Analiz I

MAT 101 Analiz I: Lisans Ders Notu

Erdem TOKSOY

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
SAMSUN 2024

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları 162

Analiz I

MAT 101 Analiz I: Lisans Ders Notu

Editörler
Erdem TOKSOY

1. basım: 2024

Yayın Yönetmeni
Doç. Dr. Recep YILMAZ

Yayın Yöneticisi
Dr. Büşra Nur DURAN

Kapak Tasarım
Arş. Gör. Hüseyin UZUNTAŞ
Özlem TEKİNER

Sayfa Düzeni
Özlem TEKİNER

ISBN
978-605-5085-42-1

Baskı ve Cilt/Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları
Ondokuz Mayıs Üniversitesi Kurupelit Kampüsü
Yayın Koordinatörlüğü 55139 Atakum/SAMSUN
0362 312 19 19
sureliyayin@omu.edu.tr

omuyayinlari.omu.edu.tr

Analiz I

MAT 101 Analiz I: Lisans Ders Notu

OMÜ
YAYINLARI

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu ders notu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde 2022-2023 güz döneminde verdiğim Analiz I ders notlarının LaTeX formatı kullanılarak elektronik ortamda yazılmış halidir. Bu ders notu hazırlanırken Analiz I dersinin konularını içeren önemli miktarda yerli ve yabancı kaynağa başvurduğumu belirtmek isterim. Bu kaynakların listesi, son bölümde yer almaktadır. Analiz I dersi, matematik bölüm dersleri arasında en temel derslerden biridir. Öğrencilerin lise eğitiminden belirli bir birikime sahip olduklarını varsayarak, temel bilgileri neden-sonuç bağlamında yeniden inceleyen bu ders notuna temel grafiklerin dahil edilmesi çok önemlidir. Bu grafiklerin çiziminde, erişime açık bir çizim programı olan **GeoGebra** programından yararlandığımı belirtmek isterim. Ayrıca daha özel durumları içeren şekil ve grafikler için Microsoft Office Word programında elle çizimler yapılmıştır.

Bu ders notunda verilen önerme ve teoremler detaylı bir şekilde ispat edilmiş, az sayıda teorem ise sadece ifade edilerek ispat edilmemiştir. İspatsız verilen önerme ve teoremlerin hemen hepsi önceki ispat metotlarına benzer şekilde yapılabilmektedir. Bu ders notu altı bölümden oluşmaktadır. Öğrencinin birinci ve üçüncü bölümlerde sunulan kümelerin, bağıntı ve fonksiyonların ilkelerine ilişkin ön bilgisi ne olursa olsun, neden-sonuç bağlantısı kuracak şekilde yeniden açıklanmasıyla bu konuların anlaşılması geliştirilebilir. İkinci bölümde anlatılan reel sayıların aksiyomları ve sınırlılık özellikleri daha sonraki konulara temel oluşturması açısından önemlidir. Dördüncü ve sonraki bölümlerin bu dersin temel konularını içermesi nedeniyle, daha kapsamlı ve derinlemesine bir anlatıma, bol miktarda açıklayıcı ve ters örneklere yer verilmiştir.

Birinci bölümde, niceleyicilere ve bağlaçlara kısa bir girişin ardından, teoremlerin ve önermelerin sunumundan kaçınarak, tanımlar ve özelliklere vurgu yapılarak küme teorisi incelmiştir. Aynı dönemde aynı sınıfın Soyut Matematik I dersinde bu konunun detaylı olarak işlenmesi nedeniyle kümeler kuramı bu şekilde ele alınmıştır.

İkinci bölümde, reel sayıların toplama, çarpma ve sıralama aksiyomları ifade edildikten sonra reel sayılarda sınırlılık ile ilgili tanım, teorem ve sonuçlar örneklerle ele alınmıştır. Peano aksiyomları, Arşimet presibi ve sonuçları detaylı olarak incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bağıntı konusundan kısaca bahsedilip, kümeler kuramından sonra Analiz I dersinin en temel yapı taşı olan fonksiyonlar konusu; trigonometrik, üstel ve logaritmik, hiperbolik fonksiyonların tanımları ve özellikleri grafiklerle desteklenerek ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, reel dizilerin tanımı, yakınsaklığı, sınırlılığı ile yakınsaklık-sınırlılık ilişkisi ifade edilmiştir. Cauchy dizisi tanımı ile bu tanımın yakınsaklık ve sınırlılık ilişkisi verilmiştir. Alt dizi, monoton dizi kavramları ele alınmış, örneklerden ve ters örneklerden yararlanılarak konu pekiştirilmiştir. Dizilerle ilgili önemli teoremler ispatlarıyla sunulmuştur.

Beşinci bölümde, fonksiyonlarda limit, sağ ve sol limitler kavramları ifade edilerek bu limitler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Limit teoremleri detaylıca ispatlanmış ve sonsuz limit ile sonsuzda limit kavramları tanıtılmıştır. Son olarak limitlerde belirsiz formlar sunulmuştur.

Son bölümde ise süreklilik ve süreksizlik tanımları verilmiştir. Süreklilik ile ilgili temel teoremler geometrik ve cebirsel yorumları yapılarak detaylıca ispatlanmıştır. Bu teoremlerin koşullarının esnetilemeyeceği ayrıca örneklenmiştir. Ayrıca düzgün süreklilik ve Lipschitz koşulu tanıtılmıştır.

Bir bölümdeki derslerin ders notlarının, o dersi veren tüm akademik personelin ortak kültürüyle oluşturulduğu kanaatindeyim. Bu nedenle Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Analiz I dersine bilimsel katkıda bulunan her bir akademisyene saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Dr. Erdem TOKSOY

BÖLÜM 1
Kümeler

Kümeler konusu matematiğin en temel yapı taşıdır. Kümelerin kullanılmadığı bir matematik düşünülemez. Kümeler konusu, matematik bölümünde Analiz I dersi ile aynı dönemde verilen Soyut Matematik I dersinde detaylı olarak incelendiğinden bu bölümde detaylı ispatlar yapılmadan ders boyunca kullanılacak temel kavramlardan söz edilecektir. Bu açıdan bakıldığında kümeler konusu bu ders notu için temel kavramlar bölümü olarak ele alınabilir.

Öncelikle bu ders boyunca kullanılacak bazı niceleyici ve bağlaçlardan söz edelim.

Niceleyiciler

$\forall$: her, herhangi bir
$\exists$: en az bir, bazı

Bağlaçlar

p ile q herhangi iki önerme olsun.
$\wedge$: ve bağlacıdır. $p \wedge q$ "önermelerden her ikisi birden doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlış"
$\vee$: veya bağlacıdır. $p \vee q$ "önermelerden en az biri doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlış"
$\Rightarrow$: ise bağlacıdır. $p \Rightarrow q$ "p doğru q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğru"
$\Leftrightarrow$: ancak ve ancak (gerek ve yeter koşul) bağlacıdır. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

1.1 Kümeler Kuramı

Tanım 1.1

Belirli bir özelliğe sahip **iyi tanımlanmış** nesnelerin oluşturduğu topluluğa **küme** denir. Kümeler $A, B, C, X, Y, \ldots$ gibi büyük harflerle kümenin elemanları $a, b, c, \ldots$ gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir a nesnesi A kümesine ait ise $a \in A$ ait değilse $a \notin A$ ile gösterilir. Sonlu tane elemanı olan kümeye **sonlu küme**, aksi durumda **sonsuz küme** denir.

Tanım 1.2

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\emptyset, \{\}$ sembolleriyle gösterilir.

Tanım 1.3

A ve B herhangi iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A kümesi B kümesinin **alt kümesidir** veya B kümesi A kümesini **kapsar** denir ve $A \subset B$ biçiminde gösterilir. Yani

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \text{ için } a \in B \text{ dır.}$$

✍ **Not**
Bu ders boyunca $A \subset B$ gösteriminin $A = B$ durumunu da içerdiği kabul edilecektir.

✿ Herhangi bir A kümesi için $\emptyset \subset A$ ve $A \subset A$ durumları her zaman vardır.

✿ A kümesinin kendisi hariç tüm alt kümelerine **öz alt küme** denir.

✿ Ayrıca

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

olur.

Tanım 1.4

Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri alt küme olarak kapsayan yeterince geniş kümeye **evrensel küme** denir ve E ile gösterilir.

Tanım 1.5

Tanım: A ve B herhangi iki küme olsun. Bu iki kümenin **birleşimi, kesişimi, farkı** ve **simetrik farkı** sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$A \cup B = \{x|\ x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x|\ x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \backslash B = A - B = \{x|\ x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Tanım 1.6

Bir A kümesinin evrensel kümeden farkına o kümenin **tümleyeni** denir ve A^t veya A^c ile gösterilir. Yani $A^t = E \backslash A$ biçimindedir.

✍ **Not**
I herhangi sayıda elemana sahip indisleyen küme olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$ **kümeler ailesidir**. Bu aile üzerinde birleşim ve kesişim sırasıyla

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x|\ \exists i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x|\ \forall i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

biçimindedir.

✍ **Not**
A, B ve C kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olsun. O halde aşağıdaki durumlar vardır:

✿ $A \cup B \subset E, A \cap B \subset E$ (kapalılık özelliği)

✿ $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ (değişme özelliği)

✿ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (birleşme özelliği)

✿ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliği)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği)

✿ $A \cup A^t = E, A \cap A^t = \varnothing$

✿ $A \cup \varnothing = A, A \cup A = A, A \cup E = E, A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$

✿ $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap A = A, A \cap E = A, A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

De Morgan Kuralları

A ve B herhangi iki küme ve $\{A_i\}_{i \in I}$ bir kümeler ailesi olsun. Böylece aşağıda verilen eşitlikler vardır:

$$(A \cup B)^t = A^t \cap B^t, \ (A \cap B)^t = A^t \cup B^t$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^t = \bigcap_{i \in I} A_i^t, \ \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^t = \bigcup_{i \in I} A_i^t.$$

Tanım 1.7

A ve B herhangi iki küme olsun. Eğer $A \cap B = \varnothing$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.

Tanım 1.8

A bir küme ve $\{A_i\}_{i \in I}$, A kümesinin boş olmayan alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

1. $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesinin üyeleri ikişer ayrık ($i \neq j$ için $A_i \cap A_i = \varnothing$)
2. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

oluyorsa $\{A_i\}_{i \in I}$ kümeler ailesine A kümesinin bir **ayrışımı** denir.

Tanım 1.9

A ve B boştan farklı herhangi iki küme olsun.

$$A \times B = \{(a, b) | \ a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

kümesine A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı denir. Bu kümenin her bir (a, b) elemanına **sıralı ikili** adı verilir.

✿ (a, b) ve (x, y) sıralı ikilileri verilsin. Böylece

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

olur. O halde $A \times B \neq B \times A$ (kartezyen çarpımda değişme özelliği yoktur.) dır.

✿ A ve B kümelerinden en az biri $\varnothing$ ise $A \times B = B \times A = \varnothing$ olur.

BÖLÜM 2

Reel Sayılar

2.1 Reel Sayıların Aksiyomları

Reel sayılar kümesi bu ders boyunca kullanılacak evrensel kümedir. Bu nedenle reel sayıların özelliklerinin iyi kavranması, sonra verilecek konular açısından büyük önem taşır. Öncelikle bilinen sayı kümelerini ifade edelim.

- Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

biçimindedir. Dikkat edilirse $x + 1 = 0$ denkleminin doğal sayılar kümesinde çözümü yoktur. O halde $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi genişletilmelidir.

- Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

biçimindedir. Benzer şekilde $2x - 1 = 0$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur. O halde $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi genişletilmelidir.

- Rasyonel sayılar kümesi ile $\mathbb{Q}$ gösterilir ve

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ ve } (a, b) = 1 \right\}$$

biçimindedir. Burada $(a, b) = 1$ ile $obeb\,(a, b) = 1$ ifade edilmektedir.

Teorem 2.1

Rasyonel olmayan sayı vardır.

İspat

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını gösterelim. Bunun için $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ olduğunu kabul edelim. O halde $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ ve $(a, b) = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ise $\sqrt{2}b = a$ olup $2b^2 = a^2$ olur. Böylece $2b^2 = a^2$ olduğundan a^2 çift sayı olur. Burada $a \in \mathbb{Z}$ olduğundan a^2 çift sayı iken a sayısı da çift olmalıdır. Yani $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ biçimindedir. O halde $2b^2 = a^2$ ise $2b^2 = 4k^2$, $k \in \mathbb{Z}$ olup $b^2 = 2k^2$, $k \in \mathbb{Z}$ olur. Yine $b \in \mathbb{Z}$ olduğundan b^2 çift sayı iken b sayısı da çift olmalıdır. Yani $b = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$ biçimindedir. Bu takdirde $(a, b) = (2k, 2l) \geq 2$ bulunur. Bu durum $(a, b) = 1$ olmasıyla çelişir. Çelişki $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ olduğu kabulünden kaynaklanır. O halde $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ dir. Yani rasyonel olmayan sayı vardır.

- Rasyonel olmayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir ve $\mathbb{I}$ ile gösterilir.
- Rasyonel ve irrasyonel sayıların oluşturduğu kümeye **reel sayılar** kümesi denir ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir. O halde $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ olur.
- Yukarıdaki ifadelerden

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ ve } \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

kapsamaları kolayca söylenir.

Şimdi reel sayıların aksiyomlarını verelim.

I. Toplama Aksiyomları

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.
T_1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Toplama işleminin birleşme özelliği.)
T_2) $a + b = b + a$ (Toplama işleminin değişme özelliği.)
T_3) $a + 0 = a$ (Toplama işleminin birim eleman özelliği.)
T_4) $a + b = 0$ olacak şekilde bir $b = -a \in \mathbb{R}$ vardır. (toplama işleminde ters eleman özelliği)

II. Çarpma Aksiyomları

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.
Ç$_1$) $a(bc) = (ab)c$ (Çarpma işleminin birleşme özelliği.)
Ç$_2$) $ab = ba$ (Çarpma işleminin değişme özelliği.)
Ç$_3$) $a1 = a$ (Çarpma işleminin birim eleman özelliği.)
Ç$_4$) $a \neq 0$ olmak üzere $ab = 1$ olacak şekilde bir $b = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ vardır. (Çarpma işleminde ters eleman özelliği.)

✿ Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği aşağıdaki gibidir:

$$a(b + c) = ab + ac, \ (a + b)c = ac + bc.$$

III. Sıralama Aksiyomları

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir "$\leq$" bağıntısı vardır. Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.
Ç$_1$) $a \leq a$ dir.
Ç$_2$) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ olur.
Ç$_3$) $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ olur.
Ç$_4$) $a \leq b$ veya $b \leq a$ olur.
Ç$_5$) $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ olur.
Ç$_6$) $a \leq b$ ve $c \geq 0$ ise $ac \leq bc$ olur.

I, II ve III Aksiyomlarının Sonuçları

✿ T_2 koşulunu sağlayan 0 elemanı tektir. (Burada teklik kelimesi bir tane anlamında kullanılmıştır.)
✿ T_4 koşulunu sağlayan $b = -a$ elemanı tektir. (Burada teklik kelimesi bir tane anlamında kullanılmıştır.)
✿ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a + c = b + c$ ise $a = b$ olur. (Toplama işleminde sağdan sadeleştirme.)
✿ T_4 koşulundaki $b = -a$ elemanı toplama işlemine göre a sayının tersidir ve a sayının toplama işlemine göre tersinin tersi kendisidir.
✿ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a + x = b$ denkleminin **bir tek** $x = b - a$ çözümü vardır.
✿ Ç$_4$ koşulunda $a \neq 0$ olmak üzere $b = \frac{1}{a}$ olarak verilen b elemanı tektir. (Burada teklik kelimesi bir tane anlamında kullanılmıştır.)

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $c \neq 0$ olmak üzere $ac = bc$ ise $a = b$ olur. (Çarpma işleminde sağdan sadeleştirme.)
- $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a0 = 0$ olur.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $ab = 0$ ise $a = 0 \vee b = 0$ olur.
- $\forall a \in \mathbb{R}$ için $-a = (-1)a$ ve $(-a)^2 = a^2$ olur.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ ise $-b < -a$ olur. Ayrıca $a \neq 0, b \neq 0$ iken $a < b$ ise $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ olur.
- $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a^2 < a$ ise $0 < a < 1$ olur. Yine $a^2 > a$ ise $a < 0$ veya $a > 1$ olur.

Not
Reel sayılar için ifade edilen I, II ve III Aksiyomlarını $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi de sağlar. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ olduğu halde bu üç aksiyom $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ kümelerini ayırt etmemektedir. Bu iki kümeyi IV. aksiyom olarak verilecek **tamlık aksiyomu** ayırt eder. Tamlık aksiyomunu verebilmek için sınırlılık ile ilgili kavramlara ihtiyaç vardır.

Şimdi sınırlılık ile ilgili ifadeleri verelim.

2.2 Sınırlılık

Tanım 2.1

X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \leq b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesine **üstten sınırlıdır** denir. Bu şartı sağlayan b sayılarına da X kümesinin **üst sınırları** denir. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $x \leq M$ olacak şekilde bir $M \in X$ sayısı varsa bu M sayısına X kümesinin **en büyük elemanı** denir ve $\text{maks}\, X$ ile gösterilir.

Tanım 2.2

X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesine **alttan sınırlıdır** denir. Bu şartı sağlayan a sayılarına da X kümesinin **alt sınırları** denir. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $m \leq x$ olacak şekilde bir $m \in X$ sayısı varsa bu M sayısına X kümesinin **en küçük elemanı** denir ve $\min X$ ile gösterilir.

Tanım 2.3

X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. X kümesi **hem alttan** hem de **üstten sınırlı** ise X kümesine **sınırlı** küme denir. Diğer bir ifadeyle, her $x \in \mathbb{R}$ için $a \leq x \leq b$ olacak şekilde bir $a, b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesine **sınırlı küme** denir. Sınırlılığın tanımına alternatif bir ifade daha verelim: Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa X kümesine **sınırlı küme** denir.

Örnek 2.1

$A = [0, 1]$ ve $B = (0, 1)$ kümelerini alalım. Öncelikle her $a \in A$ için $0 \leq x \leq 1$ ve $0, 1 \in A$ dır. O halde A kümesi hem alttan hem de üstten sınırlıdır. Ayrıca $\min A = 0$ ve $\text{maks}\, A = 1$ olur. Şimdi B kümesi araştıralım. Her $b \in B$ için $0 < b < 1$ olduğundan B kümesi hem alltan hem de üstten sınırlıdır. Ancak her $b \in B$ için $m \leq b$ ve $b \leq M$ olacak şekilde $m, M \in B$ sayıları yoktur. O halde B kümesinin en küçük elemanı ve en büyük elemanı yoktur.

Tanım 2.4

X , $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı **üstten sınırlı** bir alt kümesi olsun.

$$B = \{\, b \in \mathbb{R} \mid \; b, X \text{ kümesinin üst sınırıdır}\}$$

kümesinin **var ise en küçük elemanına** X kümesinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir ve bu sayı $\sup X$ ile gösterilir. Yani $\sup X = \min B$ dir.

Tanım 2.5

X , $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı **alttan sınırlı** bir alt kümesi olsun.

$$A = \{\, a \in \mathbb{R} \mid \; a, X \text{ kümesinin alt sınırıdır}\}$$

kümesinin **var ise en büyük elemanına** X kümesinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir ve bu sayı $\inf X$ ile gösterilir. Yani $\inf X = \text{maks}\, A$ dır.

Örnek 2.2

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ doğal sayılar kümesini alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq n$ olduğundan $\mathbb{N}$ kümesi alttan sınırlıdır. Ayrıca $\mathbb{N}$ kümesinin alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanı 1 olduğundan $\inf \mathbb{N} = 1$olur. Diğer yandan $1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $\min \mathbb{N} = 1$ dir. Ancak bu $\mathbb{N}$ kümesi üstten sınırlı değildir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı yoktur. O halde $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin supremumu yoktur.

Şimdi

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

kümesini ele alalım.

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\}$$

olup her $x \in A$ için $0 < x \leq 1$ olduğundan A kümesi hem alttan hem de üstten sınırlıdır. Bu A kümesinin alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanı 0 dır. Ayrıca A kümesinin üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanı 1 olur. O halde $\inf A = 0$ ve $\sup A = \text{maks}\, A = 1$ bulunur. Dikkat edilirse bu A kümesinin bir en küçük elemanı yoktur.

✍ **Not**

Dikkat edilirse, bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı X kümesinin bir üst sınırı ve $b \in X$ ise $\sup X = \text{maks}\, X = b$ olur. Benzer şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı X kümesinin bir alt sınırı ve $a \in X$ ise $\inf X = \min X = a$ olur.

Teorem 2.2 Supremum ve İnfimumun Karakteristik Özelliği

i. *X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı **üstten sınırlı** bir alt kümesi olsun. Bir $b \in \mathbb{R}$ sayısının X kümesinin supremumu olması için **gerek ve yeter koşul** b sayısının X kümesinin bir üst sınır olması ve herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $b - \epsilon < x_\epsilon$ olacak şekilde bir $x_\epsilon \in X$ sayısının var olmasıdır.*

ii. *X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı **alttan sınırlı** bir alt kümesi olsun. Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının X kümesinin infimumu olması için **gerek ve yeter koşul** a sayısının X kümesinin bir alt sınır olması ve herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $x_\epsilon < a + \epsilon$ olacak şekilde bir $x_\epsilon \in X$ sayısının var olmasıdır.*

☞ **İspat**

i. ($\Rightarrow$) $\sup X = b$ olsun. Bu b sayısı X kümesinin bir üst sınırı olduğundan her $x \in X$ için $x \leq b$ olur. Şimdi her $x \in X$ için $x \leq b-\epsilon$ olduğunu kabul edelim. O halde $b-\epsilon$ sayısı X kümesinin bir üst sınırıdır. Burada $\sup X = b$ olduğundan $b \leq b-\epsilon \Longleftrightarrow \epsilon \leq 0$ olur ki bu durum $\epsilon > 0$ olmasıyla çelişir. Çelişki her $x \in X$ için $x \leq b-\epsilon$ kabulünden kaynaklanır. Bu takdirde en az bir $x_\epsilon \in X$ sayısı için $b-\epsilon < x_\epsilon$ olur.

($\Leftarrow$) Tersine, bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı X kümesinin bir üst sınırı ve herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $b-\epsilon < x_\epsilon$ olacak şekilde bir $x_\epsilon \in X$ sayısı var olsun. Bir $d \in \mathbb{R}$ sayısının $d < b$ koşulunu sağlayan X kümesinin başka bir üst sınırı olduğunu kabul edelim. Böylece $0 < b-d$ olup $\epsilon = b-d$ alınırsa $b-\epsilon < x_\epsilon$ iken $d < x_\epsilon$ ($x_\epsilon \in X$) olur ki bu durum d sayısının X kümesinin bir üst sınırı olmasıyla çelişir. Çelişki $d \in \mathbb{R}$ sayısının $d < b$ koşulunu sağlayan X kümesinin başka bir üst sınırı olduğunu kabulünden kaynaklanır. O halde X kümesinin başka bir $d \in \mathbb{R}$ üst sınırı için $b \leq d$ olmalıdır. Bu $\sup X = b$ olması anlamına gelir.

ii. İspat i. şıkkın ispatına benzer şeklide yapılır.

Şimdi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinden ayıran tamlık aksiyomunu ifade edelim.

III. Tamlık Aksiyomu

X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı **üstten sınırlı** bir alt kümesi ise X kümesinin bir supremumu vardır.

Bu aksiyom bazı kaynaklarda aşağıdaki biçimde de ifade edilir:

A ve B, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq b$ oluyorsa her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq c \leq b$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

✍ **Not**

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tamlık aksiyomunu sağlamaz. Gerçekten bir

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} |\ x < \sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{Q}$$

kümesini alalım. Bu A kümesi üstten sınırlıdır ancak $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğundan bu kümenin $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinde bir supremumu yoktur.

Teorem 2.3

*X kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı **alttan sınırlı** bir alt kümesi ise X kümesinin bir infimumu vardır.*

☞ **İspat**

$$Y = \{-x |\ x \in X\}$$

kümesini alalım. X kümesi alttan sınırlı olduğundan her $x \in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Böylece her $x \in X$ için $a \leq x$ ise $-a \geq -x$ olup her $-x \in Y$ için $-a \geq -x$ olduğundan $-a$ sayısı Y kümesi için bir üst sınırdır. O halde tamlık aksiyomundan $\sup Y = M$ sayısı vardır. Buradan her $-x \in Y$ için $-x \leq M$ olduğundan $x \geq -M$ olup her $x \in X$ için $-M \leq x$ olur. Yani $-M$ sayısı X kümesinin bir alt sınırıdır. X kümesinin herhangi bir alt sınırı c olsun. Böylece her $x \in X$ için $c \leq x$ olup $-x \leq -c$ yazılır. Yani $-c$ sayısı Y kümesi için bir üst sınırdır. Diğer yandan

$\sup Y = M$ olduğundan $M \leq -c$ olup $c \leq -M$ dır. Böylece X kümesinin herhangi bir c alt sınırı $-M$ sayısından küçük olduğundan $\inf X = -M$ bulunur.

Tanım 2.6

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ sembollerinin ilave edilmesiyle elde edilen kümeye **genişletilmiş reel sayılar kümesi** denir ve $\overline{\mathbb{R}}$ ile gösterilir. Yani $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ biçimindedir. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\overline{\mathbb{R}}$ kümesindeki cebirsel işlemler aşağıdaki biçimdedir:

✿ $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.

✿ $x - (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$.

✿ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $x \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$.

✿ $x > 0$ ise $x(+\infty) = +\infty$, $x(-\infty) = -\infty$, $\dfrac{x}{0} = +\infty$, $\dfrac{+\infty}{x} = +\infty$, $\dfrac{-\infty}{x} = -\infty$.

✿ $x < 0$ ise $x(+\infty) = -\infty$, $x(-\infty) = +\infty$, $\dfrac{x}{0} = -\infty$, $\dfrac{+\infty}{x} = -\infty$, $\dfrac{-\infty}{x} = +\infty$.

Diğer yandan,

$$\infty - \infty,\ 0(\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{+\infty},\ \frac{\pm\infty}{-\infty},\ \frac{0}{0}$$

ifadeleri tanımlı değildir. Bu nedenle $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir cisim değildir.

✍ **Not**

Bir X kümesi üstten sınırlı değilse $\sup X = +\infty$, alttan sınırlı değilse $\inf X = -\infty$ olarak tanımlanur. Yine özel olarak $\sup \varnothing = -\infty$ ve $\inf \varnothing = +\infty$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.7

A kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $a, b \in A$ olmak üzere $a \leq x \leq b$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in A$ oluyorsa A kümesine bir **aralıktır** denir.

Tanım 2.8

Her $a, b \in A$ ve $a < b$ olsun. O halde

✿ $(a, b) = B = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ aralığına **açık aralık** denir.

✿ $[a, b] = B = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$ aralığına **kapalı aralık** denir.

✿ $[a, b) = B = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$ aralığına sağdan kapalı soldan açık **yarı açık aralık** denir.

✿ $(a, b] = B = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}$ aralığına soldan açık sağdan kapalı **yarı açık aralık** denir.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kümesinde açık aralıklar aşağıdaki gibi tanımlanır:
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < a\}$,
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq a\}$.

Örnek 2.3

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi bir aralık değildir.Gerçekten $3,4 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $3 < 3,2 < 4$ iken $3,2 \notin \mathbb{N}$ dir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ biçiminde bir aralıktır. Yine $\mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)$ pozitif reel sayılar kümesi ve $\mathbb{R}^{-} = (-\infty, 0)$ negatif reel sayılar kümesi birer aralıktır.

2.3 Peano Aksiyomları

Doğal sayıları ifade etmekte yeterli olan en belirgin özellikler Peano aksiyomlarıdır ve bu beş aksiyom aşağıdaki biçimdedir.

N_1) $1 \in \mathbb{N}$ dir.

N_2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $n+1 \in \mathbb{N}$ dir.

N_3) Her $n \in \mathbb{N}$ için $n+1 \neq 1$ dır.

N_4) Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $n+1 = m+1$ ise $n = m$ dir.

N_5) $A \subset \mathbb{N}$, $1 \in A$ ve her $n \in A$ için $n+1 \in A$ olsun. O halde $A = \mathbb{N}$ olur. Bu aksiyoma **matematik indüksiyon prensibi** veya **tümevarım prensibi** denir.

N_5 aksiyomunun kullanıldığı tümevarım yönteminde aşağıdaki yol izlenir.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için n doğal sayısına bağlı bir $B(n)$ önermesi verilsin.

1. $1 \in \mathbb{N}$ için önerme doğrudur. Yani $B(1)$ doğrudur.
2. Önerme n için doğru iken $n+1$ içinde doğru oluyorsa (yani $B(n)$ doğru iken $B(n+1)$ de doğru oluyorsa) bu önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Örnek 2.4

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 1$ için $1 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1) \Leftrightarrow 1 = 1$ olur. O halde verilen eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

n için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{2.1}$$

olsun. Şimdi $n+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. (2.1) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + n + 6n + 6\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde verilen eşitlik $n+1$ için doğrudur. Bu takdirde, tümevarım yönteminden, her $n \in \mathbb{N}$ için verilen eşitlik doğrudur.

✍ **Not**
Bir $B(n)$ önermesi her $n \geq n_0$ için verilmişse tümevarım yöntemi kullanılırken ilk adımda $B(1)$ doğrudur ifadesi yerine (önerme $n = 1$ için doğrudur ifadesi yerine) $B(n_0)$ doğrudur ifadesi (önerme $n = n_0$ için doğrudur ifadesi) yazılır.

Örnek 2.5

Her $n \geq 5$ için $2^n > n^2$ eşitsizliğinin doğru olduğunu tümevarım yöntemini kullanarak gösterelim.
$n = 5$ için $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ olur. O halde verilen eşitsizlik $n = 5$ için doğrudur.
n için eşitsizliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$2^n > n^2 \tag{2.2}$$

olsun. Şimdi $n + 1$ için eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim. (2.1) ifadesi kullanılarak

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \tag{2.3}$$

yazılır.
Öncelikle her $n \geq 5$ için

$$2n + 1 < 2^n \tag{2.4}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu tümevarım yöntemini kullanarak gösterelim.
$n = 5$ için $2.5 + 1 < 2^5 \Leftrightarrow 11 < 32$ olur. O halde (2.4) eşitsizliği $n = 5$ için doğrudur.
n için (2.4) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. Şimdi $n + 1$ için inceleme yapalım. Böylece (2.4) ifadesi kullanılarak

$$2(n+1) + 1 = 2n + 1 + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

bulunur. O halde tümevarım prensibinden her $n \geq 5$ için (2.4) eşitsizliği sağlanır. O halde (2.4) ifadesi (2.3) de yerine yazılırsa

$$(n+1)^2 < 2^n + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

elde edilir. Bu takdirde tümevarım prensibinden her $n \geq 5$ için $2^n > n^2$ eşitsizliği doğrudur.

2.4 Arşimet Prensibi ve Sonuçları

✍ Not

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin boştan farklı sınırlı her alt kümesinin bir **en büyük elemanı** ve bir **en küçük elemanı** vardır. Yani tamsayılar kümesinin boştan farklı alttan sınırlı her alt kümesinin bir **en küçük elemanı**, boştan farklı üstten sınırlı her alt kümesinin bir **en büyük elemanı** vardır.

Teorem 2.4 Arşimet Prensibi

Her $h > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(k-1)h \leq x < kh$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

☞ İspat

Her $h > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bir

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{h} < n \right\} \subset \mathbb{Z}$$

kümesini alalım. Öncelikle $A \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $A = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O halde her $n \in \mathbb{Z}$ için $n \leq \frac{x}{h}$ olur. Bu durum $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin üstten sınırsız olmasıyla çelişir. Bu çelişki $A = \emptyset$ kabulünden kaynaklanır. Bu durumda $A \neq \emptyset$ dır. Her $n \in A$ için $\frac{x}{h} < n$ olduğundan A kümesi alttan sınırlıdır. Tamsayılar kümesinin boştan farklı alttan sınırlı her alt kümesinin bir en küçük elemanı var olduğundan $\min A = k$ olacak şekilde bir $k \in A \subset \mathbb{Z}$ vardır. Ayrıca $k \in A$

$$\frac{x}{h} < k \tag{2.5}$$

yazılır. Yine $k-1 \in \mathbb{Z}$ olup $\min A = k$ ve $k-1 < k$ olduğundan $k-1 \notin A$ olur. Böylece A kümesinin tanımından,

$$k-1 \leq \frac{x}{h} \tag{2.6}$$

yazılır. O halde (2.5) ve (2.6) kullanılarak bu $k \in \mathbb{Z}$ için

$$k-1 \leq \frac{x}{h} < k \Leftrightarrow (k-1)h \leq x < kh$$

elde edilir.

Şimdi Arşimet prensibinin sonuçlarını verelim.

Sonuç 2.1

Herhangi bir $\epsilon > 0$ için $\frac{1}{n} < \epsilon$ olacak şekilde $\exists n \in \mathbb{N}$ vardır.

☞ İspat

Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer Arşimet prensibinde $h = 1$ ve $x = \frac{1}{\epsilon}$ alınırsa,

$$(k_0 - 1) \leq \frac{1}{\epsilon} < k_0$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{Z}$ var olur. Burada herhangi bir $\epsilon > 0$ için $\frac{1}{\epsilon} < k_0$ olduğundan $k_0 > 0$ olur. O halde $k_0 \in \mathbb{N}$ dır. Eğer $k_0 = n$ alınırsa, herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\epsilon} < n \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$$

bulunur. Bu istenendir.

Sonuç 2.2

Her $h > 0$ için $0 \leq x < h$ ise $x = 0$ dır.

☞ İspat

Her $h > 0$ için $0 \leq x < h$ olsun. $x \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $0 < x$ olup 1. Sonuç gereği $\frac{1}{n} < x$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durum her $h > 0$ için $x < h$ olmasıyla çelişir. Burada çelişki, $x \neq 0$ kabulünden kaynaklanır. Bu takdirde $x = 0$ olur.

Sonuç 2.3

Her $a, b, x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a \leq x < a + \frac{b}{n}$$

ise $x = a$ olur.

Bu sonucun ispatı benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.4 Yoğunluk Teoremi

Herhangi iki reel sayı arasında ez az bir tane (dolayısıyla sonsuz sayıda) rasyonel sayı vardır.

☞ İspat

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. O halde $0 < b - a$ olup 1. Sonuç gereği $\frac{1}{n} < b - a$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca Arşimet prensibinde $x = a$ ve $h = \frac{1}{n}$ alınırsa,

$$\frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n} \tag{2.7}$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Şimdi $\frac{k}{n} < b$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\frac{k}{n} \geq b$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\frac{k-1}{n} \leq a < b \leq \frac{k}{n}$$

olur. Öncelikle

$$\frac{k-1}{n} \leq a < b \leq \frac{k}{n} \Rightarrow b-a \leq \frac{k}{n} - a \tag{2.8}$$

yazılır. Yine

$$\frac{k-1}{n} \leq a \Rightarrow -a \leq -\frac{k-1}{n} \tag{2.9}$$

olur. O halde (2.8) ve (2.9) kullanılarak

$$b-a \leq \frac{k}{n} - a \leq \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$$

bulunur. Bu durum $\frac{1}{n} < b-a$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $\frac{k}{n} \geq b$ kabulünden kaynaklanır. O halde $\frac{k}{n} < b$ olmalıdır. Böylece (2.7) ifadesi kullanılarak

$$\frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n} < b \Rightarrow a < \frac{k}{n} < b$$

elde edilir. Burada $k, n \in \mathbb{Z}$ olduğundan a ile b arasında en az bir $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ sayısı vardır. Yukarıda izlenen yol kullanılarak a ile $\frac{k}{n}$ sayıları arasında ve $\frac{k}{n}$ ile b sayıları arasında rasyonel sayılar bulunabilir. Bu işlem sonsuz defa uygulanarak, a ile b arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunabilir.

✍ **Not**

Bu son sonuçtan yararlanarak, herhangi iki reel sayı arasında en az bir tane (ve dolayısıyla sonsuz sayıda) irrasyonel sayı vardır denebilir. Gerçekten Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. Burada $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olduğundan $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ ve $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ olur. Böylece 4. Sonuç kullanılarak

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{k}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$$

olacak şekilde en az bir $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ sayısı vardır denir. Buradan

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{k}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < \frac{k}{n}\sqrt{2} < b$$

ve $\frac{k}{n}\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ olur. Bu takdirde, herhangi iki reel sayı arasında en az bir tane (ve dolayısıyla sonsuz sayıda) irrasyonel sayı vardır.

Sonuç 2.5 Tam değer

Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için Arşimet prensibinde $h = 1$ alınırsa,

$$k - 1 \leq x < k$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada $k - 1 = m \in \mathbb{Z}$ denirse,

$$m \leq x < m + 1$$

yazılır. Bu $m \in \mathbb{Z}$ sayısına x sayısının **tam değeri** denir ve $[|x|]$ ile gösterilir. Yine $x - [|x|]$ sayısına x sayısının **kesir kısmı** denir. Bu x sayısının kesir kısmına t denirse, $x = [|x|] + t$, $0 \leq t < 1$ olur.

Bazı reel sayıların tam değerleri aşağıdaki gibidir:

$$[|1,2|] = 1, [|0,1|] = 0, [|1|] = 1, [|-1,2|] = -2.$$

Şimdi tam değerin bazı özelliklerini verelim. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde

✿ $[|x|] = m$ ise $m \leq x < m + 1$ olur.

✿ $[|x + m|] = [|x|] + m$ olur.

✿ $[|x|] > m$ ise $x \geq m + 1$ olur.

Tanım 2.9

Herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}$ sayısının **mutlak değeri**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.
Şimdi mutlak değerin bazı özelliklerini ifade edelim.

✿ Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| = |-x| \geq 0$ dır.

✿ Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x + y| \leq |x| + |y|$, $|x.y| = |x|\,|y|$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ olur.

✿ Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $||x| - |y|| \leq |x - y|$ olur.

✿ Her $x \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ için $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ olur.

✿ Her $x \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ için $|x| > a \Leftrightarrow a < x \lor x < -a$, $|x| \leq a \Leftrightarrow a \leq x \lor x \leq -a$ olur.

✿ Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{x^2} = |x|$ olur.

✿ Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$ olur.

BÖLÜM 3

Bağıntı ve Fonksiyon

3.1 Bağıntı

Tanım 3.1

$X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ herhangi iki küme olsun.

$$X \times Y = \{(x, y) |\ x \in X \text{ ve } y \in Y\}$$

kümesinin her alt kümesine X kümesinden Y kümesine bir bağıntı denir. Bağıntılar, genel olarak $\alpha, \beta, \ldots$ gibi harflerle gösterilir.
Bir $\beta \subset X \times Y$ bağıntısında, herhangi bir $(x, y) \in \beta$ için $x\beta y$ gösterimi kullanılır. Eğer $X = Y$ ise $\beta \subset X \times X$ bağıntısına X de bir bağıntı denir.

Tanım 3.2

$X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ herhangi iki küme olmak üzere β, X kümesinden Y kümesine bir bağıntı olsun. O halde

$$\{(y, x) |\ (x, y) \in \beta\} \subset Y \times X$$

kümesi de Y kümesinden X kümesine bir bağıntıdır. Bu bağıntıya β bağıntısının tersi denir ve β^{-1} ile gösterilir.

Örnek 3.1

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümelerini alalım. Böylece

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

olur. Burada

$$\beta_1 = \{(1, a)\} \subset A \times B, \beta_2 = \{(1, b), (2, b)\} \subset A \times B$$

alt kümeleri, A kümesinden B kümesine birer bağıntıdır. Yine $A \times B$ kümesinin kendisi de A kümesinden B kümesine bir bağıntıdır. Ayrıca

$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$

biçimindedir. Burada

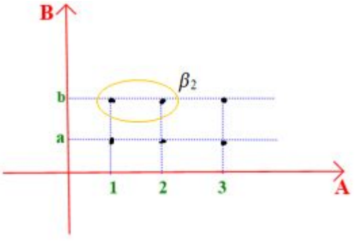
$$\alpha_1 = \{(a, 2), (a, 3)\} \subset B \times A, \alpha_2 = \{(b, 3), (b, 2), (a, 1)\} \subset A \times B$$

alt kümeleri, B kümesinden A kümesine birer bağıntıdır. Yine $B \times A$ kümesinin kendisi de B kümesinden A kümesine bir bağıntıdır. Şimdi β_2 bağıntısının β_2^{-1} tersini bulalım. Bu β_2^{-1} bağıntısı

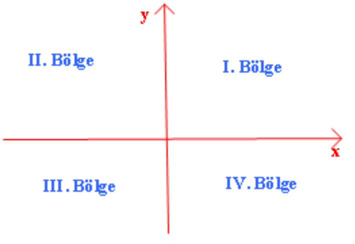
$$\beta_2^{-1} = \{(y, x) |\ (x, y) \in \beta_2\} = \{(b, 2), (b, 1)\} \subset B \times A$$

olur.

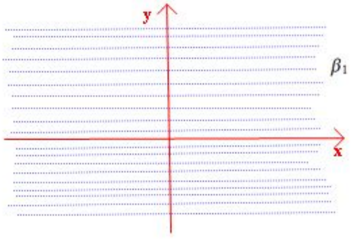
$A \times B$ kümesinin bir alt kümesi olan β_2 bağıntısının grafiği çizilirken A kümesi yatay eksenle B kümesi dikey eksenle temsil edilir.



✿ Bağıntı tanımındaki X ile Y kümeleri özel olarak $X = Y = \mathbb{R}$ alınırsa $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ bağıntısına $\mathbb{R}$ de bir bağıntı denir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ nin her alt kümesi $\mathbb{R}$ de bir bağıntı olur. Öncelikle $\mathbb{R}^2$ deki bölgeler aşağıdaki gibidir:

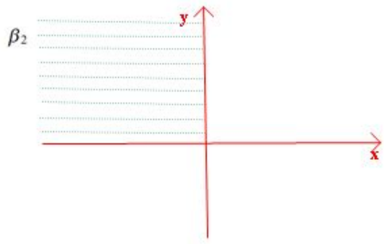


✿ $\beta_1 = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ de bir bağıntıdır ve grafiği aşaığdaki biçimdedir:



Ondokuz Mayıs Üniversitesi

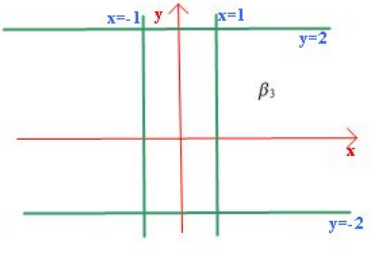
✿ İkinci bölgede yer alan $\beta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x \leq 0, y \geq 0\}$ bağıntısının grafiği aşağıdaki biçimdedir:



✿ $\beta_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ \ |x| = 1\ \vee\ |y| = 2\}$ bağıntısı için $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y \in \mathbb{R}$ veya $|y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2, x \in \mathbb{R}$ olup

$$(x, y) \in \beta_3 \Leftrightarrow (x, y) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R} \text{ veya } (x, y) \in \mathbb{R} \times \{-2, 2\}$$

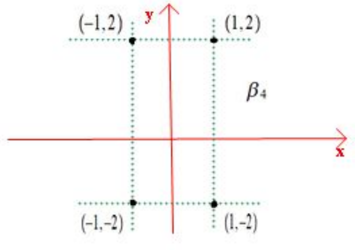
yazılır. Bu β_3 bağıntısının grafiği aşağıdaki gibidir:



✿ $\beta_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ \ |x| = 1\ \wedge\ |y| = 2\}$ bağıntısı için $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ve $|y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2$ olup

$$\beta_4 = \{-1, 1\} \times \{-2, 2\}$$

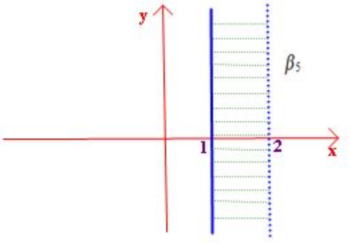
bulunur. β_4 bağıntısının grafiği aşağıdaki gibidir:



✿ $\beta_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \; [|x|] = 1\}$ bağıntısı için $[|x|] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2, y \in \mathbb{R}$ olur. O halde

$$\beta_5 = [1,2) \times \mathbb{R}$$

dir. β_5 bağıntısının grafiği aşağıdaki biçimdedir:



Tanım 3.3

β, X kümesinde bir bağıntı olsun.

1. Her $x \in X$ için $(x,x) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısı **yansıma özelliğine** sahiptir denir.
2. $(x,y) \in \beta$ olan her $x,y \in X$ için $(y,x) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısı **simetri özelliğine** sahiptir denir.
3. $(x,y) \in \beta$ ve $(y,x) \in \beta$ olan her $x,y \in X$ için $x = y$ oluyorsa, β bağıntısı **ters simetri özelliğine** sahiptir denir.
4. $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ olan her $x,y,z \in X$ için $(x,z) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısı **geçişme özelliğine** sahiptir denir.

Tanım 3.4

β, X kümesinde bir bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı **yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine** sahipse, β bağıntısına **kısmi sıralama bağıntısı** denir. Eğer her $x,y \in X$ için $(x,y) \in \beta$ veya $(y,x) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısına **tam sıralama bağıntısı** ve X kümesine **tam sıralı küme** denir.

Tanım 3.5

β, X kümesinde bir bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı **yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine** sahipse, β bağıntısına **denklik bağıntısı** denir.

3.2 Fonksiyonlar

Tanım 3.6

$X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ herhangi iki küme olmak üzere $f \subset X \times Y$ olsun. Eğer

1. Her $x \in X$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde en az bir $y \in Y$ vardır
2. Her $x \in X$ için $(x,y_1) \in f$ ve $(x,y_2) \in f$ ise $y_1 = y_2$ dir

şartları sağlanıyorsa, bu f bağıntısına X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon denir ve $f : X \to Y$ biçiminde gösterilir.

✿ $f : X \to Y$ fonksiyonunda xfy gösterimi yerine genellikle $y = f(x)$ gösterimi kullanılır. Bu $y = f(x)$ ifadesinde x e **bağımsız değişken**, y e de **bağımlı değişken** denir.

Tanım 3.7

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için X kümesine f fonksiyonunun **tanım kümesi** denir ve D_f ile gösterilir. Ayrıca Y kümesine f fonksiyonunun **değer kümesi** ve $R_f = f(X) \subset Y$ kümesine de f fonksiyonunun **görüntü kümesi** denir.

Tanım 3.8

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu ve $A \subset X$ ve $B \subset Y$ kümeleri verilsin.

1. $R_f = \{(x, f(x)) | \ x \in X\} \subset X \times Y$ kümesine f fonksiyonunun **grafiği** denir.
2. $f(A) = \{f(x) | \ x \in A\}$ kümesine A kümesinin **görüntü kümesi** denir.
3. $f^{-1}(B) = \{x \in X | \ f(x) \in B\}$ kümesine B kümesinin **ters görüntü kümesi** denir.

Örnek 3.2

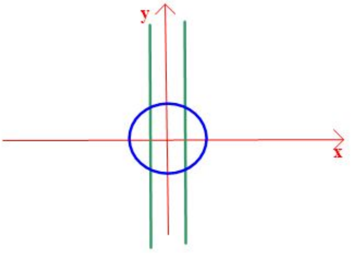
$X = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ olsun.

1. $\beta_1 = \{(1, a), (b, 2), (3, c), (4, d)\}$ kümesini alalım. Burada, $(b, 2) \in \beta_1$ iken $(b, 2) \notin X \times Y$ olduğundan β_1, $X \times Y$ kümesinin bir alt kümesi değildir. Bu nedenle, β_1, X kümesinden Y kümesine birer bağıntı değildir. Bu takdirde, β_1 bir fonksiyon değildir.
2. $\beta_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ kümesini alalım. Burada, $\beta_2 \subset X \times Y$ olduğundan β_2, X kümesinden Y kümesine bir bağıntıdır. Ancak $4 \in X$ için $(4, y) \in \beta_2$ olacak şekilde bir $y \in Y$ var olmadığından, β_2 bir fonksiyon değildir.
3. $\beta_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$ kümesini alalım. Burada, $\beta_3 \subset X \times Y$ olduğundan β_3, X kümesinden Y kümesine bir bağıntıdır. Ayrıca, her $x \in X$ için $(x, y) \in \beta_3$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır ve $(x, y_1) \in \beta_3$, $(x, y_2) \in \beta_3$ iken $y_1 = y_2$ olur. O halde β_3 bir fonksiyondur.

Örnek 3.3

Bir $\beta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ x^2 + y^2 = 1\right\}$ bağıntısını alalım. Burada, $x^2 + y^2 = 1$ ise $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ olup $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ için $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) \in \beta$ ve $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \in \beta$ iken $\sqrt{\frac{3}{4}} \neq -\sqrt{\frac{3}{4}}$ olduğundan f bir fonksiyon değildir.

✿ Verilen bir bağıntının grafiği biliniyor ise bu bağıntının fonksiyon olması için bağımsız değişken eksenine (genelde x eksenine) dik doğruların, bağıntının grafiğini bir tek noktada kesmesi gerekir. Aksi halde, bağıntı fonksiyon belirtmez. Bir önceki örnekte verilen β bağıntısının grafiğine dikkat edildiğinde, x eksenine dik olan doğruların bağıntının grafiğini iki noktada kestiği görülmektedir.



✍ **Not**
Bu ders boyunca kullanılan fonksiyonların tanım ve değer kümeleri $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}$ nin alt kümeleri olarak alınacaktır. Bu tip fonksiyonlara **reel değişkenli, reel değerli fonksiyonlar** denir.

Tanım 3.9
f ve g herhangi iki fonksiyon olsun. Eğer $D_f = D_g$ ve her $x \in D_f = D_g$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, f ile g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ ile gösterilir.

Tanım 3.10
$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $b \in Y$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $f(x) = b$ oluyorsa f fonksiyonuna b değerli **sabit fonksiyon** denir.

Örnek 3.4
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5$ biçiminde tanımlı f fonksiyonu 5 değerli sabit fonksiyondur.

Tanım 3.11
$f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $f(x) = x$ oluyorsa f fonksiyonuna **birim(özdeş) fonksiyon** denir ve I_X ile gösterilir.

Tanım 3.12
$f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Eğer $g : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, g fonksiyonuna f fonksiyonunun A **kümesine kısıtlanışı**, f fonksiyonuna da g fonksiyonunun X **kümesine genişlemesi** denir.

Tanım 3.13
$f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa, veya $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna, **birebir(injektif) fonksiyon** denir.

Tanım 3.14
$f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere $R_f = Y$ ise f fonksiyonuna, **örten(surjektif) fonksiyon** denir. Yani her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $y \in Y$ varsa f fonksiyonuna, **örten(surjektif) fonksiyon** denir.

- **Birebir ve örten** fonksiyona **bijektif fonksiyon** denir.
- Eğer $R_f \subset Y$ ve $R_f \neq Y$ ise f fonksiyonuna, **içine fonksiyon** denir.

Tanım 3.15
Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu, **birebir ve örten** bir fonksiyon ise X ile Y kümelerine **denk(eşgüçlü)** kümeler denir ve $X \backsim Y$ biçiminde gösterilir.

- Doğal sayılar kümesine denk olan kümelere **sayılabilir kümeler** denir.
- Bir öz alt kümesine denk olan kümeye **sonsuz küme** denir.

Tanım 3.16

$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ biçiminde tanımlanan $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonuna g ile f fonksiyonlarının **bileşke fonksiyonu** denir.

✿ $f : X \to A$ ve $g : B \to Z$ iki fonksiyon olsun. O halde $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonunun tanımlanabilmesi için $A \subset B$ olması gerekir. Ayrıca genelde $g \circ f \neq f \circ g$ olur.

Tanım 3.17

$f : A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer $f \circ g = I_B$ ve $g \circ f = I_A$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ fonksiyonu varsa bu g fonksiyonuna f fonksiyonunun ters fonksiyonu denir ve $g = f^{-1}$ şeklinde gösterilir.

✿ $f : A \to B$ fonksiyonunun birebir ve örten olması için **gerek ve yeter koşul** $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonunun var olmasıdır. Ayrıca her $x \in A$ için

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

biçimindedir.

✍ **Not**

f ve g birebir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

1. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$,
2. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ olur.

✍ **Not**

Ters görüntü ile ters fonksiyon karıştırılamamalıdır. Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun tersi tanımlı olmasa da $b \in B$ için $f^{-1}(b)$ veya $C \subset B$ için $f^{-1}(C)$ ters görüntüleri her zaman vardır.

Örnek 3.5

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon birebir ve örten değildir. Gerçekten $2 \neq -2$ iken $f(2) = 4 = f(-2)$ olduğundan f fonksiyonu birebir değildir. Ayrıca $-2 \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2 = -2$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ var olmadığından f fonksiyonu örten değildir. Ancak $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$ vardır.

Tanım 3.18

f ve g herhangi iki fonksiyon olsun.

1. Her $x \in D_f \cap D_g$ için
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
olur.
2. Her $x \in D_f \cap D_g$ için
$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$
yazılır.

3. Her $x \in (D_f \cap D_g) - \{x |\ g(x) = 0\}$ için

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

olur.

4. $c \in \mathbb{R}$ (sabit) olmak üzere her $x \in D_f$ için

$$(cf)(x) = cf(x)$$

biçimindedir.

Tanım 3.19

$X \neq \emptyset$ olmak üzere her $x \in X$ için $-x \in X$ oluyorsa, X kümesine **simetrik küme** denir. X bir simetrik küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$f(-x) = -f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna **tek fonksiyon**,

$$f(-x) = f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.

✿ Tek fonksiyonun grafiği **göre simetriktir**. Çift fonksiyonun grafiği ise y **eksenine göre simetriktir**.

Tanım 3.20

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa f fonksiyonuna **üstten sınırlı fonksiyon**, $m \leq f(x)$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{R}$ sayısı varsa f fonksiyonuna **alttan sınırlı fonksiyon** denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı fonksiyona **sınırlı fonksiyon** denir. O halde bir $f : A \to B$ bir fonksiyonu için R_f **kümesi sınırlıdır ancak ve ancak** f **sınırlı fonksiyondur** yazılabilir.

3.2.1 Monoton Fonksiyonlar

Tanım 3.21

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $B \subset A$ olsun. Eğer $x_1, x_2 \in B$ olmak üzere $x_1 < x_2$ olacak şekildeki her x_1, x_2 için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna B kümesinde **artan fonksiyon** denir. Eğer $x_1, x_2 \in B$ olmak üzere $x_1 < x_2$ olacak şekildeki her x_1, x_2 için $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna B kümesinde **azalmayan fonksiyon** denir.

Tanım 3.22

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $B \subset A$ olsun. Eğer $x_1, x_2 \in B$ olmak üzere $x_1 < x_2$ olacak şekildeki her x_1, x_2 için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna B kümesinde **azalan fonksiyon** denir. Eğer $x_1, x_2 \in B$ olmak üzere $x_1 < x_2$ olacak şekildeki her x_1, x_2 için $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa, f

fonksiyonuna B kümesinde **artmayan fonksiyon** denir.

✿ Yukarıdaki tanımlarda verilen durumlardan herhangi birini **tanım kümesinde** sağlayan f fonksiyonuna **monoton fonksiyon** denir. Özel olarak bir f fonksiyonu, tanım kümesinde artan veya azalan ise f fonksiyonuna **kesin monoton fonksiyon** denir.

Önerme 3.1

Bir f fonksiyonu, tanım kümesinde artan veya azalan bir fonksiyon ise bu fonksiyon birebir bir fonksiyondur.

☞ **İspat**

Öncelikle f fonksiyonunun, tanım kümesinde artan bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Her $x_1, x_2 \in D_f$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun. O halde $x_1 < x_2$ veya $x_1 > x_2$ durumları söz konusudur. f fonksiyonu artan olduğundan $x_1 < x_2$ durumunda $f(x_1) < f(x_2)$, $x_1 > x_2$ durumunda $f(x_1) > f(x_2)$ olur. Her iki durumda da $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu birebirdir.

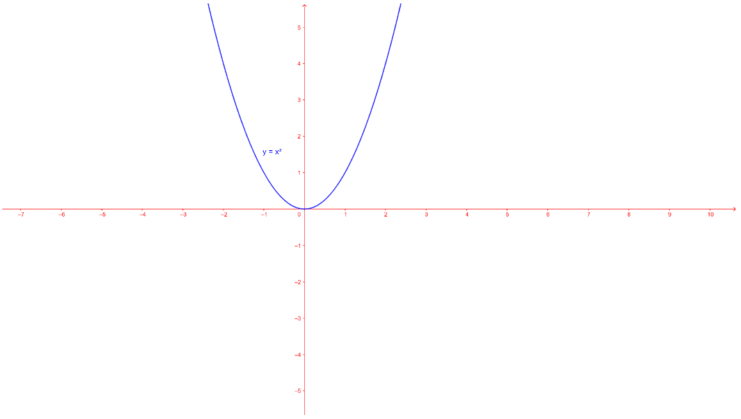
Şimdi f fonksiyonunun, tanım kümesinde azalan bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Her $x_1, x_2 \in D_f$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun. O halde $x_1 < x_2$ veya $x_1 > x_2$ durumları söz konusudur. f fonksiyonu azalan olduğundan $x_1 < x_2$ durumunda $f(x_1) > f(x_2)$, $x_1 > x_2$ durumunda $f(x_1) < f(x_2)$ olur. Her iki durumda da $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu birebirdir.

Tanım 3.23

Eğer bir f fonksiyonunun tanım kümesi, fonksiyonun monoton olduğu sonlu sayıda alt aralığa sahipse bu f fonksiyonuna **parçalı monoton fonksiyon** denir.

Örnek 3.6

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon $(0, +\infty)$ aralığında artan ve $(-\infty, 0)$ aralığında azalan olduğundan $\mathbb{R}$ kümesinde parçalı monoton bir fonksiyondur. Bu parçalı monotonluk durumu fonksiyonunu grafiğinden açıkça görülmektedir. Fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



3.2.2 Parçalı Fonksiyonlar

Tanım 3.24

$A_1, A_2, ... A_n$ kümeleri ikişer ayrık kümeler ve $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olmak üzere $f_i : A_i \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. O halde

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in A_i \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna parçalı tanımlı fonksiyon veya **parçalı fonksiyon** denir.

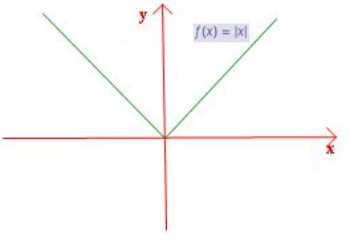
Şimdi bazı özel parçalı fonksiyonları ifade edelim.

Tanım 3.25 Mutlak Değer Fonksiyonu

Daha önce her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak değerin tanımını

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde ifade ettik. Şimdi mutlak değer fonksiyonunu tanımlayalım. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ biçiminde tanımlı olan fonksiyona, **mutlak değer fonksiyonu** denir. Mutlak değer fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

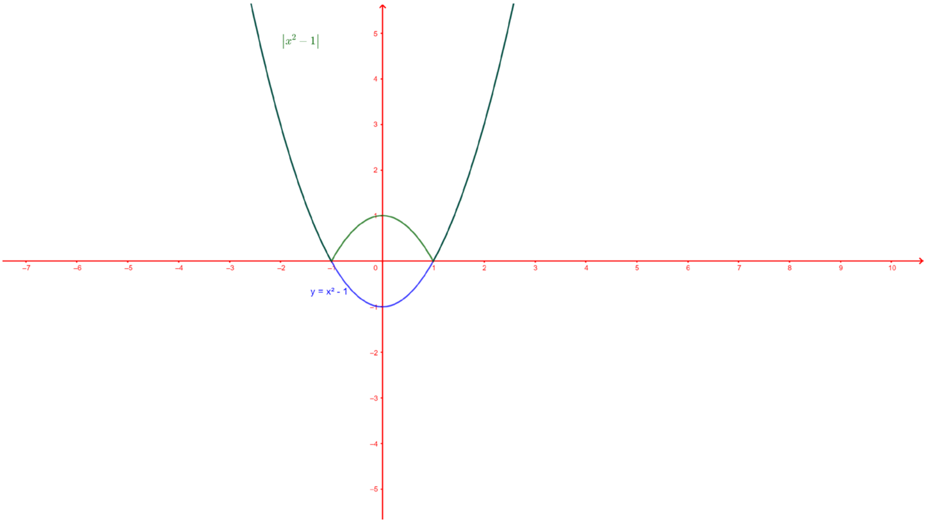


✿ Herhangi bir f fonksiyonunun $|f|$ fonksiyonu mutlak değer fonksiyonu ile f fonksiyonunun bileşke fonksiyonu olarak

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

✿ Bir f fonksiyonunun grafiği biliniyorsa f fonksiyonunun negatif olduğu yerlerde f fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak $|f|$ fonksiyonunun grafiği elde edilir. Aşağıda verilen şekilde mavi grafik $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği iken yeşil grafik, f fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak elde edilen $|f(x)| = \left|x^2 - 1\right|$ fonksiyonunun grafiğidir.



Tanım 3.26 Tam Değer Fonksiyonu

Daha önce Arşimet prensibinin 5. sonucunda, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$m \leq x < m+1$$

olacak şekildeki $m \in \mathbb{Z}$ sayısına x sayısının tam değeri demiştik. Şimdi tam değer fonksiyonunu tanımlayalım. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = [|x|]$ biçiminde tanımlı fonksiyona **tam değer fonksiyonu** denir.

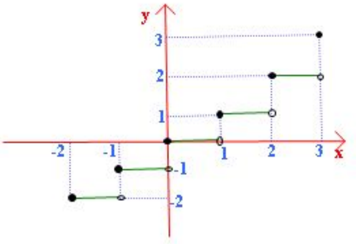
✿ $f(x) = [|x|]$ fonksiyonunun grafiğini $[-2, 3]$ aralığında çizelim. İlk olarak,

$$\begin{aligned}
-2 &\leq x < -1 \Rightarrow [|x|] = -2 \\
-1 &\leq x < 0 \Rightarrow [|x|] = -1 \\
0 &\leq x < 1 \Rightarrow [|x|] = 0 \\
1 &\leq x < 2 \Rightarrow [|x|] = 1 \\
2 &\leq x < 3 \Rightarrow [|x|] = 2 \\
x &= 3 \Rightarrow [|x|] = 3
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

biçiminde bir parçalı fonksiyon olur. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Tanım 3.27 İşaret Fonksiyonu

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

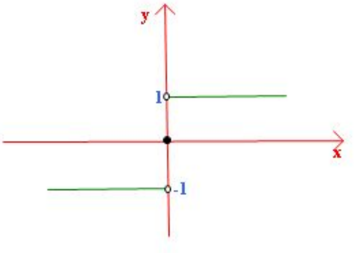
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona işaret fonksiyonu denir ve sgn simgesiyle gösterilir.

✿ Bu

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



✿ Yine sgn fonksiyonu ile bir f fonksiyonunun birleşkesi alınırsa

$$\operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$

olur.

Tanım 3.28

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için $x+T \in A$ iken $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde bir $T \neq 0$ reel sayısı varsa, f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon** denir. Bu T sayılarına f fonksiyonunun **periyodları**, bu periyodlardan **en küçük ve pozitif** olanına da f fonksiyonunun **esas periyodu** denir.

Örnek 3.7

$f(x) = x - [|x|]$ fonksiyonunun periyodik fonksiyon olduğunu gösterelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde bir $T \neq 0$ reel sayısı bulalım. Öncelikle

$$f(x+T) = x + T - [|x+T|] = x - [|x|] = f(x)$$

olsun. Buradan

$$T - [|x+T|] = -[|x|] \Leftrightarrow [|x+T|] = [|x|] + T$$

olacak şekildeki $T \neq 0$ reel sayıları $T \in \mathbb{Z} - \{0\}$ sayılarıdır. O halde bu f fonksiyonu periyodik bir fonksiyondur. Bu f fonksiyonunun esas periyodu 1 olur.

3.2.3 Trigonometrik Fonksiyonlar

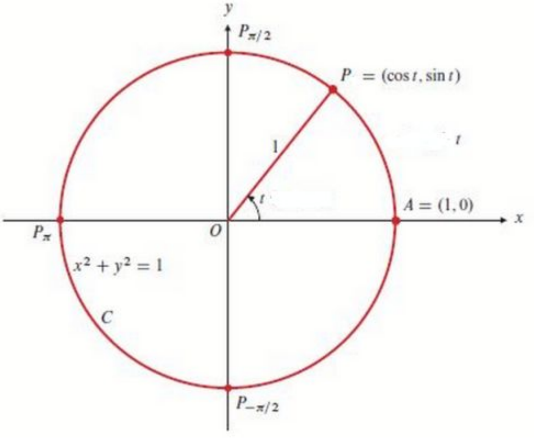
Dik koordinat sisteminde, orijin merkezli ve 1 yarıçaplı çembere **birim çember** denir. Birim çemberin denklemi $x^2+y^2=1$ biçimindedir. Birim çemberin üzerindeki $(1,0)$ noktasından $|t|$ birim hareket edelim. Burada, $t>0$ iken **saat yönünün tersinde (pozitif yönde)**, $t<0$ iken **saat yönünde (negatif yönde)** hareket edilir. Şimdi $t>0$ olacak şekilde hareket ederek bir P noktasına gelelim. Bu P noktasının apsisine $\cos t$, ordinatına $\sin t$ denir. Birim çember üzerinde t birim ilerledikçe P noktasının kordinatlarının -1 ile 1 arasında değer aldığı görülür. O halde her t için

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \text{ ve } -1 \leq \cos t \leq 1$$

yazılır. Birim çember üzerindeki bu hareket her $t>0$ için pozitif yönde ve her $t>0$ için negatif yönde vardır. Ayrıca $t=0$ için $(1,0)=(\cos t, \sin t)$ olur. O halde $\cos t$ ve $\sin t$ her $t\in\mathbb{R}$ için tanımlıdır. Böylece

$$\cos:\mathbb{R}\to[-1,1] \text{ ve } \sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$$

fonksiyonları tanımlanabilir.



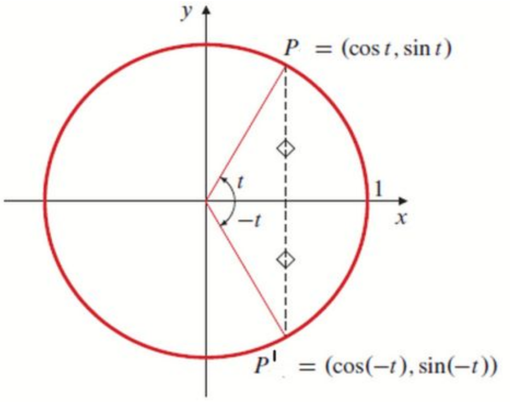
✿ Aşağıdaki şekilde verilen birim çemberin üzerindeki $(1,0)$ noktasından, t birim ve $-t$ birim ilerleyerek sırasıyla P ve P' noktalarına gelelim. Böylece bu P ve P' noktaları x eksenine göre simetrik olur. O halde bu simetriden dolayı

$$P'(\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t)$$

olup her $t\in\mathbb{R}$ için

$$\cos(-t)=\cos t,\ \sin(-t)=-\sin t$$

bulunur. Böylece kosinüs ($\cos$) fonksiyonu **çift fonksiyon**, sinüs ($\sin$) fonksiyonu **tek fonksiyondur**.



✿ Ayrıca birim çemberin uzunluğu 2π birim olduğundan herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için birim çember üzerindeki her $t+2\pi$ ve dolayısıyla $t+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ilerlemede aynı noktaya ulaşılır. Yani her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\cos(t+2k\pi) = \cos t,\ \sin(t+2k\pi) = \sin t,\ k \in \mathbb{Z}$$

olur. Böylece sinüs ve kosinüs fonksiyonları **periyodik fonksiyonlardır.** Her $k \in \mathbb{Z}$ için $2k\pi$ bu fonksiyonların periyodları, 2π ise esas periyodlarıdır.

✿ Birim çembere teğet olan $x = 1$ doğrusu ile t açısının oluşturduğu ışının kesim noktasının **ordinatına** t **açısının tanjantı** denir ve $\tan t$ ile gösterilir. Aşağıdaki şekilde verilen $\overset{\triangle}{OPR}$ üçgeni ile $\overset{\triangle}{OAS}$ üçgeni benzerdir. Bu benzerlikten

$$\frac{\cos t}{1} = \frac{\sin t}{\tan t} \Rightarrow \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

elde edilir. Böylece tanjant fonksiyonu, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bölüm fonksiyonu olarak tanımlanabilir. O halde tanjant fonksiyonu

$$(D_{\sin} \cap D_{\cos}) - \{t \mid \cos t \neq 0\} = \mathbb{R} - \{t \mid \cos t \neq 0\}$$

kümesinde tanımlı olur. Kosinüs fonksiyonu,

$$t = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

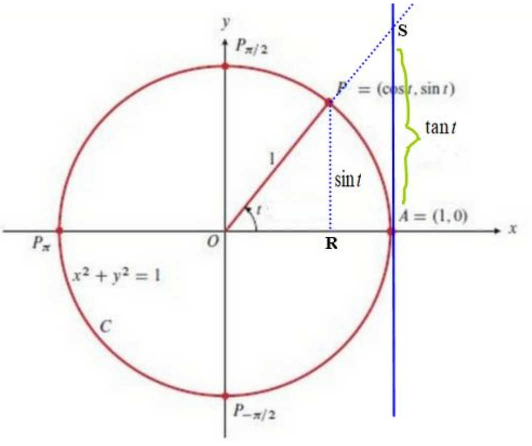
noktalarında sıfır olduğundan tanjant fonksiyonu

$$D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesinde tanımlı olur. Yine aşağıdaki şekilde her $t > 0$ için $0 < \tan t < +\infty$ ve her $t < 0$ için $-\infty < \tan t < 0$ olup $t = 0$ için $\tan 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = 0$ olur. Böylece tanjant fonksiyonu

$$\tan : \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlıdır.



✿ Birim çemebere teğet olan $y = 1$ doğrusu ile t açısının oluşturduğu ışının kesim noktasının **apsisine t açısının kotanjantı** denir ve $\cot t$ ile gösterilir. Aşağıdaki şekilde verilen $\overset{\triangle}{OPR}$ üçgeni ile $\overset{\triangle}{OSB}$ üçgeni benzerdir. Bu benzerlikten

$$\frac{\sin t}{1} = \frac{\cos t}{\cot t} \Rightarrow \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

bulunur. Böylece kotanjant fonksiyonu, kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının bölüm fonksiyonu olarak tanımlanabilir. O halde kotanjant fonksiyonu

$$(D_{\cos} \cap D_{\sin}) - \{t| \ \sin t \neq 0\} = \mathbb{R} - \{t| \ \sin t \neq 0\}$$

kümesinde tanımlı olur. Sinüs fonksiyonu,

$$t = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

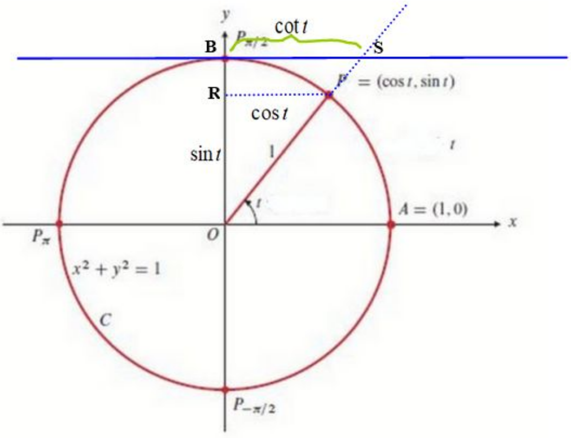
noktalarında sıfır olduğundan kotanjant fonksiyonu

$$D_{\cot} = \mathbb{R} - \{k\pi| \ k \in \mathbb{Z}\}$$

kümesinde tanımlı olur. Yine aşağıdaki şekilde $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ için $0 \leq \cot t < +\infty$ ve $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ için $-\infty < \cot t < 0$ olur. Bu takdirde kotanjant fonksiyonu

$$\cot : \mathbb{R} - \{k\pi| \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlıdır.



✍ **Not**
Tanjant ve kotanjant fonksiyonları için t ile $t+\pi$ değerleri aynıdır. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\tan(t+k\pi) = \tan t, \ \cot(t+k\pi) = \cot t, k \in \mathbb{Z}$$

yazılır. O halde tanjant ve kotanjant fonksiyonları **periyodik fonksiyonlardır.** Her $k \in \mathbb{Z}$ için $k\pi$ bu fonksiyonların periyodları, π ise esas periyodlarıdır.
Ayrıca tanjant ve kotanjant fonksiyonları **tek fonksiyonlardır**.

✿ Birim çemberin üzerindeki $(1,0)$ noktasından $t > 0$ birim hareket edilerek ulaşılan P noktasında birim çembere **teğet** olan doğrunun x **eksenin kestiği noktanın apsisine** t **açısının sekantı** denir ve $\sec t$ ile gösterilir. Aşağıdaki şekilde verilen $\overset{\triangle}{OPR}$ üçgeni ile $\overset{\triangle}{OSP}$ üçgeni benzerdir. Bu benzerlikten

$$\frac{\sec t}{1} = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

bulunur. Böylece sekant fonksiyonunun tanım kümesi

$$D_{\sec} = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

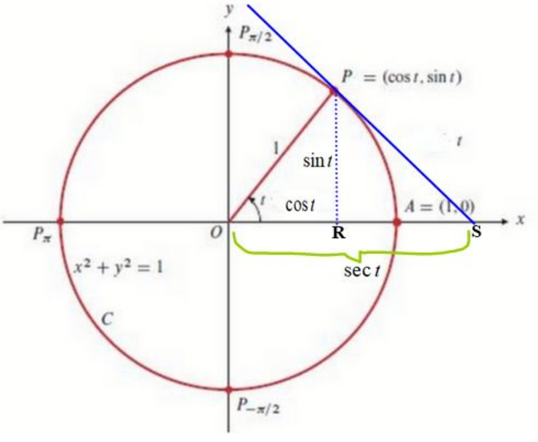
olur. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}$ için

$$-1 \le \cos t \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{\cos t} \vee \frac{1}{\cos t} \le -1$$

olup $\sec t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ bulunur. O halde sekant fonksiyonu

$$\sec : \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

biçiminde tanımlıdır.



✿ Birim çemberin üzerindeki $(1,0)$ noktasından $t > 0$ birim hareket edilerek ulaşılan P noktasında birim çembere **teğet** olan doğrunun y **eksenin kestiği noktanın ordinatına** t **açısının kosekantı** denir ve $\csc t$ ile gösterilir. Aşağıdaki şekilde verilen $\overset{\triangle}{OPR}$ üçgeni ile $\overset{\triangle}{OBP}$ üçgeni benzerdir. Bu benzerlikten

$$\frac{\csc t}{1} = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

bulunur. Böylece kosekant fonksiyonunun tanım kümesi

$$D_{\text{csc}} = \mathbb{R} - \{k\pi | \ k \in \mathbb{Z}\}$$

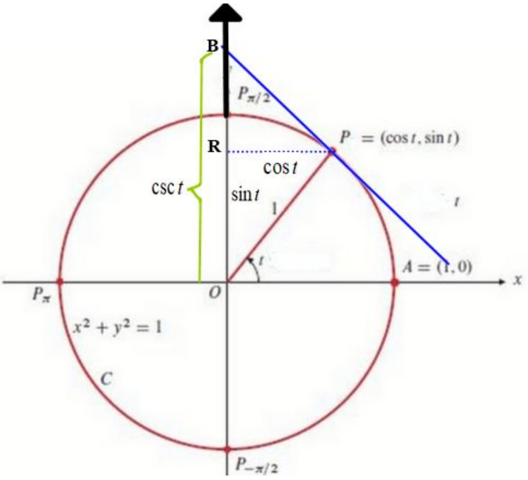
olur. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}$ için

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sin t} \vee \frac{1}{\sin t} \leq -1$$

olup $\csc t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ bulunur. O halde kosekant fonksiyonu

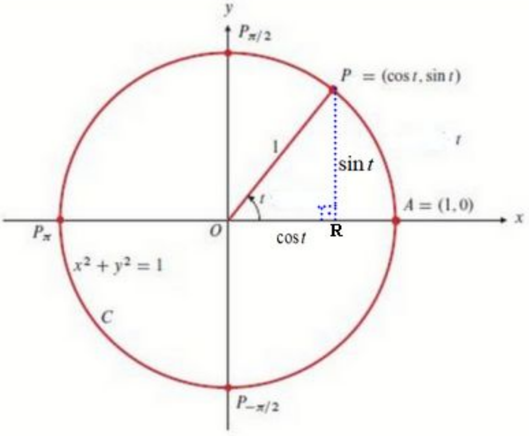
$$\csc : \mathbb{R} - \{k\pi | \ k \in \mathbb{Z}\} \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

biçiminde tanımlıdır.

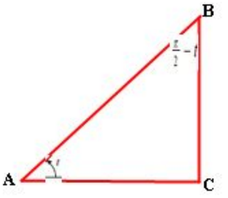


✍ Not
Sinüs ve kosinüs fonksiyonları 2π periyodlu fonksiyonlar olduklarından sekant ve kosekant fonksiyonları da 2π periyodlu, periyodik fonksiyonlardır. Ayrıca sinüs tek fonksiyon olduğundan kosekant tek fonksiyon ve kosinüs çift fonksiyon olduğundan sekant çift fonksiyondur.

Bir Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar



✿ $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere, yukarıdaki birim çemberde yer alan $\overset{\triangle}{OPR}$ üçgenine benzer bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni alalım.



✿ Bu iki dik üçgenin benzerliğinden

$$\frac{|BC|}{\sin t} = \frac{|AB|}{1} \Rightarrow \frac{|BC|}{|AB|} = \sin t,$$

$$\frac{|AC|}{\cos t} = \frac{|AB|}{1} \Rightarrow \frac{|AC|}{|AB|} = \cos t$$

ve

$$\frac{|BC|}{\sin t} = \frac{|AC|}{\cos t} \Rightarrow \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t,$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

oranları elde edilir.

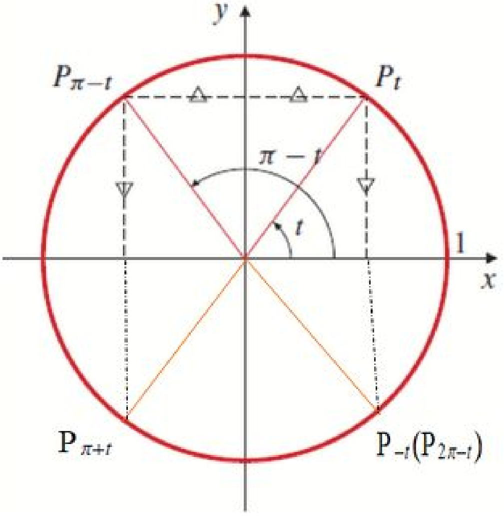
✿ Böylece son bulunan trigonometrik oranlar dikkate alınarak, $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgenindeki $t - \frac{\pi}{2}$ açısının trigonometrik oranları aşağıdaki biçimdedir:

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{|AC|}{|AB|} = \cos t,$$

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{|BC|}{|AB|} = \sin t,$$

$$\tan\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{|AC|}{|BC|} = \cot t,$$

$$\cot\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{|BC|}{|AC|} = \tan t.$$



✿ Yukarıdaki şekilde verilen simetriler dikkate alındığında

$$\sin(\pi - t) = \sin t,\ \cos(\pi - t) = -\cos t,$$

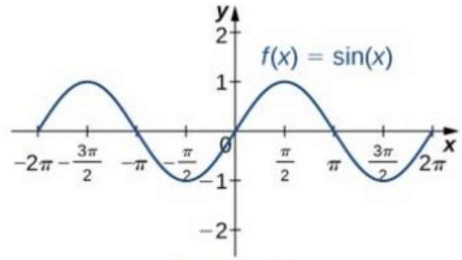
$$\sin(\pi + t) = -\sin t,\ \cos(\pi + t) = -\cos t,$$

ve

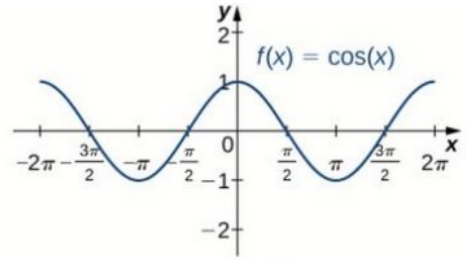
$$\sin(2\pi - t) = \sin(-t) = -\sin t,\ \cos(2\pi - t) = \cos(-t) = \cos t.$$

eşitlikleri elde edilir.

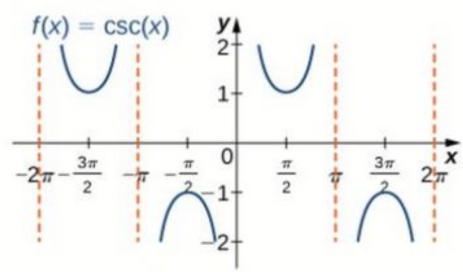
Ayrıca $[-2\pi, 2\pi]$ aralığında sinüs, kosinüs, kosekant, sekant, tanajant ve kotanjant fonksiyonlarır grafikleri aşağıda verilmiştir.



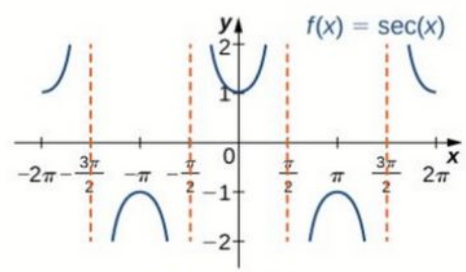
Periyod = 2π



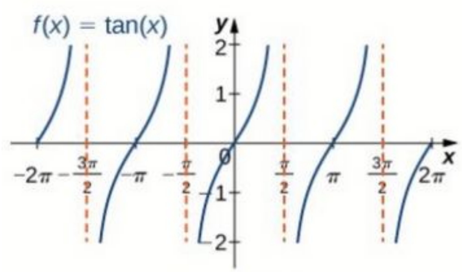
Periyod = 2π



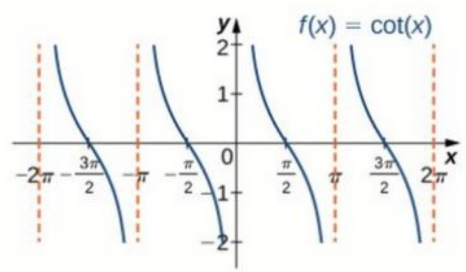
Periyod = 2π



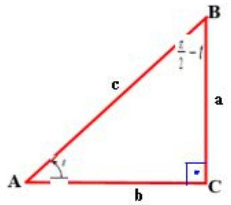
Periyod = 2π



Periyod = π



Periyod = π



✿ Yukarıda verilen dik üçgendeki trigonometrik oranların

$$\sin t = \frac{a}{c},\ \cos t = \frac{b}{c},\ \tan t = \frac{a}{b},\ \cot t = \frac{b}{a},\ \sec t = \frac{c}{b},\ \csc t = \frac{c}{a}$$

olduğunu göstermiştik. Buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 t + \cos^2 t = 1,$$

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \sec^2 t \Leftrightarrow 1 + \tan^2 t = \sec^2 t,$$

$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \csc^2 t \Leftrightarrow 1 + \cot^2 t = \csc^2 t.$$

Örnek 3.8

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} = 2\sec x$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Eşitliğin sağ tarafından yola çıkarak sol tarafını elde edelim.

$$\underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{1+\sin x}} + \underset{(1+\sin x)}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x + 1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

yazılır. Son eşitlikte

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ifadesi kullanılırsa

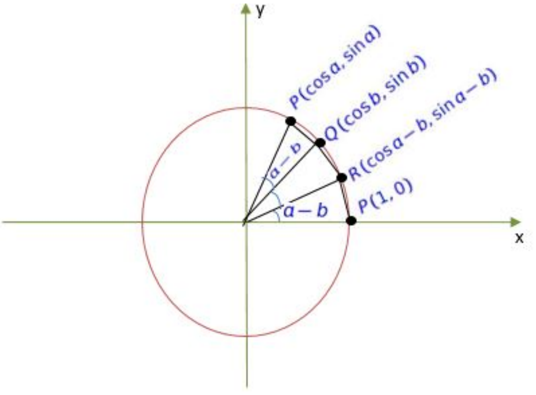
$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{2+2\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{2}{\cos x} = 2\sec x$$

elde edilir.

Toplam Fark Formülleri

Yukarıdaki şekilde verilen birim çemberde $|PQ| = |RA|$ dır. Buradan $|PQ|^2 = |RA|^2$ olup

$$(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = (\cos(a-b) - 1)^2 + \sin^2(a-b)$$



yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} & \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2\sin a \sin b + \sin^2 b \\ = \; & \cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + \sin^2(a-b) + 1 \end{aligned}$$

olup

$$2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 - 2\cos(a-b)$$

bulunur. Buradan

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{3.1}$$

elde edilir. Kosinüs fonksiyonunun çift, sinüs fonksiyonunun tek olması kullanılarak (3.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a-(-b)) \\ &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{aligned} \tag{3.2}$$

bulunur. Yine (3.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned} \tag{3.3}$$

yazılır. Ayrıca kosinüs fonksiyonunun çift, sinüs fonksiyonunun tek olması durumu ve (3.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a-(-b)) \\ &= \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir.

- Tanjant fonksiyonunun tanımı ve (3.2), (3.4) kullanılarak

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

yazılır. Son eşitliğin her iki tarafı $\cos a\cos b$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}\\ &= \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}\\ &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\end{aligned}$$

elde edilir.

- Kotanjant fonksiyonunun tanımı ve (3.2), (3.4) kullanılarak

$$\cot(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

yazılır. Son eşitliğin her iki tarafı $\sin a\sin b$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}\cot(a+b) &= \frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\cos a\sin b}\\ &= \frac{\frac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}-\frac{\sin a\sin b}{\sin a\sin b}}{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}+\frac{\cos a\sin b}{\sin a\sin b}}\\ &= \frac{\cot a\cot b-1}{\cot b\cot a}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi toplam fark formülleri yardımıyla yarım açı formüllerini bulalım.

- İlk olarak

$$\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\sin x\cos x=2\sin x\cos x$$

olup

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

bulunur.

- Yine

$$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

olup

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

bulunur. Ayrıca (3.5) kullanılarak

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$$

ve

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-1+\cos^2 x=2\cos^2 x-1$$

elde edilir. Diğer yandan, (3.6) ve (3.7) kullanılarak

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{3.8}$$

eşitlikleri bulunur.

✿ Tanjant ve kotanjant fonksiyonları için

$$\tan 2x = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

ve

$$\cot 2x = \frac{\cot x \cot x - 1}{\cot x + \cot x} = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

yazılır.

Yine toplam fark formülleri kullanılarak aşağıda verilen ters dönüşüm ve dönüşüm formüllerini bulunur.

1.

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right),$$

2.

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right),$$

3.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

Yukarıda verilen son eşitliklerde $a+b=x$, $a-b=y$ alınarak aşağıdaki dönüşüm formülleri elde edilir:

1.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

2.

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

3.

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

4.

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Örnek 3.9

$\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$ ifadesini hesaplayalım. Öncelikle

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad (3.9)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad (3.10)\end{aligned}$$

olup (3.9) ve (3.10) eşitliklerinden $\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ elde edilir.

Örnek 3.10

$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarını $\tan\frac{x}{2}$ cinsinden yazalım.

Öncelikle $\sin x$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\sin x=\sin 2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} \qquad (3.11)$$

yazılır. Ayrıca

$$1+\tan^2\frac{x}{2}=\sec^2\frac{x}{2} \qquad (3.12)$$

olması kullanılırsa (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

elde edilir. Şimdi $\cos x$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\\ &= \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\end{aligned}$$

olup (3.12) eşitliği kullanılırsa

$$\cos x=\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

elde edilir.

Ters Trigometrik Fonksiyonlar

Periyodik fonksiyonlar birebir değildir. Ancak trigonometrik fonksiyonlar, tanım kümeleri belirli bir kümeye kısıtlanarak birebir yapılabilir.

Tanım 3.29

$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonuna sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu denir. Burada

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$$

olur.

Tanım 3.30

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ fonksiyonuna kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu denir. Burada

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$$

olur.

Tanım 3.31

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonuna tanjant fonksiyonunun ters fonksiyonu denir. Burada

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$$

olur.

Tanım 3.32

$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ fonksiyonuna kotanjant fonksiyonunun ters fonksiyonu denir. Burada

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x$$

olur.

Tanım 3.33

$\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to [0, \pi]$ fonksiyonuna sekant fonksiyonunun ters fonksiyonu denir. Burada

$$y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

olur.

Tanım 3.34

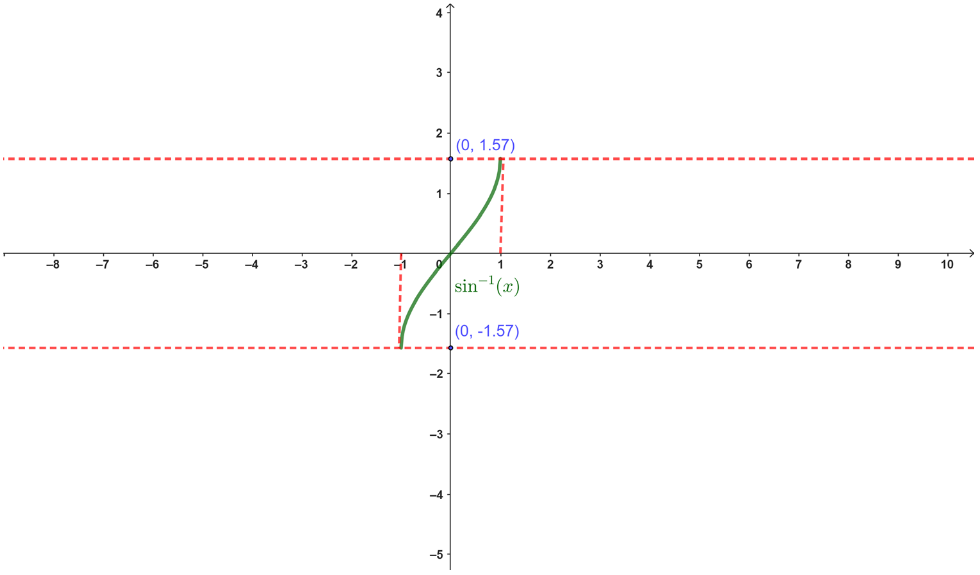
$\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ fonksiyonuna kosekant fonksiyonunun ters fonksiyonu denir. Burada

$$y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow \csc y = x$$

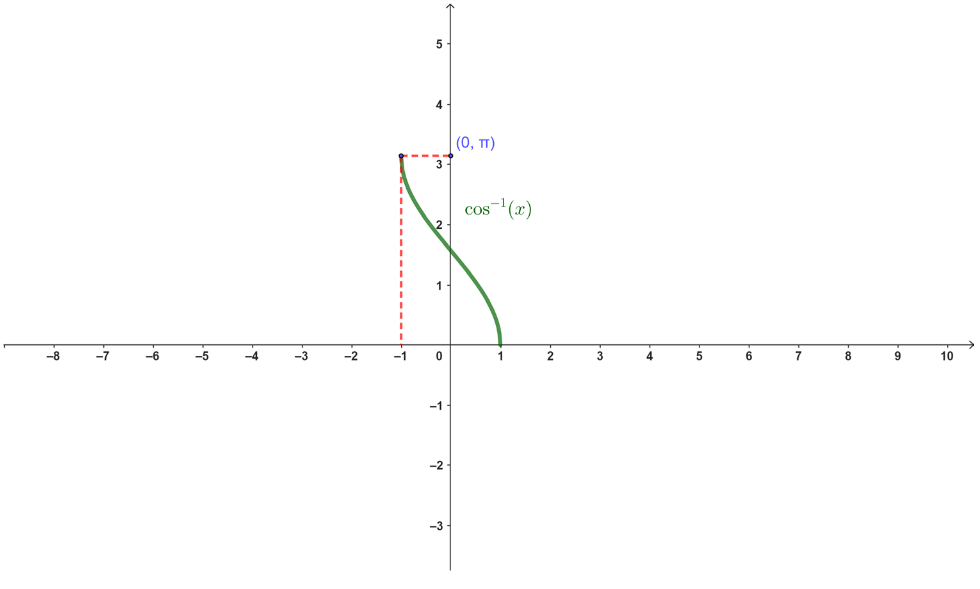
olur.

Bu fonksiyonulardan $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ ve arccot fonksiyonların grafikleri sırasıyla verilmiştir.

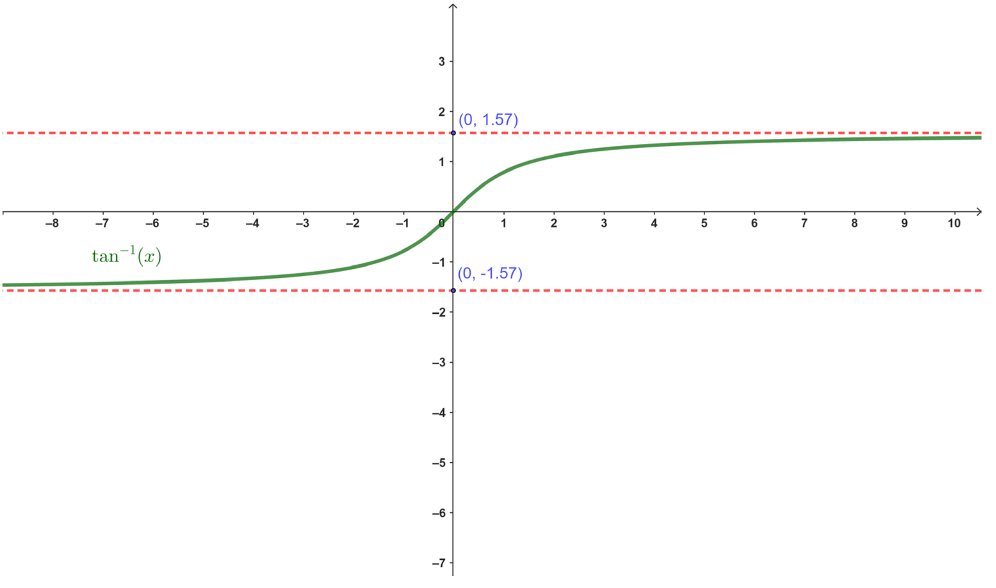
arcsin fonksiyonu



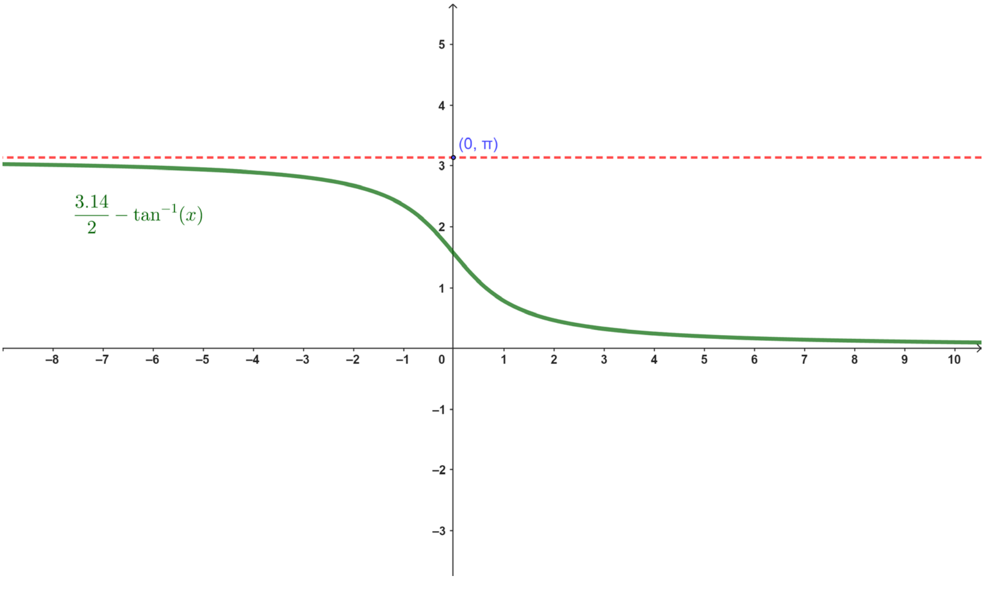
arccos fonksiyonu



arctan fonksiyonu



arccot fonksiyonu



Trigonometrik Denklemler

✿ $|a| \leq 1$ olmak üzere $\sin x = a$ denklemini çözelim. Öncelikle

$$\sin x = a = \sin\theta$$

olsun. Eğer θ bilinen bir açı ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + 2k\pi$$

olur. Eğer θ açısı bilinmiyor ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \arcsin a + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \arcsin a) + 2k\pi$$

olur.

✿ $|a| \leq 1$ olmak üzere $\cos x = a$ denklemini çözelim. Öncelikle

$$\cos x = a = \cos\theta$$

olsun. Eğer θ bilinen bir açı ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\theta + 2k\pi$$

olur. Eğer θ açısı bilinmiyor ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \arccos a + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\arccos a + 2k\pi$$

olur.

✿ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan x = a$ denklemini çözelim. Öncelikle

$$\tan x = a = \tan\theta$$

olsun. Eğer θ bilinen bir açı ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + k\pi$$

olur. Eğer θ açısı bilinmiyor ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \arctan a + k\pi$$

olur.

✿ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cot x = a$ denklemini çözelim. Öncelikle

$$\cot x = a = \cot\theta$$

olsun. Eğer θ bilinen bir açı ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + k\pi$$

olur. Eğer θ açısı bilinmiyor ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \operatorname{arccot} a + k\pi$$

olur.

Örnek 3.11

$$\sin^2 x = 6(\cos x + 1)$$

denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözümlerini bulalım. Burada

$$\sin^2 x = 6(\cos x + 1)$$

ise

$$1 - \cos^2 x = 6(\cos x + 1)$$

olup

$$\cos^2 x + 6\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 5)(\cos x - 1) = 0$$

denklemi elde edilir. Her her $x \in \mathbb{R}$ için

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

olduğundan $\cos x = -5$ olamaz. O halde $\cos x = -1$ denklemini çözelim.

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

olup denklemin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözümü $x = \pi$ bulunur.

Örnek 3.12

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$\arcsin x = a \text{ ve } \arccos x = b \tag{3.13}$$

olsun. Böylece

$$\sin a = x \text{ ve } \cos b = x$$

olup

$$\sin a = \cos b \Rightarrow \sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

olduğundan $\arcsin$ ve $\arccos$ fonksiyonlarının tanımı gereği

$$a = \frac{\pi}{2} - b \Leftrightarrow a + b = \frac{\pi}{2} \tag{3.14}$$

bulunur. O halde (3.13) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

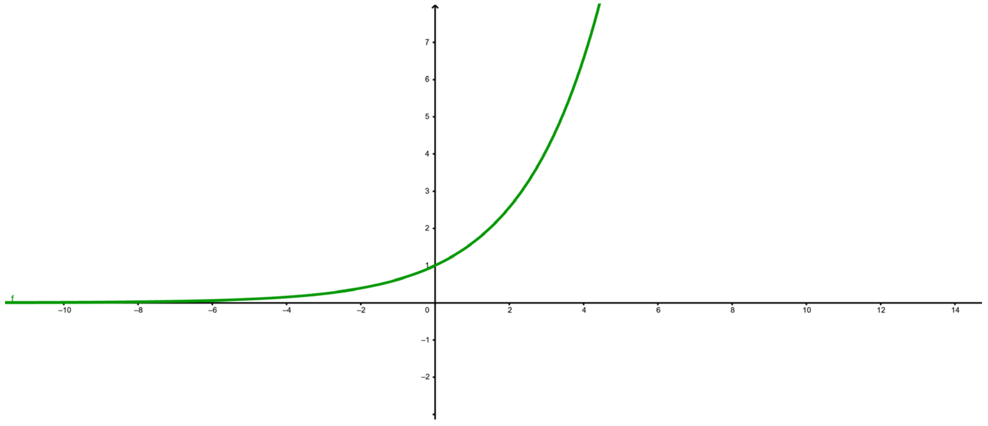
3.2.4 Üstel ve Logaritma Fonksiyonları

Tanım 3.35

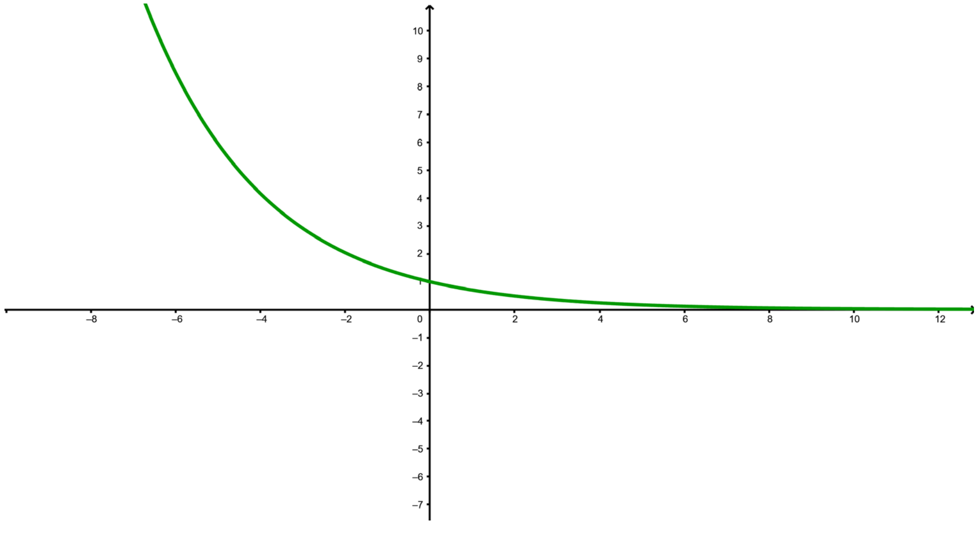
$a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona **üstel fonksiyon** denir. Buradaki $a \neq 1$ sayısına üstel fonksiyonun **tabanı** adı verilir.

Tanımda ifade edilen $a \neq 1$ sayısının iki durumuna göre üstel fonksiyonun grafiği çizilir.

1. $a > 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



2. $0 < a < 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Üstel Fonksiyonun Özellikleri

Üstel fonksiyonun özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. f bir fonksiyon olmak üzere $a^{f(x)}$ biçiminde ifade edilen bir fonksiyonun tanım kümesi araştırılırken $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$ ve $f(x) \in \mathbb{R}$ durumlarına bakılır.
2. $f(x) = a^x$ fonksiyonu için $a^x \neq 0$ ve $a^x > 0$ dır.
3. Eğer $a > 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonu **artan** bir fonksiyondur. Eğer $0 < a < 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonu **azalan** bir fonksiyondur.
4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(y)$ olsun. O halde

$$a^x = a^y \Rightarrow a^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

yazılır. Böylece üstel fonksiyon **birebirdir.**

5. $-2 \in \mathbb{R}$ için $a^x = -2$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ var olmadığından üstel fonksiyon **örten değildir.**

Tanım 3.36

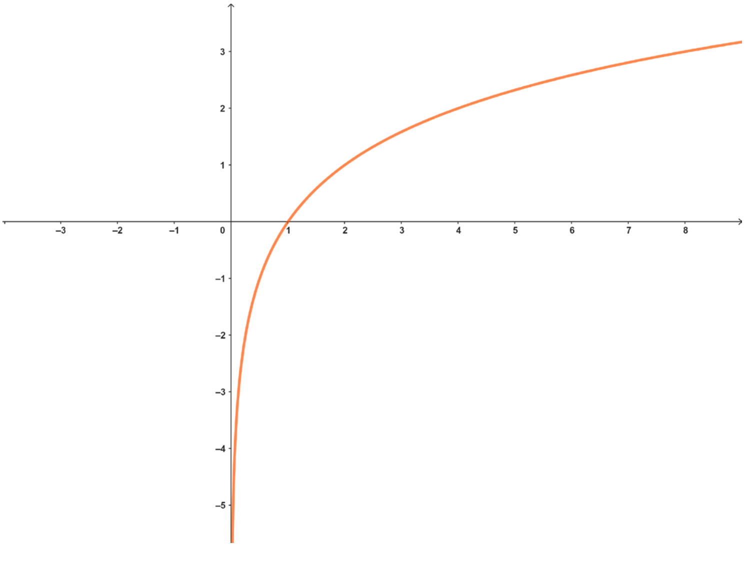
$a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan üstel fonksiyon **birebir ve örtendir.** O halde bu fonksiyonun tersi vardır. Üstel fonksiyonun tersine **logaritma fonksiyonu** denir. Logaritma fonksiyonu

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, y = \log_a^x \Leftrightarrow x = a^y$$

biçiminde tanımlanır.

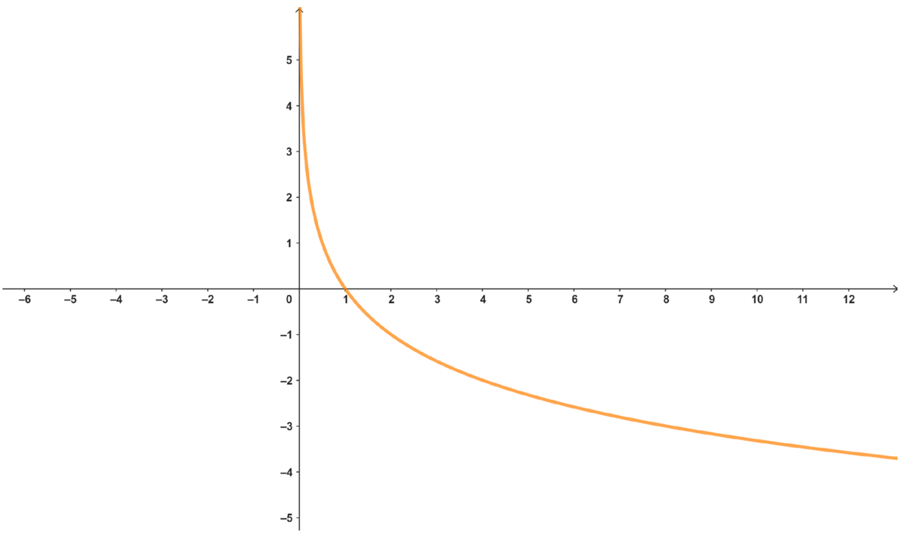
Logaritma fonksiyonunun grafiği için de iki durum söz konusudur.

1. $a > 1$ için $f(x) = \log_a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

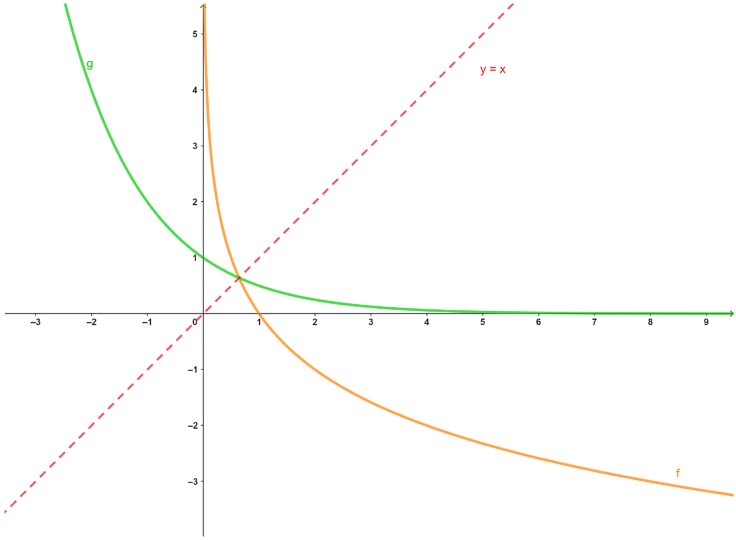


Ondokuz Mayıs Üniversitesi

2. $0 < a < 1$ için $f(x) = \log_a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Dikkat edilirse her iki grafik de karşılık geldiği üstel fonksiyonun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. $a > 1$ ve $0 < a < 1$ durumları için ayrı ayrı sağlanan bu simetri $0 < a < 1$ için $g(x) = a^x$ ve $f(x) = \log_a^x$ fonksiyonları verildiğinde aşağıdaki biçimdedir.



Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

- f bir fonksiyon olmak üzere $\log_a^{f(x)}$ için $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ ve $f(x) \in \mathbb{R}^+$ olmalıdır.
- $f(x) = \log_a^x$ fonksiyonu için $a > 1$ ise fonksiyon **artan** ve $0 < a < 1$ ise fonksiyon **azalandır**.
- Logaritma fonksiyonu x eksenini $x = 1$ noktasında keser ancak y eksenini kesmez.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere $f(x) = a^x$ ile $g(x) = \log_a^x$ fonksiyonları birbirlerinin tersi olduklarından

$$(f \circ g)(x) = a^{\log_a^x} = I(x) = x$$

ve

$$(g \circ f)(x) = \log_a^{a^x} = I(x) = x$$

olur.
- Açıkça, $\log_a^1 = 0$ dır.
- Eğer $\log_a^a = y$ ise $a = a^y$ olup $y = 1$ olduğundan $\log_a^a = 1$ bulunur.
- Şimdi $\log_a^u + \log_a^v$ toplamının eşitini bulalım.

$$\log_a^u + \log_a^v = y \Leftrightarrow a^y = a^{\log_a^u + \log_a^v} = a^{\log_a^u} a^{\log_a^v} = uv \Leftrightarrow y = \log_a^{uv}$$

olduğundan

$$\log_a^u + \log_a^v = \log_a^{uv}$$

elde edilir.
- Benzer şekilde $\log_a^u - \log_a^v$ farkının eşitini ifade edelim.

$$\log_a^u - \log_a^v = y \Leftrightarrow a^y = a^{\log_a^u - \log_a^v} = a^{\log_a^u} a^{-\log_a^v} = u\left(a^{\log_a^v}\right)^{-1} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow y = \log_a^{\frac{u}{v}}$$

olduğundan

$$\log_a^u - \log_a^v = \log_a^{\frac{u}{v}}$$

bulunur.
- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\log_a^{x^n} = \log_a^{x.x\cdots x} = \log_a^x + \log_a^x + \cdots + \log_a^x = n \log_a^x$$

yazılır. Şimdi $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Öncelikle $n \in \mathbb{N}$ için $\log_a^{x^n} = n \log_a^x$ olduğu gösterildi. $n = 0$ için

$$\log_a^{x^0} = \log_a^1 = 0 = 0.\log_a^x$$

olur. $n \in \mathbb{Z}^-$ iken $n = -m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\log_a^{x^n} = \log_a^{x^{-m}} = \log_a^{\frac{1}{x^m}} = \log_a^1 - \log_a^{x^m} = -m \log_a^x = n \log_a^x$$

bulunur. $n \in \mathbb{Q}$ olduğunu kabul edelim. O halde $n = \dfrac{m}{k}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sayıları vardır. Buradan

$$\log_a^{x^n} = \log_a^{x^{\frac{m}{k}}} = m \log_a^{x^{\frac{1}{k}}} = \frac{m}{k} \log_a^x = n \log_a^x$$

olur.

En genel hali ile $r \in \mathbb{R}$ için

$$x = a^y \Rightarrow x^r = a^{yr} \Rightarrow \log_a^{x^r} = ry \tag{3.15}$$

ve

$$x = a^y \Rightarrow \log_a^x = y \tag{3.16}$$

olup (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\log_a^{x^r} = r \log_a^x$$

yazılır.

✿ $\log_{10}^x = \log x$ biçiminde gösterilir ve **adi logatitma** olarak adlandırılır. Ayrıca $\log_e^x = \ln x$ olarak gösterilir ve **doğal logaritma** olarak adlandırılır.

✿ (Taban değiştirme özelliği)

$$\frac{\log_b^x}{\log_b^a} = y \Leftrightarrow \log_b^x = y \log_b^a \Leftrightarrow \log_b^x = \log_b^{a^y} \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a^x$$

yazılır. Bu takdirde

$$\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

olur. Bu taban değiştirme özelliği sayesinde adi logaritma ile doğal logaritma birbiri cinsinden yazılabilmektedir. Yani

$$\log x = \frac{\log_e^x}{\log_e^{10}} = \frac{1}{\ln 10} \ln x$$

yazılabilir.

Örnek 3.13

$$2^{3x-4} = 15$$

eşitliğini sağlayan x değerlerini bulalım. Burada

$$\begin{aligned} 2^{3x-4} = 15 \quad &\Rightarrow \ln\left(2^{3x-4}\right) = \ln 15 \\ &\Rightarrow (3x-4)\ln 2 = \ln 15 \\ &\Rightarrow 3x \ln 2 - 4 \ln 2 = \ln 15 \\ &\Rightarrow 3x \ln 2 = \ln 2^4 + \ln 15 \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln 16 + \ln 15}{3 \ln 2} \end{aligned}$$

olup

$$x = \frac{\ln 120}{3 \ln 2}$$

elde edilir.

Örnek 3.14

$\log 2 = a$ ve $\log 5 = b$ olmak üzere

$$40^{x+2} = 50^{x-4}$$

denkleminin çözümünü a ve b cinsinden bulalım. Burada

$$\begin{aligned} 40^{x+2} = 50^{x-4} \quad &\Rightarrow \log 40^{x+2} = \log 50^{x-4} \\ &\Rightarrow (x+2)\log 40 = (x-4)\log 50 \end{aligned} \tag{3.17}$$

olup

$$\log 40 = \log 2^3.5 = 3\log 2 + \log 5 = 3a + b \tag{3.18}$$

ve

$$\log 50 = \log 2.5^2 = \log 2 + 2\log 5 = a + 2b \tag{3.19}$$

olup (3.17), (3.18) ve (3.19) ifadelerinden

$$\begin{aligned} 40^{x+2} = 50^{x-4} \quad &\Rightarrow (3a+b)x + 6a + 2b = (a+2b)x - 4a - 8b \\ &\Rightarrow (3a + b - 2b - a)x = -10a - 10b \end{aligned}$$

yazılır. Bu takdirde

$$x = \frac{-10a - 10b}{2a - b}$$

elde edilir.

Örnek 3.15

$$\log_4^{\left(1+\frac{1}{4}\right)} + \log_4^{\left(1+\frac{1}{5}\right)} + \log_4^{\left(1+\frac{1}{6}\right)} + \ldots + \log_4^{\left(1+\frac{1}{63}\right)}$$

toplamının değerini bulalım. Burada

$$\begin{aligned} \log_4^{\left(1+\frac{1}{4}\right)} + \log_4^{\left(1+\frac{1}{5}\right)} + \log_4^{\left(1+\frac{1}{6}\right)} + \ldots + \log_4^{\left(1+\frac{1}{63}\right)} &= \log_4^{\left(\frac{5}{4}\right)} + \log_4^{\left(\frac{6}{5}\right)} + \log_4^{\left(\frac{7}{6}\right)} + \ldots + \log_4^{\left(\frac{64}{63}\right)} \\ &= \log_4^{\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{63}{62}\cdot\frac{64}{63}\right)} \\ &= \log_4^{16} = \log_4^{4^2} = 2\log_4^4 = 2 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.5 Hiperbolik Fonksiyonlar

Simetrik bir küme üzerinde tanımlı her fonksiyonu biri **tek** diğeri **çift** olan iki fonksiyonun toplamı biçiminde ifade edebiliriz. X simetrik bir küme olmak üzere her $x \in X$ için

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

olmak üzere

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ ve } h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

olsun. Böylece her $x \in X$ için

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$$

olduğundan g bir çift fonksiyondur. Yine her $x \in X$ için

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$$

olduğundan h bir tek fonksiyondur. O halde her $x \in X$ için

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

yazılışı vardır.

Özel olarak, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ fonksiyonu için

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{3.20}$$

yazılır.

Tanım 3.37

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun (3.20) eşitliğiyle verilen **çift** kısmına **hiperbolik kosinüs fonksiyonu**, **tek** kısmına ise **hiperbolik sinüs fonksiyonu** denir. Yani **hiperbolik kosinüs fonksiyonu**

$$\begin{aligned} \cosh : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

ve **hiperbolik sinüs fonksiyonu**

$$\begin{aligned} \sinh : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ve

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi hiperbolik fonksiyonlarla ilgili bazı temel özdeşlikleri ifade edelim.

✿ Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

olur.

✿ Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} \\
&\quad + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}) \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$$

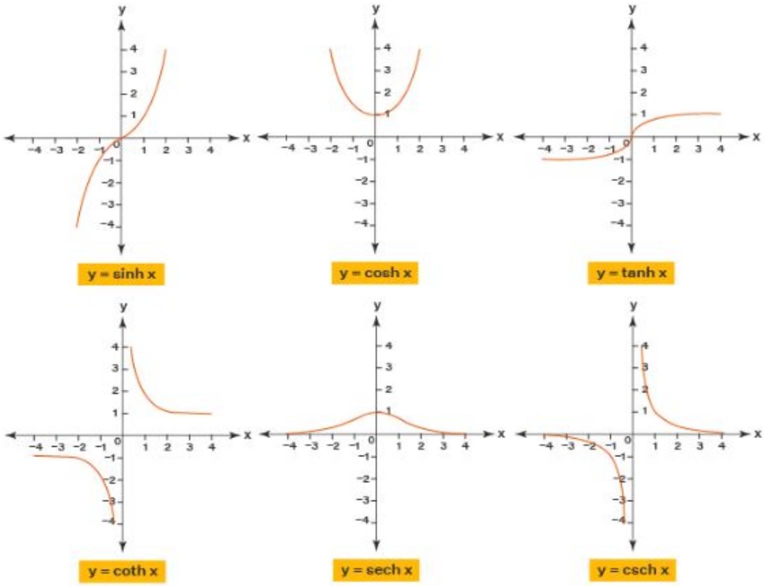
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

ve

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

eşitlikleri sağlanır.

Hiperbolik fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekildedir.



✍ **Not**

Hiperbolik kosinüs fonksiyonun birebir ve örtenliğini inceleyelim. Bu fonksiyon çift olduğundan **birebir değildir**. Ayrıca her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 \quad &\Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \\ &\Rightarrow e^x - 2 + e^{-x} \geq 0 \\ &\Rightarrow e^x + e^{-x} \geq 2 \\ &\Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1 \\ &\Rightarrow \cosh x \geq 1 \end{aligned}$$

yazılır. O halde $-2 \in \mathbb{R}$ için $\cosh x = -2$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ var olmadığından hiperbolik kosinüs fonksiyonu **örten değildir.**

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

Hiperbolik kosinüs fonksiyonu $\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ biçiminde tanımlanırsa **birebir ve örten** olur. O halde bu fonksiyonun tersi var olur. Şimdi bu ters fonksiyonu bulalım. Her $x \in [0, +\infty)$ için

$$\begin{aligned} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad &\Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y \\ &\Rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} - 2y = 0 \\ &\Rightarrow \frac{e^{2x} + 1}{e^x} - 2y = 0 \\ &\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

olur. Eğer $e^x = a$ denirse denklem

$$a^2 - 2ya + 1 = 0$$

olup a değişkenine göre 2. dereceden bir denklemdir. Bu denklemin kökleri

$$a = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

biçimindedir. Burada $e^x = a$ olduğundan

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

yazılır. Fonksiyonun bir tane tersi var olabilir. O halde $y \in [1, +\infty)$ için

$$0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$$

olup

$$\ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \leq 0$$

olur. Ancak $x \in [0, +\infty)$ olduğundan

$$x \neq \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

olup

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh} : \quad &[1, +\infty) \to [0, +\infty) \\ &\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon hiperbolik kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonudur.

✿ Şimdi hiperbolik sinüs fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned} \sinh : \quad &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

fonksiyonunun birbir ve örten olduğunu görmek kolaydır. O halde tersini bulabiliriz. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} - 2y = 0$$
$$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

olup eğer $e^x = a$ denirse denklem

$$a^2 - 2ya - 1 = 0$$

olup a değişkenine göre 2. dereceden bir denklemdir. Bu denklemin kökleri

$$a = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

biçimindedir. Burada $e^x = a$ olduğundan

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

yazılır. Fonksiyonun bir tane tersi var olabilir. O halde her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x > 0$ ve $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ olduğundan

$$x \neq \ln\left(y - \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

olup

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\operatorname{arcsinh} : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon hiperbolik sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Benzer şekilde hiperbolik tanjant ve hiperbolik kotanjant fonksiyonların ters fonksiyonları sırasıyla

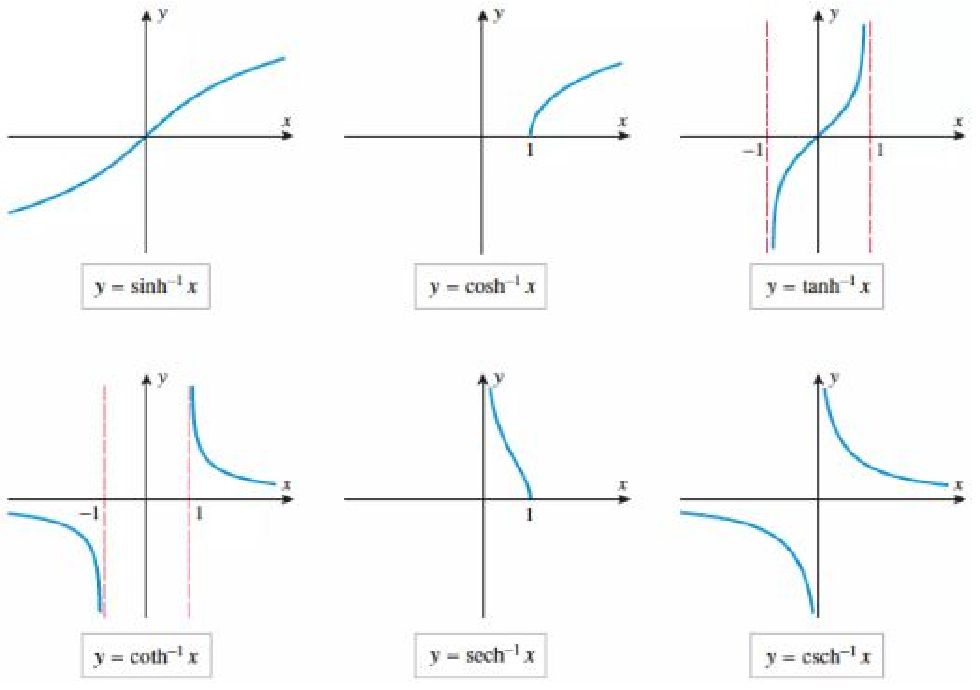
$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), x \in (-1, 1)$$

ve

$$\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

biçimindedir.

Ters hiperbolik fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir.



BÖLÜM 4

Diziler

Tanım 4.1

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan her f fonksiyonuna **dizi** adı verilir. Diziler görüntü kümelerine göre adlandırılırlar. Özel olarak, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$, $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ fonksiyonuna $\mathbb{R}$ de bir dizi denir. Buradaki x_n'e dizinin **genel terimi** denir.

Biz bu ders boyunca $\mathbb{R}$ de bir dizileri ele alacağız.

- $(x_n) = (1, 4, 9, 16, \ldots)$ dizisinin 5. terimine 25 diyemeyiz. Çünkü burada dizinin genel teriminin kuralı bilinmemektedir. Eğer $x_n = n^2$ olarak verilirse dizinin 5. terimine 25 diyebiliriz. Yani bir dizinin belirlenebilmesi için genel teriminin bilinmesi gereklidir.

Tanım 4.2

$a \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ olsun. O halde

$$B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - a| < \epsilon\}$$

kümesine $a \in \mathbb{R}$ noktasının **epsilon komşuluğu** denir. Ayrıca $B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$ kümesine $a \in \mathbb{R}$ noktasının **delinmiş epsilon komşuluğu** denir.

Örnek 4.1

$3 \in \mathbb{R}$ noktasının $\epsilon = 5$ komşuluğu kümesi

$$B(3, 5) = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - 3| < 5\}$$

biçimindedir. Burada

$$|x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8$$

olduğundan

$$B(3, 5) = (-2, 8)$$

bulunur.

Tanım 4.3

$A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer a sayısının her ϵ delinmiş komşuluğund A kümesine ait en az bir eleman varsa ($\forall \epsilon > 0$ için $A \cap (B(a, \epsilon) \setminus \{a\}) = \emptyset$ ise) bu a sayısına A kümesinin limit noktası (yığılma noktası) denir.

Yığılma noktası için aşağıda verilenler önem arz eder.

- A kümesinin tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.
- Eğer A kümesi $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ ve $[a, b)$ biçiminde bir aralık ise $A' = [a, b]$ olur.
- Eğer A kümesi bir **tek nokta kümesi** ise A kümesinin yığılma noktası yoktur. Yani $A' = \emptyset$ dir.
- A, B ve C reel sayılar kümesinin alt kümleri olmak üzere $A = B \cup C$ ise $A' = B' \cup C'$ olur.

Tanım 4.4

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ (yani (x_n) $\mathbb{R}$ de bir dizi) olsun. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a noktasının her komşuluğunda (x_n) dizisine ait sonsuz çoklukta ve bu komşulukların dışında (x_n) dizisine ait sonlu çoklukta terim varsa (x_n) dizisi a noktasına **yakınsıyor** denir ve

$$x_n \to a \text{ veya } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

biçiminde gösterilir.

Bu tanım aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

✽ $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|x_n - a| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\epsilon)$) sayısı varsa (x_n) dizisi a noktasına **yakınsıyor** denir.

✽ Yakınsak olmayan diziye **ıraksak dizi** denir.

Örnek 4.2

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \dfrac{1}{n}$ biçiminde tanımlı (x_n) dizisini alalım ve $x_n \to 0$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = 0$) olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

yazılır. Burada her $n \geq n_0$ ise $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0}$ olup

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{1}{n_0} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n_0$$

olup $n_0 = \left[\left|\dfrac{1}{\epsilon}\right|\right] + 1$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

yazılır. Bu takdirde $x_n \to 0$ bulunur.

Yukarıdaki örnekte $(x_n) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right)$ dizisi için $n_0 = \left[\left|\dfrac{1}{\epsilon}\right|\right] + 1$ alındı. Burada $\epsilon = 1$ için $n_0 = 2$. Böylece 0'ın

$$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R} | \ |x| < 1\} = (-1, 1)$$

komşuluğu dizinin 2. teriminden itibaren (ikinci terim dahil) her terimini içerir.

Örnek 4.3

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (-1)^n$ biçiminde tanımlı (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştıralım. Bu dizi

$$\left((-1)^n\right) = \left(-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\right)$$

biçimindedir. Maddeler halinde araştırma yapalım.

i. $x_n \to 1$ olabilir mi? $\epsilon = 1$ olsun. Böylece

$$B(1,1) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-1| < 1\} = (0,2)$$

olur. Burada $n = 2n_0 + 1 > n_0$ olduğunda $x_{2n_0+1} = -1$ olup $-1 \notin (0,2)$ olur. O halde (x_n) dizisi 1 noktasına yakınsamaz.

ii. $x_n \to -1$ olabilir mi? $\epsilon = 1$ olsun. Böylece

$$B(-1,1) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x+1| < 1\} = (-2,0)$$

olur. Burada $n = 2n_0 > n_0$ olduğunda $x_{2n_0} = 1$ olup $1 \notin (-2,0)$ olur. O halde (x_n) dizisi -1 noktasına yakınsamaz.

iii. $a < -1$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $x_n \to a$ olabilir mi? $\epsilon = -1-a$ olsun. Böylece

$$B(a,-1-a) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-a| < -1-a\} = (1+a+a, -1-a+a) = (1+2a, -1)$$

olur. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin (1+2a,-1)$ olur. O halde (x_n) dizisi $a < -1$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsamaz.

iv. $a > 1$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $x_n \to a$ olabilir mi? $\epsilon = a-1$ olsun. Böylece

$$B(a,a-1) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-a| < a-1\} = (1-a+a, a-1+a) = (1, 2a-1)$$

olur. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin (1,2a-1)$ olur. O halde (x_n) dizisi $a > 1$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsamaz.

v. $a = 0$ olsun. $x_n \to 0$ olabilir mi? $\epsilon = \frac{1}{2}$ için

$$B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} |\ |x| < \frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

olur. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olur. O halde (x_n) dizisi 0 noktasına yakınsamaz.

vi. $-1 < a < 0$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $x_n \to a$ olabilir mi? $\epsilon = a+1$ olsun. Böylece

$$B(a,a+1) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-a| < a+1\} = (-a-1+a, a+1+a) = (-1+2a, +1)$$

olur. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin (-1+2a,+1)$ olur. O halde (x_n) dizisi $-1 < a < 0$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsamaz.

vii. $0 < a < 1$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $x_n \to a$ olabilir mi? $\epsilon = 1-a$ olsun. Böylece

$$B(a,1-a) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-a| < 1-a\} = (a-1+a, 1-a+a) = (2a-1, 1)$$

olur. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin (2a-1,1)$ olur. O halde (x_n) dizisi $0 < a < 1$ olan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsamaz.

Bu 7 madde dikkate alındığında (x_n) dizisi ıraksaktır.

Tanım 4.5

$(a_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ olmak üzere e sayısı

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

biçiminde tanımlanır ve bu sayıya **Euler sayısı** adı verilir.

Tanım 4.6

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisine **üstten sınırlı** dizi denir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq x_n$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisine **alltan sınırlı** dizi denir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq x_n \leq M$ olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları varsa (x_n) dizisine **sınırlı** dizi denir.

Bu tanımda verilen sınırlı dizi tanımı aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir:

✿ $(x_n) \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa (x_n) dizisine **sınırlı** dizi denir.

Teorem 4.1

Reel sayılarda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ yakınsak bir dizi olmak üzere $x_n \to a$ ve $x_n \to b$ olsun. Eğer $x_n \to a$ ise herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_1$ iken

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Benzer şekilde $x_n \to b$ ise aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_2$ iken

$$|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.2}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\,\{n_1, n_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.1) ve (4.2) eşitsizlikleri kullanılarak

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

bulunur. Yani herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$0 \leq |a-b| < \epsilon$$

yazılır. O halde Arşimet prensibinin sonucundan (2. Sonuç) $|a-b| = 0$ olup $a = b$ elde edilir. Bu takdirde limit tektir.

Teorem 4.2

Reel sayılarda yakınsak olan her dizi sınırlıdır.

☞ İspat
$(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $x_n \to a \in \mathbb{R}$ olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|x_n - a| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece $n \geq n_0$ iken

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

yazılır. Eğer

$$m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, a - \epsilon\}$$

ve

$$M = \text{maks}\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, a + \epsilon\}$$

alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq x_n \leq M$ olur. Bu takdirde (x_n) dizisi sınırlıdır.

Bu son teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.4

$((-1)^n)$ dizisini alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq x_n \leq 1$ olduğundan bu dizisi sınırlıdır. Ancak önceki örnekte gösterildiği gibi dizi ıraksaktır.

Tanım 4.7

$(a_n) \subset \mathbb{R}$ olsun.

i. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < a_{n+1}$ oluyorsa (a_n) dizisine **artan** dizi denir.

ii. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$ oluyorsa (a_n) dizisine **azalmayan** dizi denir.

iii. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > a_{n+1}$ oluyorsa (a_n) dizisine **azalan** dizi denir.

iv. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq a_{n+1}$ oluyorsa (a_n) dizisine **artmayan** dizi denir.

Burada ifade edilen i ve iii özelliklere sahip dizilere sırasıyla **monoton artan** dizi ve **monoton azalan** dizi denir.

Teorem 4.3

$(a_n) \subset \mathbb{R}$ monton artan (veya azalmayan) bir dizi olsun. O halde (a_n) dizisi yakınsaktır ancak ve ancak (a_n) dizisi üstten sınırlıdır.

☞ İspat
$(a_n) \subset \mathbb{R}$ monton artan (veya azalmayan) bir dizi olsun.
Öncelikle (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. O halde bu dizi sınırlıdır ve dolayısıyla üstten sınırlı olur.
Şimdi (a_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu kabul edelim. Böylece (a_n) dizisi üstten sınırlı olduğundan $\sup\{a_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ sayısı vardır. Şimdi

$$\sup\{a_n | \ n \in \mathbb{N}\} = a$$

olsun. Buradan supremumun karakteristik özelliği gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a$ ve herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $a - \epsilon < a_{n_0}$ olacak şekilde bir $a_{n_0} \in (a_n)$ vardır. Ayrıca (a_n) monton artan (veya azalmayan) bir dizi olduğundan her $n \geq n_0$ için $a_n \geq a_{n_0}$ olup aynı $\epsilon > 0$ sayısı için

$$a_n \geq a_{n_0} > a - \epsilon$$

yazılır. Yine her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a$ eşitsizliği kullanılarak aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken

$$a + \epsilon > a \geq a_n \geq a_{n_0} > a - \epsilon$$

olup

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

olduğundan

$$|a_n - a| < \epsilon$$

yazılır. Bu takdirde (a_n) dizisi yakınsaktır ve **supremum değerine yakınsar.**

Teorem 4.4

$(a_n) \subset \mathbb{R}$ monton azalan (veya artmayan) bir dizi olsun. O halde (a_n) dizisi yakınsaktır ancak ve ancak (a_n) dizisi alttan sınırlıdır.

☞ **İspat**

$(a_n) \subset \mathbb{R}$ monton azalan (veya artmayan) bir dizi olsun.
Öncelikle (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. O halde bu dizi sınırlıdır ve dolayısıyla alttan sınırlı olur.
Şimdi (a_n) dizisinin alttan sınırlı olduğunu kabul edelim. Böylece (a_n) dizisi alttan sınırlı olduğundan $\inf\{a_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ sayısı vardır. Şimdi

$$\inf\{a_n | \ n \in \mathbb{N}\} = a$$

olsun. Buradan infumumun karakteristik özelliği gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $a \leq a_n$ ve herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $a_{n_0} < a + \epsilon$ olacak şekilde bir $a_{n_0} \in (a_n)$ vardır. Ayrıca (a_n) monton azalan (veya artmayan) bir dizi olduğundan her $n \geq n_0$ için $a_n \leq a_{n_0}$ olup aynı $\epsilon > 0$ sayısı için

$$a_n \leq a_{n_0} < a + \epsilon$$

Yine her $n \in \mathbb{N}$ için $a \leq a_n$ eşitsizliği kullanılarak aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken

$$a - \epsilon < a < a_n \leq a_{n_0} < a + \epsilon$$

olup

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

olduğundan

$$|a_n - a| < \epsilon$$

yazılır. Bu takdirde (a_n) dizisi yakınsaktır ve **infumum değerine yakınsar.**

✍ **Not**
$(a_n) \subset \mathbb{R}$ olsun.

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n > 0$ (veya $a_{n+1} - a_n \geq 0$) oluyorsa (a_n) dizisi **monoton artan** (veya **azalmayan**) olur.

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (veya $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$) oluyorsa (a_n) dizisi **monoton artan** (veya **azalmayan**) olur.

iii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n < 0$ (veya $a_{n+1} - a_n \leq 0$) oluyorsa (a_n) dizisi **monoton azalan** (veya **azalmayan**) olur.

iv. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (veya $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$) oluyorsa (a_n) dizisi **monoton azalan** (veya **artmayan**) olur.

Örnek 4.5

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ genel terimli (a_n) dizisinin karakterini belirleyelim. (yakınsak olup olmadığını araştıralım.) Öncelikle (a_n) dizisinin monotonluğuna bakalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan (a_n) dizisi monoton artandır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

olup (a_n) dizisi üstten sınırlıdır. O halde (a_n) dizisi yakınsaktır.

Tanım 4.8

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = x_n$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi verilsin. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(k) = n_k$ doğal sayılarda artan bir dizi olmak üzere $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, (f \circ g)(k) = x_{n_k}$ olacak şekildeki bir (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin bir **alt dizisi** denir.

✿ (x_n) dizisinin alt dizileri (x_n) dizisinin terimlerinden oluşur.

✿ Bir dizinin sonsuz çoklukta alt dizisi bulunabilir.

Örnek 4.6

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

dizisinin iki alt dizisi

$$(x_{2n}) = \left(\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\right)$$

ve

$$(x_{2n+1}) = \left(\frac{1}{2n+1}\right) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots\right)$$

biçimindedir.

Önerme 4.1

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $x_n \to a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde (x_n) dizisinin tüm alt dizileri a noktasına yakınsar.

☞ **İspat**

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $x_n \to a \in \mathbb{R}$ olsun. Böylece herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|x_n - a| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi (x_n) dizisinin herhangi bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisini alalım. O halde her $n_k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in (x_n)$ olduğundan aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n_k \geq n_0$ iken

$$\left|x_{n_k} - a\right| < \epsilon$$

olur. Bu takdirde $x_{n_k} \to a$ elde edilir.

Bu önermenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.7

$(x_n) = \left((-1)^n\right)$ dizi ıraksaktır. Ancak $(x_{2n}) = (1) = (1, 1, \ldots)$ alt dizisi 1 noktasına yakınsar.

Teorem 4.5 Bolzano-Weierstrass Teoremi

Sınırlı her reel sayı dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 4.9

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n, m \geq n_0$ iken

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 = n_0(\epsilon))$ sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 4.6

Her reel Cauchy dizisi sınırlıdır.

☞ **İspat**

(x_n), $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n, m \geq n_0$ iken

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $m = n_0$ ve $\epsilon = 1$ alınırsa her $n \geq n_0$ için

$$|x_n| = \left|x_n - x_{n_0} + x_{n_0}\right| \leq \left|x_n - x_{n_0}\right| + \left|x_{n_0}\right| \leq 1 + \left|x_{n_0}\right|$$

yazılır. Eğer

$$M = \text{maks}\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, \left|x_{n_{0-1}}\right|, 1 + \left|x_{n_0}\right|\right\}$$

alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olur. Bu takdirde (x_n) dizisi sınırlıdır.

Teorem 4.7

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

☞ **İspat**

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $x_n \to a \in \mathbb{R}$ olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n, m \geq n_0$ iken

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

yazılır. Bu takdirde (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Teorem 4.8

(x_n), $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olsun. Eğer (x_n) dizisinin $x_{n_k} \to a$ olacak şekilde bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi varsa $x_n \to a$ olur.

☞ **İspat**

(x_n), $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi ve (x_n) dizisinin $x_{n_k} \to a$ olacak şekilde bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi var olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n_k \geq n_1$ iken

$$\left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n, n_k \geq n_2$ iken

$$\left|x_n - x_{n_k}\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri kullanılarak

$$|x_n - a| = \left|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a\right| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

bulunur. Bu takdirde $x_n \to a$ elde edilir.

Teorem 4.9 $\mathbb{R}$'nin tamlığı

$\mathbb{R}$ de her Cauchy dizisi yakınsaktır.

☞ **İspat**

(x_n), $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olsun. O halde Bolzano-Weierstrass teoreminden bu dizinin yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Böylece bir önceki teoremden $x_{n_k} \to a$ ise $x_n \to a$ olur. Yani (x_n) dizisi yakınsaktır.

Dizilerde Cebirsel İşlemler

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de iki dizi olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \pm b_n$ genel terimi ile belirlenen diziye (a_n) ve (b_n) dizilerinin **toplamı** (veya **farkı**) denir ve

$$(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$$

biçiminde gösterilir.

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n b_n$ genel terimi ile belirlenen diziye (a_n) ve (b_n) dizilerinin **çarpımı** denir ve

$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$$

biçiminde gösterilir.

iii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ olmak üzere $\frac{a_n}{b_n}$ genel terimi ile belirlenen diziye (a_n) ve (b_n) dizilerinin **bölümü** denir ve

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

biçiminde gösterilir.

iv. Her $k \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için ka_n genel terimi ile belirlenen diziye (a_n) dizisinin k **sabiti ile çarpımı** denir ve

$$k(a_n) = (ka_n)$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 4.10

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de iki dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ile (b_n) dizilerine **eşit diziler** denir.

Tanım 4.11

(a_n), $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = c$ oluyorsa, yani

$$(a_n) = (c, c, \ldots, c, \ldots)$$

ise (a_n) dizisine **sabit dizi** denir.

Tanım 4.12

$\mathbb{R}$ de bir (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki **fark** sabit ise (a_n) dizisine **aritmetik dizi** denir. Ardışık terimler arasındaki bu sabit farka **ortak fark** denir. Aritmetik dizi

$$(a_n) = (a, a+d, a+2d\ldots, a+(n-1)d, \ldots)$$

biçimindedir. Aritmetik dizilerde ki ortak fark sıfırdan farklı ise dizi sınırsızdır. O halde ıraksaktır. Ortak fark sıfır ise dizi sabit dizidir ve yakınsaktır.

Örnek 4.8

$$(a_n) = (1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots)$$

dizisi sabit dizidir. Burada ortak fark 2 olduğundan dizi ıraksaktır.

Tanım 4.13

$\mathbb{R}$ de bir (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki **oran** sabit ise (a_n) dizisine **geometrik dizi** denir. Ardışık terimler arasındaki bu sabit orana da **ortak çarpan** denir. Geometrik dizi $a \neq 0$ olmak üzere

$$(a_n) = \left(ar^{n-1}\right) = \left(a, ar, ar^2 \ldots, ar^{n-1}, \ldots\right)$$

biçimindedir. Eğer $|r| < 1$ ise geometrik dizi yakınsaktır ve sıfıra yakınsar Eğer $|r| > 1$ ise geometrik dizi ıraksaktır. Son olarak, eğer $r = 1$ ise geometrik dizi sabit dizi olup yakınsak olur.

Örnek 4.9

$(a_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ve $(b_n) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ dizilerini alalım. Bu dizilerdir ve (a_n) dizisi için $r = \dfrac{2}{3} < 1$ olduğundan $a_n \to 0$ olur. Yine (b_n) dizisi için $r = \dfrac{3}{2} > 1$ olduğundan (b_n) dizisi ıraksaktır.

Teorem 4.10

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. O halde $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ dizisi de yakınsaktır ve $a_n + b_n \to a + b$ olur.

☞ **İspat**

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. Öncelikle, $a_n \to a$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_1$ iken

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Benzer şekilde $b_n \to b$ olduğundan aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_2$ iken

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\,\{n_1, n_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri kullanılarak

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

yazılır. Böylece $a_n + b_n \to a + b$ elde edilir.

Örnek 4.10

$(a_n) = (n)$ ve $(b_n) = (-n)$ dizilerini alalım. Burada $(a_n + b_n) = (0)$ sabit dizisi yakınsaktır. Ancak (a_n) ve (b_n) sınırsız diziler olduklarından ıraksaktırlar.

Teorem 4.11

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. O halde $(a_n)(b_n) = (a_nb_n)$ dizisi de yakınsaktır ve $a_nb_n \to ab$ olur.

☞ **İspat**

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. Öncelikle $a_n \to a$ olduğundan (a_n) dizisi sınırlıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} |(a_nb_n) - (ab)| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \\ &\leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \\ &= |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \\ &\leq M\,|b_n - b| + (|b| + 1)\,|a_n - a| \end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılır. Ayrıca $a_n \to a$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_1$ iken

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)} \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Yine $b_n \to b$ olduğundan aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_2$ iken

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M} \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\,\{n_1, n_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.7), (4.8) ve (4.9) ifadeleri kullanılarak

$$|(a_nb_n) - (ab)| \leq M\,|b_n - b| + (|b| + 1)\,|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

elde edilir. Bu takdirde $a_nb_n \to ab$ olur.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.11

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n) = (n)$ dizilerini alalım. Burada $(a_nb_n) = (1)$ sabit dizisi yakınsaktır. Ancak $(b_n) = (n)$ sınırsız dizisi ıraksaktır.

Teorem 4.12

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ ve $a \neq 0$ bir reel sayı olmak üzere (a_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$ olacak şekilde bir yakınsak dizi olsun. O halde $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ olur.

☞ **İspat**

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ ve $a \neq 0$ bir reel sayı olmak üzere (a_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$ olacak şekilde bir yakınsak dizi olsun. O halde $a_n \to a$ olduğundan $\epsilon = \frac{|a|}{2}$ sayısı için her $n \geq n_1$ iken

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$$

olup

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$$

olduğundan

$$-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| \Leftrightarrow \frac{|a|}{2} < |a_n| \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca $a_n \to a$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_2$ iken

$$|a_n - a| < \frac{|a|^2}{2}\epsilon \tag{4.11}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.10) ve (4.11) ifadeleri kullanılarak

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a|\,|a_n|} < \frac{2\,|a_n - a|}{|a|\,|a|} < 2\frac{|a|^2}{2}\epsilon\frac{1}{|a|^2} = \epsilon$$

bulunur. Bu takdirde $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ olur.

Teorem 4.13

Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ ve $b \neq 0$ bir reel sayı olmak üzere (a_n) ve (b_n) $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. O halde $\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ dizisi de yakınsaktır ve $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ olur.

☞ **İspat**

Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ ve $b \neq 0$ bir reel sayı olmak üzere (a_n) ve (b_n) $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. Böylece önceki teoremler kullanılarak

$$b_n \to b \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$$

olup

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n\frac{1}{b_n} \to a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

elde edilir.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.12

$(a_n) = (n)$ ve $(b_n) = (-n)$ dizilerini alalım. Burada $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (-1)$ sabit dizisi yakınsaktır. Ancak (a_n) ve (b_n) sınırsız diziler olduklarından ıraksaktırlar.

Teorem 4.14

(a_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$ olacak şekilde yakınsak bir dizi ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $k(a_n) = (ka_n)$ dizisi de yakınsaktır ve $ka_n \to ka$ olur.

☞ **İspat**

(a_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$ olacak şekilde yakınsak bir dizi ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. Öncelikle $k = 0$ ise

$$k(a_n) = (ka_n) = (0)$$

sabit dizisi yakınsak olur. Şimdi $k \neq 0$ olsun. $a_n \to a$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|k|} \tag{4.12}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.12) eşitsizliği kullanılarak

$$|ka_n \to ka| = |k|\,|a_n - a| < |k|\frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$$

yazılır. O halde $ka_n \to ka$ elde edilir.

Sonuç 4.1

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de $a_n \to a$, $b_n \to b$ olacak şekilde iki yakınsak dizi olsun. O halde $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$ dizisi de yakınsaktır ve $a_n - b_n \to a - b$ olur.

Teorem 4.15

(a_n), $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ($a_n \to a$) ise $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ ($|a_n| \to |a|$) olur.

☞ **İspat**

(a_n), $\mathbb{R}$ de bir dizi olmak üzere $a_n \to a$ olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{4.13}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \tag{4.14}$$

eşitsizliği vardır. Böylece aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri kullanılarak

$$||a_n| - |a|| < \epsilon$$

yazılır. Bu takdirde $|a_n| \to |a|$ olur.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.13

$(a_n) = \left((-1)^n\right)$ dizisini alalım. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| = 1$ olup $(|a_n|) = (1)$ sabit dizisi yakınsaktır. Ancak $(a_n) = \left((-1)^n\right)$ dizisi ıraksak bir dizidir.

Sonuç 4.2

(a_n), $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.16 Sıkıştırma Teoremi

(a_n), (b_n) ve (c_n), $\mathbb{R}$ de birer dizi ve her $n \geq n_1 \in \mathbb{N}$ iken

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

olsun. Eğer $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_n \to L$ ve $c_n \to L$ ise $b_n \to L$ olur.

☞ **İspat**

(a_n), (b_n) ve (c_n), $\mathbb{R}$ de birer dizi ve her $n \geq n_1 \in \mathbb{N}$ iken

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{4.15}$$

ve $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_n \to L$ ve $c_n \to L$ olsun. Böylece $a_n \to a$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_2$ iken

$$|a_n - L| < \epsilon \tag{4.16}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca $c_n \to L$ olduğundan aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_2$ iken

$$|c_n - L| < \epsilon \tag{4.17}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\,\{n_1, n_2, n_3\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (4.15), (4.16) ve (4.17) ifadeleri kullanılarak

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$$

olup

$$L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$$

olduğundan

$$|b_n - L| < \epsilon$$

elde edilir. O halde $b_n \to L$ olur.

Örnek 4.14

$(a_n) = \left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$ dizisinin limitini bulalım. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$-\frac{1}{n} \leq \sin n \leq \frac{1}{n}$$

yazılır. Eğer $(b_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ ve $(c_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

olup sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

elde edilir.

Tanım 4.14 Sonsuza Iraksama

(a_n), $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun.

i. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken $a_n > \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (a_n) dizisi $+\infty$'a ıraksar denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ veya $a_n \to +\infty$ biçiminde gösterilir.

ii. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken $a_n < -\epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (a_n) dizisi $-\infty$'a ıraksar denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ veya $a_n \to -\infty$ biçiminde gösterilir.

Genel olarak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ durumunda "dizinin limiti sonsuzdur" ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ durumunda "dizinin limiti eksi sonsuzdur" ifadeleri kullanılır.

Teorem 4.17 Stolz Teoremi

(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de iki dizi olsun. O halde aşağıdaki durumlar vardır.

i. *(b_n) azalan, $b_n \to 0$ ve $a_n \to 0$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

olur.

ii. *(b_n) artan, $b_n \to +\infty$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

olur.

☞ **İspat**
(a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}$ de iki dizi olsun.

i. (b_n) azalan, $b_n \to 0$ ve $a_n \to 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = L$$

olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0$ iken

$$\left| \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} - L \right| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < L + \epsilon \tag{4.18}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca (b_n) azalan olduğundan $b_n - b_{n+1} > 0$ olup (4.18) eşitsizliğinden

$$(L-\epsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (L+\epsilon)(b_n - b_{n+1})$$

yazılır. Eğer $m > n$ olan $m \in \mathbb{N}$ için bu son eşitsizlik $n, n+1, n+2, \ldots, m-2, m-1$ durumları için aşağıdaki şekilde yazılıp

$$\begin{gathered}
(L-\epsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (L+\epsilon)(b_n - b_{n+1}) \\
(L-\epsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) < a_{n+1} - a_{n+2} < (L+\epsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) \\
\vdots \\
(L-\epsilon)(b_{m-2} - b_{m-1}) < a_{m-2} - a_{m-1} < (L+\epsilon)(b_{m-2} - b_{m-1}) \\
(L-\epsilon)(b_{m-1} - b_m) < a_{m-1} - a_m < (L+\epsilon)(b_{m-1} - b_m)
\end{gathered}$$

bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$(L-\epsilon)(b_n - b_m) < a_n - a_m < (L+\epsilon)(b_n - b_m)$$

bulunur. Son eşitsizliğin her tarafı b_n ile bölünürse

$$(L-\epsilon)\left(1 - \frac{b_m}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_m}{b_n} < (L+\epsilon)\left(1 - \frac{b_m}{b_n}\right)$$

olur. Son eşitsizlikteki her tarafta $m \to \infty$ için limit alınırsa $a_m \to 0$ ve $b_m \to 0$ olup

$$(L-\epsilon) < \frac{a_n}{b_n} < (L+\epsilon) \Leftrightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon$$

elde edilir. Bu takdirde $\dfrac{a_n}{b_n} \to L$ olur.

ii. i. şıkka benzer şeklide yapılır.

Örnek 4.15

(a_n), $\mathbb{R}$ de bir dizi ve $a_n \to 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

limitini bulalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ ve $(y_n) = (n)$ olsun. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = n < n + 1 = y_{n+1}$$

olduğundan (y_n) dizisi monoton artandır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 2$$

olduğundan Stolz teoremi gereği

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 2$$

elde edilir.

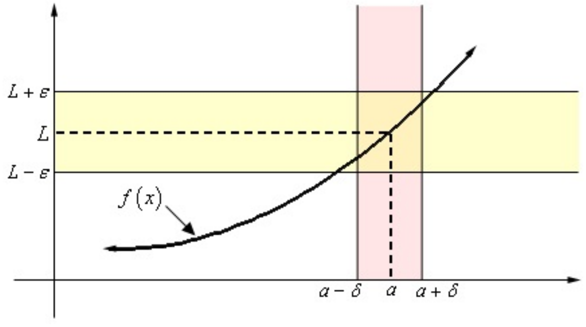
BÖLÜM 5

Fonksiyonlarda Limit

Fonksiyonlarda limit kavramıyla ilgili iki tanım söz konusudur. Bu tanımlar, Heyne ve Cauchy tarafından yapılmıştır. Yaygın olarak kullanılan tanım Cauchy tarafından yapılan tanımdır. Heyne tarafından verilen tanımda dizilerde limit kavramı kullanıldığından, bu tanım bazı kaynaklarda dizisel limit olarak ifade edilmektedir.

Tanım 5.1 Cauchy'nin Limit Tanımı

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ (A kümesinin yığılma noktalarının kümesi) olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\epsilon)$) sayısı varsa f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L sayısıdır denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.



Örnek 5.1

$\lim\limits_{x \to 1} 3x + 5 = 8$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $f(x) = 3x + 5$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ kümesidir ve $1 \in \mathbb{R}'$ dir. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x - 1| < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - 8| = |3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta \tag{5.1}$$

olur. Eğer $3\delta = \epsilon \iff \delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ alınırsa (5.1) eşitsizliğinden $|f(x) - 8| < \epsilon$ yazılır. Böylece $\lim\limits_{x \to 1} 3x + 5 = 8$ elde edilir.

✍ **Not**

Limit tanımına dikkat edilirse her ϵ sayısı için bir tane δ sayısı bulmak gereklidir. O halde ϵ sayısı için bir kısıtlama yapılamazken uygun δ sayısı aranırken δ sayısına kısıtlama yapılabilir. Bu kısıtlamadan sonra her ϵ sayısı için bir tane δ sayısı bulunabiliyorsa limit vardır.

Örnek 5.2

$\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ kümesidir ve $2 \in \mathbb{R}'$ dir. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x - 2| < \delta \leq 1$ olduğunda

$$|f(x) - 4| = \left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| = |x - 2||x - 2 + 2 + 2| \leq |x - 2|(|x - 2| + 4)$$

yazılır. Ayrıca

$$|x-2| < \delta \leq 1$$

olduğundan

$$|f(x)-4| \leq |x-2|(|x-2|+4) < \delta(|x-2|+4) \leq 5\delta \tag{5.2}$$

olur. Eğer $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{5}, 1\right\}$ alınırsa (5.2) eşitsizliğinden $|f(x)-4| < \epsilon$ yazılır. Böylece $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ elde edilir.

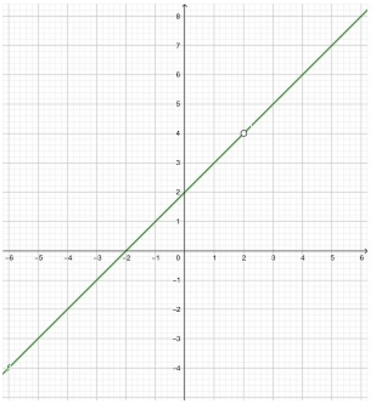
Not
Tanımdan anlaşılacağı üzere bir fonksiyonunun bir a noktasında limitinin olması için a noktasında tanımlı olması gerekmez. Üstelik tanımlı olsa da o noktada aldığı değerin limit değerine eşit olması gerekmez.

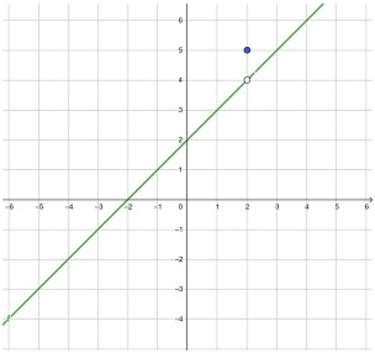
Örnek 5.3

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ kümesidir. O halde $x \neq 2$ olmak üzere $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ kesirinde sadeleştirme yapılırsa $f(x) = x+2$ olur. Bu fonksiyon $x = 2$ noktasında tanımlı değilken $x = 2$ noktasında limiti vardır. Bu limitin $L = 4$ olduğu tanım yardımıyla kolayca görülür. Eğer fonksiyon

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa fonksiyonun $x = 2$ noktasındaki limiti $L = 4$ iken $g(2) = 5$ olur. Bu fonksiyonların grafikleri sırasıyla aşağıdaki şekilde olur.





Not
Fonksiyonun bir noktadaki limitinin hesaplanabilmesi için o noktanın fonksiyonun tanım kümesinin yığılma noktalarının kümesine ait olması gerekliliğine dikkat edilmelidir.

Örnek 5.4

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1-x}$ limitini ele alalım. Burada f fonksiyonu $f(x)=\sqrt{1-x}$ olup bu fonksiyon $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ için tanımlıdır. Yani fonksiyonun tanım kümesi $D_f=(-\infty,1]$ olur. $a=2$ noktası $(-\infty,1]$ kümesinin yığılma noktaları kümesi olan $(-\infty,1]$ kümesine ait olmadığından $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1-x}$ limiti hesaplanamaz.

Teorem 5.1

Bir f fonksiyonunun a noktasında limiti varsa bu limit tektir.

İspat
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_2$ olduğunu kabul edelim. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ durumunda herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı verilsin. Her $x\in D_f$ için $0<|x-a|<\delta_1$ iken

$$|f(x)-L_1|<\frac{\epsilon}{2} \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $\delta_1>0$ sayısı vardır. Yine $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_2$ olduğundan aynı $\epsilon>0$ sayısı ve $x\in D_f$ için $0<|x-a|<\delta_2$ iken

$$|f(x)-L_1|<\frac{\epsilon}{2} \tag{5.4}$$

olacak şekilde bir $\delta_2>0$ sayısı vardır. Eğer $\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon>0$ sayısı ve $x\in D_f$ için $0<|x-a|<\delta_3$ iken (5.3) ve (5.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}|L_1-L_2| &= |L_1-f(x)+f(x)-L_2|\\ &\leq |L_1-f(x)|+|f(x)-L_2|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

bulunur. O halde her $\epsilon>0$ için $0\leq|L_1-L_2|<\epsilon$ bulunur. Böylece Arşimed prensibinin sonucundan (2. sonuç) $L_1=L_2$ elde edilir. Bu taktirde limit varsa tektir.

Tanım 5.2 Heyne'nin Limit Tanımı

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ iken $x_n \in A \setminus \{a\}$ olmak üzere $x_n \to a$ olan her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to L$ oluyorsa f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L sayısıdır denir ve $\lim_{x \to a} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Örnek 5.5

$f(x) = x^2$ fonksiyonunu için $\lim_{x \to 2} f(x)$ limitini bulalım. Öncelikle 2 sayısı f fonksiyonunun tanım kümesi olan $\mathbb{R}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır. Herhangi bir (x_n) dizisini $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ olmak üzere $x_n \to 2$ olacak şekilde alalım. Dizilerde limit özelliklerinden $x_n^2 = x_n x_n \to 2.2 = 4$ olup $f(x_n) = x_n^2 \to 4$ olur. O halde Heyne'nin tanımından $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ bulunur.

Örnek 5.6

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x > 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $\lim_{x \to 0} f(x)$ limitini bulalım. Burada $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $0 \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})'$ biçimindedir. Öncelikle $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisini alalım. Açıkça, $x_n \to 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olur. Böylece $f(x_n) = \frac{3}{n} + 5$ olup

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{n} + 5\right) = 5 \tag{5.5}$$

bulunur. Şimdi $(y_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ dizisini alalım. Açıkça, $y_n \to 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n < 0$ olur. Böylece $f(y_n) = \frac{2}{n} + 1$ olup

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{n} + 1\right) = 1 \tag{5.6}$$

olur. O halde (5.5) ve (5.6) den bu fonksiyonun $x = 0$ noktasında limiti yoktur.

Teorem 5.2

Heyne ve Cauchy limit tanımları denktir.

☞ **İspat**

Öncelikle $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ ve $\lim_{x \to a} f(x) = L$ olsun.

Cauchy tanımı doğru iken Heyne tanımının doğru olduğunu gösterelim. Cauchy tanımı doğru olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Herhangi bir (x_n) dizisini $x_n \in A \setminus \{a\}$ olmak üzere $x_n \to a$ olacak şekilde alalım. Böylece aynı $\delta > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken $0 < |x_n - a| < \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken $|f(x_n) - L| < \epsilon$ yazılır. Bu takdirde $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ olur.

Tersine Heyne tanımı gerçeklenirken Cauchy tanımının gerçeklendiğini gösterelim. Heyne tanımı

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

gerçeklenirken Cauchy tanımı gerçeklenmesin. O halde bir $\epsilon > 0$ sayısı için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_n = \frac{1}{n}$ iken $0 < |x_n - a| < \delta_n$ olacak şekilde en az bir $x_n \in A$ vardır ki $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$ olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan sıkıştırma teoreminden (dizilerde) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olur. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$ olduğundan $f(x_n)$ dizisi L sayısına yakınsamaz. Bu durum Heyne tanımıyla çelişir. Çelişki Cauchy tanımı gerçeklenmesin kabülünden kaynaklanır. O halde Cauchy tanımı gerçeklenir.

Teorem 5.3

f ve g reel değerli birer fonksiyon olmak üzere $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ olsun. O halde

1. $\lim_{x\to a} (f \mp g)(x) = L_1 \mp L_2 = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a} (f.g)(x) = L_1.L_2 = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} (k.f)(x) = k.L_1 = k.\lim_{x\to a} f(x)$
4. $g(x) \neq 0$, $L_2 \neq 0$ *olmak üzere*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

yazılır.

☞ **İspat**
Heyne göre limit tanımı ve dizilerde yakınsama teoremleri kullanılarak kolayca görülür.

Teorem 5.4

$f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ birer fonksiyon ve $f(A) \subset B$ olsun. $a \in A'$ ve $b \in B'$ olmak üzere $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ve $\lim_{x\to b} g(x) = c$ ise $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$ olur.

☞ **İspat**
$\lim_{x\to b} g(x) = c$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $0 < |x - b| < \delta_1$ iken

$$|g(x) - c| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. Yine $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan aynı $\delta_1 > 0$ sayısı için $0 < |x - a| < \delta$ iken

$$|f(x) - b| < \delta_1$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece aynı $\epsilon > 0$ sayısı için $0 < |x - a| < \delta$ iken

$$|g(f(x)) - c| < \epsilon$$

bulunur. Bu takdirde $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$ elde edilir.

5.1 Limit Hesaplama Yöntemleri

1. Sabit fonksiyonun limiti kendisidir. Yani her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ olur. Gerçekten herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $0 < |x - a| < \delta$ iken

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

olur.

2. $f(x) = x$ biçiminde tanımlı birim fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$ olur. Gerçekten herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $0 < |x - a| < \delta$ iken

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$$

olup $\delta = \epsilon$ alınırsa $|f(x) - a| < \epsilon$ olur. O halde $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$ dır.

3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a} c.x^n = \lim_{x \to a} c. \lim_{x \to a} x. \lim_{x \to a} x ..... \lim_{x \to a} x = c.a.a....a = c.a^n$$

olur.

4. Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonunu alalım. O halde

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} P(x) &= a_n \lim_{x \to a} x^n + a_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + ... + a_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} a_0 \\ &= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0 \\ &= P(a) \end{aligned}$$

olur.

5. Her x için $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları verilsin. Eğer $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

olur.

Örnek 5.7

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{4x^3 + 5x - 1}$$

ise

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{4x^3 + 5x - 1} = \frac{5}{8}$$

bulunur.

f herhangi bir fonksiyon olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

✿ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ise $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = a^L$$

olur.

✿ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ise $L > 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \left(\log_a^{f(x)}\right) = \log_a^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \log_a^L$$

olur.

✿ $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ olur.

✿ Ayrıca

$$\lim_{x \to a} (\sin f(x)) = \sin\left(\lim_{x \to a} f(x)\right),$$

$$\lim_{x \to a} (\cos f(x)) = \cos\left(\lim_{x \to a} f(x)\right),$$

$$\lim_{x \to a} (\tan f(x)) = \tan\left(\lim_{x \to a} f(x)\right),$$

$$\lim_{x \to a} (\cot f(x)) = \cot\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

yazılır.

✿ $|a| \leq 1$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a} (\arcsin f(x)) = \arcsin\left(\lim_{x \to a} f(x)\right),$$

$$\lim_{x \to a} (\arccos f(x)) = \arccos\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

olur.

✿ Yine

$$\lim_{x \to a} (\arctan f(x)) = \arctan\left(\lim_{x \to a} f(x)\right),$$

$$\lim_{x \to a} (\operatorname{arccot} f(x)) = \operatorname{arccot}\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

biçimindedir.

5.2 Sağ ve Sol Limitler (Tek Yönlü Limitler)

Tanım 5.3 Sağdan Limit Tanımı

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $a < x < \delta + a$ olduğunda $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\epsilon))$ sayısı varsa f fonksiyonunun a noktasındaki **sağdan** limiti L sayısıdır denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

✍ **Not**
Bir f fonksiyonunun a noktasındaki **sağdan** limitinin sorulduğu bazı problemlerin çözümlerinde kolaylık sağlayan bir ifadeyi verelim. $h > 0$ olmak üzere $x = a + h$ olarak alınırsa $x \to a^+ \Leftrightarrow h \to 0$ olur. Yani

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = L$$

biçimindedir. Burada $h > 0$ olarak alındığından bu eşitlik

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(a+h) = L$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 5.4 Soldan Limit Tanımı

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $a - \delta < x < a$ olduğunda $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\epsilon))$ sayısı varsa f fonksiyonunun a noktasındaki **soldan** limiti L sayısıdır denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

✍ **Not**
Bir f fonksiyonunun a noktasındaki **soldan** limitinin sorulduğu bazı problemlerin çözümlerinde kolaylık sağlayan bir ifadeyi verelim. $h > 0$ olmak üzere $x = a - h$ olarak alınırsa $x \to a^- \Leftrightarrow h \to 0$ olur. Yani

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a-h) = L$$

biçimindedir. Burada $h > 0$ olarak alındığından bu eşitlik

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(a-h) = L$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 5.5

Bir f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L sayısıdır ancak ve ancak f fonksiyonunun a noktasındaki sağ ve sol limitleri L sayısıdır.

☞ **İspat**
$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun a noktasındaki limiti L sayısı olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - L| < \epsilon \tag{5.7}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu $\delta > 0$ sayısı için $0 < |x-a| < \delta$ iken $a < x < \delta + a$ ve $a - \delta < x < a$ olduğundan

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

olur.
Tersine $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun a noktasındaki sağ ve sol limitleri L sayısı olsun. Öncelikle sağ limitin tanımından herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a < x < \delta_1 + a \tag{5.8}$$

olduğunda $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. Yine sol limitin tanımından aynı $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a - \delta_2 < x < a \tag{5.9}$$

olduğunda $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. Eğer $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı ve $x \in A$ için $0 < |x-a| < \delta_3$ iken (5.8) ve (5.9) sağlandığından $|f(x) - L| < \epsilon$ olur. Yani $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dir.

✍ **Not**
Tanım kümesi (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$ ve $(-\infty,a)$ biçiminde olan fonksiyonlar için tanım kümelerinin başlangıç ve bitiş noktalarında limit sadece tek yönlü limit olarak vardır. Örneğin (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ ve $(a,+\infty)$ kümelerinde tanımlı fonksiyonlar için limit

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

biçiminde tek yönlüdür. Yine $[a,b)$, $(a,b]$ kümelerinde tanımlı fonksiyonlarda limit

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

biçimindedir.

Örnek 5.8

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $a = 0$ noktasındaki limitini araştıralım. f fonksiyonunun tanım kümesi $D_f = [0,+\infty)$ olduğundan $a = 0$ noktasında sadece sağ limitten söz edilebilir. Burada $a = 0$ noktasına soldan yaklaşım yapılamamaktadır. Böylece

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to 0} x} = 0$$

dır.

✍ **Not**
Fonksiyonlarda limit araştırılırken sağ ve sol limite her zaman bakılabilir. Ancak bazı özel durumlarda sağ ve sol limitlere kesinlikle bakılmalıdır. Şimdi bu durumları ifade edelim.

1. Parçalı tanımlı fonksiyonların parçalandıkları noktalarda

2. Mutlak değer ve işaret fonksiyonlarının içini sıfır yapan noktalarda
3. Tam değer fonksiyonunun içini tamsayı yapan noktalarda
4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda

limit araştırılırken sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

Şimdi bazı örneklerle durumları inceleyelim.

Örnek 5.9

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 2x+5, & x<0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $a = 0$ noktasındaki limitini araştıralım. Bu fonksiyon parçalı bir fonksiyondur ve $a = 0$ bu fonksiyonun parçalandığı noktadır. O halde sağ ve sol limitler araştırılmalıdır.

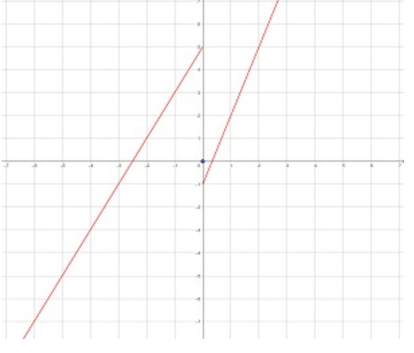
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x-1) = -1$$

ve

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+5) = 5$$

olup $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan bu fonksiyonun $a = 0$ noktasında limiti yoktur.

Bu örnekteki fonksiyonun grafiği aşağıdaki biçimdedir.



Örnek 5.10

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ limitini araştıralım. Dikkat edilirse burada $|x|$ ifadesinin içini sıfır yapan $a = 0$ noktasında limit sorulmaktadır. O halde sağ ve sol limite bakılmaldır.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-|x|}{x^2+|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x-1)}{(x+1)} = -1$$

ve

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)}{(x-1)}=-1$$

olup

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}=-1$$

olduğundan $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}=-1$ bulunur.

Örnek 5.11

$\lim\limits_{x\to 0} sgn(x^2-x)$ limitini araştıralım. $x^2-x=0$ ise $x=0$, $x=1$ olup $a=0$ noktası sgn fonksiyonunun içini sıfır yapar. O halde sağ ve sol limitlere bakılmalıdır. Öncelikle x^2-x için işaret incelenirse $x\in(-\infty,0)$ için $x^2-x>0$, $x\in(0,1)$ için $x^2-x<0$ ve $x\in(1,+\infty)$ için $x^2-x>0$ olur. Böylece

$$\lim_{x\to 0^+}\text{sgn}(x^2-x)=\lim_{x\to 0^+}(-1)=-1$$

ve

$$\lim_{x\to 0^-}\text{sgn}(x^2-x)=\lim_{x\to 0^+}(1)=1$$

olur. Buradan

$$\lim_{x\to 0^+}\text{sgn}(x^2-x)\neq\lim_{x\to 0^-}\text{sgn}(x^2-x)$$

olduğundan bu fonksiyonun $a=0$ noktasında limiti yoktur.

Örnek 5.12

$\lim\limits_{x\to 2}[|5x-2|]$ limitini araştıralım. Burada $x=2$ için $5x-2=8$ olup tam değer fonksiyonunun içi tamsayı olur. O halde sağ ve sol limitlere bakılmalıdır. Böylece

$$\lim_{x\to 2^+}[|5x-2|]=\lim_{h\to 0^+}[|5(2+h)-2|]=\lim_{h\to 0^+}[|5h+8|]=\lim_{h\to 0^+}[|5h|]+8=8$$

ve

$$\lim_{x\to 2^-}[|5x-2|]=\lim_{h\to 0^+}[|5(2-h)-2|]=\lim_{h\to 0^+}[|-5h+8|]=\lim_{h\to 0^+}[|-5h|]+8=-1+8=7$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{x\to 2^+}[|5x-2|]\neq\lim_{x\to 2^-}[|5x-2|]$$

olduğundan bu fonksiyonun $a=2$ noktasında limiti yoktur.

Örnek 5.13

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[|5x-2|]$ limitini araştıralım. Burada $x=\dfrac{1}{2}$ için $5x-2=\dfrac{1}{2}$ olup tam değer fonksiyonunun içi tamsayı değildir. O halde sağ ve sol limitler araştırılmadan limit aranabilir. Böylece

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} [|5x-2|] = \left[\left|\frac{1}{2}\right|\right] = 0$$

elde edilir.

Örnek 5.14

$\lim_{x\to 0} [|\sin x|]$ limitini araştıralım. Burada $x=0$ için $\sin x = 0$ olduğundan $a=0$ noktası tam değer fonksiyonunun içini sıfır yapmaktadır. O halde sağ ve sol limitlere bakılmalıdır. $x\to 0^+$ durumunda x I. bölgede olduğundan $0<\sin x<1$ olup $[|\sin x|]=0$ olur. Böylece

$$\lim_{x\to 0^+} [|\sin x|] = 0$$

bulunur. Ayrıca $x\to 0^-$ durumunda x IV. bölgede olduğundan $-1<\sin x<0$ olup $[|\sin x|] = -1$ olur. O halde

$$\lim_{x\to 0^-} [|\sin x|] = -1$$

dır. Buradan

$$\lim_{x\to 0^+} [|\sin x|] \neq \lim_{x\to 0^+} [|\sin x|]$$

olduğundan bu fonksiyonun $a=0$ noktasında limiti yoktur.

Örnek 5.15

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunu alalım. Burada fonksiyonun tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ kümesidir. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ limitini araştıralım. $a=0$ noktasında fonksiyon tanımsız olduğundan sağ ve sol limitlere bakılır. Böylece

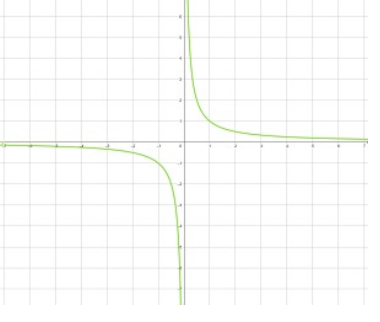
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$$

olarak bulunur.

Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki biçimdedir.



5.3 Limit Teoremleri

Öncelikle problem çözümlerinde yaygın kullanıma sahip olan dizilerde limit teoremlerinde de benzer şekilde ele aldığımız teoremi verelim.

Teorem 5.6 Sıkıştırma Teoremi

$f, g, h : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $a \in A'$ olsun. a noktasının uygun bir delinmiş komşuluğundaki her x için

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

şartı sağlansın. Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

ise $\lim_{x\to a} f(x) = L$ olur.

☞ İspat
Öncelikle $0 < |x - a| < \delta_1$ olan her $x \in A$ için

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{5.10}$$

olsun. Ayrıca

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

eşitliği sağlansın. İlk olarak, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ olduğundan herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$0 < |x - a| < \delta_2$$

iken

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \tag{5.11}$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $\lim_{x\to a} h(x) = L$ olduğundan aynı $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$0 < |x - a| < \delta_3$$

iken

$$|h(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \tag{5.12}$$

olacak şekilde bir $\delta_3 > 0$ sayısı vardır. Eğer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı ve $x \in A$ için $0 < |x - a| < \delta_3$ iken (5.10), (5.11) ve (5.12) sağlandığından

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon$$

olur. O halde $\lim_{x\to a} g(x) = L$ elde edilir.

Örnek 5.16

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x}=0$$

olduğunu sıkıştırma teoremini kullanarak gösterelim. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanımından her $x\in\mathbb{R}$ için $-1\leq\sin x\leq 1$ ve $-1\leq\cos x\leq 1$ olduğu biliniyor. Burada $x\to\pm\infty$ için limit sorulduğundan $x\neq 0$ olup $-\frac{1}{x}\leq\sin x\leq\frac{1}{x}$ ve $-\frac{1}{x}\leq\cos x\leq\frac{1}{x}$ yazılır. Ayrıca

$$\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

olur. O halde sıkıştırma teoremi gereği

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x}=0$$

bulunur.

Teorem 5.7

Bir f fonksiyonu a noktasının bir delinmiş komşuluğunda sınırlı ve $a\in\left(D_g\right)'$ olmak üzere $\lim_{x\to a}g(x)=0$ ise

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$$

olur.

☞ İspat

f fonksiyonu a noktasının bir delinmiş komşuluğunda sınırlı olsun. Böylece $0<|x-a|<\delta_1$ olan her $x\in D_f$ için

$$|f(x)|\leq M \tag{5.13}$$

olacak şekilde $M>0$ ve $\delta_1>0$ sayıları vardır. Ayrıca $\lim_{x\to a}g(x)=0$ olduğundan herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı ve her $x\in D_g$ için

$$0<|x-a|<\delta_2$$

iken

$$|g(x)|<\frac{\epsilon}{M} \tag{5.14}$$

olacak şekilde bir $\delta_2>0$ sayısı vardır. Eğer $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon>0$ sayısı ve her $x\in D_f\cap D_g$ için

$$0<|x-a|<\delta$$

iken (5.13), (5.14) kullanılarak

$$|f(x)g(x)-0|=|f(x)||g(x)|<\frac{\epsilon}{M}M=\epsilon$$

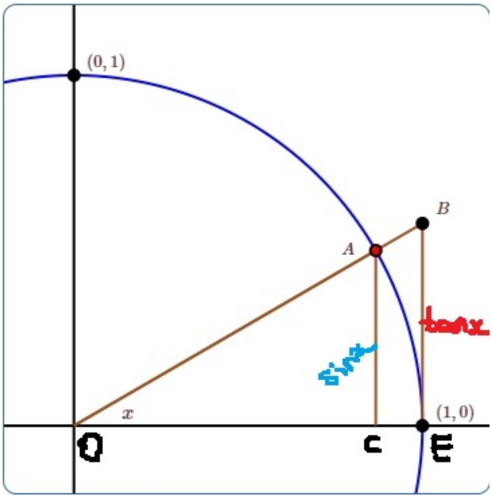
yazılır. Böylece

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$$

elde edilir.

Örnek 5.17

$\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ limitini araştıralım. Sinüs fonksiyonunun tanımından her $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ olduğundan $\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu sınırlıdır. Ayrıca $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ dır. O halde bir önceki teoremden $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ bulunur. (Limit sıkıştırma teoremi yardımıyla da bulunabilirdi.)



Şimdi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim. $\frac{\pi}{2} > x > 0$ olmak üzere yukarıda verilen şekilden $\overset{\triangle}{OAC}$ üçgenini alanı, $\overset{\wedge}{OAE}$ daire diliminin alanı ve $\overset{\triangle}{OBE}$ üçgeninin alanı arasında aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$A\left(\overset{\triangle}{OAC}\right) < A\left(\overset{\wedge}{OAE}\right) < A\left(\overset{\triangle}{OBE}\right)$$

Bu eşitsizlikten

$$\frac{\sin x \cos x}{2} < \pi 1^2 \frac{x}{2\pi} < \frac{\tan x . 1}{2}$$

yazılır. Böylece

$$\frac{1}{\sin x \cos x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$$

olup her üç taraf sinx ile çarpılırsa (burada $\frac{\pi}{2} > x > 0$ olduğundan $\sin x > 0$ dır.)

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \tag{5.15}$$

bulunur. Burada

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\cos x = 1$$

olduğundan (5.15) eşitsizliği kullanılarak sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5.16}$$

bulunur. Ayrıca

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(-h)}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\sin(h)}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}=1 \tag{5.17}$$

olup (5.16) ve (5.17) eşitliklerinden $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ elde edilir.

Not
Aşağıdaki limitler problem çözümlerinde kolaylık sağlar.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$ olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}\frac{bx}{bx}\frac{ax}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{a}{b}$$

olur. Eğer $ax=u$ denirse $x\to 0$ iken $u\to 0$ olup

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\frac{a}{b}$$

bulunur.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=1$ olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}\frac{\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

olur. Eğer $\sin x=u$ denirse $x\to 0$ iken $u\to 0$ olup

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

elde edilir.

3. Ayrıca $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1$$

olur.

4. Son olarak $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

bulunur.

Teorem 5.8 Limitin İşareti Koruma Özelliği

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L>0$ ise a noktasının bir delinmiş komşuluğu için $f(x)>0$ olur. Benzer şekilde $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L<0$ ise a noktasının bir delinmiş komşuluğu için $f(x)<0$ olur.

☞ **İspat**
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ olsun. Böylece her $x \in D_f$ için

$$0 < |x - a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - L| < \left|\frac{L}{2}\right| \tag{5.18}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \left|\frac{L}{2}\right| \Leftrightarrow |L| - \left|\frac{L}{2}\right| < |f(x)| < |L| + \left|\frac{L}{2}\right|$$

olup her $x \in D_f$ için

$$0 < |x - a| < \delta$$

iken

$$|f(x)| > \frac{|L|}{2}$$

bulunur. Eğer $L > 0$ ise $f(x) > \frac{L}{2}$ veya $f(x) < -\frac{L}{2}$ olur. Ancak (5.18) eşitsizliğinden $f(x) > \frac{L}{2}$ olmalıdır. $f(x) < -\frac{L}{2}$ olamaz. Bu takdirde $f(x) > \frac{L}{2} > 0$ olur. $L > 0$ durumunu da benzer şeklide gösterilir.

5.4 Sonsuz Limitler ve Sonsuzda Limitler

Tanım 5.5 Sonsuz Limitler

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun.

1. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$0 < |x - a| < \delta$$

iken

$$f(x) > \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ olur.

2. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$0 < |x - a| < \delta$$

iken

$$f(x) < -\epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ olur.

3. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a < x < \delta + a$$

iken

$$f(x) > \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ olur.

4. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a < x < \delta + a$$

iken

$$f(x) < -\epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ olur.

5. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a - \delta < x < a$$

iken

$$f(x) > \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ olur.

6. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a - \delta < x < a$$

iken

$$f(x) < -\epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ olur.

Tanım 5.6 Sonsuzda Limitler

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $L \in \mathbb{R}$ olsun.

1. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$x > \delta$$

iken

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ olur.

2. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$x < -\delta$$

iken

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ olur.

Tanım 5.7 Sonsuzda Sonsuz Limitler

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

1. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için
$$x > \delta$$
iken
$$f(x) > \epsilon$$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ olur.
2. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için
$$x > \delta$$
iken
$$f(x) < -\epsilon$$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ olur.
3. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için
$$x < -\delta$$
iken
$$f(x) > \epsilon$$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ olur.
4. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için
$$x < -\delta$$
iken
$$f(x) < -\epsilon$$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ olur.

5.5 Limitlerde Belirsiz Formlar

Daha önce genişletilmiş reel sayı kümesini ve bu küme üzerindeki cebirsel işlemleri göstermiştik. Şimdi limit durumunda karşılaştığımız bazı belirsizlikleri verelim.

Aşağıdaki ifadeler limiti alınan fonksiyonların türüne göre farklı sonuçlar verdiğinden bu ifadelere belirsiz formlar denir.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$$

Bu belirsiz formlarla karşılaşıldığında bazı cebirsel işlemlerle fonksiyonlar yeniden düzenlenmeli ve belirsizlik ortadan kaldırılmalıdır.

Aşağıda verilen bütün belirsizliklerde $a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$ ve sağ-sol limit durumları söz konusu olabilir.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ise $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Bu tip belirsizlikleri gidermek için **çarpanlara ayırma, özdeşlikler, eşlenik ile çarpıp bölme veya bazı özel limitler** ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ benzeri) kullanılır.

Örnek 5.18

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \to \frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır. Böylece

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Örnek 5.19

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x+1}$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x+1} \to \frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır. Böylece

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x+1} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \lim_{x\to -1} (x-1)$$

yazılır. Eğer $x^2-1=u$ denirse $x \to -1$ iken $u \to 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x+1} &= (-2) \lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \\ &= (-2) \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = -2 \end{aligned}$$

bulunur.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

ise

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Burada, genel olarak pay ve payda da uygun ortak parantezlere almalar yapılarak $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ olması kullanılır.

Örnek 5.20

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 3x + 2}{2x^3 + 3x + 4}$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 3x + 2}{2x^3 + 3x + 4} \to \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliği vardır. Böylece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 3x + 2}{2x^3 + 3x + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(4 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(4 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{\left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)} = 2$$

bulunur.

Not

✿ Eğer $a > 1$ ise

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

olur.

✿ Eğer $0 < a < 1$ ise

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

olur.

Örnek 5.21

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 3}{5^x - 4}$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 3}{5^x - 4} \to \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliği vardır. Böylece

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-3}{5^x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(1-\frac{3}{2^x}\right)}{5^x\left(1-\frac{4}{5^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{2^x}\right)}{\left(1-\frac{4}{5^x}\right)}=0$$

bulunur.

$0.\infty$ Belirsizliği

$f:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \text{ ve } \lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$$

ise

$$\lim_{x\to a}f(x)\,g(x)$$

limitinde $0.\infty$ belirsizliği vardır. Bu tip belirsizlikleri gidermek için

$$\lim_{x\to a}f(x)\,g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$$

belirsizliğine ya da

$$\lim_{x\to a}f(x)\,g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliğine geçilmelidir.

Örnek 5.22

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\to 0.\infty$$

belirsizliği vardır. O halde

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\to\frac{0}{0}$$

belirsizliğine geçilir. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}}\\ &= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}}$$
$$= 2.\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}$$

yazılır. Eğer $u=\frac{1}{2x}$ alınırsa $x\to+\infty$ iken $u\to 0$ olur. Buradan

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = 2.\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

$\infty-\infty$ Belirsizliği

$f:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$$

ise

$$\lim_{x\to a}f(x)-g(x)$$

limitinde $\infty-\infty$ belirsizliği vardır. Bu tip belirsizlikleri gidermek için genellikle eşlenik ile çarpıp bölme işlemiyle belirsizlik $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülür.

Örnek 5.23

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x+2}-\sqrt{4x^2+4x+4}$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x+2}-\sqrt{4x^2+4x+4}\to\infty-\infty$$

belirsizliği vardır. Böylece

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x+2}-\sqrt{4x^2+4x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x+2}-\sqrt{4x^2+4x+4}}{\frac{1}{\left(\sqrt{4x^2+3x+2}+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4x^2+3x+2\right)-\left(4x^2+4x+4\right)}{\sqrt{4x^2+3x+2}+\sqrt{4x^2+4x+4}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)} = -\frac{1}{4}$$

bulunur.

1^∞ Belirsizliği

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x) = 1 \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

ise

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

limitinde 1^∞ belirsizliği vardır. Bu tip belirsizlikleri gidermek için $\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$ limitinden faydalanırız. Bu limitlerde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}(1+f(x)-1)^{g(x)} \\ &= \lim_{x\to a}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)(f(x)-1)}\end{aligned}$$

yazılır. Eğer $u = \frac{1}{f(x)-1}$ alınırsa $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ olduğundan $x \to a$ iken $u \to +\infty$ olur. Böylece

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}} = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$$

olup

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)(f(x)-1)} \\ &= e^{\lim_{x\to a}(g(x)(f(x)-1))}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.24

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x}\right)^{3x+1}$$

limitini araştıralım. Burada

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x}\right)^{3x+1} \to 1^{\infty}$$

belirsizliği vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x}\right)^{3x+1} &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((3x+1)\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x}-1\right)\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((3x+1)\left(\frac{1-2x}{x^2+2x}\right)\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{-6x^2+x+1}{x^2+2x}\right)\right)} = e^{-6}
\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 6

Süreklilik

Tanım 6.1 Bir Noktada Süreklilik

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x - a| < \delta$$

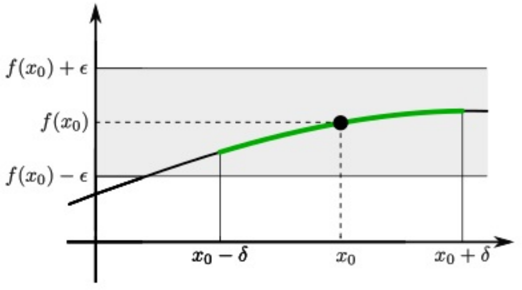
iken

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\epsilon, a))$ sayısı var ise f fonksiyonu a noktasında **süreklidir** denir. Bir f fonksiyonu a noktasında **sürekli değilse** fonksiyon o noktada **süreksizdir** denir.

✍ **Not**

Dikkat edilirse limit tanımından farklı olarak süreklilik araştırılan nokta f fonksiyonunun **tanım kümesine ait olmalıdır**. Yine bu tanımda limit tanımında verilen L sayısı yerine fonksiyonun **o noktadaki değeri olan** $f(a)$ sayısı alınmıştır.



Tanım 6.2 Kümede Süreklilik

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon her $a \in A$ için sürekli ise f fonksiyonu A kümesi üzerinde süreklidir denir. Eğer bu fonksiyon en az bir $a \in A$ noktasında **sürekli değilse** fonksiyon A kümesinde **süreksizdir** denir.

Örnek 6.1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun her $a \in \mathbb{R}$ için sürekli olduğunu yani $\mathbb{R}$ kümesinde sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ alalım. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x - a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulalım. Böylece

$$|x - a| < \delta \leq 1$$

iken

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= \left|x^2-a^2\right| \\ &= |x-a|\,|x+a| \\ &= |x-a|\,|x-a+a+a| \\ &\leq |x-a|\,(|x-a|+|2a|) \\ &< \delta(1+2|a|) \end{aligned}$$

olup $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ alınırsa

$$|x-a| < \delta \leq 1$$

iken

$$|f(x)-f(a)| < \epsilon$$

bulunur.

Teorem 6.1

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a \in A$ ve $a \in A'$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında ***sürekli olması için gerek ve yeter koşul***

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

olmasıdır.

İspat

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a \in A$ ve $a \in A'$ olsun.

Öncelikle f fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. Böylece süreklilik tanımından herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x-a| < \delta$$

iken

$$|f(x)-f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durum $x \neq a$ için de doğru olduğundan $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olur.

Şimdi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olsun. O halde limit tanımından herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$0 < |x-a| < \delta$$

iken

$$|f(x)-f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $x = a$ için

$$|f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| = 0 < \epsilon$$

olur. O halde f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

Tanım 6.3 izole (ayrık) nokta

$A \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a \in A$ noktası A kümesinin yığılma noktası değilse a noktasına A kümesinin **izole (ayrık) noktası** denir. O halde a noktasına A kümesinin **izole (ayrık) noktası** ise en az bir $\delta > 0$ sayısı için $A \cap (B(a,\delta) \setminus \{a\}) = \varnothing$ veya $A \cap B(a,\delta) = \{a\}$ olur.

Süreklilik Tanımıyla İlgili Açıklamalar ve Sonuçlar

Yukarıda verilen tanım ve teorem dikkate alındığında aşağıdaki durumlar gözlemlenir:

1. Eğer a noktası A kümesinin **izole (ayrık) noktası** ise A kümesi üzerinde tanımlı her f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Gerçekten izole nokta tanımından en az bir $\delta > 0$ sayısı için $A \cap B(a,\delta) = \{a\}$ olur. Böylece aynı $\delta > 0$ sayısı alınırsa herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x-a| < \delta$$

iken $x = a$ olup

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon$$

olur. Bu takdirde f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

2. $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında sürekli olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

- f fonksiyonu a noktasında tanımlı olmalıdır.
- f fonksiyonunun a noktasında limiti var olmalıdır.
- f fonksiyonunun a noktasında limiti a noktasındaki değerine eşit olmalıdır. Yani

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

olmalıdır.

✍ **Not**

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ ve $a \in A'$ olsun. Bu fonksiyonun a noktasındaki sürekliliği

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

eşitliği ile verildiğinden

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a)$$

olduğu görülür. Bu özellik **sürekli fonksiyonun limit ile yer değiştirebilmesi özelliğidir.**

Tanım 6.4 Sağdan süreklilik

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a \le x < a + \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında **sağdan süreklidir** denir.

Tanım 6.5 Soldan süreklilik

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$a - \delta < x \leq a$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında **soldan süreklidir** denir.

✿ Bu tanımlar dikkate alınarak, bir f fonksiyonunun a noktasında **sürekli olması** için gerek ve yeter koşul bu f fonksiyonunun a noktasında **sağdan ve soldan sürekli olmasıdır** sonucuna varılır. (ispat; "limit vardır $\Longleftrightarrow$ sağ ve sol limit vardır" teoremine benzer olduğundan verilmemiştir.)

Not

Eğer f fonksiyonunun tanım kümesi $[a, b]$ formunda bir aralık ise a ve b noktalarında süreklilik araştırılırken a noktasında **sağdan**, b noktasında **soldan** sürekliliğe bakılır. Böylece f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının iç noktalarında sürekli ve a noktasında **sağdan**, b noktasında **soldan** sürekli ise f fonksiyonu $[a, b]$ **kümesinde süreklidir** denir.

Teorem 6.2 Sürekli fonksiyonlarda cebirsel işlemler

$f, g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli ise $f \mp g$, $f.g$, her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $g(a) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k.f$ fonksiyonları da a noktasında süreklidirler.

İspat

Süreklilik bir limit problemi olduğundan limit teoremleri ve süreklilik tanımından ispat açıktır.

Teorem 6.3 Mutlak değer fonksiyonunun sürekliliği

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in A$ noktasında sürekli ise $|f|$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

İspat

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in A$ noktasında sürekli olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x - a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu $\delta > 0$ sayısı için

$$|x - a| < \delta$$

iken ters üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

yazılır. Bu takdirde $|f|$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında süreklidir.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 6.2

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Böylece $|f(x)| = 1$ sabit fonksiyon olur. $a = 0$ noktasını alalım. $|f|$ sabit fonksiyonu $a = 0$ noktasında sürekli iken f fonksiyonu bu $a = 0$ noktasında süreksizdir.

Teorem 6.4 Bileşke fonksiyonunun sürekliliği

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer f fonksiyonu a noktasında sürekli ve g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekli ise $g \circ f$ fonksiyonu da $a \in A$ noktasında süreklidir.

☞ **İspat**
Limit bölülümde verilen bileşke fonksiyonun limitinin ispatına benzer şeklide yapılır.

Teorem 6.5 Süreklilik ile dizisel süreklilik ilişkisi

*$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve $a \in A$ noktasında sürekli olması için **gerek ve yeter koşul** $x_n \to a$ olan A kümesindeki her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to f(a)$ olmasıdır. (Bu teoremin ikinci kısmında verilen ifade literatürde **dizisel süreklilik** adlandırılır.)*

☞ **İspat**
a noktası A kümesinin yığılma noktası ise ispat, limit bölümünde ifade edilen "**Heyne ve Cauchy limit tanımları denktir**" teoreminin ispatına benzerdir. Eğer a noktası A kümesinin **izole** noktası ise fonksiyon a noktasında her zaman süreklidir (Süreklilik tanımıyla ilgili açıklamalar başlığı 1'de verilmiştir). Ayrıca izole nokta tanımından $x_n \to a$ olan her (x_n) dizisi için her $n \geq n_0$ iken

$$A \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$$

(Burada $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ olduğuna dikkat ediniz.) olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece bu $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı için $n \geq n_0$ iken $f(x_n) = f(a)$ olur. O halde $f(x_n) \to f(a)$ bulunur.

6.1 Süreksizlik Çeşitleri

Tanım 6.6

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun. Eğer f fonksiyonunun a noktasında **limiti var** ancak a noktasında **süreksiz** ise f fonksiyonu a noktasında **kaldırılabilir süreksizliğe** sahiptir denir. Burada aşağıda verilen iki alt durum vardır:

1. $a \notin A$ durumudur.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ve $L \neq f(a)$ durumudur.

✍ **Not**
Bu tip süreksizliklerde, fonksiyonun a noktasındaki değerini bu noktadaki limit değeri olarak alarak, fonksiyon o noktada sürekli hale getirilebilir. Bir f fonksiyonu a noktasında **kaldırılabilir süreksizliğe** sahip olsun. Bu fonksiyon

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & x=a \end{cases}$$

biçiminde yeniden tanımlanarak a noktasında sürekli hale getirilebilir.

Örnek 6.3

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

fonksiyonunu alalım.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

olduğunu göstermiştik. $a=0$ noktasında fonksiyon tanımsız olduğundan f fonksiyonu bu noktada **kaldırılabilir süreksizliğe** sahiptir**.**
Eğer fonksiyon

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

olarak yeniden tanımlanırsa F fonksiyonu $a=0$ noktasında **sürekli** olur.

Tanım 6.7
$f : A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon $a\in A$ ve $a\in A'$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1\,,\ \lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$$

ve $L_1\neq L_2$ ise f fonksiyonu a noktasında **sıçrama tipi süreksizliğe** sahiptir denir. Burada $|L_1-L_2|$ sayısına fonksiyonun a noktasındaki **sıçraması** denir.

Örnek 6.4

$$f(x)=\begin{cases} x-4, & x\geq 1 \\ x^2+3, & x<1 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonu $a=1$ noktasında inceleyelim. Burada $1\in\mathbb{R}$ dir. Ayrıca

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x-4=-3$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+3=4$$

olduğundan $a=1$ noktasında limit yoktur. O halde f fonksiyonu a noktasında **sıçrama tipi süreksizliğe** sahiptir. Sıçraması $|L_1-L_2|=|-3-4|=7$ olur.

Tanım 6.8

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$ olsun. Eğer f fonksiyonunun a noktasında **sağdan ve soldan** limitlerinden **en az biri yoksa** veya bu limitlerden **en az biri** $\pm\infty$ oluyorsa fonksiyon bu a noktasında **süreksizdir.** Bu süreksizliğe f fonksiyonunun a noktasındaki **sonsuz süreksizliği** veya **ikinci tip süreksizliği** denir.

Örnek 6.5

$$f(x) = \frac{x+3}{4-x}$$

fonksiyonunu alalım. Burada $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ olup $a = 4 \in D_f'$ dir. Burada

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x+3}{4-x} = -\infty$$

olduğundan $a = 4$ noktasında **sonsuz süreksizlik** veya **ikinci tip süreksizlik** vardır.

6.2 Süreklilik ile İlgili Teoremler

Bu bölümde sürekli fonksiyonlarla ilgili temel teoremler verilecektir.

Teorem 6.6 Sürekli fonksiyonların işareti koruma özelliği

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in A$ noktasında sürekli ve $f(a) \neq 0$ olsun. O halde a noktasının uygun bir komşuluğundaki tüm x noktaları için $f(x)$ ile $f(a)$ aynı işaretlidir. (Limitin işareti koruma özelliğine benzer ispat edilebilir. Ancak burada farklı bir ispat yolu izlenecektir.)

☞ **İspat**

İlk olarak $f(a) > 0$ olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan $\epsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x-a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu $\delta > 0$ sayısını alalım. Böylece her $x \in A$ için

$$|x-a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \Leftrightarrow f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}$$

olup

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

bulunur. O halde $f(a) > 0$ olduğundan her $x \in A$ için

$$|x-a| < \delta$$

iken

$$0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

elde edilir.

Şimdi $f(a) < 0$ olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan $\epsilon = -\frac{f(a)}{2} > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için

$$|x - a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu $\delta > 0$ sayısını alalım. Böylece her $x \in A$ için

$$|x - a| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2} \Leftrightarrow f(a) + \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) - \frac{f(a)}{2}$$

olup

$$\frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2}$$

bulunur. O halde $f(a) < 0$ olduğundan her $x \in A$ için

$$|x - a| < \delta$$

iken

$$f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

elde edilir.

Teorem 6.7 Bolzano-Cauchy

*$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli sayılar yani $f(a)f(b) < 0$ olsun. O halde $f(c) = 0$ olacak şekilde **en az bir** $c \in (a, b)$ vardır.*

*(Bu teorem **geometrik** olarak yorumlanırsa; f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının içindeki en az bir noktada x-eksenini keser denir. Teorem **cebirsel** açıdan yorumlanırsa; $f(x) = 0$ denkleminin (a, b) aralığında en az bir kökünün varlığı ifade edilmiş olur.)*

☞ **İspat**
İspatı iki alt durumda ele alalım.

1. Öncelikle $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ olsun. Bir A kümesini $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$ biçiminde tanımlayalım. $f(a) < 0$ olduğundan $a \in A$ olup $A \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $A \subset [a, b]$ olduğundan sınırlı olup supremumu vardır. $\sup A = c_1$ olsun. $f(c_1) = 0$ olduğunu gösterelim.

   $f(c_1) > 0$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonu c_1 noktasında sürekli olduğundan işareti koruma özelliğinden dolayı bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in [a, b]$ için

$$c_1 - \delta < x < c_1 + \delta \tag{6.1}$$

iken $f(x) > 0$ olur. Ayrıca $\sup A = c_1$ olduğundan supremumun karakteristik özelliği gereği $c_1 - \delta < d$ olacak şekilde en az bir $d \in A$ vardır. Yine supremum tanımından $d \leq c_1$ olup

$$c_1 - \delta < d < c_1 + \delta$$

yazılır. Böylece (6.1) den dolayı $f(d) > 0$ olur. Ancak bu durum $d \in A$ olmasıyla çelişir. Çelişki $f(c_1) > 0$ kabulünden kaynaklanır. O halde $f(c_1) > 0$ olamaz.

Şimdi $f(c_1) < 0$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonu c_1 noktasında sürekli olduğundan işareti koruma özelliğinden dolayı bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in [a, b]$ için

$$c_1 - \delta < x < c_1 + \delta$$

iken $f(x) < 0$ olur. O halde $c_1 - \delta < c_1$ olduğundan

$$c_1 < k < c_1 + \delta$$

olan k sayısı için $k \in A$ olur. Ancak durum $\sup A = c_1$ olmasıyla çelişir. Çelişki $f(c_1) < 0$ kabulünden kaynaklanır. O halde $f(c_1) < 0$ olamaz.
Bu takdirde $f(c_1) = 0$ dır. Böylece $f(a) < 0, f(b) > 0$ ve $f(c_1) = 0$ olduğundan $c_1 \in (a, b)$ dir.

2. Şimdi $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$ olsun. Bir B kümesini $B = \{x \in [a, b] | f(x) \geq 0\}$ biçiminde tanımlayalım. $f(a) > 0$ olduğundan $a \in B$ olup $B \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $B \subset [a, b]$ olduğundan sınırlı olup supremumu vardır. $\sup B = c_2$ olsun. $f(c_2) = 0$ olduğunu gösterelim.

$f(c_2) > 0$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonu c_2 noktasında sürekli olduğundan işareti koruma özelliğinden dolayı bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in [a, b]$ için

$$c_2 - \delta < x < c_2 + \delta$$

iken $f(x) > 0$ olur. O halde $c_2 - \delta < c_2$ olduğundan

$$c_2 < l < c_2 + \delta$$

olan l sayısı için $l \in B$ olur. Ancak durum $\sup B = c_2$ olmasıyla çelişir. Çelişki $f(c_2) > 0$ kabulünden kaynaklanır. O halde $f(c_2) > 0$ olamaz.

Şimdi $f(c_2) < 0$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonu c_2 noktasında sürekli olduğundan işareti koruma özelliğinden dolayı bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in [a, b]$ için

$$c_2 - \delta < x < c_2 + \delta \tag{6.2}$$

iken $f(x) < 0$ olur. Ayrıca $\sup B = c_2$ olduğundan supremumun karakteristik özelliği gereği $c_2 - \delta < e$ olacak şekilde en az bir $e \in B$ vardır. Yine supremum tanımından $e \leq c_2$ olup

$$c_2 - \delta < e < c_2 + \delta$$

yazılır. Böylece (6.2) den dolayı $f(e) < 0$ olur. Ancak bu durum $e \in B$ olmasıyla çelişir. Çelişki $f(c_2) < 0$ kabulünden kaynaklanır. O halde $f(c_2) < 0$ olamaz.
Bu takdirde $f(c_2) = 0$ dır. Böylece $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ ve $f(c_2) = 0$ olduğundan $c_2 \in (a,b)$ dir.

Örnek 6.6

$x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminin $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ aralığında en az bir kökü olduğunu teorem yardımıyla ifade edelim. $\left[\frac{3}{2}, 5\right]$ kümesinde tanımlı $f(x) = x^2 - 3x + 2$ fonksiyonunu alalım. Polinom tipli bu fonksiyon $\left[\frac{3}{2}, 5\right]$ kümesinde süreklidir. Yine

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4} < 0$$

ve

$$f(5) = 25 - 15 + 2 = 12 > 0$$

olup $f\left(\frac{3}{2}\right) f(5) < 0$ olur. O halde Bolzano-Cauchy teoreminin koşulları sağlanır. Bu takdirde

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow c^2 - 3c + 2 = 0$$

olacak şekilde **en az bir** $c \in \left(\frac{3}{2}, 5\right)$ sayısı vardır.

Teorem 6.8 Ara değer teoremi

*$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a) = A$ ile $f(b) = B$ ve $A < B$ olsun. O halde $A < k < B$ olan her $k \in \mathbb{R}$ için $f(c) = k$ olacak şekilde **en az bir** $c \in (a,b)$ vardır.*

☞ **İspat**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a) = A$ ile $f(b) = B$ ve $A < B$ olsun. $A < k < B$ olan her $k \in \mathbb{R}$ için $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - k$ fonksiyonunu tanımlayalım. O halde f fonksiyonu $[a,b]$ kümesinde sürekli olduğundan g fonksiyonu da $[a,b]$ kümesinde sürekli olur. Burada $g(a) = f(a) - k$ ve $f(a) < k$ olduğundan

$$g(a) = f(a) - k < 0$$

olur. Yine $g(b) = f(b) - k$ ve $k < f(b)$ olduğundan

$$g(b) = f(b) - k > 0$$

olur. Böylece Bolzano-Cauchy teoreminin koşulları sağlanır. Bu takdirde

$$g(c) = f(c) - k = 0 \Leftrightarrow f(c) = k$$

olacak şekilde **en az bir** $c \in (a, b)$ vardır.

Teorem 6.9

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

☞ **İspat**

Bu f fonksiyonunun sınırlı olmadığını kabul edelim. O halde her $M > 0$ sayısı için $|f(x)| > M$ olacak şekilde bir $x \in [a, b]$ vardır. Bu durum, her $M > 0$ sayısı için geçerli olduğundan her n doğal sayısı içinde doğru olur. Böylece $[a, b]$ aralığından her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n)| > n$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. $[a, b]$ aralığı sınırlı olduğundan (x_n) dizisi de sınırlı olur. Böylece Bolzano-Weierstrass (diziler bölümünde) teoreminden (x_n) dizisinin $x_{n_k} \to x_0$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Ayrıca $[a, b]$ aralığı kapalı olduğundan $x_0 \in [a, b]$ dir. O halde f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Dizisel süreklilikten $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ olur. Yine

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$$

dır. Ancak her $n_k \in \mathbb{N}$ için $|f(x_{n_k})| > n_k$ olduğundan $|f(x_{n_k})| \to +\infty$ olur. Bu durum $|f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$ olmasıyla çelişir. Çelişki f fonksiyonunun sınırlı olmadığı kabulünden kaynaklanır. Bu takdirde f fonksiyonu sınırlıdır.

Teorem 6.10 Ekstremum değer teoremi veya uç değer teoremi

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu supremum ve infimum değerlerini $[a, b]$ aralığındaki noktalarda alır. Yani $\sup\{f(x) |\ x \in [a, b]\} = M$, $\inf\{f(x) |\ x \in [a, b]\} = m$ ise $f(c) = M$ ve $f(d) = m$ olacak şekilde $c, d \in [a, b]$ sayıları vardır. "Böylece supremum ve infimum değerler olan M, m sayıları $\{f(x) |\ x \in [a, b]\}$ kümesine ait olduklarından bu f fonksiyonu maksimum ve minumum değerlerine $[a, b]$ aralığında ulaşır."

☞ **İspat**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise bir önceki teoremden sınırlıdır. Böylece supremum ve infimum değerleri vardır. O halde

$$\sup\{f(x) |\ x \in [a, b]\} = M \text{ ve } \inf\{f(x) |\ x \in [a, b]\} = m$$

olsun.

İlk olarak her $x \in [a, b]$ için $f(x) \neq M$ olduğunu kabul edelim. $\sup\{f(x) |\ x \in [a, b]\} = M$ olduğundan her $x \in [a, b]$ için $f(x) \leq M$ dir. Ayrıca $f(x) \neq M$ olduğundan her $x \in [a, b]$ için $f(x) < M$ olur. Şimdi bir $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ biçiminde tanımlayalım. Bu g fonksiyonu $[a, b]$ kümesinde sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani her $x \in [a, b]$ için

$$|g(x)| = g(x) \leq K \ (f(x) < M \Leftrightarrow 0 < M - f(x))$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Böylece her $x \in [a, b]$ için

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq K \Leftrightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{K} \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{K}$$

yazılır. Buradan $M - \frac{1}{K}$ sayısı

$$\{f(x) | \ x \in [a, b]\}$$

kümesinin bir üst sınırı olur. Bu durum $\sup\{f(x) | \ x \in [a, b]\} = M$ olmasıyla çelişir. Çelişki her $x \in [a, b]$ için $f(x) \neq M$ alınmasından kaynaklıdır. O halde en az bir $x \in [a, b]$ için $f(x) = M$ dir. Şimdi her $x \in [a, b]$ için $f(x) \neq m$ olduğunu kabul edelim. $\inf\{f(x) | \ x \in [a, b]\} = m$ olduğundan her $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x)$ dir. Ayrıca $f(x) \neq m$ olduğundan her $x \in [a, b]$ için $m < f(x)$ olur. Şimdi bir $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $g(x) = \frac{1}{f(x) - m}$ biçiminde tanımlayalım. Bu g fonksiyonu $[a, b]$ kümesinde sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani her $x \in [a, b]$ için

$$|g(x)| = g(x) \leq L \ (m < f(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) - m)$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı vardır. Böylece her $x \in [a, b]$ için

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - m} \leq L \Leftrightarrow f(x) - m \geq \frac{1}{L} \Leftrightarrow f(x) \geq m + \frac{1}{L}$$

yazılır. Buradan $m + \frac{1}{L}$ sayısı

$$\{f(x) | \ x \in [a, b]\}$$

kümesinin bir alt sınırı olur. Bu durum $\inf\{f(x) | \ x \in [a, b]\} = m$ olmasıyla çelişir. Çelişki her $x \in [a, b]$ için$f(x) \neq m$ alınmasından kaynaklıdır. O halde en az bir $x \in [a, b]$ için $f(x) = m$ dir.

✍ **Not**
Bu bölümde verilen bütün teoremlerdeki hipotezlerin tüm koşulları sağlanmalıdır. Bu zorunlu duruma, son yazdığımız teoremin koşullarının esnetilmesi dolayısıyla teoremin sağlanmadığı örnekler verelim.

Örnek 6.7

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon $(0, 1)$ kümesinde süreklidir. Burada

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 2 < x + 2 < 3$$

olduğundan

$$\sup\{f(x) | \ x \in (0, 1)\} = 3 \text{ ve } \inf\{f(x) | \ x \in (0, 1)\} = 2$$

iken $f(c) = 2$ ve $f(d) = 3$ olacak şekilde $c, d \in (0, 1)$ sayıları yoktur. Bunun nedeni teoremin hipotezinde verilen $[a, b]$ koşulunun sağlanmamasıdır. (Burada tanım kümesinin kapalı aralık olması şartı sağlanmadı.)

Örnek 6.8

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\arctan x$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon $\mathbb{R}$ de sürekli olduğundan $[0,+\infty)$ kümesinde de süreklidir. Bu fonksiyonun tanımından her $x\in[0,+\infty)$ için $0\le f(x)<\frac{\pi}{2}$ yazılır. O halde

$$\sup\{f(x)|\ x\in[0,+\infty)\}=\frac{\pi}{2} \text{ ve } \inf\{f(x)|\ x\in[0,+\infty)\}=0$$

olur. Ancak $f(d)=\frac{\pi}{2}$ olacak şekilde bir $d\in[0,+\infty)$ sayısı yoktur. Yine bunun nedeni teoremin hipotezinde verilen $[a,b]$ koşulunun sağlanmamasıdır. (Burada tanım kümesinin sınırlı olması şartı sağlanmadı.)

Örnek 6.9

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1) \\ \frac{1}{2}, & x=0, x=1 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Böylece her $x\in[0,1]$ için $0<f(x)<1$ yazılır. O halde

$$\sup\{f(x)|\ x\in[0,1]\}=1 \text{ ve } \inf\{f(x)|\ x\in[0,1]\}=0$$

olur. Ancak $f(c)=0$ ve $f(d)=1$ olacak şekilde $c,d\in[0,1]$ sayıları yoktur. Bunun nedeni teoremin hipotezinde verilen süreklilik koşulunun sağlanmamasıdır. Gerçekten

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0\neq f(0)=\frac{1}{2}$$

olduğundan f fonksiyonu $a=0$ noktasında ve dolayısıyla $[0,1]$ kümesinde sürekli değildir.

Bir fonksiyon monoton artan veya monoton azalan iken birebir olduğu fonksiyonlar bölümünde ifade edilmişti. Şimdi fonksiyon sürekli iken bu teoremin tersinin de doğru olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 6.11

*$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **sürekli** bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun **birebir** olması için **gerek ve yeter koşul** monoton artan veya monoton azalan olmasıdır.*

✿ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu **sürekli monoton artan veya monoton azalan ise** $Y=f([a,b])$ olmak üzere $f^{-1}:Y\to[a,b]$ ters fonksiyonu vardır.

6.3 Düzgün Süreklilik

Süreklilik tanımında aranan $\delta > 0$ sayısı için $\delta = \delta(\epsilon, a)$ olduğu ifade edilmişti. O halde buradaki δ sayısı hem ϵ sayısına hem de a noktasına bağlı olabilir. Bazı durumlarda verilen fonksiyonun tanım kümesindeki her elemanı için δ sayısı sadece ϵ sayısına bağlı olarak bulunabilir. Bu özel duruma **düzgün süreklilik** denir. Süreklilik tanımı, bir noktada süreklilik için anlamlı oluyorken, düzgün süreklilik bir küme üzerinde anlamlı olacaktır. Yani bir noktada düzgün süreklilikten söz edilemez.

Tanım 6.9 Düzgün Süreklilik

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x, y \in A$ için

$$|x - y| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\epsilon))$ sayısı var ise f fonksiyonu A kümesi üzerinde **düzgün süreklidir** denir.

Not

Bu tanım incelendiğinde **düzgün süreklilik** ile **süreklilik** arasında **iki temel fark** gözlemlenir. Bunlardan ilki δ sayısının **sadece** ϵ sayısına bağlı olması ikincisi de düzgün sürekliliğin nokta yerine **kümede tanımlanmasıdır**.

Örnek 6.10

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$$

birim fonksiyonunu alalım. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x - y| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta$$

olup $\delta = \epsilon$ alınırsa

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

bulunur. O halde fonksiyon $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün süreklidir.

Not

Bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun A kümesinde düzgün sürekli **olmaması** aşağıdaki biçimde ifade edilir: Her $\delta > 0$, en az bir $\epsilon > 0$ ve $x, y \in A$ için

$$|x - y| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

olmasıdır.

✍ **Not**
Düzgün süreklilik tanımından **her düzgün sürekli fonksiyon süreklidir.** Ancak **sürekli** her fonksiyon **düzgün sürekli olmak zorunda değildir**. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 6.11
Daha önce sürekli olduğu gösterdiğimiz

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$$

fonksiyonunu alalım. Hatırlanacağı gibi herhangi bir $a\in\mathbb{R}$ noktasında süreklilik araştırılırken $\delta>0$ sayısı $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ olarak bulunmuştu. Yani hem ϵ sayısına hem de a noktasına bağlı bir δ sayısı bulunmuştu. O halde bu fonksiyon $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli değildir. Şimdi düzgün süreksizliği gösterelim. Her $\delta>0$ sayısı için $x=\dfrac{1}{\delta}$ ve $y=\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$ alınırsa

$$|x-y|=\left|\frac{1}{\delta}-\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)\right|=\frac{\delta}{2}<\delta$$

olup $\epsilon=1$ sayısı için

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{1}{\delta^2}-\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)^2\right| \\
&= \left|\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\delta^2}-1-\frac{\delta^2}{4}\right| \\
&= 1+\frac{\delta^2}{4} \\
&> \epsilon
\end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli değildir.
Eğer fonksiyon

$$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=x^2$$

biçiminde verilirse, herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı ve her $x,y\in[0,1]$ için

$$|x-y|<\delta$$

iken

$$|g(x)-g(y)|=\left|x^2-y^2\right|=|x+y|\,|x-y|\leq 2|x-y|<2\delta$$

olup $\delta=\dfrac{\epsilon}{2}$ alınırsa

$$|g(x)-g(y)|<\epsilon$$

bulunur. O halde g fonksiyonu $[0,1]$ kümesinde düzgün sürekli olur.

✍ **Not**
Bu son örnek bir fonksiyonun **düzgün sürekliliğinin tanımlı olduğu kümeye bağlı** olduğunu göstermektedir. Bir fonksiyon bir A kümesinde düzgün sürekli değilken bir $B \subset A$ kümesinde düzgün sürekli olabilmektedir.

✍ **Not**
Düzgün sürekli iki fonksiyonun **toplamı ve farkı düzgün sürekli** iken **çarpımı ve bölümü** düzgün sürekli **olmak zorunda değildir**. Önceki iki örnek ele alındığında

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$$

birim fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli iken $f.f$ biçiminde tanımlı

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=x^2$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli değildir.

✍ **Not**
Bir $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun A kümesinde düzgün sürekli olmaması aşağıdaki biçimde de karakterize edilebilir:
A kümesinde (x_n) ve (y_n) dizileri her $n\in\mathbb{N}$ için

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$$

iken

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon$$

olacak şekilde en az bir $\epsilon>0$ sayısı varsa f fonksiyonu A kümesinde **düzgün sürekli değildir.**
(Burada $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi yerine sıfıra yakınsayan herhangi bir dizi alınabilir.)

Teorem 6.12
*$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **sürekli** bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu **düzgün süreklidir**.*

☞ **İspat**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **sürekli** bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını kabul edelim. O halde $[a,b]$ kümesinde (x_n) ve (y_n) dizileri her $n\in\mathbb{N}$ için

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$$

iken

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon$$

olacak şekilde en az bir $\epsilon>0$ sayısı vardır. (x_n) ve (y_n) dizileri $[a,b]$ kümesinde olduklarından sınırlıdırlar. O halde Bolzano-Weierstrass (diziler bölümünde) teoreminden (x_n) ve (y_n) dizilerinin yakınsak (x_{n_k}) ve (y_{n_k}) alt dizileri vardır. $x_{n_k}\to x_0$ ise $[a,b]$ aralığı kapalı olduğundan $x_0\in$

$[a,b]$ dır. Şimdi $y_{n_k} \to x_0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left|y_{n_k} - x_0\right| &= \left|y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0\right| \\
&\leq \left|y_{n_k} - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x_0\right| \\
&< \frac{1}{n_k} + \left|x_{n_k} - x_0\right|
\end{aligned}$$

olur. Burada $k \to \infty$ iken $\frac{1}{n_k} \to 0$ ve $\left|x_{n_k} - x_0\right| \to 0$ olduğundan $y_{n_k} \to x_0$ bulunur. Ayrıca f fonksiyonu $x_0 \in [a,b]$ noktasında süreklidir. Dizisel süreklilikten

$$f\left(x_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right) \text{ ve } f\left(y_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$$

olur. O halde aynı $\epsilon > 0$ sayısı için sırasıyla her $n \geq n_1$ ve her $n \geq n_2$ iken

$$\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_0\right)\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{6.3}$$

ve

$$\left|f\left(y_{n_k}\right) - f\left(x_0\right)\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{6.4}$$

yazılır. Eğer $n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$ alınırsa aynı $\epsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ iken (6.3) ve (6.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| &= \left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_0\right) + f\left(x_0\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| \\
&\leq \left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_0\right)\right| + \left|f\left(x_0\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| < \epsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durum her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

iken

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

olmasıyla çelişir. Çelişki f fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığı kabulünden kaynaklanır. O halde f fonksiyonu **düzgün süreklidir**.

Tanım 6.10 Lipschitz koşulu

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in A$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu **Lipschitz koşulunu sağlar** denir.

Teorem 6.13

*$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu **Lipschitz koşulunu sağlıyorsa düzgün süreklidir.***

☞ **İspat**
f fonksiyonu **Lipschitz koşulunu sağladığından** her $x, y \in A$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M\ |x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Böylece herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x, y \in A$ için

$$|x - y| < \delta$$

iken

$$|f(x) - f(y)| \leq M\ |x - y| < M\,\delta$$

olup $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ alınırsa

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

bulunur. O halde fonksiyon A kümesinde düzgün süreklidir.

Örnek 6.12

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$$

fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını gösterelim. Öncelikle her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|\sin x| \leq |x|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece bu eşitsizlik kullanılarak her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sin x - \sin y| \\ &= 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$$

fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. O halde bu fonksiyon aynı zamanda düzgün süreklidir.

KAYNAKÇA

1. R. A. Adams, C. Essex, Calculus: A Complete Course, 9. baskı, Pearson, Canada, 2018.
2. O. Bizim, A. Tekcan, B. Gezer, Genel Matematik I, 3. baskı, Dora Basım-Yayın Dağıtım, Bursa, 2012.
3. A. Dernek, Analiz I, 2. baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2009.
4. P. M. Fitzpatrick, Advanced Calculus, 2. baskı, Thomson Books/Cole, USA, 2006.
5. E. D. Gaughan, Introduction to Analysis, 4. baskı, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1993.
6. S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, A Course in Calculus and Real Analysis, Springer Scienece+Business Media, New York, 2006.
7. B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, İ. Ekincioğlu, Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I, 2. baskı, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2007.
8. S. Öztop Kaptanoğlu, Analiz I, 1. baskı, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2022.
9. G. B. Thomas, M. D.Weir, J. Hass, F. R. Giordano, Thomas' Calculus, 11. Baskı, Addison-Wesley, 2005.
10. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3. baskı, McGraw-Hill, USA, 1976.