs fonksiyonu için p α-paranorm, q α-yarı norm ve d α-yarı metrik fonksiyonu olmak üzere $\varphi \circ p$ nin bir α-paranorm ve $\varphi \circ d$ nin bir α-yarı metrik olduğu fakat $\varphi \circ q$ nun genelde bir α-yarı norm olmadığı gösterilmiştir.

Tanım 4.2.1. $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\mathbb{R}(N)$ cismi verilsin.

$$+ : X \times X \to X$$

$$(r,s) \to r + s$$

ve

$$\dot{\times} : \mathbb{R}(N) \times X \to X$$

$$(\lambda, r) \to \lambda \dot{\times} r$$

fonksiyonları her $r,s,t \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(N)$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine $\mathbb{R}(N)$ cismi üzerinde bir Newtonyen olmayan vektör uzayı denir.

V1) $r + s = r + s$

V2) $(r + s) + t = r + (s + t)$

V3) Her bir $r \in X$ için $r + \theta = r$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

V4) Her bir $r \in X$ için $r + (\theta - r) = \theta$ olacak şekilde bir $(\theta - r) \in X$ vardır.

V5) $\dot{1} \dot{\times} r = r$

V6) $\lambda \dot{\times} (r + s) = \lambda \dot{\times} r + \lambda \dot{\times} s$

V7) $\lambda \dot{\times} (\mu \dot{\times} r) = (\lambda \dot{\times} \mu) \dot{\times} r$

V8) $(\lambda \dot{+} \mu) \dot{\times} r = \lambda \dot{\times} r + \mu \dot{\times} r$

Tanım 4.2.2. X boş olmayan bir küme ve $d_N : X \times X \to \mathbb{R}(N)$ fonksiyonu her $r,s,t \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa d_N fonksiyonuna X üzerinde bir Newtonyen olmayan yarı metrik, (X, d_N) ikilisine de Newtonyen olmayan yarı metrik uzay denir.

i) $d_N(r,r) = \dot{0}$

ii) $d_N(r,s) = d_N(s,r)$

iii) $d_N(r,t) \dot{\leq} d_N(r,s) \dot{+} d_N(s,t)$

Tanım 4.2.3. X ,$\mathbb{R}(N)$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$q_N : X \to \mathbb{R}(N)$ fonksiyonu her $\lambda \in \mathbb{R}(N)$ ve her $r,s \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa

q_N fonksiyonuna bir X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan yarı norm, (X, q_N) ikilisine de Newtonyen olmayan yarı normlu uzay denir.

i) $q_N(\lambda \dot{\times} r) = |\lambda|_N \dot{\times} q_N(r)$

ii) $q_N(r+s) \dot{\leq} q_N(r) \dot{+} q_N(s)$

Örnek 4.2.4. X, $\mathbb{R}_\alpha$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $q : X \to \mathbb{R}_\alpha$, $q(x) = |x|_\alpha$ ile tanımlı q fonksiyonu, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan yarı normdur:

Önerme 2.3.7. gereği,

i) $q(\lambda \times r) = |\lambda \times r|_\alpha$

$= |\lambda|_\alpha \dot{\times} |r|_\alpha$

$= |\lambda|_\alpha \dot{\times} q(r)$

elde edilir.

Önerme 2.3.8.gereği,

ii) $|r+s|_\alpha \dot{\leq} |r|_\alpha \dot{+} |s|_\alpha \Rightarrow q\left[|r+s|_\alpha\right] \dot{\leq} q\left[|r|_\alpha\right] \dot{+} q\left[|s|_\alpha\right]$

olup q fonksiyonu, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan yarı normdur.

Tanım 4.2.5. X, $\mathbb{R}(N)$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\rho_N : X \to \mathbb{R}(N)$ fonksiyonu her $r, s \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa ρ_N fonksiyonuna bir X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranorm, (X, ρ_N) ikilisine de Newtonyen olmayan paranormlu uzay denir.

i) $\rho_N(\theta) = \dot{0}$

ii) $\rho_N(r) = \rho_N(\theta - r)$

iii) $\rho_N(r+s) \dot{\leq} \rho_N(r) \dot{+} \rho_N(s)$

iv) $(t_n) \subset \mathbb{R}(N)$ ve $(t_n) \xrightarrow{N} t$ olmak üzere $\rho_N(x_n - c) \xrightarrow{N} \dot{0}$ olan her

$(x_n) \subset X$ için $\rho_N(t_n \dot{\times} x_n - t \dot{\times} c) \xrightarrow{N} \dot{0}$

Önerme 4.2.6. $\varphi:[\dot{0},\dot{+}\infty)\rightarrow[\dot{0},\dot{+}\infty)$ bir *-modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\rho: X\rightarrow[\dot{0},\dot{+}\infty)$ ile tanımlı ρ fonksiyonu X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranorm ise, $\varphi\circ\rho$ da X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranormdur.

İspat: i) ρ, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranorm olduğundan

$$(\varphi\circ\rho)(\theta)=\varphi(\rho(\theta))=\varphi(\dot{0})=\dot{0}$$

elde edilir.

ii) ρ, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranorm olduğundan

$$\rho(r)=\rho(\theta-r)$$

$$\varphi(\rho(r))=\varphi(\rho(\theta-r))$$

$$(\varphi\circ\rho)(r)=(\varphi\circ\rho)(\theta-r)$$

elde edilir.

iii) ρ, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranorm ve φ *-modülüs fonksiyonu *-artan olduğundan

$$\rho(r+s)\dot{\leq}\rho(r)\dot{+}\rho(s)$$

$$\varphi(\rho(r+s))\dot{\leq}\varphi(\rho(r)\dot{+}\rho(s))$$

$$\dot{\leq}\varphi(\rho(r))\dot{+}\varphi(\rho(s))$$

$$(\varphi\circ\rho)(r+s))\dot{\leq}(\varphi\circ\rho)(r)\dot{+}(\varphi\circ\rho)(s)$$

elde edilir.

iv) $(t_n)\xrightarrow{N}t$, $x_n\rightarrow c$ olmak üzere $(t_n)\subset\mathbb{R}(N)$ ve $(x_n)\subset X$ dizileri alınsın. ρ, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranorm olduğundan

$$\rho(t_n\dot{\times}x_n-t\dot{\times}c)\xrightarrow{N}\dot{0}\Leftrightarrow\rho(t_n\dot{\times}x_n)\xrightarrow{N}\rho(t\dot{\times}c)$$

$$(\varphi\circ\rho)(t_n\dot{\times}x_n-t\dot{\times}c)=\varphi(\rho(t_n\dot{\times}x_n-t\dot{\times}c))$$

φ, $\dot{0}$ noktasında *-sürekli olduğundan *-dizisel süreklidir.

$$\rho(t_n \dot{\times} x_n - t \dot{\times} c) \to \dot{0}$$

olduğunda

$$\varphi(\rho(t_n \dot{\times} x_n - t \dot{\times} c)) \to \varphi(\dot{0}) = \dot{0}$$

olup $\varphi \circ \rho$, X vektör uzayı üzerinde Newtonyen olmayan paranormdur.

Önerme 4.2.7. $\varphi : \left[\dot{0}, \dot{+}\dot{\infty}\right) \to \left[\dot{0}, \dot{+}\dot{\infty}\right)$ ile tanımlı bir *-modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $d : X \to \left[\dot{0}, \dot{+}\dot{\infty}\right)$ ile tanımlı d fonksiyonu boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde Newtonyen olmayan yarı metrik ise $\varphi \circ d$ fonksiyonu da X üzerinde bir Newtonyen olmayan yarı metriktir.

İspat: i) d, Newtonyen olmayan yarı metrik olduğundan

$$d(x,x) = \dot{0}$$

$$\varphi(d(x,x)) = \varphi(\dot{0})$$

$$(\varphi \circ d)(x,x) = \dot{0}$$

elde edilir.

ii) d, Newtonyen olmayan yarı metrik olduğundan

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$\varphi(d(x,y)) = \varphi(d(y,x))$$

$$(\varphi \circ d)(x,y) = (\varphi \circ d)(y,x)$$

elde edilir.

iii) d, Newtonyen olmayan yarı metrik ve φ *-modülüs fonksiyonu olduğundan

$$d(x,z) \dot{\leq} d(x,y) \dot{+} d(y,z)$$

$$\begin{aligned} \varphi(d(x,z)) &\dot{\leq} \varphi(d(x,y) \dot{+} d(y,z)) \\ &\dot{\leq} \varphi(d(x,y)) \dot{+} \varphi(d(y,z)) \\ &= (\varphi \circ d)(x,y) \dot{+} (\varphi \circ d)(y,z) \end{aligned}$$

olup $\varphi \circ d$ fonksiyonu Newtonyen olmayan yarı metriktir.

Önerme 4.2.8. $\varphi:[\dot{0},\dot{+}\dot{\infty})\rightarrow[\dot{0},\dot{+}\dot{\infty})$ ile tanımlı *-modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $q:X\rightarrow[\dot{0},\dot{+}\dot{\infty})$ ile tanımlı q fonksiyonu X vektör uzayı üzerinde bir Newtonyen olmayan yarı norm ise genel olarak $\varphi\circ q$ fonksiyonu X üzerinde bir Newtonyen olmayan yarı norm değildir.

İspat: $\varphi(\dot{x})={}^*\log_{\dot{a}}(\dot{1}\dot{+}\dot{x})$ *-modülüs fonksiyonu ve $q(x)=|x|_{\alpha}$ *-yarı normu göz önüne alındığında

$$(\varphi\circ q)(x)={}^*\log_{\dot{a}}(\dot{1}\dot{+}|x|_{\alpha})$$

olup en az bir $\lambda\in[\dot{0},\dot{+}\dot{\infty})$ için

$$(\varphi\circ q)(\lambda\dot{\times}x)={}^*\log_{\dot{a}}(\dot{1}\dot{+}|\lambda\dot{\times}x|_{\alpha})\neq|\lambda|_{\alpha}\dot{\times}{}^*\log_{\dot{a}}(\dot{1}\dot{+}|x|_{\alpha})$$

olacağından $\varphi\circ q$ X üzerinde bir Newtonyen olmayan yarı norm değildir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada *-modülüs fonksiyonu, *-üstel ve *-logaritma fonksiyonu, *-sınırlılık ve *-sınırsızlık, α-tamdeğer, α-paranorm, α-yarımetrik, α-yarınorm kavramları tanıtılıp, *-modülüs fonksiyonuna örnekler verildi. *-Modülüs fonksiyonunun geometrik, anageometrik, bigeometrik, quadratik, anaquadratik ve biquadratik kalkülüse göre koşulu irdelendi. Klasik modülüs fonksiyonu ile *-modülüs fonksiyonunun önemli farklarını ortaya çıkaran teoremler ispatlandı. *-Modülüs fonksiyonunun diğer fonksiyonlar ile bileşkesine yer verildi.

*-Modülüs fonksiyonu yardımıyla bazı yeni *-dizi uzayları tanımlanıp, bu tip uzayların *-modülüs fonksiyonu yardımıyla kurulan bazı önemli alt uzaylarının özellikleri incelenebilir.

1. KAYNAKÇA

Bilgin, T. (1993). pp(II)-Lacunary equıvalent sequences. *The Online Journal of Science and Technology, 8*(2).

Binbaşıoğlu, D., Demiriz, S., & Türkoğlu, D. (2016). Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications, 18*(1), 213-224.

Boruah, K. (2017). On Some Basic Properties of Geometric Real Sequences. *International Journal of Mathematics Trends and Technology, 46*(2), 111-117.

Çakmak, A. F., & Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications, 2012*(1), 1-17.

Deeb, W., & Hussein, D. (1980). Results on L(f) spaces. *Arabian Journal For Scıence And Engıneerıng, 5*(2), 113-116.

Duyar, C., & Erdoğan , M. (2016). On-Non-Newtonian Real Number Series. *IOSR Journal of Mathematics, 12*(6), 34-48.

Duyar, C., Sağır, B., & Oğur, O. (2015). Some basic topological properties on non-newtonian real line. *British Journal of Mathematics&Computer Science, 9*(4), 296-302.

Erdoğan, F., & Sağır, B. (2020). On non-Newtonian power series and its applications. *Konuralp Journal of Mathematics, 8*(2), 294-303.

Erdoğan, M., & Duyar, C. (2018). Non-Newtonian improper integrals. *Journal of Science and Arts, 18*(1), 49-74.

Grossman, J. (2006). *Meta-Calculus: Differential and Integral. Non Newtonian Calculus.*

Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology, 10*(4), 525-528.

Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology, 10*(4), 525-528.

Grossman, M. (2006). *Bigeometric Calculus: A system with a scale -free derivative. Non-Newtonian Calculus.*

Grossman, M., & Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus.* 1 st ed ., Lee Press, Pigeon Cove, Massachussets.

Güngör, N. (2020). Some Geometric Properties of the non-Newtonian sequence spaces lp(N). *Mathematica Slovaca, 70*(3), 689-696.

Kadak, U. (2015). Non-Newtonian fuzzy numbers and related applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems, 12*(5), 117-137.

Kızmaz, H. (1993). *Fonksiyonel analize giriş.* Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Maddox, I. J. (1986). Sequence Spaces Defined by a Modulus. *Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 100*, 161-166.

Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., & Ekincioğlu, İ. (2003). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz Cilt I* (1. b.). Kütahya: Tekağaç Eylül Yay.

Nakano, H. (1953). Concave Modular. *Journal of the Mathematical Socicty of Japan, 5*, 29-49.

Ruckle , W. H. (1973). FK-Spaces in which the Sequence of Coordinate Vectors is Bounded. *Canadian Journal of Mathematics, 25*, 973-978.

Türkmen, C., & Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus. *In AIP Conference Proceedings American Institute of Physics, 1470*(1), 95-98.

Wilansky, A. (1964). *Functıonal Analysis.* New York: Blaisdell.

ÖZ GEÇMİŞ

Murat Erdem YILMAZ, Niksar Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 10.06.2019 tarihinde mezun oldu. 2019 yılında OMÜ LEE Matematik Yüksek Lisans programına girdi. Mezuniyetinden bu yana matematik öğretmenliği olarak görev yapan Murat Erdem YILMAZ, orta derecede İngilizce bilmektedir. Temel ilgi alanları, felsefe, sanat, okuma, spor.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0000-0002-1921-3298

Yayınlar:

1. Yılmaz, M. ve Sağır, B. (2022, Mayıs). ''Newtonyen Olmayan Kalkülüse Göre Modülüs Fonksiyonları Üzerine Bir Genelleme''. 1 st Internatıonal Conferance On Engıneerıng And Applıed Natural Sciences. Konya, Türkiye.