

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
HARİTA MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**



**ROBUST EN KÜÇÜK KIRPILMIŞ KARELER YÖNTEMİ VE
UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ ANALİZİ**

Yüksek Lisans Tezi

Hasan DİLMAÇ

Danışman

Prof. Dr. Yasemin ŞİŞMAN

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Hasan DİLMAÇ tarafından, Prof. Dr. Yasemin ŞİŞMAN danışmanlığında hazırlanan “Robust En Küçük Kırpılmış Kareler Yöntemi ve Uyuşumsuz Ölçü Analizi” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 25.6.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Mualla YALÇINKAYA Karadeniz Teknik Üniversitesi Harita Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Yasemin ŞİŞMAN Ondokuz Mayıs Üniversitesi Harita Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Prof. Dr. Sebahattin BEKTAŞ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Harita Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

İmza

21 /06 / 2021

Hasan DİLMAÇ

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Robust En Küçük Kırpılmış Kareler Yöntemi ve Uyuşumsuz Ölçü Analizi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 28/06/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 4

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

İmza

28 /06 / 2021

Prof. Dr. Yasemin ŞİŞMAN

ÖZET

ROBUST EN KÜÇÜK KIRPILMIŞ KARELER YÖNTEMİ VE UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ ANALİZİ

Hasan DİLMAÇ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Harita Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Haziran/2021

Danışman: Prof. Dr. Yasemin ŞİŞMAN

Jeodezik çalışmalarda, tek anlamlı çözüm elde etmek için dengeleme hesabı yapılır. En Küçük Kareler yöntemi (EKK) hesap kolaylığı ve gelenekselliğinden dolayı en çok tercih edilen dengeleme hesabı yöntemidir. Fakat ölçü grubunun sıklıkla uyuşumsuz ölçü içermesi, EKK yönteminin sonuçlarını oldukça olumsuz yönde etkilemektedir. Her ne kadar uyuşumsuz ölçüleri belirlemek adına EKK yöntemine dayalı geleneksel uyuşumsuz ölçü testi yöntemleri geliştirilmiş olsa da EKK yönteminin hataları yayıcı etkisinden dolayı bu testler de başarılı olamamaktadır. Uyuşumsuz ölçülerin doğru bir şekilde belirlenebilmesi için ‘Robust’ kavramı ortaya çıkmış ve Robust Regresyon başlığı altında bir çok yöntem geliştirilmiştir.

Bu tezde EKK yöntemi ile birlikte bir çok Robust yöntem ele alınmış ve çözüm yöntemleri açıklanmıştır. Uygulama için Robust En Küçük Kırpılmış Kareler (EKKK) yöntemi seçilmiş ve bu başlık altında kesin ve yaklaşık EKKK çözümleri olmak üzere iki çözümden bahsedilmiştir. Uygulamada materyal olarak Leica TS16 Robotik Total Station aletiyle elde edilmiş bir pencereye ait nokta bulutu verisi kullanılmıştır. EKK ve EKKK yöntemleri kullanılarak 5 ayrı uygulama ile noktalardan düzlem geçirilmiştir. Her bir uygulamanın sonuçları irdelenmiş ve genel anlamda EKKK yönteminin uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarısı ortaya konmuştur.

Anahtar Sözcükler: Regresyon, Robust Yöntemler, En Küçük Kareler, En Küçük Kırpılmış Kareler, Uyuşumsuz Ölçüler

ABSTRACT

ROBUST LEAST TRIMMED SQUARES METHOD AND OUTLIER ANALYSIS

Hasan DİLMAÇ

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Geomatics Engineering

Master, June/2021

Supervisor: Prof. Dr. Yasemin ŞİŞMAN

In geodetic studies, an adjustment computation is made to obtain a unique solution. The Least Squares (LS) is the most preferred because of ease of computation and its tradition. But, the fact that dataset contains frequently outlier affects negatively the results of LS method. Although there are classical outlier test methods to detect outliers based on LS method, these tests also are affected negatively due to error propagation effect of LS. 'Robust' concept emerges to detect outliers correctly and many robust methods have been developed under the robust regression.

In this thesis, many robust methods have been discussed and their solution methods are explained as well as LS method. Robust Least Trimmed Squares (LTS) method has been selected for the applications and exact and approximate LTS solutions have been introduced. Point cloud belonging to a window which is produced by Leica TS16 Robotic Total Station has been used as a material in the applications. A plane fitting has been made with 5 different applications by using LS and LTS methods. The results of each applications have been analysed and the success of LTS method in determining outliers has been demonstrated.

Keywords: Regression, Robust Methods, The Least Squares, The Least Trimmed Squares, Outliers

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Akademik eğitim sürecimin bir üst noktası olan yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yasemin Şişman'a teşekkürü borç bilirim.

Beni bugünlere getirmek için hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan anneme, babama ve yanımda olan kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteklerini esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Hasan DİLMAÇ



İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı	2
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Regresyon Analizi	3
2.2. Dengeleme Hesabı.....	4
2.3. Matematik Model	6
2.4. Amaç Fonksiyonu.....	7
2.5. Model Hipotez Testi	9
2.6. Uyuşumsuz Ölçüler	10
2.7. Uyuşumsuz Ölçü Belirleme Yöntemleri	12
2.7.1. Geleneksel Test Yöntemleri	12
2.7.2. Robust Yöntemler	14
2.8. Literatür Taraması	16
3. MATERYAL VE YÖNTEM	22
3.1. Materyal.....	22
3.1.1. Nokta Bulutu ve Elde Etme Yöntemleri	22
3.1.2. Uygulama İçin Elde Edilen Nokta Bulutu	25
3.1.3. Nokta Bulutu Verileriyle Düzlem Geçirilmesi	26
3.2. Yöntem	28
3.2.1. En Küçük Mutlak Toplam (L_1 -norm)	28
3.2.2. M-Kestiricileri	31
3.2.3. R-Kestiricileri	35
3.2.4. L-Kestiricileri	36
3.2.5. Genelleştirilmiş M-Kestiricileri	37
3.2.6. Tekrarlı Medyan	37
3.2.7. S-Kestiricileri.....	38
3.2.8. MM-Kestiricileri	38
3.2.9. En Küçük Medyan Kareler	39
3.2.10. En Küçük Kırpılmış Kareler	39
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	47
4.1. En Küçük Kareler Yöntemi ile Düzlem Geçirme.....	48
4.1.1. Geleneksel Test Yöntemleriyle Uyuşumsuz Ölçü Analizi	50
4.2. En Küçük Kırpılmış Kareler Yöntemi ile Düzlem Geçirme	52
4.2.1. Kırpma Değeri $h=1780$ için Uygulama Sonuçları	53

4.2.2. Kırpma Değer $h=1500$ için Uygulama Sonuçları	58
4.2.3. Kırpma Değeri $h=1196$ için Uygulama Sonuçları	63
4.2.4. Kırpma Değeri $h =937$ için Uygulama Sonuçları	68
5. SONUÇ	73



SİMGELER VE KISALTMALAR

SİMGELER

y	Bağımlı Değişken
x	Bağımsız Değişken (Basit Doğrusal Regresyondaki)
β	Regresyon Katsayıları (Bilinmeyenler)
ε	Rastgele Hata
v	Düzeltilmeler Vektörü
l	Ölçüler Vektörü
x	Bilinmeyenler Vektörü
A	Katsayılar Matrisi
θ	Doğrusal Olmayan Regresyon Katsayıları
D	Datum Matrisi
P	Ağırlık Matrisi
C_{II}	Varyans-Kovaryans Matrisi
Q_{II}	Kofaktör (Ters Ağırlık Matrisi)
s_0^2	Öncül Varyans
s_0	Öncül standart sapma
ρ	Kayıp (Amaç) Fonksiyonu
ψ	Etki Fonksiyonu
W	Ağırlık Fonksiyonu
c	Sınır Değer
Σ	Toplam
η	Kaldıraç Noktalarını Sınırlayıcı Ağırlık Fonksiyonu
$R(v)$	Skor Fonksiyonu
R_i	$R(v)$ Matrisinin Elemanları ($i=1:n$)
Φ	Standart Normal Dağılımın Kümülatif Dağılım Fonksiyonu
$\text{sgn}(t)$	t nin imzası
z	Amaç Fonksiyonu
β ve α	Esnek Vektörü (Slack Vectors)
u ve w	Esnek Vektörü (Slack Vectors)
n	Ölçü Sayısı
u	Bilinmeyen Sayısı (İkinci anlam)
f	Serbestlik Derecesi
m_0^2	Soncul Varyans

Q_{xx}	Bilinmeyenlerin Kofaktör Matrisi
Q_{vv}	Düzeltilmelerin Kofaktör Matrisi
H_0	Sıfır Hipotezi
H_s	Seçenek Hipotezi
∇l_i	Uyuşumsuz Ölçü

KISALTMALAR

EKK	En Küçük Kareler
EKMK	En Küçük Medyan Kareler
EKMT	En Küçük Mutlak Toplam
EKKK	En Küçük Kırpılmış Kareler
GM	Genelleştirilmiş M
GNSS	Global Navigation Satellite System
GO	Global Optimization
GPS	Global Positioning System
IGG	Institute of Geodesy and Geophysics
IGGIII	Institute of Geodesy and Geophysics III
IRLS	İteratif Yeniden Ağırlıklandırılmalı En Küçük Kareler
İHA	İnsansız Hava Araçları
LAD	Least Absolute Deviations
LİDAR	Light Detection and Ranging
LMS	Least Median of Squares
LS	Least Squares
LTS	Least Trimmed Squares
MSR	Ortalama Başarı Oranı
RM	Repeated Median
TEKK	Toplam En Küçük Kareler
TM	Tekrarlı Medyan
WGS-84	World Geodetic System-84

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Doğrusal regresyon	3
Şekil 2.2. Dengelemedeki genel adımlar.....	6
Şekil 2.3. (a) Orijinal 5 nokta ve onların EKK regresyon doğrusu (b) uyuşumsuz ölçüye sahip aynı veriler ve onların EKK regresyon doğrusu	11
Şekil 2.4. (a) Orijinal 5 nokta ve onların EKK regresyon doğrusu (b) kötü kaldıraç noktasına sahip veriler ve onların EKK regresyon doğrusu	11
Şekil 2.5. İyi kaldıraç noktası	12
Şekil 2.6. Robust yöntemlerin tarihsel akışı	16
Şekil 3.1.Havadan LİDAR sistemi ve çalışma prensibi.....	23
Şekil 3.2. Yersel LİDAR sistemi.....	23
Şekil 3.3. Belirli bindirme oranına sahip görüntülerin elde edilmesi	24
Şekil 3.4. Nokta bulutu üretilen yüzeyin CloudCompare ile gösterimi	25
Şekil 3.5. Uygulama için alınan pencere kesitinin Matlab programlama dili ile 3D gösterimi.....	26
Şekil 3.6. Düzlem uzayının gösterimi	27
Şekil 3.7. Çeşitli fonksiyonlara göre düzeltmelerin etkisi	31
Şekil 3.8. Kesin EKKK çözümü adımları	41
Şekil 3.9. Yaklaşık EKKK çözümü adımları	45
Şekil 4.1. EKK yöntemi ile geçirilen düzlem	48
Şekil 4.2. Geçirilen düzlemin profilden görünümü.....	49
Şekil 4.3. Geçirilen düzlemin önden görünümü.....	49
Şekil 4.4. EKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü.....	50
Şekil 4.5. Nokta bulutundan çıkartılmış noktalar	51
Şekil 4.6. Nokta bulutundan çıkartılmış noktaların kuş bakışı görünümü.....	52
Şekil 4.7. EKKK ile geçirilen düzlem (h=1780).....	56
Şekil 4.8. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü (h=1780)	56
Şekil 4.9. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=1780)	57

Şekil 4.10. Nokta bulutundan kırılmış noktaların kuş bakışı görünümü (h=1780)..	57
Şekil 4.11. EKKK ile geçirilen düzlem (h=1500).....	61
Şekil 4.12. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü (h=1500)	61
Şekil 4.13. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=1500)	62
Şekil 4.14. Nokta bulutundan kırılmış noktaların kuş bakışı görünümü (h=1500)..	62
Şekil 4.15. EKKK ile geçirilen düzlem (h=1196).....	66
Şekil 4.16. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü (h=1196)	66
Şekil 4.17. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=1196)	67
Şekil 4.18. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü (h=1196)	67
Şekil 4.19. EKKK ile geçirilen düzlem (h=937).....	71
Şekil 4.20. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü (h=937)	71
Şekil 4.21. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=937)	72
Şekil 4.22. Nokta bulutundan kırılmış noktaların kuş bakışı görünümü (h=937)....	72
Şekil 5.1. (a) Geleneksel test sonucu nokta bulutundan çıkartılmış noktalar (b) EKKK (h=1196) sonucu kırılmış noktalar	76
Şekil 5.2. Nokta bulutundaki noktaların ayrıldığı 3 grup.....	77

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 3.1. Düzlemin matematiksel gösterimleri ve düzlem parametreleri	26
Tablo 3.2. Yaygın olarak kullanılan bazı M fonksiyonları	34
Tablo 4.1. EKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü	48
Tablo 4.2. EKK yöntemine göre düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri.....	48
Tablo 4.3. İterasyon sonuçları	51
Tablo 4.4. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı (h=1780).....	53
Tablo 4.5. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=1780).....	54
Tablo 4.6. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=1780).....	55
Tablo 4.7. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 1780 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri	55
Tablo 4.8. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı (h=1500).....	58
Tablo 4.9. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=1500).....	59
Tablo 4.10. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=1500).....	60
Tablo 4.11. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 1500 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri	60
Tablo 4.12. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı (h=1196).....	63
Tablo 4.13. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=1196).....	64
Tablo 4.14. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=1196).....	65
Tablo 4.15. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 1196 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri	65
Tablo 4.16. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı (h=937).....	68
Tablo 4.17. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=937).....	69

Tablo 4.18. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=937).....	70
Tablo 4.19. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 937 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri	70
Tablo 5.1. Her bir uygulama ait regresyon parametreleri ve tüm ölçüler kullanılarak hesaplanmış düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri	74
Tablo 5.2. Geleneksel test ve EKKK sonucu elde kalan ölçüler kullanılarak bulunan düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri	75



1. GİRİŞ

Astronomi, jeodezi ve benzeri birçok farklı bilim dalında sayısız veri ya doğrudan ya da dolaylı bir şekilde ölçülerek belirlenir (Ingram, 1911). Jeodezide doğrultular, mesafeler ve yükseklikler gibi geometrik büyüklüklerin yanı sıra yer çekimi gibi fiziksel büyüklükler ölçülür ve işlenir böylece ortaya bir veri yığını çıkar (Fan, 1977). Yeni teknolojiler bu veri üretimi artışına, tahmin edilemeyen bir oranda katkı sağlamaktadır. *Global Navigation Satellite Systems (GNSS)*, *Light Detection and Ranging (LIDAR)*, *İHA* ve benzeri bu teknolojilerden başlıcalarıdır. Diğer yandan üretilen bu verilerin doğruluğu her zaman sorgulanan bir durum olmuştur. Bir büyüklük, birçok kez aynı koşullar altında ölçülse bile her zaman birbirinden farklı olarak ölçülür (Ingram, 1911). Bu duruma göre ne kadar dikkatli yapılırsa yapılınsa, ölçümlerin asla kesin olmadıkları ve her zaman hata içerdikleri kabul edilmiştir. Bu nedenle verilerin kullanılmadan önce ve sonra işlenmesi, analiz edilmesi gerekmektedir (Ghilani, 2017).

Bir problemde ölçü sayısının bilinmeyen sayısından büyük olması durumunda tek anlamlı çözüm için dengeleme hesabı yapılır. Ölçülerin dengelemesi için birçok yöntem geliştirilmiştir ve bu yöntemlerden, En Küçük Kareler (EKK) oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. EKK istatistikte geniş bir yer tutan ve veriler arasındaki ilişkiyi inceleyen ve modelleyen istatistiksel bir yöntemdir. Sayısız çeşidi ve uygulaması vardır (Montgomery, vd., 2012). 1805’de Legendre ve 1809’da Gauss, astronomik gözlemlerle güneşin etrafındaki cisimlerin yörüngelerini belirlemek için bu yöntemi kullanmışlardır (Yan ve Su, 2009). EKK yöntemi, sonrasında birçok teknik problemin çözümü için kullanılmıştır. Özellikleri birçok kez incelenmiş, uygulamalar için sayısal yöntemler önerilmiş ve yöntemin kendisi belirli gereksinimlere göre geliştirilmiştir (Strejc, 1980). Yöntem gelenekselliği ve hesap kolaylığı bakımından en çok benimsenen yöntem olmuştur (Cizek ve Visek, 2005; Rousseeuw ve Leroy, 1987) fakat zamanla bu yöntem üzerinde uyumsuz ölçülerin (ölçülerin çoğunluğundan farklı dağılımda olan ölçüler) oluşturduğu tehlikenin farkına varılmasıyla bu ölçülerden kolayca etkilenen EKK yönteminin yerine yeni istatistikî yöntemlerin arayışına girilmiştir (Yetkin ve Berber, 2013). Böylece ölçü grubunda uyumsuz ölçüler olduğunda bile güvenilir sonuçlar verecek ve aynı zamanda uyumsuz ölçüleri belirleyebilecek robust yöntemler geliştirilmiştir (Rousseeuw, 1991).

Robust istatistik, klasik modellerdeki temel varsayımlardan (normal dağılım ve benzeri) küçük sapmalara (uyuşumsuz ölçü) karşı hassas olmayan yani etkilenmeyen kestiriciler geliştirmek ile uğraşır (Fabozzi, vd., 2014). Bu bağlamda modern robust istatistiğinin temelleri, 1960'lar ve 1970'lerin başlarında sırasıyla John Tukey'in, Peter Huber'in ve Frank Hampel'in çalışmalarıyla atılmıştır (Maronna, vd., 2006; Ronchetti, 2006). Sonrasında birçok farklı kavram ile kestiricilerin robustlukları ele alınmış ve yeni yöntemler geliştirilmiştir. Ortaya atılan birçok robust kestirimin genel amacı ise, uyuşumsuz ölçülerden etkilenmeden güvenilir sonuçlar elde etmek olmuştur (Uzun, 2003).

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin amacı; dengeleme hesabında klasik olarak yaygın bir şekilde kullanılan EKK yöntemine alternatif yöntemler olabilecek robust yöntemleri ve bu yöntemler arasından özellikle En Küçük Kırpılmış Kareler (EKKK) yöntemini ele almaktır. Bu amaçla EKK yöntemine karşı robust yöntemlerin tercih edilme nedenlerini açıklamak için uyuşumsuz ölçüler, kırılma noktası gibi bazı kavramlar ele alınmış ve genel olarak robust yöntemler tarihi akış sırasıyla ayrı başlıklar altında açıklanmıştır. Ardından EKK ve EKKK yöntemi ile alakalı olarak uygulamalar yapılmıştır. Uygulamalarda yersel LİDAR yöntemi ile üretilmiş nokta bulutu verisi kullanılmıştır. Sonuç olarak EKKK yönteminin EKK yöntemine kıyasla daha iyi sonuçlar bulabileceği ortaya konmuştur.

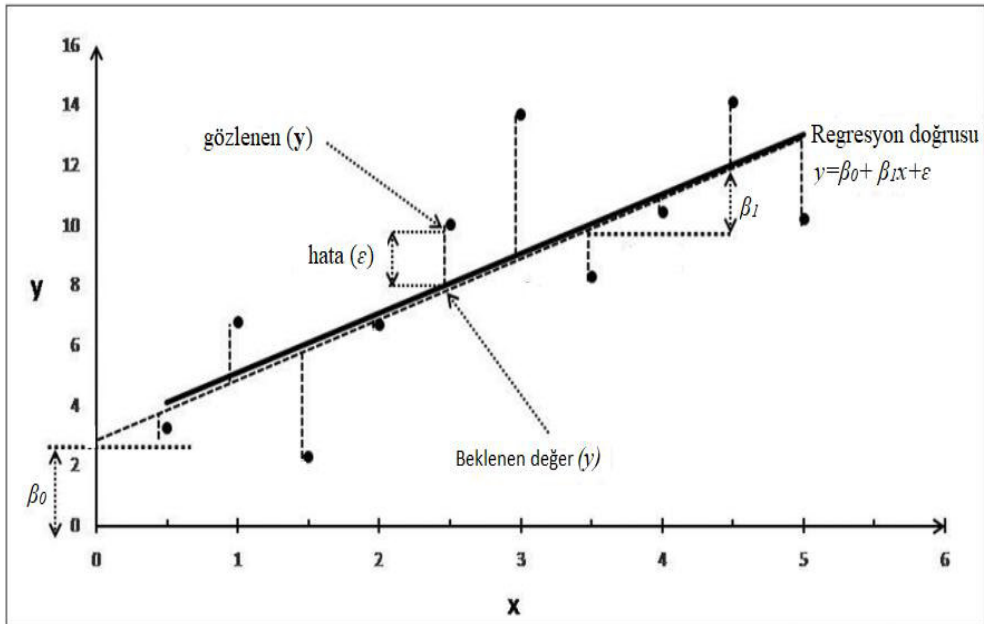
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde regresyon analizi, dengeleme hesabı, matematik model, EKK yöntemi, model hipotez testi, uyumsuz ölçüler, geleneksel test yöntemleri, robust yöntemler gibi başlıklar altında konu ile ilgili temel bilgilere yer verilmiş ayrıca literatür taraması başlığıyla da robust yöntemler ve EKK yöntemi üzerine yapılmış araştırmalar hakkında bir kaynak özeti sunulmuştur.

2.1. Regresyon Analizi

Regresyon analizi, değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkileri inceleyen ve modelleyen yöntemler topluluğudur (Chatterjee ve Hadi, 2012). Regresyon tıp, biyoloji, tarım, ekonomi, mühendislik, sosyoloji, jeoloji dahil birçok bilimsel alanda uygulanmıştır. 'Regresyon' terimi ilk kez 1908'de Francis Galton (ünlü İngiliz biyolog) tarafından kalıtım üzerine yaptığı çalışmasında açıklanmıştır. *Regression towards mediocrity in hereditary stature* adlı yayını ile bu istatistiksel yönteme adını vermiştir. Galton bu çalışmasında çocukların boyu ile ailelerin boyu arasında doğrusal regresyon analizi yapmıştır (Yan ve Su, 2009). Regresyon analizleri çok çeşitli şekillerde sınıflandırılabilirlerine rağmen genel olarak üçe ayrılır.

1) **Doğrusal regresyon**, x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere iki değişken arasındaki ilişkinin doğrusal olarak modellendiği regresyon türüdür (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Doğrusal regresyon (Aggarwal ve Ranganathan, 2017)

Genel olarak aşağıdaki eşitlikle ifade edilir (Yan ve Su, 2009):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (2.1)$$

Bu eşitlikte, β_0 kesişim noktası, β_1 regresyon doğrusunun eğimi ve ε rastgele hatadır.

2) Çoklu doğrusal regresyon, bir tane bağımlı değişken (y) ve birden fazla bağımsız değişken (x_i) arasındaki ilişkinin doğrusal olarak modellendiği regresyon türüdür (Chatterjee ve Simonoff, 2013; Montgomery, vd., 2012; Yan ve Su, 2009). Çoklu doğrusal regresyonun genel formu;

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon \quad (2.2)$$

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. Burada; $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ regresyon katsayılarıdır. Eşitlik (2.3) deki ifade, $y = l, X = A, \beta = x$ ve $\varepsilon = -v$ olacak şekilde düzenlediğinde;

$$v = Ax - l \quad (2.4)$$

elde edilir. Burada; A , katsayılar matrisi; x , bilinmeyenler vektörü, l , ölçüler vektörü ve v , düzeltmeler vektörünü göstermektedir.

3) Doğrusal olmayan regresyon, bağımlı değişken (y) ile bağımsız değişken (x) arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığı durumda değişkenler arasındaki ilişkiyi modelleyen regresyondur (Yan ve Su, 2009). Bilinmeyen parametreler açısından doğrusal olmayan herhangi bir model, doğrusal olmayan bir regresyon modelidir (Montgomery, vd., 2012). Örneğin;

$$y = \theta_1 e^{\theta_2 x} + \varepsilon \quad (2.5)$$

Burada; θ doğrusal olmayan regresyon parametresidir.

Modeller, değişkenler arasındaki ilişkileri keşfetmek ve gerçeği olduğu gibi yansıtmasalar bile bu modellere dayanarak doğru tahminler yapmak için kullanılırlar (Chatterjee ve Simonoff, 2013).

2.2. Dengeleme Hesabı

Jeodezide, hataların varlığı, ölçülerin belirli koşulları sağlaması gerektiği birçok durumu ortaya çıkarır. Örneğin; aynı noktada başlayıp aynı noktada kapanan bir nivelman ağında, kapanma için toplam yükseklik farkı, sıfır olmalıdır. Başka bir örnek

ise bir düzlem üçgende ölçülen üç iç açının toplamının 200^g olmasıdır. Ancak bu koşullar uygulamada hataların varlığı nedeniyle elde edilemezler (Ghilani, 2017). Bu nedenle,

- (i) hiçbir ölçünün kesin olmadığı,
- (ii) her ölçünün hata barındırdığı,
- (iii) bir ölçünün gerçek değerinin asla bilinmeyeceği ve
- (iv) var olan gerçek hatanın her zaman bilinmez olduğu söylenebilir.

Bir büyüklük tekrarlı bir şekilde ölçüldüğünde, elde edilen ölçüler, sebepleri fiziksel, zamansal ya da bilinmeyen olabilecek şekilde bazı hata kaynakları yüzünden farklı olur. Ölçülerdeki böylesi hataların etkileri; rastgele hatalar, sistematik hatalar ve kaba hatalar olmak üzere üç gruba ayrılır (Ogundare, 2018; Ghilani ve Wolf, 2012).

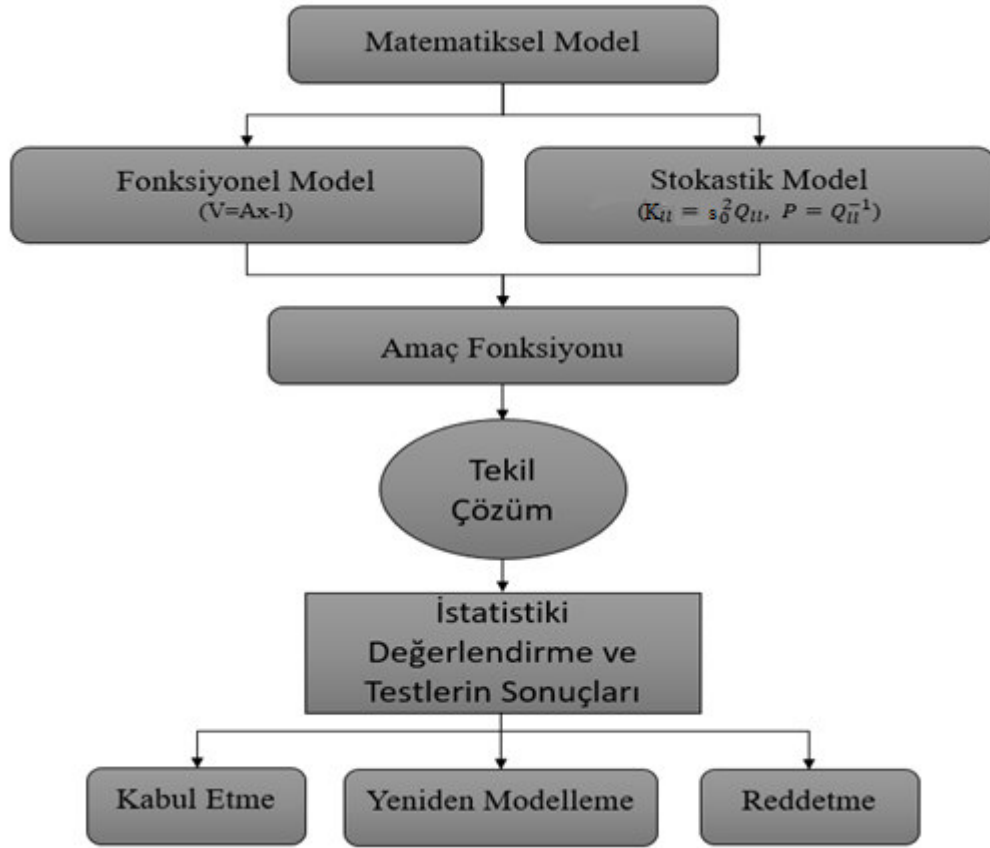
1) Kaba hatalar, genellikle dikkatsizlikten dolayı ortaya çıkan ve beklenen ölçü hatalarını fazlasıyla aşan hatalardır. Uzunluk ölçüsünde metre hatası, açı ölçüsünde grad hatası, yanlış hedefe yöneltme ve benzeri hatalar bu türden hatalardır ve belirlenip ölçülerden çıkarılmalıdırlar.

2) Sistematik hatalar, stokastik olmayan ve kullanılan aletlerin, ölçüm yöntemlerinin ve ortam koşullarının etkisiyle ortaya çıkan hatalardır. Örneğin; refraksiyon etkisi, yatay mesafe yerine kullanılan eğik mesafe vb. sistematik hatalardır. Ölçüler bir fonksiyonel model ile ilişkilendirilmeden önce sistematik hatalar, matematiksel olarak ya da bazı ölçüm yöntemleri izlenerek düzeltilir.

3) Rastgele hatalar, ölçü hatası olarak düşünülen ve bir ölçü grubundaki kaba hatalar ve sistematik hatalar elimine edildikten sonra ölçülerde kalan hatalardır. Bunlar oldukça küçük ve belirlemesi zordur. Ölçümü yapan kişinin kontrolünün ötesinde, olasılık ve istatistik yasalarına uyan bu yüzden stokastik olarak düşünülen hatalardır. Bu hataları tamamen elimine etmenin ya da hesaplamının bir yolu yoktur fakat dengeleme yöntemleri kullanılarak tahmin edilebilirler (Ogundare, 2018; Ghilani ve Wolf, 2012).

Bir problemde n ; ölçü sayısı, u ; bilinmeyen sayısını göstermek üzere bilinmeyenlerin tek anlamlı çözümü için $n=u$ olmalıdır. $n>u$ olması durumunda ise ölçülerin tümünü kullanarak belirli bir amaç fonksiyonuna göre gerçek değer olma olasılığı en yüksek olan bilinmeyenleri bulma işlemine dengeleme hesabı denir.

Dengeleme hesabı ancak; tek anlamlı çözüm için gereken minimum ölçü sayısını aşan ölçü sayısı var olduğunda anlamlıdır (Mikhail ve Ackermann, 1976). Dengeleme hesabı işleminde seçilen bir amaç fonksiyonuna göre çözüm yapılır ve dengeleme hesabının genel adımları aşağıdaki gibi gösterilebilir. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2. Dengelemedeki genel adımlar (Kolenda, vd., 1999)

2.3. Matematik Model

Matematik model bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin matematiksel temsidir. Bu yüzden buradaki problem, bir modelin gerçeği ne derece aslına uygun olarak yansıttığı ve bu model altındaki yatan varsayımların geçerli olup, olmadığıdır (Grafarend ve Sanso, 2012). Matematik model; stokastik model ve fonksiyonel model olmak üzere iki kısımdan oluşur (Mikhail ve Ackermann, 1976; Ogundare, 2018). Ölçülerin varyanslarını (ağırlıklarını) belirlemek, dengelemede stokastik model olarak bilinir (Ogundare, 2018). Dengeleme için uygun bir stokastik model seçmek önemlidir; çünkü bir ölçünün ağırlığı, dengeleme boyunca o ölçünün alacağı düzeltmeye etki eder (Ghilani, 2017). Ölçüler vektörü l 'nin varyans-kovaryans matrisi (K_{ll}) ile kofaktör (ters ağırlık) matrisi (Q_{ll}) arasındaki ilişki Eşitlik (2.6)'da ve

kofaktör matrisi ile ağırlık matrisi (P) arasındaki ilişki Eşitlik (2.7)'deki gibi ifade edilebilir.

$$K_{ll} = s_0^2 Q_{ll} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ & m_{22}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn}^2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$P = Q_{ll}^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Burada, s_0^2 öncül varyans değerini; m_{ii}^2 ölçünün varyansını; m_{ij}^2 i ve j ölçüleri arasındaki kovaryansı gösterir. Fonksiyonel model, analiz için uygun, anlaşılabilir bir sistem kullanarak fiziksel olayları tanımlamak için inşa edilen tamamıyla kurgusal bir yapıdır. Ölçümlerin ilişkili olduğu fiziksel ya da kurgusal bir sistemi temsil etmesi için fonksiyonel bir model seçilir (Mikhail ve Ackermann, 1976). Eğer fonksiyonel model fiziksel durumu yeterince temsil ederse, ölçüm hatalarının normal dağılım eğrisine uyması beklenebilir (Ghilani, 2017).

2.4. Amaç Fonksiyonu

Matematiksel model oluşturulduktan sonra fazladan ölçülerle anlamlı tek çözüm elde etmek için seçilen amaç fonksiyonunun optimizasyonu yapılır. Optimizasyon, seçilen amaç fonksiyonunun minimize ya da maksimize edilmesi anlamına gelir (Grafarend ve Sanso, 2012). Bugüne kadar dengeleme hesabı yapmak için birçok yöntem geliştirilmiştir ve bu yöntemler genellikle amaç fonksiyonlarına göre isimlerini almışlardır. Bu yöntemlerden en yaygın olarak bilinenleri EKK, En Küçük Mutlak Toplam (EKMT) ve Toplam En Küçük Kareler (TEKK) yöntemleridir.

1) En Küçük Kareler Yöntemi (EKK), fazladan ölçülerle, ölçüler arasındaki ağırlıklı farkların karesinin toplamını minimumlaştırarak tekil değerler elde etmek için dengeleme hesabında kullanılan yöntemlerden biridir (Amiri-Simkooei, 2003; Mikhail ve Ackermann, 1976; Wells ve Krakiwsky, 1971). Aynı zamanda bu ifade EKK yönteminin amaç fonksiyonunu da açıklamaktadır.

$$v = Ax - l; P_{ll} = Q_{ll}^{-1} = \frac{1}{s_0^2} K_{ll} \quad (2.8)$$

şeklinde kurulan bir matematik modelde EKK amaç fonksiyonu

$$v^T P v = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu amaç fonksiyonunun minimizasyonunu sağlamak için bilinmeyenlere göre türevi alınıp sifıra eşitlenir. Eşitlik (2.9)'un türevi alınıp sifıra eşitlenirse normal denklemler elde edilir:

$$A^T P A x - A^T P l = 0 \quad (2.10)$$

Normal denklemlerin çözümünden bilinmeyenler

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (2.11)$$

olarak elde edilebilir. Burada; v ölçülerin düzeltme vektörünü, A katsayılar matrisini, x bilinmeyenler vektörünü ve P Ağırlık matrisini gösterir. EKK hesap kolaylığı ve geleneksellik açısından en yaygın yaklaşımdır. Ancak, gerçek veri setleri sıklıkla uyumsuz ya da kaba hatalı ölçüler içerir (Rousseeuw, 1990). EKK yöntemi, uyumsuz ölçüler ya da kaba hatalara karşı çok hassas olduğu için robust teorisine dayalı hesaplama yöntemleri ortaya çıkmıştır (Gui ve Zhang, 1998).

2) En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi (EKMT), düzeltmelerin mutlak değerce toplamını minimumlaştırmak olarak bilinen bu yöntem, sıklıkla L_1 -norm regresyon problemi olarak adlandırılır (Dielman, 2005; Giloni, vd., 2006). 2.8 eşitliğindeki gibi kurulan matematik modele göre EKMT'nin amaç fonksiyonu;

$$p^T |v| \rightarrow \min \quad (2.12)$$

şeklindedir.

EKMT yöntemi genel anlamda amaç fonksiyonunun türevi alınmadığı için EKK'ya göre çözümü daha zordur ve çözülmesi daha çok zaman alır. Bu yöntemin çözümü için birçok farklı yol izlenmiştir. Genel bir formülü olmadığı için farklı algoritmalarla çözülmüştür (Birkes ve Dodge, 1993) bakılabilir. Ancak modern lineer programlama teknikleriyle bu durum EKK'ninki ile kıyaslanabilir duruma gelmiştir (Giloni, vd., 2006). Sonrasında Marshall ve Bethel (1996) çalışmalarında, ölçmede karşılaşılan problemler için yönteminin genel uygulaması için teorik temeller sunmuşlardır. Ayrıca lineer programlama yoluyla sayısal bir uygulamasını yapmışlardır.

3) Toplam En Küçük Kareler Yöntemi (TEKK), EKK'da katsayılar matrisinin (A) hatasız olduğu varsayılır ve tüm hatalar ölçü vektörü (l) ile sınırlandırılır. Ancak, ölçme uygulamalarında bu varsayım pek de gerçekçi değildir çünkü katsayılar matrisi, hatalı olduğu bilinen ölçülerle elde edilir. Bu durumda sadece ölçü vektörünün hatalı olarak ele alındığı EKK ile çözüme gitmek pek de makul olmamaktadır. Katsayılar matrisinde oluşacak hataların da dikkate alındığı bir yaklaşım ilk olarak 1980 yılında Golub ve Van Loan tarafından açıklanmıştır (Leyang, 2012). Hem A matrisinin hem de l vektörünün hatalı olduğunun varsayıldığı TEKK yaklaşımının matematik modeli aşağıdaki gibidir;

$$l + v = (A + v_A)x \quad (2.13)$$

Burada, v : ölçülerin düzeltme vektörü ve v_A : A matrisinin ilgili elemanlarının düzeltme vektörünü göstermektedir. TEKK hakkında daha ayrıntılı bilgi için, (Golub ve Van Loan, 1980), (Felus, 2004), (Akyılmaz, 2007) ve (Markovsky ve Van Huffel, 2007) başvurulabilir. Ayrıca 3D koordinat dönüşümünün TEKK ile yapıldığı ayrıntılı çalışma için (Acar, vd., 2009) bakılabilir.

2.5. Model Hipotez Testi

Model hipotez testi (Global Test), kurulan modellerin istatistiki geçerliliklerini test etmek olarak bilinir. Hipotez testi ile ölçülerle bilinmeyenler arasındaki ilişkiyi yansıtan fonksiyonel modelin uygun olup olmadığı ve stokastik modelin ölçüler arasındaki korelasyon ve duyarlılık ilişkilerini yeterince yansıtmadığı test edilir (Bektaş, 2016; Ghilani, 2017). Matematik modelin tam ve doğru olarak gerçekleşip gerçekleşmediğini anlamak için her dengeleme işleminden sonra hipotez testi yapılır (Şişman, vd., 2009). Hipotez testi için birim ölçünün öncül karesel ortalama hata değeri s_0 ile soncul karesel ortalama hata değeri m_0 kullanılır ve sıfır hipotezi H_0 ile seçenek hipotezi H_S kurulur.

$$H_0: E\{s_0^2\} = E\{m_0^2\} = \sigma$$

$$H_S: E\{s_0^2\} \neq E\{m_0^2\} \neq \sigma \quad (2.14)$$

$$T = \frac{m_0^2}{s_0^2}; q = F_{f_m, f_s, 1-\alpha/2}$$

Burada, T : test büyüklüğünü; q : F dağılım tablo değerini; $f_m: m_0$ hesabındaki fazla ölçü sayısını; $f_s: s_0$ hesabındaki fazla ölçü sayısını ve α : önem seviyesini gösterir.

Test büyüklüğü (T) ve tablo değeri (q) karşılaştırılarak matematik modelin geçerli olup olmadığına karar verilir. Uygulamalarda tip I ve tip II olarak bilinen hatalar sıfır hipotezini (H_0) kabul ederken veya reddederken ortaya çıkan 4 ihtimalden doğar:

- (1) H_0 doğrudur ve kabul edilir;
- (2) H_0 doğrudur ama reddedilir;
- (3) H_0 yanlıştır ve reddedilir;
- (4) H_0 yanlıştır ve kabul edilir.

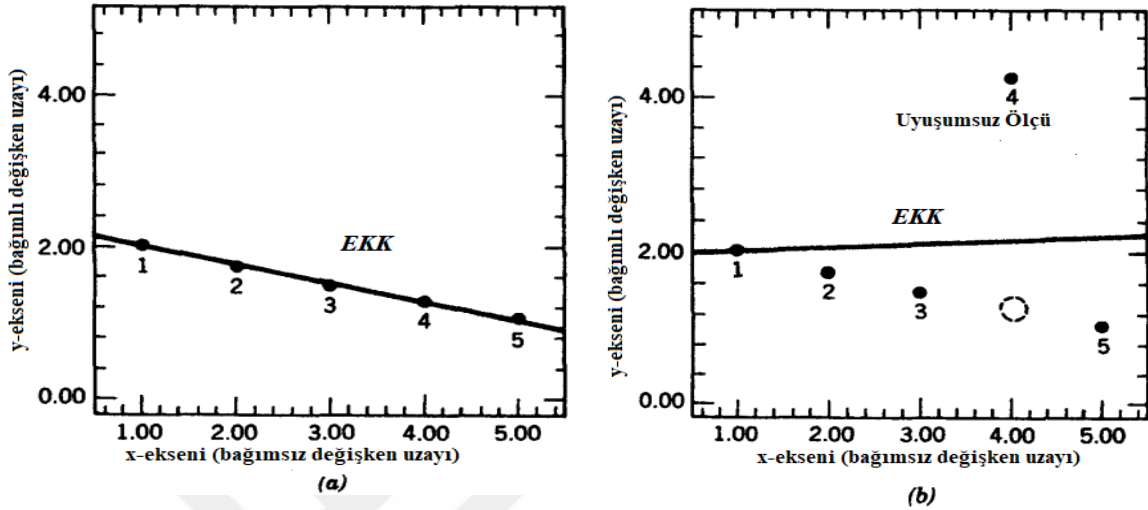
(1) ve (3) seçenekler doğru kararlardır. (2) ve (4). seçenekler ise tip I ve tip II olarak bilinen hatalara sebep olur. Doğru bir sıfır hipotezini yanlış bir şekilde reddetmek tip I hatası olarak bilinir. Tip 1 hatasının gerçekleşme olasılığı α ile gösterilir ve testin önem seviyesi olarak adlandırılır. Faydalı olması açısından α küçük olmalıdır ve klasik olarak %5, %2 ya da %1 olarak seçilir. Yanlış bir sıfır hipotezini doğru olarak kabul etmek ise tip 2 hatası olarak bilinir ki bu durumda aslında seçenek hipotezi (H_S) doğrudur (Mikhail ve Ackermann, 1976).

Sonuç olarak hipotez testi geçilememişse ve seçenek hipotezi (H_S) geçerli çıkmışsa, stokastik model ve fonksiyonel model kontrol edilir. Önce fonksiyonel model genişletilir daha sonra da stokastik model test edilir. Stokastik model doğru olduğu halde hipotez testi geçilemiyorsa ölçülerde uyuşumsuz ölçü olması muhtemeldir. Bu nedenle sonraki aşama olarak uyuşumsuz ölçü testi yapılır (Sisman, 2005; İnal ve Yetkin, 2006).

2.6. Uyuşumsuz Ölçüler

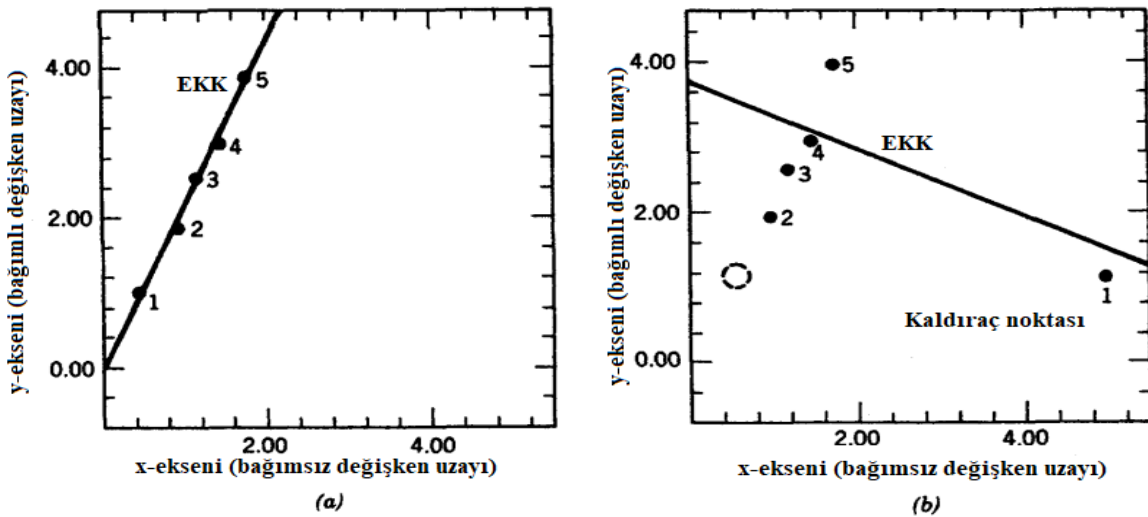
Bir veri setinde ölçülerin çoğunun dağılımından, dağılımı farklı olan ölçüye uyuşumsuz ölçü denir. Bir ölçü bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile ilgili olarak uyuşumsuz olabilir. Özellikle, bağımlı değişkendeki (y) farklı değerler, uyuşumsuz ölçü olarak adlandırılırken (Şekil 2.3) bağımsız değişkendekilerdeki (x) farklı değerler için ise sıklıkla kaldıraç noktası ifadesi kullanılır. Etkili ölçü, veri setinden çıkarıldığı takdirde kestirimin sonucunun önemli derecede değişmesine sebep olacak ölçülere denir. Etkili ölçülerin ise genellikle uyuşumsuz ölçü ya da kaldıraç noktası

olduğu söylenebilir (Montgomery, vd., 2012; Freund, vd., 2006). Kaldıraç noktaları ya da uyuşumsuz ölçülerin mutlaka kestirim sonucunu (parametre tahmini) etkilemesi gerekmez, bu nedenle her kaldıraç noktası ya da uyuşumsuz ölçü, etkili ölçü değildir (Freund, vd., 2006). (Şekil 2.3)

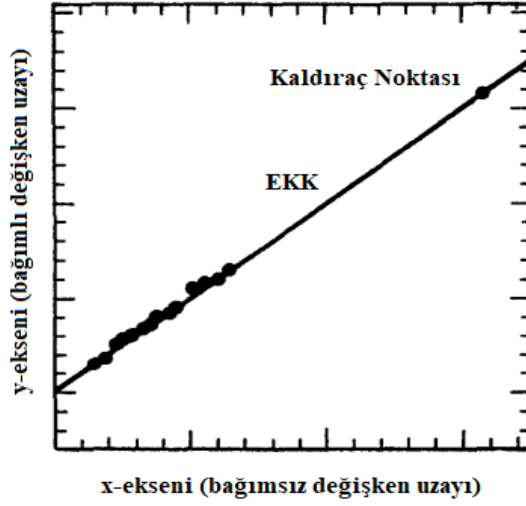


Şekil 2.3. (a) Orijinal 5 nokta ve onların EKK regresyon doğrusu (b) uyuşumsuz ölçüye sahip aynı veriler ve onların EKK regresyon doğrusu (Rousseeuw ve Leroy, 1987)

Kaldıraç noktaları regresyonu etkilemeleri açısından kötü kaldıraç noktası Şekil (2.4) ve iyi kaldıraç noktaları Şekil (2.5) olarak ikiye ayrılır.



Şekil 2.4. (a) Orijinal 5 nokta ve onların EKK regresyon doğrusu (b) kötü kaldıraç noktasına sahip veriler ve onların EKK regresyon doğrusu (Rousseeuw ve Leroy, 1987)



Şekil 2.5. İyi kaldıraç noktası (Rousseeuw ve Leroy, 1987)

Şekillerde görüldüğü gibi bazı uyuşumsuz noktaların (kaldıraç) varlığı regresyon doğrusunu etkilerken bazıları etkilememektedir. Bu da literatürde etkili ölçü olarak adlandırılan kavramın ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

2.7. Uyuşumsuz Ölçü Belirleme Yöntemleri

Geleneksel test yöntemleri ve robust yöntemler olmak üzere uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için kullanılan iki yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlarda temel veri olarak ölçülerin düzeltme değerleri kullanılır (İnal ve Yetkin, 2006).

2.7.1. Geleneksel Test Yöntemleri

Geleneksel test yöntemleri olarak da bilinen uyuşumsuz ölçü testleri jeodezide uyuşumsuz ölçüleri belirlemede kullanılan yaklaşımlardan biridir (Erdogan, 2014). Geleneksel test yöntemleri üçe ayrılır: Baarda testi, Pope testi ve t testi (Baarda, 1968; Pope, 1976; Koch, 1999). $V=Ax-l$ şeklinde verilen Gauss-Markov doğrusal modelinde bilinmeyenler vektörünün kestirilmiş değerleri, soncul varyansı, düzeltmelerin ve bilinmeyenlerin kofaktör matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$v = Ax - l, \quad K_{ll} = s_0^2 P^{-1} \quad (2.15)$$

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (2.16)$$

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} \quad (2.17)$$

$$Q_{vv} = P^{-1} - A Q_{xx} A^T \quad (2.18)$$

$$m_0^2 = \frac{v^T P v}{n - u} \quad (2.19)$$

Burada; n-u: değeri serbestlik derecesi, Q_{xx} : bilinmeyenlerin kofaktör matrisi, Q_{vv} : düzeltmelerin kofaktör matrisi ve m_0^2 , soncul varyansı göstermektedir.

1) Baarda testi (Data-Snooping, W-testi)

Baarda testi iki adımdan oluşur. Global test olarak da bilinen model hipotez testi yapıldıktan sonra uyumsuz ölçü testi gerçekleştirilir. Öncül varyans s_0^2 biliniyorsa, uyumsuz ölçüleri belirlemek için test büyüklüğü (w_i) Eşitlik (2.20)'den ve tablo değeri (q), Eşitlik (2.21)'den ölçülerin korelasyonsuz olduğu durumda aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$w_i = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \quad (2.20)$$

$$q = N_{1-\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,1-\alpha_0}} \quad (2.21)$$

Burada; $q_{v_i v_i}$, düzeltmelerin kofaktör matrisinin i 'nci köşegen elemanı (Sisman, 2005; Hekimoğlu, vd., 2014). Elde edilen w_i test büyüklüğü ile $1 - \alpha_0/2$ güven düzeyindeki normal dağılım tablosundan alınan q değeri karşılaştırılarak ölçünün uyumsuz ölçü olup olmadığına karar verilir.

2) Pope testi (Tau testi)

Öncül varyansın bilinmemesi durumunda ya da güvenilir bir değer olarak görülebilmesi durumunda bu değer yerine soncul varyans m_0^2 değeri kullanılır (Sisman, 2005; Hekimoğlu, vd., 2014). Bu durumda test büyüklüğü Eşitlik (2.22)'den ve tablo değeri q , Eşitlik (2.23)'den aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$T_i = \frac{|v_i|}{m_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} = \frac{|v_i|}{m_{v_i}} \quad (2.22)$$

$$q = \tau_{f,1-\alpha_0/2} \quad (2.23)$$

Burada; m_0 , soncul standart sapmayı göstermektedir. T_i , test büyüklüğü ve τ (tau) dağılımı tablosundan alınan q tablo değeri karşılaştırılır ve ölçünün uyumsuz ölçü olup olmadığına karar verilir.

3) t (Student) testi

Bir dengeleme hesabında soncul karesel ortalama hata değeri m_0 elde edilirken her bir ölçünün düzeltme değerleri kullanılır ve eğer bu ölçülerden herhangi biri kaba hatalı ise bu kaba hatalı ölçünün sonuca etkisi doğal olarak daha büyük olur. Bu nedenle soncul karesel ortalama hata değeri hesaplanırken en büyük katkı sağlayan ölçü şüpheli olarak görülür ve bu ölçü dışındaki ölçüler kullanılarak elde edilecek olan soncul varyans m_{01}^2 değeri, test büyüklükleri ve tablo değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır (İnal ve Yetkin, 2006; Şişman, vd., 2009):

$$m_{0i}^2 = [(v^T P v) - \frac{v_i^2}{q_{v_i v_i}}] / (f - 1) \quad (2.24)$$

$$T_i = \frac{|v_i|}{m_{0i} \sqrt{q_{v_i v_i}}} \quad (2.25)$$

$$q = t_{f-1, 1-\alpha_0/2} \quad (2.26)$$

Test değeri ile t dağılım tablosundan alınan q değeri karşılaştırılarak ölçünün uyuşumsuz olup olmadığına karar verilir. EKK yöntemi sonuçlarına dayalı olarak yapılan geleneksel test yöntemleri bu yöntemin hataları yayma etkisinden etkilenir. Hataları yayma etkisiyle bir ölçüdeki hata diğer bir ölçüye dağılır. Böylece ortaya batma ve gizleme etkisi adı verilen etkiler çıkar. Bu nedenle iyi bir ölçü, kötü bir ölçü gibi gözükebilirken, kötü bir ölçü de iyi bir ölçü olarak belirlenebilir (Hekimoğlu, 2005). Geleneksel test yöntemleri özellikle de kaba hata sayısının fazla olduğu durumlarda etkili olamamaktadır. Bu yüzden kaba hatalar belirlenememekte ve hatta aksine yukarıda bahsi geçen etkilerden dolayı iyi ölçüler uyuşumsuz ölçü olarak belirlenebilmektedir (Valero ve Moreno, 2005).

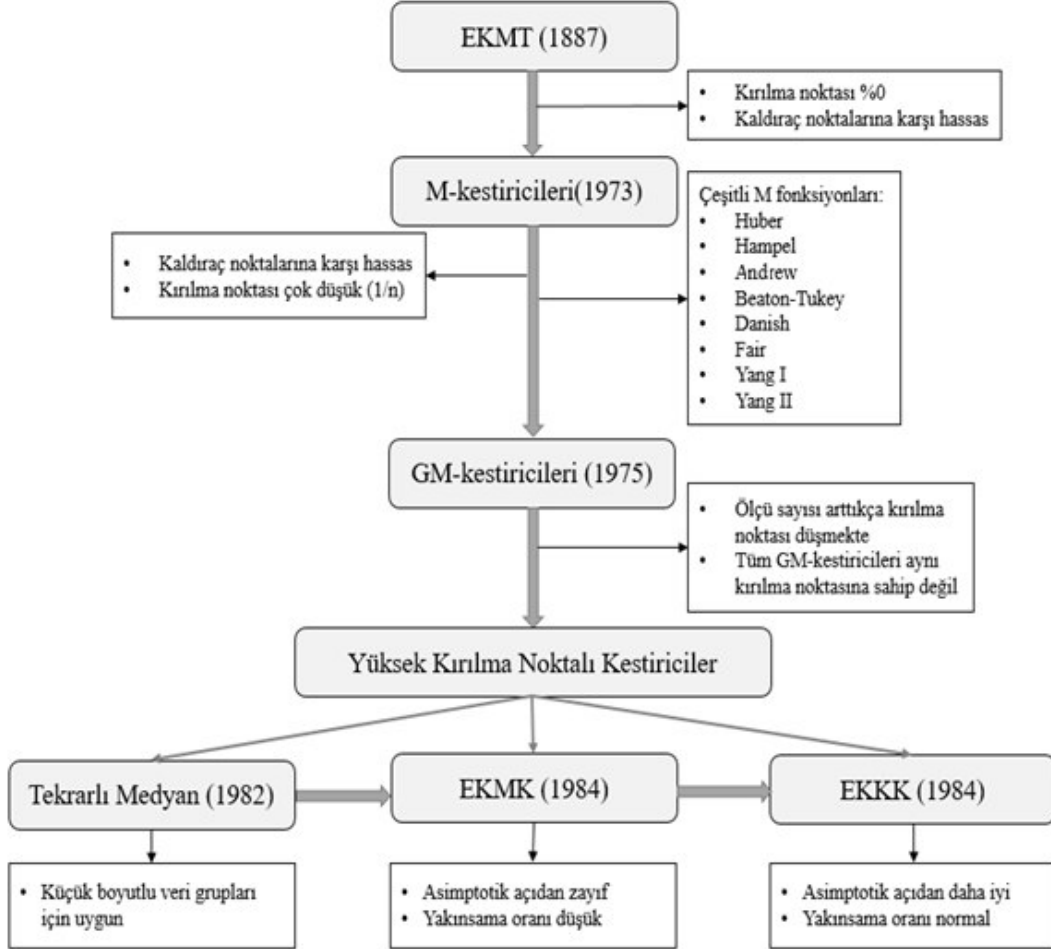
2.7.2. Robust Yöntemler

Çoğu klasik yöntem, ölçülerin normal dağılımda olduğu varsayımlarına dayanır (Tiku ve Akkaya, 2004). Bir regresyon modelindeki ölçümler, normal dağılıma sahip olduğu zaman, EKK yöntemi en iyi sonuçları verir (Montgomery, vd., 2012). Ancak normal dağılımı bozan ve bu varsayımları ihlal eden uyuşumsuz ölçüler, EKK sonuçlarının güvenilirliğini azaltır (Muhlbauer, vd., 2009). Ölçü grubunda uyuşumsuz ölçülerin varlığı sıklıkla uygulamalarda karşılaşılan bir durumdur (Rousseeuw ve Leroy, 1987) ve uyuşumsuz ölçüler EKK yöntemi üzerinde, regresyon doğrusunu kendi yönlerine doğru çok fazla çekmesi açısından güçlü bir etkiye sahiptirler

(Montgomery, vd., 2012). Bu yüzden uyumsuz ölçüleri barındıran problemlerin çözümünde EKK yöntemi çözümü uygun değildir (Almongy ve Almetwaly, 2018). Bu sorunla başa çıkma yollarından bir tanesi bu tarz gözlemlerin belirlenip çıkartıldığı geleneksel test yöntemleridir fakat bu yöntemler, birden fazla uyumsuz ölçüyü belirlemede başarısız aynı zamanda batma ve gizleme etkileri nedeniyle yanlış yönlendirici olabilmektedir. Bu gibi problemleri çözmek için ilk olarak 1960'larda J. Tukey, P. Huber ve F. Hampel tarafından robustluk (sağlamlık) teorisi geliştirilmiştir. Robust kelimesine bazı zaman tutarsız da olan birçok yan anlam yüklenmiştir ancak dar anlamıyla '*varsayımlardan küçük sapmalara karşı duyarsızlık*' olarak ifade edilmektedir (Huber, 1981). EKK yöntemi bu açıdan robust değildir çünkü tek bir uyumsuz ölçü bile bu yöntemi olumsuz etkileyebilmektedir (Coakley ve Hettmansperger, 1993; Muhlbauer, vd., 2009). Bir kestirimin, uyumsuz ölçüye karşı robustluğu etki fonksiyonuyla ve bir kestirimin birden fazla uyumsuz ölçüye yani yoğun kirliliğe karşı robustluğu ise kırılma noktası kavramıyla ölçülür (Birkes ve Dodge, 1993). Kırılma noktası, kestirimin kullanışsız olmasına yol açabilecek uyumsuz ölçünün en küçük oranını ifade eder (Montgomery, vd., 2012).

Tarihsel olarak, EKMT yöntemi (L_1 -norm) robust yöntemlerin en eskisidir. Sonraki adımda M-kestiricileri ortaya çıkmıştır. 1964 yılında ilk defa Huber tarafından ortaya atılmıştır. Ardından sırasıyla R-kestiricileri ve L-kestiricileri geliştirilmiştir. Robust yöntemlerin kendi aralarındaki robustluğunu karşılaştırmak için sonrasında kırılma noktası kavramı ortaya atılmıştır. Bahsedilen kestiricilerin hepsinin kırılma noktası kötü kaldıraç noktalarına karşı olan duyarlılıklarından dolayı oldukça düşüktür (Rousseeuw ve Leroy, 1987). Robust yöntemlerden beklenen iki önemli özellik verimlilik ve kırılma noktasının yüksek olmasıdır. Robust kestirimlerin verimliliği, bir veri setinde kaba hatalar ve uyumsuz ölçüler olmadığı ve ölçümler normal dağılımda olduğunda, o robust kestirimin üreteceği sonuçların EKK yöntemi sonuçlarına yakın olup olmadığıyla belirlenir (Montgomery, vd., 2012). EKMT, M, R ve L-kestiricilerinin kaldıraç noktalarına karşı olan zafiyetinden dolayı, Genelleştirilmiş M-kestiricileri (GM-kestiricileri) geliştirilmiştir. Bu yöntemin temel amacı kaldıraç noktalarının etkilerini bazı ağırlık fonksiyonlarıyla sınırlamaktır. Ama ölçü sayısının artmasıyla bu yöntemin de kırılma noktasının düştüğü fark edilmiş ve bu sorun yüksek kırılma noktasına ve sınırlandırılmış etki fonksiyonuna sahip tek adımlı GM-kestiricisi ile çözülmüştür. Tüm bu gelişmeler, yüksek kırılma noktalı

kestiriciler elde edebilmenin mümkün olup olmadığı sorularını doğurmuştur. İlk cevap Siegel'den gelmiş ve Tekrarlı Medyan (TM/RM) yöntemini önermiştir (Toka ve Cetin, 2011). Sonrasında sırasıyla, En Küçük Medyan Kareler (EKMK) (1984), S-kestiricileri, MM-kestiricileri ve En Küçük Kırpılmış Kareler (EKKK) gibi yüksek kırılma noktalı kestiriciler ortaya çıkmıştır (Hubert, vd., 2008; Rousseeuw ve Leroy, 1987; Staudte ve Sheather, 2011). Bunlar haricinde de birçok farklı yöntem ileri sürülmüştür. (Şekil 2.6)



Şekil 2.6. Robust yöntemlerin tarihsel akışı

2.8. Literatür Taraması

Bu bölümde robust yöntemler ile ilgili yapılan çalışmalara ilişkin bir literatür özeti sunulmaktadır.

- Kim, vd. (1996) çalışmalarında, En Küçük Kırpılmış Kareler yöntemi ile K-means, Fuzzy C-Means gibi prototip tabanlı kümeleme algoritmalarını entegre etmişlerdir. Kirlilik (noise) dahil tüm özellik vektörlerinin hepsini kullanarak kümeleme yapan genel kümeleme algoritmalarının aksine önerdikleri algoritma,

kümeleme işleminden önce kirli vektörleri sistemden elimine etmeye çalışmaktadır. Algoritma optimum kırpma oranını tahmin etmekte ve ardından kirli vektörleri belirlemektedir. Ama önerdikleri algoritma bazı durumlardan dolayı (özellikle kirlilik oranı çok büyük olduğunda) lokal minimuma sıkışmakta ve bazı şartlar karşılanmadığından iyi sonuçlar verememektedir (Kim, vd., 1996).

- Yang (1999) çalışmasında, Çin'deki 37 tane noktanın GPS koordinatları (WGS-84) ile bu noktalara ait yersel koordinatlarını (Beijin-80) kullanarak datum parametrelerini bulmayı amaçlamıştır. Başlangıç olarak uyuşumsuz ölçünün bulunmadığı veri grubu için aşağıdaki 4 senaryoyu gerçekleştirmiştir:

- 1) Klasik EKK yöntemi ile çözüm
- 2) (Klasik EKK yöntemi ile çözüm+Geleneksel test yöntemleri) Ölçülerin düzeltmelerinin, düzeltmelerin standart sapmalarına bölüdüğü test
- 3) (Klasik EKK yöntemi ile çözüm+Robust analiz)
- 4) (Robust yöntemi ile çözüm+Robust analiz) Koordinat farklarının medyanı ile başlayan Robust yöntem (yüksek kırılma noktalı)

Sonraki aşamada veri grubundaki 10 noktanın, 20.0 m'lik hataya sahip 10 tane uyuşumsuz nokta ile yeri değiştirilmiş ve aynı 4 senaryoya bağlı kalarak çözümü yapılmıştır. Sonuçlara göre, yüksek kırılma noktalı robust yöntemin diğer 3 yönteme oranla çok daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir (Yang, 1999).

- Gökalp ve Boz (2005) çalışmalarında, GPS ağlarında uyuşumsuz baz vektörlerini belirlemede robust yöntemleri kıyaslamıştır. GPS ağlarının dengelemesi ve sonrasında uyuşumsuz ölçülerin araştırılması için MATLAB teknik hesaplama dilinde hazırladıkları bir program ile serbest dengeleme işlemi gerçekleştirmişlerdir. Yaptıkları program çalıştırıldığında seçilen robust yöntem uygulanmakta ve tercih edilen yöntemin sonuçları bir dosyaya yazdırılarak kullanışlı bir biçimde irdelenmesi sağlanmaktadır (Gökalp ve Boz, 2005).

- Hekimoğlu (2005) çalışmasında, robust kestirimlerin güvenilirliğini ölçebilmek için 1999'da Koch ile beraber açıkladıkları *ortalama başarı oranı* (MSR) kriterini kullanmıştır. Ayrıca gizleme, batma etkileri ile kritik uyuşumsuz ölçüler kavramlarını ele almış ve uyuşumsuz ölçüleri kaba hatalar, kaldıraç noktaları gibi örneklerle de çeşitlendirmiştir. Böylece birçok açıdan robust yöntemlerin güvenilirliklerini incelemiştir. Sonuç olarak yaptığı çalışmada uyuşumsuz ölçüleri

belirlemede robust yöntemlerin geleneksel yöntemlere göre daha üstün olduğunu gözlemlemiş ve uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde robust yöntemlerin kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca veri setinin önceden kaldıraç noktaları cinsinden uyuşumsuz ölçüler içerip içermediği bilinemeyeceği için dengelemeye robust yöntemlerle başlanılmasını önermiştir (Hekimoğlu, 2005).

- Valero ve Moreno (2005) çalışmalarında, bir GPS ağının, EKK yöntemi, iteratif en küçük karelerle hesaplanan robust yöntemler ve global optimization (GO) teknikleriyle hesaplanmış robust yöntemlere göre çözümlerini karşılaştırmıştır. 2 farklı senaryo gerçekleştirilmiştir. İlk senaryoda sadece rastgele hatalara yer verilmiştir. İkinci senaryoda +100 centesimal seconds, +500 centesimal seconds ve +5 centesimal degrees aralığında değişen kaba hataları ekledikleri ölçüler için düzeltme değerlerini incelemiştir. Sonuç olarak EKK yöntemine göre bulunan düzeltmelerin hiçbir şekilde uyuşumsuz ölçülerin gerçek miktarını yansıtmadığı diğer üç robust yöntemin EKK'ya oranla çok daha başarılı bir şekilde miktarları yansıttığı aynı zamanda bu üç robust yöntem içinden de GO ile yapılan robust çözümün en doğru sonuçları verdiği gözlemlenmiştir (Valero ve Moreno, 2005).

- Rousseeuw ve Driessen (2006) çalışmalarında, EKKK yönteminin çözümü için Hızlı-EKKK (FAST-LTS) adını verdikleri bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu amaçla seçici-iterasyon (selective iteration) ve yuvalanmış uzantılar (nested extensions) adını verdikleri teknikleri tanıtmışlar ve hassasiyeti geliştirmek için de intercept adjustment adını verdikleri başka bir yöntem kullanmışlardır. Yaptıkları simülasyonlar ile Hızlı-EKKK algoritmasının büyük boyutlu veri gruplarıyla başa çıkabildiğini ve küçük veri grupları için bulunan sonuçların kesin EKKK çözümü ile benzer olduklarını gözlemlemişlerdir (Rousseeuw ve Driessen, 2006).

- İnal ve Yetkin (2006) çalışmalarında, basit bir doğrusal regresyon modelinde, M Kestirimleri, BIBER kestirimi, iteratif ağırlıklandırma yöntemi, Berberan yöntemi gibi robust yöntemlerle çeşitli uygulamalar yapmışlar ve kaba hatalı ölçümlerin belirlenmesinde kullanılan test yöntemlerini, kırılma noktası ve kaldıraç noktası gibi kavramları ele almışlardır (İnal ve Yetkin, 2006).

- Hekimoğlu ve Erenoğlu (2007) çalışmalarında, klasik test yöntemleri ve robust yöntemlerin jeodezik bir ağdaki uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarılarını incelemişlerdir. Yapay olarak oluşturdukları ağda rastgele hatalı ölçüler ve uyuşumsuz

ölçüler üretmişlerdir. Karşılaştırma yapmak için ortalama başarı oranı kavramını kullanmışlardır. Yöntemler ile ilgi elde edilen ortalama başarı oranlarının, kaba hataların büyüklüğüne, sayısına, ölçülerin sayısına; redundans paylarına ve bilinmeyen sayısına bağlı olarak değiştiğini gözlemlemişlerdir. Sonuç olarak robust yöntemlerin özellikle küçük uyuşumsuz ölçüleri belirlemede daha başarılı oldukları görülmüştür (Hekimoğlu ve Erenoğlu, 2007).

- Knight ve Wang (2009) çalışmalarında, EKK sonunda yapılan uyuşumsuz ölçü testleri ile robust yöntemleri karşılaştırmak için 24 saatlik GPS verilerini kullanmışlardır. Sonuç olarak hiçbir yöntemin %100 olarak başarılı olmadığını ama geleneksel uyuşumsuz ölçü testlerinin tek bir uyuşumsuz ölçü için en yüksek doğru başarı oranına sahip iken uyuşumsuz ölçü sayısı arttıkça en yüksek başarı oranının MM-kestirimleri ve L_1 -norm tarafından sağlandığını gözlemlemişlerdir. Yaptıkları bu çalışmadan genel çıkarımları ise şu olmuştur: Uyuşumsuz ölçülerin sayısı arttıkça, uyuşumsuz ölçülerin doğru belirlenme olasılığı azalmaktadır. Uyuşumsuz ölçülerin büyüklüğü arttığında ise bu olasılık artmaktadır (Knight ve Wang, 2009).

- Sisman (2010) çalışmasında, geleneksel test yöntemleriyle, bazı robust M-kestirim yöntemlerini kıyaslamıştır. Bunun için gerçek ağ verisi kullanarak bir uygulama yapmış ve bu yöntemlerin uygulanabilirliği araştırmıştır. 20 baz ölçümünden oluşan bir GPS ağında geleneksel test yöntemlerinden t-testini ve robust yöntemlerden Yang-II, Huber, Beaton-Tukey ve Andrews, Danimarka ve L_1 yöntemlerini kullanmıştır. t-testi ile 10. iterasyonda sonuca ulaşmış ve 9 ölçü, ölçü grubundan çıkarılmıştır. Robust yöntemlerde ise uyuşumsuz ölçüler ölçü grubundan çıkartılmayıp, sonuç üzerindeki ağırlıkları, ağırlık fonksiyonlarıyla azaltılmış böylece sonuçlar üzerindeki etkileri azaltılmıştır. Danimarka, Huber, Beaton-Tukey, Andrews ve Yang-II de uyuşumsuz ölçü olarak bulunan ölçülerin ağırlıkları sifıra yaklaşmış iken L_1 -norm yönteminde uyuşumsuz ölçülerin ağırlıklarının aynı kaldığını ve diğer ölçülerin ağırlığının ise arttığını gözlemlemiştir. Sonuç olarak uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde yalnız geleneksel testlerin kullanılmasının doğru bir yaklaşım olmadığını, bunların yanında destekleyici bir yöntem olarak robust yöntemlerinde kullanılması gerektiğini belirtmiş ayrıca robust yöntemler arasında yaptığı kıyaslamada ise uyuşumsuz ölçüleri belirlemede en başarılı yöntemlerin Danimarka ve Yang-II yöntemleri olduğunu gözlemlemiştir (Sisman, 2010).

- Yetkin ve İnal (2011) çalışmalarında, EKK'ya göre daha robust bir yöntem olan L_1 -norm yöntemi ile EKK'yı kıyaslamışlardır. Yöntemler simüle edilmiş bir GPS ağına uygulanmıştır. Uyuşumsuz ölçü bulunması ve bulunmaması durumlarında her iki yöntemin elde ettiği performanslar incelenmiştir. Sonuç olarak uyuşumsuz ölçülerin bulunmadığı sadece rastgele hataların söz konusu olduğu zaman L_1 -normun, EKK'ya oldukça yakın sonuçlar verdiğini ve uyuşumsuz ölçüler olduğu zaman ise L_1 -normun en iyi sonucu verdiğini gözlemlemişlerdir. Ayrıca her iki yöntemin düzeltme vektörlerine bakarak uyuşumsuz ölçüleri en doğru şekilde belirleyen L_1 -norm yöntemi olduğu ve en küçük karelerde hataların diğer ölçülere yayılarak gizlenme ve batma etkilerine sebep olduğu gözlemlenmiştir (Yetkin ve Inal, 2011).
- Erdoğan (2014) çalışmasında, jeodezik bir ağda tekrarlı ölçüler yapmış ve ağın dengeleme aşamasında bu orijinal ölçülerin ortalama değerlerini kullanmıştır. Bu çalışmada orijinal tekrarlı ölçülerin ortalamasını kestirmenin etkilerini göstermek için, geri ve ileri ölçümler içeren bir nivelman ağı simüle edilmiştir. İki farklı durum için klasik uyuşumsuz ölçü belirleme yöntemleri ile robust yöntemler olan Danish ve Huber yöntemlerini uygulamıştır. İlkinde, orijinal ölçülerin ortalama değerlerini kullanmış daha sonrasında da tüm orijinal ölçüler, uyuşumsuz ölçü belirlemede değerlendirilmiştir. Yöntemlerin güvenilirlikleri ortalama başarı oranı kavramı ile ölçülmüş ve sonuçta ikinci durumun daha güvenilir sonuçlara sahip olduğu saptanmıştır (Erdogan, 2014).
- Koch, vd. (2017) çalışmalarında, uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Bunun için EKKK yöntemi ile birlikte metaheuristik bir yöntem uygulamışlardır. En küçük kırılmış kareler-Fazlalık Kısıtlaması (LTS-RC) adını verdikleri bu yaklaşımla klasik çözüm olarak EKKK yönteminde yapılan en büyük düzeltmelerin eliminasyonu işlemine bir kısıtlama getirmişlerdir. GNSS ağlarındaki dengeleme işlemi için tasarladıkları bu yaklaşımda, EKKK yönteminde yapılan eliminasyon işleminde tek parametre kullanılması yerine 2 parametre kullanmışlardır. Yöntemi test etmek için yaptıkları GNSS uygulamasında, bu yaklaşımın tüm uyuşumsuz ölçüleri doğru bir şekilde belirleyebildiğini ve daha küçük boyuttaki hatalara oranla büyük boyutlu uyuşumsuz ölçülerin daha doğru bir şekilde belirlendiklerini gözlemlemişlerdir. Ayrıca klasik olarak çözümü yapılan EKKK yöntemiyle bu yaklaşımı kıyaslamak için aynı senaryolara bağlı kalarak testler

yapmışlardır. Yaptıkları testlerde önerdikleri yaklaşımın daha iyi sonuçları verdiklerini gözlemlemişlerdir (Koch, vd., 2017).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

3.1.1. Nokta Bulutu ve Elde Etme Yöntemleri

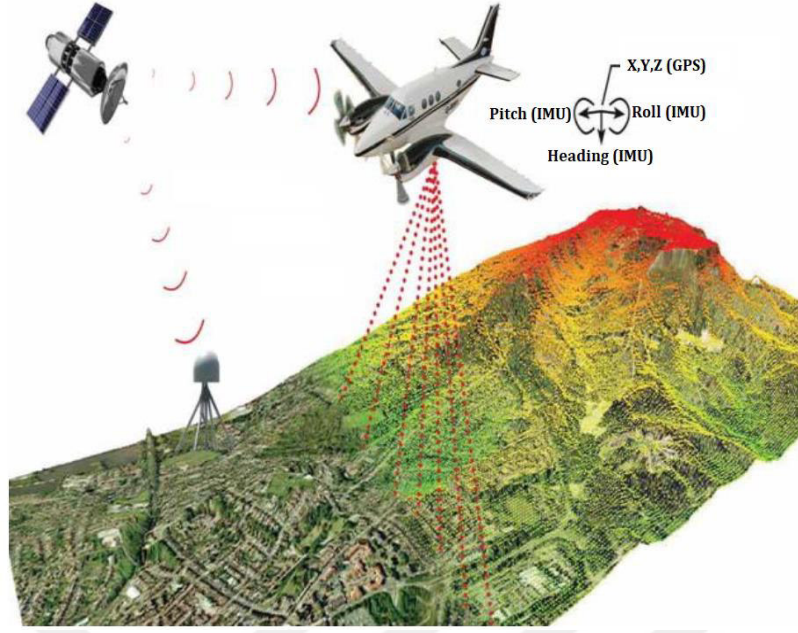
Gelişen teknolojilerle birlikte çeşitli amaçlar için üretilen bir nesneye ya da bir yüzeye ait nokta bulutu verileri 3 boyutlu (3D) bir koordinat sisteminde bir dizi nokta verisinden oluşur. Nokta bulutu üretiminde genellikle, lazer tarama diğer adıyla *Light Detection and Ranging (LİDAR)* ve fotogrametrik yöntemler kullanılmaktadır (Barsanti, vd., 2012).

1) LİDAR (Light Detection and Ranging)

LİDAR yöntemi günümüzde çok farklı amaçlar için kullanılan popüler bir yöntemdir. Haritacılık, jeoloji, hidroloji, risk yönetimi, askeri ve benzeri olmak üzere bir çok alanda kullanılmaktadır. Radar benzeri bir mantıkla çalışan bu sistem ondan farklı olarak radyo dalgaları yerine lazer ışınları kullanır (Polat ve Uysal, 2016). LİDAR ile yüzeylerden ya da nesnelere lazer ışını yardımı ile 3D koordinat bilgisi toplanır. LİDAR yöntemi, taramanın yapıldığı konuma bağlı olarak uydu kaynaklı, yersel ve hava olmak üzere üçe ayrılır. Havadan LİDAR genellikle harita üretmek ya da bir arazinin sayısal modelini elde etmek amacıyla uçak, helikopter ve benzeri düzlemlere monte edilerek kullanılır (Bosche, vd., 2015). Havadan bir yüzeyin ya da nesnenin lazer ışını yardımıyla 3D koordinat bilgisinin hesaplanması şöyle gerçekleşir (Kuçak, vd., 2019):

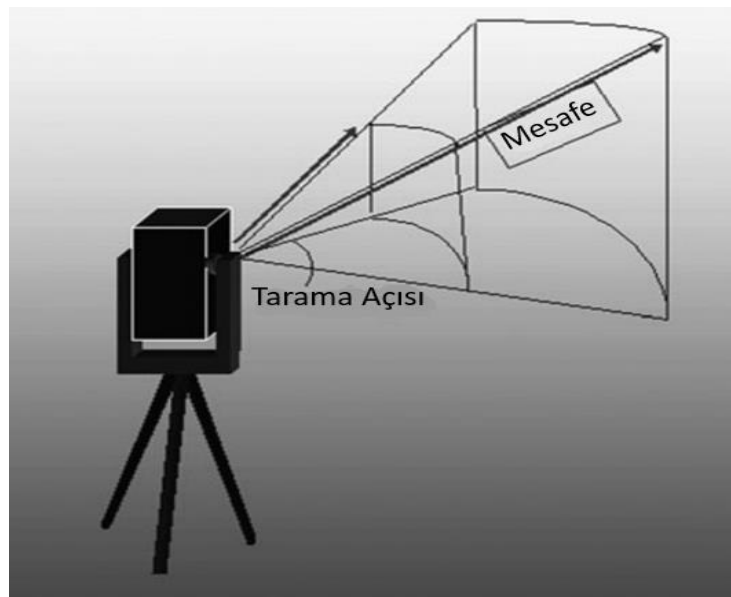
1. Lazer ışının sistemden çıkış ve dönüşü arasında geçen zaman farkı
2. Sistemin o andaki durumu (dönüklük ve benzeri)
3. Sistemin o andaki dünya üzerindeki kesin konumu

Işının gidiş ve dönüşü arasındaki zaman farkı ile nesne ve sistem arasındaki mesafe belirlenir. Sistemin konumu (X,Y,Z) entegre GPS sistemleriyle uydulardan alınır. Ayrıca diğer bir sistem elemanı olan İMU (*Inertial Measurement Unit*) ile de sistemin durumu (Pitch, Roll ve Heading açıları) kaydedilir. Bu bilgiler kullanılarak nesnenin konumu hesaplanır (Polat ve Uysal, 2016). (Şekil 3.1)



Şekil 3.1.Havadan LİDAR sistemi ve çalışma prensibi

Yersel LİDAR tarihi ve sanatsal yapıların kaydı ve dökümantasyonu, mühendislik çalışmaları, deformasyon ölçmeleri, planlama çalışmaları ve benzeri için kullanılır (Bosche, vd., 2015; Duran, vd., 2017). Havadan LİDAR sistemleriyle ölçü prensibi benzer olsa da yersel LİDAR sistemlerinin çoğu lokal bir koordinat sisteminde çalışabilmektedir. Tarayıcının yani lazer sisteminin konum bilgileri yanında ölçülen mesafe ve tarama açısı bilgileri kullanılarak, lazer ışınlarının çarpıtığı noktaların 3D koordinatları ölçülebilir (Lemmens, 2011). (Şekil 3.2)



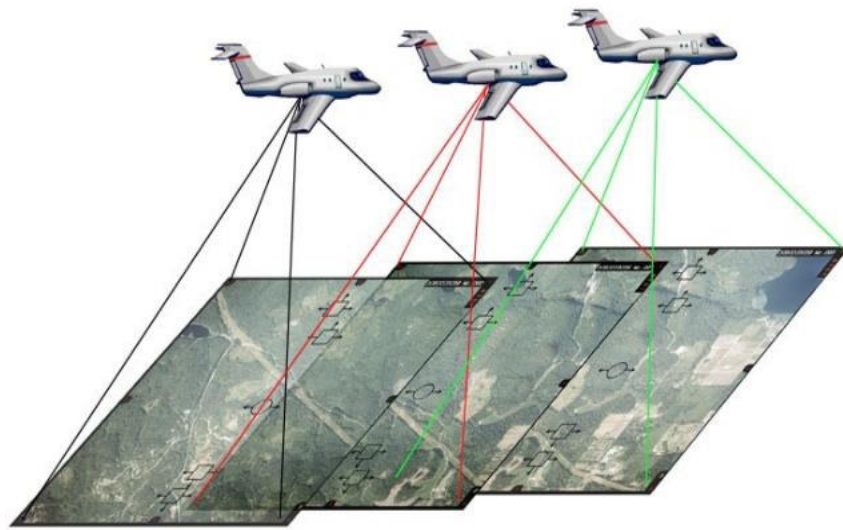
Şekil 3.2. Yersel LİDAR sistemi

LİDAR'ın harita sektörüne girişinden beri, CBS ve diğer alanlardaki uygulamaları artmış ve çeşitlenmiştir. Yoğun nokta verisine sahip nokta bulutları en uygun yüzeyi üretmek için modellenebilir (Habib, vd., 2004).

2) Fotogrametri

Fotogrametri fotoğraflar/görüntüler ya da bunlardan elde edilen 3 boyutlu modeller kullanılarak güvenilir ve hassas ölçülerin türetildiği bir yöntemdir. Fotogrametrik görüntüler yersel, uydu, uzaktan algılama, hava ve hatta deniz altı görüntüleri olarak elde edilebilir. Ancak 3D bilgi üretebilmek için aynı yüzeyin en az 2 örtüşen görüntüsüne ihtiyaç vardır (Barsanti, vd., 2012). Son 50 yılda fotogrametrik ölçümlerin yapıldığı fotogrametrik algılayıcılar (metrik kameralar ve benzeri) ve bunların taşındığı platformlarda yaşanan gelişmelerle özellikle de insansız hava araçlarının (İHA) geliştirilmesiyle harita üretiminde büyük ilerlemeler sağlanmıştır. İHA, klasik hava fotogrametrisi ve uydu görüntülerine kıyasla daha düşük maliyetli olması ve getirdiği daha yüksek çözünürlük olanakları ile gittikçe yaygınlaşan bir platform olmuştur (Uzar ve Özemir, 2019).

İHA ile fotogrametrik veri üretiminde uçuş planı yapılır ve görüntülerin gerçek konumuna yerleştirilebilmesi için yer kontrol noktaları üretilir. Uçuşlar manuel, yarı otomatik ya da otonom şekilde yapılabilir. İHA platformlarındaki GNSS/INS navigasyon cihazlarının yardımıyla otonom uçuşlar gerçekleştirilir. Fotoğraflar için belirlenen bindirme oranlarına göre alanın ölçümü yapılır.(Şekil 3.3)



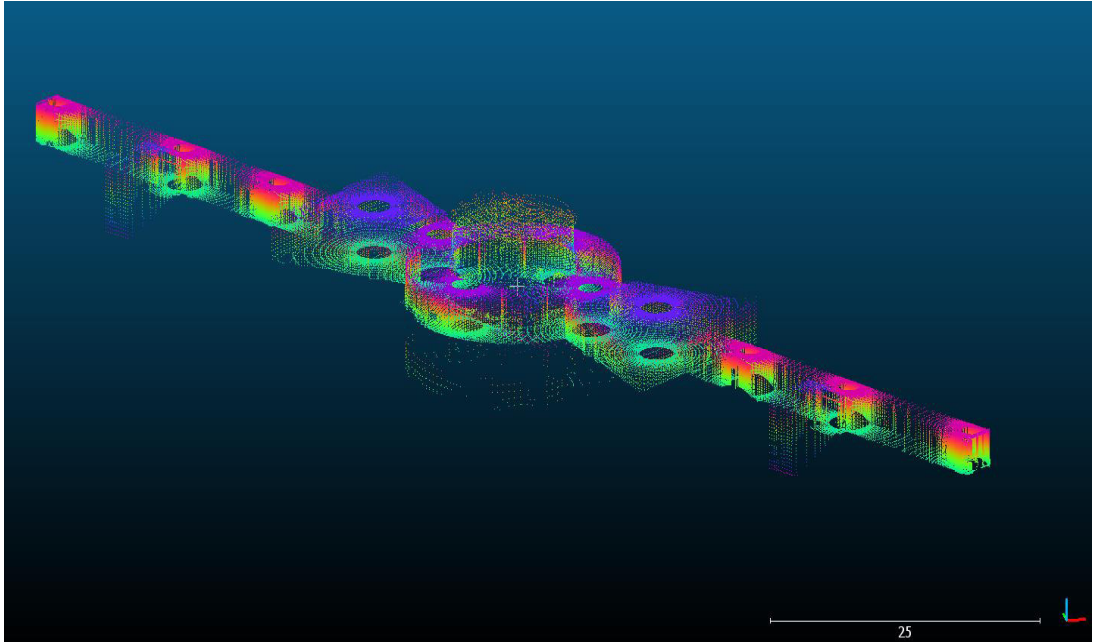
Şekil 3.3. Belirli bindirme oranına sahip görüntülerin elde edilmesi

Ardından kamera kalibrasyonu ve görüntülerin oryantasyonu yapılır (Nex ve Remondino, 2014). Fotoğrafların alındığı andaki kamera parametrelerini belirlemek için kamera kalibrasyonu yapılır. Kameranın kalibrasyon aşaması iç yöneltme elemanları ve dış yöneltme elemanlarının belirlenmesiyle gerçekleştirilir. Bu adımlar sonrasında çeşitli yazılımlar ve görüntü eşleştirme yöntemleri kullanılarak görüntüler üzerinden yüksek kalitede 3D modeller ve ölçüler oluşturulabilir (Şanlıoğlu, vd., 2013).

Fotogrametrik yöntem ile LİDAR arasındaki en belirgin fark, LİDAR ile doğrudan konumsal bilgi elde edilebiliyorken; fotogrametrik yöntemle görüntüler üzerinden birtakım işlemler yapılarak konumsal veri üretilebilmesidir. Her iki yöntemde kendine göre bazı avantajları ve dezavantajları olduğu ve farklı alanlarda üstünlüklere sahip olduğu için ikisinin entegrasyonu da önemli bir rol oynamaktadır (Habib, vd., 2004).

3.1.2. Uygulama İçin Elde Edilen Nokta Bulutu

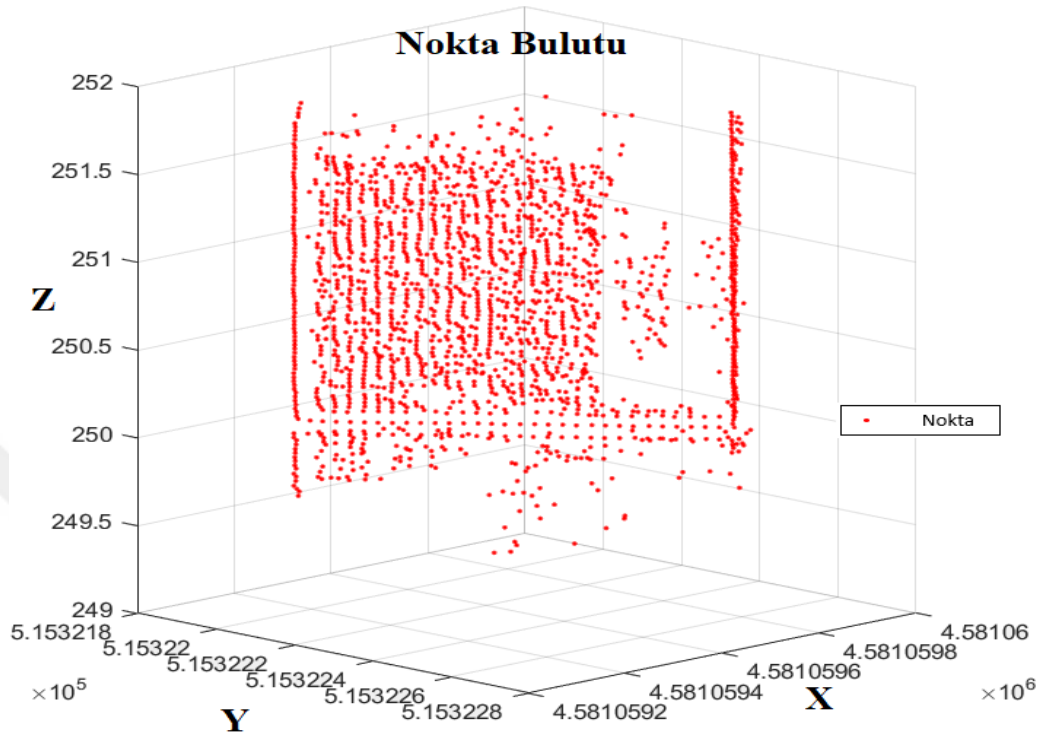
Uygulamada yersel LİDAR yöntemiyle Leica TS16 Robotik Total Station aleti kullanılarak üretilen Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi D Blok binasının nokta bulutundan yararlanılmıştır. (Şekil 3.4)



Şekil 3.4. Nokta bulutu üretilen yüzeyin CloudCompare ile gösterimi

Bu nokta bulutundan uygulama için bir pencere kesiti alınmıştır. Pencere kesitinin nokta bulutu verisi 3D koordinata sahip 1870 noktayı içermektedir ve Matlab

programlama dili ile 3D gösterimi verilmiştir. (Şekil 3.5) Uygulamada bir düzlem belirten pencereye ait nokta bulutu verisinden EKK ve EKKK yöntemleriyle düzlem geçirilmiştir.



Şekil 3.5. Uygulama için alınan pencere kesitinin Matlab programlama dili ile 3D gösterimi

3.1.3. Nokta Bulutu Verileriyle Düzlem Geçirilmesi

Literatürde düzlemin matematiksel ifadesi için bir çok farklı gösterim vardır (Wang, vd., 2001). (Tablo 3.1)

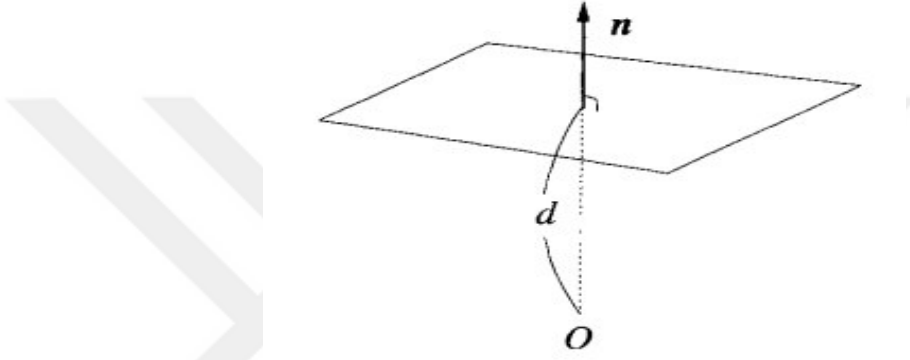
Tablo 3.1. Düzlemin matematiksel gösterimleri ve düzlem parametreleri (Weingarten, vd., 2004)

	Denklem	Düzlem Parametreleri
1	$nx - d = 0$	$n = (n_x, n_y, n_z)^T, d$
2	$x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi + z \sin \theta - p = 0$	θ, φ, p
3	$Z = aX + bY + d$	a, b, d
4	$ax + by + cz + 1 = 0$	a, b, c

Yukarıdaki eşitliklerden hepsi EKK yöntemi ile dengeleme için uygun değildir. Tablo 3.1'deki 1. model, Hesse gösterimi ($nx - d = 0$), diğer modellerin hepsine çevrilebilecek en genel gösterimdir:

$$np_i - d = n_x x_i + n_y y_i + n_z z_i - d = 0 \quad (3.1)$$

Burada; $p_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ 3D koordinatları, $n = (n_x, n_y, n_z)^T$ normal vektörü ve d orijine olan dik uzaklığı ifade eder. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6. Düzlem uzayının gösterimi (Kanatani, 2005)

Ancak, gerçekte bu noktaların çok az bir kısmı tam anlamıyla düzlem üzerindedir. Bu yüzden bu eşitliğin sağ tarafı için bir düzeltme (hata) değerinden bahsedilir:

$$n_x x_i + n_y y_i + n_z z_i - d = \varepsilon_i \quad (3.2)$$

Eşitlik (3.2) $(-d)$ ye bölünürse Tablo 3.2'deki 4. model elde edilir:

$$ax_i + by_i + cz_i + 1 = \frac{\varepsilon_i}{-d} \quad (3.3)$$

Bu model düzeltmelerin karesinin toplamını minimumlaştırmaz. O yüzden Eşitlik (3.2), (n_z) ye bölünür ve Tablo 3.2'deki 3. model elde edilir:

$$Z - aX - bY - d = \frac{\varepsilon_i}{-n_z} \quad (3.4)$$

Ortogonal bir EKK çözümü yalnız $n_z = \pm 1$ olduğu zaman elde edilir (Wang, vd., 2001; Weingarten, vd., 2004) . 2. model ise çözmesi zor doğrusal olmayan bir regresyon problemini gerektirir. Bu nedenle uygulama için 3. model seçilmiş ve ona göre bir uygulama gerçekleştirilmiştir.

3.2. Yöntem

Pratikte klasik dengeleme yöntemi sonrasında yapılan uyumsuz ölçü testleri ile uyumsuz ölçüler belirlenip çıkartılabilir. Ancak istatistiki modelleme açısından faydalı olan bu işlemin bazı dezavantajları vardır (Montgomery, vd., 2012). Uyumsuz ölçüler her durumda kötü ölçüler olmak zorunda değildir. Aksine, doğru iseler, belki de veri setindeki en bilgilendirici noktalar olabilirler. Örneğin, verinin normal bir dağılıma uymadığını ya da modelin doğrusal olmadığını gösterebilirler (Chatterjee ve Hadi, 2015). Ayrıca, klasik yöntemler uyumsuz ölçüler tarafından olumsuz bir şekilde etkilenebilir ve dengeleme sonuçları modelden sapan ölçülerin belirlenebilmesine izin vermeyebilir. Bu nedenle, uyumsuz ölçülerle başa çıkabilecek ya da onları belirleyebilecek robust yöntemler geliştirilmiştir (Alma, 2011). Uyumsuz ölçülerin etkilerinden kurtulmak için, robust yöntemlerin amacı uyumsuz ölçüler olmadan bulunacak olan dengelemeye en yakın sonuçları bulmaktır. Sonra da uyumsuz ölçüler, bu robust dengelemeden büyük ölçüde sapmalarıyla belirlenebilir (Rousseeuw ve Hubert, 2018).

3.2.1. En Küçük Mutlak Toplam (L_1 -norm)

En küçük mutlak toplam yöntemi (EKMT), EKK'dan neredeyse 50 yıl öncesinde 1757 yılında Roger Joseph Boscovich tarafından dünyanın şeklini tahmin etmek için tutarsız ölçüleri dengelemek amacıyla geliştirdiği bir yöntem olarak ortaya atılmıştır. EKMT yönteminin amaç fonksiyonunun çözümünün zor olması nedeniyle EKK yönteminin gölgesinde kalmıştır. Sonrasında 1887 yılında Edgeworth, EKMT yöntemini kullanarak doğrusal regresyon için bir çözüm sunmuştur (Birkes ve Dodge, 1993). L_1 -norm regresyonu olarak da bilinen bu yöntem, model parametrelerinin $1 \leq p \leq 2$ aralığında $\sum_{i=1}^n |v|^p$ fonksiyonunu minimize etmek için seçildiği L_p -norm regresyonunun özel durumlarından biridir (Montgomery, vd., 2012).

EKMT'nin, EKK'ya göre önemli avantajı ona göre daha robust bir teknik olmasıdır. Bu durumda EKMT yöntemi uyumsuz ölçülere karşı daha az hassas olur. (Amiri-Simkooei, 2003). Düzeltmelerin kareleri alınmadığı için, uyumsuz ölçülerin

etkisi EKK yönteminde olduğundan daha azdır (Knight ve Wang, 2009). EKMT yönteminin amaç fonksiyonu;

$$\sum |Pv| \rightarrow \min \quad (3.5)$$

eşitliğiyle verilir. Bu problemi çözenin genel yolu lineer programlama yaklaşımıdır. L_1 -norm yöntemi kötü kaldıraç noktalarına karşı hassastır ve kötü bir şekilde etkilenebilir. $V=Ax-l$ şeklindeki klasik Gauss-Markov modelinde; stokastik ve fonksiyonel model aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} l + v &= Ax \\ D^T x &= 0 \\ P &= Q_{ll}^{-1} = \sigma_0^2 K_{ll}^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

yazılır. Burada; D^T , katsayılar matrisinin rank defektini tamamlamak için eklenen ağırlık matrisini gösterir.

Çözüm için genel strateji lineer programlamayı kullanmak ve negatif olmayan esnek değişkenleri için içine katarak Eşitlik (3.5)'deki ifadeyi mutlak değer işareti olmadan yazabilmektir. Üstten de anlaşılacağı gibi L_1 normu, lineer programlama yoluyla hesaplamak hem parametrelerin hem düzeltmelerin hem de tüm değişkenlerin negatif olmadığı bir matematik model formüle etmeyi gerektirir. Bunun için en başta Eşitlik (3.6)'nın L_1 -norm kestirimine dönüştürülmesi için; parametreler için iki tane α ve β esnek vektörü düzeltmeler için de u ve w iki esnek vektörü tanımlanır;

$$\begin{aligned} v &= u - w, \quad u, w \geq 0 \\ x &= \alpha - \beta, \quad \alpha, \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esnek değişkenler cinsinden Eşitlik (3.5) yeniden yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$z = p^T |v| = p^T |u - w| = p^T (u + w) \rightarrow \min \quad (3.8)$$

Burada; z , amaç fonksiyonunu göstermektedir ve minimum koşulunun sağlanması için;

$$u_i = 0 \text{ ya da } w_i = 0 \quad (3.9)$$

yazılır. Esnek değişkenler cinsinden eşitlik (3.6) yeniden yazılırsa;

$$l + u - w = A(\alpha - \beta) \quad (3.10)$$

$$D^T(\alpha - \beta) = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Çözümü sağlanabilecek uygun bir formata ulaşmak için Eşitlik (3.8), (3.10) ve (3.11) üzerinde birtakım değişiklikler yapılarak $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ formatı elde edilir:

$$z = p^T(u + w) + 0^T(\alpha + \beta) \rightarrow \min$$

$$z = [0^T \ 0^T \ p^T \ p^T] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ u \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \min \quad (3.12)$$

$$l = A(\alpha - \beta) + w - u$$

$$D^T(\alpha - \beta) + Z(u + w) = 0 \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} A & -A & I & -I \\ D^T & D^T & Z & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, u, w \geq 0$$

Burada Z, 0 matrisidir. Son olarak Eşitlik (3.12) ve (3.13) düzenlenecek olursa Eşitlik (3.14) ve (3.15) elde edilir;

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ u \\ w \end{bmatrix} = \underline{x}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ p \end{bmatrix} = \underline{c}^T \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} A & -A & I & -I \\ D^T & D^T & Z & Z \end{bmatrix} = \underline{A}; \quad \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{b} \quad (3.15)$$

Böylece, lineer programlama ile çözülebilecek bir model elde edilmiş olur ve simplex yöntemi ile çözüme gidilir.

$$z = \underline{c}^T \underline{x} \rightarrow \min$$

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}; \quad \underline{x} \geq 0 \quad (3.16)$$

Simplex yöntemi sistematik bir şekilde izin verilen çözüm uzayında bir köşeden diğer köşeye hareket ederek lineer programlama problemini çözer. \underline{x} i çözmek ile α, β, u ve w elde edilir sonrasında da çözüm vektörü x bilinmeyenleri ve v

düzeltilmeleri elde edilebilir. Doğrusal olmayan modellerde bu işlemler doğrusal çözüm vektörü x sifira yakınsayana kadar iteratif bir şekilde çözülür (Amiri-Simkooei, 2003).

3.2.2. M-Kestiricileri

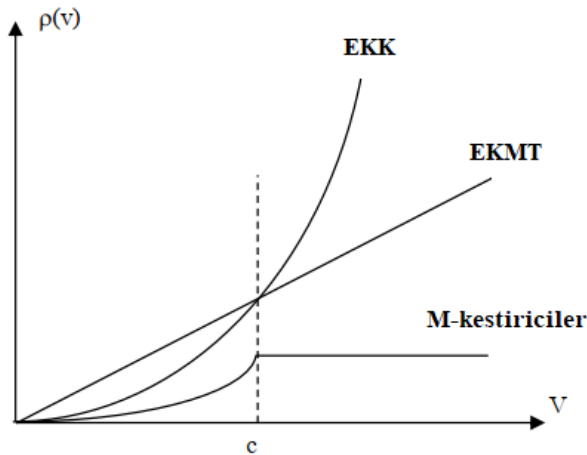
Huber 1964 yılında özellikle normal dağılım ile ilgili varsayım açısından robust bir yöntem olan M-kestiricisini geliştirmiştir (Birkes ve Dodge, 1993). Genelde, bir robust kestirici sınıfı, düzeltilmelerin bir fonksiyonunu (ρ) minimize eden şey olarak tanımlanır. M-kestiricisi, maksimum olasılık yönteminin genelleştirilmiş durumudur. M harfi maksimum olasılığı temsil eder (Fox ve Weisberg, 2002; Susanti, vd., 2014; Hekimoğlu, 2006). Yani; ρ fonksiyonu hata dağılımının uygun seçimi için olasılık dağılımı ile ilişkilidir (Montgomery vd, 2012).

$$M = \sum_{i=1}^n \rho(x - l_i) = \sum_{i=1}^n \rho\left(\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j - l_i\right) = \sum_{i=1}^n \rho(v_i) \rightarrow \min \quad (3.17)$$

M-kestiriminde, amaç fonksiyonu olan $v^T v$ veya $|v|$ yerine kayıp fonksiyonu olarak adlandırılan düzeltilmelerin daha uygun fonksiyonu $\rho(v)$ minimize edilir (Zeliznakova ve Hurcık, 2018). Bu açıdan EKK ve EKMT'yi, M-kestiricisinde $\rho(v) = v^T v$ veya $\rho(v) = |v|$ alındığındaki oluşan özel durumlar olarak görülebilir (Birkes ve Dodge, 1993).

$$\rho(v) \rightarrow \min \quad (3.18)$$

Düzeltilmelerin, çeşitli fonksiyonlara göre etkilerinin o fonksiyonları nasıl etkilediği aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 3.7)



Şekil 3.7. Çeşitli fonksiyonlara göre düzeltilmelerin etkisi (Yaşayan,1992)

Bir fonksiyonu minimize etmek için bilinmeyenlere göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenirse, fonksiyonu minimum yapacak bilinmeyen değerleri bulunmuş olur. M-kestiricilerini daha çok temsil edecek olan yapı etki fonksiyonudur. Bir kestirimin etki fonksiyonuyla, ölçü grubundaki küçük miktardaki kirliliğin kestirimde sebep olabileceği sapma değeri ölçülür (Birkes ve Dodge, 1993). Kayıplar fonksiyonu $\rho(v)$ ya da amaç fonksiyonu olarak adlandırabileceğimiz fonksiyonun türevi alınarak etki fonksiyonu $\psi(v)$ elde edilir ve düzeltmesi büyük olan ölçülerin, kestirimdeki etkilerinin az olması istenir.

$$\psi(v) = \frac{\partial \rho(v)}{\partial v} \quad (3.19)$$

Sonrasında ortaya çıkan eşitlik eğer doğrusal değilse robust olması için farklı ağırlıklara sahip iteratif bir yöntemle çözülür (Gasincova, vd., 2011). Ağırlık fonksiyonu $w(v)$, etki fonksiyonunun düzeltmelere (v) bölünmesiyle aşağıdaki gibi türetilir:

$$W(v) = \frac{\psi(v)}{v} \quad (3.20)$$

Kayıp fonksiyonu, etki ve ağırlık fonksiyonu kavramları M-kestiricisinin önemli kavramlarıdır. Tanımlanan her bir farklı kayıp, etki ve ağırlık fonksiyonu için bugüne kadar birçok M-kestiricisi sunulmuştur (İnal ve Yetkin, 2006). Aşağıdaki çizelgede yaygın M-kestiricilerinin, amaç, etki ve ağırlık fonksiyonları ile birlikte kullanılan sınır değerleri verilmiştir. (Tablo 3.1) Sınır değerleri için genelde kullanılan değerler tabloda verilmiştir ama literatürde genellikle $1.5 s_0$ ve $2 s_0$ (s_0 , öncül standart sapma) gibi tecrübelerle dayalı sabit değerler verilir (Uzun, 2003; Gökalp ve Boz, 2005). Bunlar haricinde sınır değerler hesap yoluyla da bulunabilirler.

Tablo 3.1. Yaygın olarak kullanılan bazı M fonksiyonları (Yaşayan, 1992; Yang, vd., 2001; Yang, vd., 2002; Uzun, 2003; Gökalp, vd., 2008; Erenoğlu ve Hekimoğlu, 2009; Gasincova, vd., 2011)

Yöntem	Sınır	Amaç Fonksiyonu $\rho(v)$	Etki <u>Fonksiyonu</u> $\psi(v) = \frac{\partial \rho(v)}{\partial v}$	Ağırlık <u>Fonksiyonu</u> $W(v) = \frac{\psi(v)}{v}$
EKK		$\frac{1}{2}v^2$	v	1
EKMT		$ v $	1	$\frac{1}{ v }$
Huber	$ v \leq c$	$\frac{1}{2}v^2$	v	1
	$ v > c$	$c v - \frac{1}{2}c^2$	c veya c sign(v)	$\frac{c}{ v }$
c=1.5 ya da 2 olarak alınır				
Hampel	$ v < a$	$\frac{1}{2}v^2$	v	1
	$a \leq v \leq b$	$a \cdot v - \frac{1}{2}v^2$	$a \cdot \text{sign}(v)$	$\frac{a}{ v }$
	$b \leq v < c$	$ab - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a(c-b)[1 - (\frac{c- v }{c-b})^2]$	$a \frac{c- v }{c-b} \text{sign}(v)$	$a \frac{c- v }{(c-b) v }$
	$c \leq v $	$a \cdot b - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a(c-b)$	0	0
Bazı kaynaklarda renklendirilmiş koyulaştırılmış kısmın kullanılmadığı görülmüştür. Standard olarak; a=2, b=4 ve c=8 Bazı kaynaklarda; a=1.7, b=3.4 ve c=8.5				
Andrew	$ v \leq c\pi$	$c^2(1 - \cos\frac{ v }{c})$	$c \sin \frac{ v }{c}$	$(\frac{ v }{c})^{-1} \sin\frac{ v }{c}$
	$ v > c\pi$	$2c^2$	0	0
c= 1.5, 1.339, 1.8 ya da 2 olarak alınır				

Tablo 3.2. Yayıgın olarak kullanılan bazı M fonksiyonları (devam)

Beaton-Tukey	$ v \leq v$	$\frac{c^2}{6} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3\right)$	$ v \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2$	$\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2$
	$ v > v$	$\frac{1}{6}c^2$	0	0
c=1.5 ya da 2 olarak alınır				
Danish	$ v \leq c$	$\frac{1}{2}v^2$	v	1
	$ v > c$	$-(c^2 + c v)e^{-\frac{ v }{c}}$	$ v e^{-\frac{ v }{c}}$	$e^{-\frac{ v }{c}}$
c= genellikle 2 ile 3 arasında değer alır				
Fair		$c^2 \left(\frac{ v }{c} - \ln \left(1 + \frac{ v }{c}\right)\right)$	$\frac{ v }{\left(1 + \frac{ v }{c}\right)}$	$\left(1 + \frac{ v }{c}\right)^{-1}$
	c= 1.3998 olarak alınır			
IGG (Yang I)	$ v' \leq c_0$			1
	$c_0 < v' \leq c_1$			$\frac{c_0}{ v' } \left(\frac{c_1 - v' }{c_1 - c_0}\right)^2$
	$ v' \geq c_1$			0
	$v' = v/\sigma_0$ ve $c_0 = 1.0-1.5$ ve $c_1 = 2.5-3.0$ olarak alınır.			
IGGII (Yang II)	$ v^{\sim} \leq c_0$			1
	$c_0 < v^{\sim} \leq c_1$			$\frac{c_0}{ v^{\sim} }$
	$ v^{\sim} > c_1$			0
	$v^{\sim} = \frac{v}{s_v}$ (v^{\sim} , standartlaştırılmış düzeltmeler ve s_v , düzeltmelerin standart sapması) $c_0 = 2.0-3.0$ ve $c_1 = 4.5-8.5$ olarak alınır			

Her bir yöntem farklı durumlarda birbirlerine göre daha üstün olabilirler. Örneğin; Danimarka M-kestirimi kaba hatalı ölçülere karşı pek tercih edilmez ve kullanılmazlar (İnal ve Yetkin, 2006). EKMT yöntemi ise kaldıraç noktalarından olumsuz etkilenebilir. M-kestiricilerinin ağırlık fonksiyonları, EKK'nın ağırlıklı karelerinin iteratif çözümünde kullanılarak çözümlü etkili sonuçlar elde edilebilir bu yüzden istatistiki kaynaklarda genellikle M-kestiriciler üzerinde durulmuştur. (Uzun, 2003). Eşitlik (3.17)'nin çözümü için;

$$A^T \psi(v) = A^T \psi(Ax - l) = 0 \quad (3.21)$$

eşitliği elde edilir (Birkes ve Dodge, 1993; Uzun, 2003). Yukarıdaki eşitliğin çözümü çeşitli şekillerde yapılabilir ama uygulamada en çok rağbet gören iteratif yöntemdir. Bunun için Eşitlik (3.21), $(Ax-l)$ ile çarpıp bölünür ve aşağıdaki gibi bir eşitlik elde edilir:

$$A^T \frac{\psi(Ax-l)}{(Ax-l)} (Ax-l) = 0 \quad (3.22)$$

Eşitlik (3.22)'de $\frac{\psi(Ax-l)}{(Ax-l)}$ yerine Eşitlik (3.19) yazılırsa;

$$A^T W(v)(Ax-l) = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitlikteki gibi en küçük karelerdekine benzer bir çözüm elde edilmiş olur.

$$x = (A^T W(v)A)^{-1} A^T W(v)l \quad (3.24)$$

M-kestiricileri kullanarak iteratif EKK şeklinde bir çözüm yapmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

1. İlk önce birim ağırlıklar (ya da öncül ağırlıklar varsa öncül ağırlıklar) kullanılarak EKK yöntemi gerçekleştirilir.
2. Dengelenmiş düzeltmelerden yeni ağırlıklar ilgili seçilen kestiricinin ağırlık fonksiyonuyla yeniden hesaplanır (ya da o değerlerle varsa öncül ağırlıklar yeniden ölçeklendirilir).
3. Yeni ağırlıklarla birlikte yeni bir EKK yöntemi yeniden uygulanır. Ta ki iki ardışık sonuç kabul edilebilir bir denklik sağlayıncaya kadar 2. adıma dönülür (Valero ve Moreno, 2005).

3.2.3. R-Kestiricileri

Robust kestiricilerin 3 temel sınıfından biridir. Ranklar, istatistiki olarak küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe doğru sıralanarak tanımlanırlar (Uzun, 2003). Örneğin en küçük düzeltme değerine 1 rankı verilir sırasıyla küçükten büyüğe doğru giderek ranklar 2,3 vb. şekilde artar.

$$v = \begin{bmatrix} -2.1 \\ 4 \\ 7.5 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow R(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Ranklar, aşağıdaki genel formüldeki gibi kullanılarak ağırlıklı olarak aşağıdaki gibi hesaplanır (Anonim, 2010).

$$\min \sum_{i=1}^n \left| R_i - \frac{n+1}{2} \right| v_i \quad (3.26)$$

Daha genel bir ifade ile yazılacak olursa;

$$\min \sum_{i=1}^n R(v_i) v_i \quad (3.27)$$

$$\sum \left[\text{rank}(Ax_i - l_i) - \frac{n+1}{2} \right] * (Ax_i - l_i) \quad (3.28)$$

elde edilir. Burada; $R(v_i)$, skor fonksiyonu R_i , $R(v)$ matrisinin elemanları ($i=1:n$) göstermektedir. Farklı skor fonksiyonları da olabilir (Birkes and Dodge, 1993). Normal skor fonksiyonu ve işaret skor fonksiyonu;

$$R(v) = \Phi^{-1}\left(\frac{R}{n+1}\right) \quad (3.29)$$

$$R(v) = \text{sgn}\left(R - \frac{1}{2}(n+1)\right) \quad (3.30)$$

eşitlikleri ile verilebilir. Burada; Φ , Standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunu ve $\text{sgn}(t)$, t nin işaretini gösterir (Eğer t negatif ise -1, $t=0$ ise 0 ve t pozitif ise 1). R-kestiricileri geniş veri yapılarında pek kullanışlı değildir bu yüzden kaynaklarda R-kestiricileri ilgili geniş bir bilgi yoktur (Uzun, 2003).

3.2.4. L-Kestiricileri

Bir L-kestiricisi, sıralı istatistiğin doğrusal kombinasyonuna dayalıdır (Stephanie, 2017). Sıralı istatistiğin ya da sıralı istatistik fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonu şeklinde olan L-kestiricileri eşitlik sistemlerinin ya da minimizasyon problemlerinin çözümü şeklinde değil, açık bir şekilde formüle edilirler (Jureckova ve Picek, 2006). Tüm L-kestiricileri robust değildir (örneğin minimum, maksimum ve ortalama robust olarak görülmezler) ve bazıları diğerlerinden daha iyi verimliliğe sahiptir. Bu kestiricilerin hesaplama yöntemleri kolaydır fakat pek etkili çözümler

vermezler. Tekrarlı yöntemlerle ve doğrusal programlama ile çözüme ulaşması yüzünden robust kestirime pek uygun olmadığı için fazla tercih edilmezler (Uzun, 2003).

3.2.5. Genelleştirilmiş M-Kestiricileri

M-kestiricisinin etki fonksiyonu, A katsayılar matrisindeki uyumsuz ölçüler yani kaldıraç noktaları açısından sınırlandırılmamıştır. Bu yüzden; olası kaldıraç noktalarına karşı hassastırlar. Etki fonksiyonunun (ψ) seçiminin bu durum üzerinde etkisi yoktur (Jureckova ve Picek, 2006). Bu açıdan Mallow, Genelleştirilmiş M-kestiricilerini (GM) önermiştir (Knight ve Wang, 2009). GM-kestiricileri kaldıraç noktalarının etkilerini bir ağırlık fonksiyonu ($\eta(A)$) yoluyla sınırlandırır. Mallow Eşitlik (3.21) yerine aşağıdaki eşitliği önermişken:

$$\eta(A)A^T\psi(v) = 0 \quad (3.31)$$

Schweppe ise (3.31) yerine

$$\eta(A)A^T\psi(v/\eta(A)) = 0 \quad (3.32)$$

eşitliğini önermiştir. Bu kestiriciler, etkileri, etki fonksiyonuyla ölçülebilecek olan tek bir uyumsuz ölçünün etkisini sınırlama umuduyla kurulmuştur. Böyle bir kriteri esas alarak, etki (ψ) ve ağırlık (η) fonksiyonlarının en uygun seçimi yapılmıştır. Bu yüzden GM-kestiricileri şu an genel olarak Sınırlı-Etki kestiricileri olarak da bilinir. Ancak, tüm GM-kestiricilerinin kırılma noktasının, bilinmeyenlerin sayısının bir fonksiyonu olarak azaldığı açığa çıkmıştır. Bu da uyumsuz ölçülerin gerçekleşme şansının bir hayli arttığı yüksek boyutlu modellerde, kırılma noktasının azalması anlamına gelmektedir (Rousseeuw ve Leroy, 1987).

3.2.6. Tekrarlı Medyan

Tekrarlı Medyan (TM) algoritması, içinde iç içe medyanlarla, tekil ortalamaların yer değiştiği robustlaştırılmış U-istatistiğidir. U harfi (unbiased) tarafsız anlamına gelir. Tekrarlı medyan kestirimi %50'lik kırılma noktasını korur ve verinin neredeyse yarısıyla uğraştığında bile uyumsuz ölçülerin etkilerine karşı direnç gösterebilir. Doğrudan hesaplandıkları için (iteratif bir şekilde değil), bu yöntemler iteratif robust kestirimler için başlangıç değeri olarak kullanılabilirler (Siegel, 1980).

Siegel (1980), çalışmasında basit doğrusal regresyon için TM yöntemi çözümünü göstermiştir. Eşitlik (2.1) hatırlanacak olursa basit doğrusal regresyon $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ şeklinde ifade edilebilir. Bu noktada karışıklık olmasın diye β_0 , kesişim noktası a ve β_1 , eğim b olacak şekilde düzenlenirse $y = a + bx$ modeli elde edilir ve n ölçü sayısı olmak üzere (x_i, y_i) değerleri $(i=1, \dots, n)$ için a, b bilinmeyenlerinin bu yöntemle hesaplaması;

$$b(i, j) = (y_j - y_i)/(x_j - x_i) \quad (3.33)$$

b eğimi için $n(n-1)/2$ tane farklı şekilde hesaplanacak eğimler iki aşamalı medyan kullanılarak;

$$\hat{b} = \text{Median}_i \{ \text{Median}_{j \neq i} b(i, j) \} \quad (3.34)$$

eşitliğiyle hesaplanır. Kesişim noktası değeri (a) ise iki farklı şekilde hesaplanabilir. Eşitlik (3.34)'de bulunan tekil medyan \hat{b} kullanılarak tek bir medyan işlemi ile $\hat{a} = \text{Median}_i (y_i - \hat{b}x_i)$ ya da doğrudan $a(i, j) = \frac{(x_j y_i - x_i y_j)}{(x_j - x_i)}$ olacak şekilde iç içe iki medyan kullanılarak aşağıdaki eşitlikle

$$\hat{a} = \text{Median}_i \{ \text{Median}_j a(i, j) \} \quad (3.35)$$

hesaplanır. Literatürde, Gauss-Markov modeli için bu yöntemin nasıl kullanılabileceği üzerine pek kaynağa rastlanamamıştır.

3.2.7. S-Kestiricileri

1984'te Yohai ve Rousseeuw tarafından önerilen S-kestiricileri, M-kestiricisinin düzeltme ölçekleri ile ilgilidir. M-kestiriminin zayıf yönü veri dağılımının bilinmemesi ve ağırlıklı değer olarak tüm verilerin bir fonksiyonunu değil de sadece medyanı kullanmasıdır. Bu yöntem medyanın zayıflığının üstesinden gelmek için düzeltmelerin standart sapmasını kullanır (Susanti, vd., 2014).

3.2.8. MM-Kestiricileri

Yohai 1987'de S-kestiricileri ve M-kestiricilerini kombine eden MM-kestiricilerini önermiştir. Yöntemde başlangıçta S-kestiricisini kullanarak başlangıç değerleri elde edilir ve daha sonra bu kestirimden elde edilen düzeltmeleri kullanarak ölçek faktörü hesaplanır. Daha sonra bu ölçek faktörü M-kestiriminin peş peşe iterasyonlarında sabit tutularak başlangıç değerler ile birlikte kullanılır. Başlangıç

değerler için S-kestiriciler yerine En küçük medyan kareler (EKMK) kestiricileri de kullanılabilir (Knight ve Wang, 2009).

3.2.9. En Küçük Medyan Kareler

En küçük kareler toplamı yerine en küçük medyan karelerin (EKMK) amaç fonksiyonu olarak seçildiği bu yöntem Rousseeuw tarafından 1984 yılında ortaya atılmıştır (Rousseeuw ve Leroy, 1987: 14). Bu yöntem adından da anlaşılacağı gibi düzeltmelerin karelerinin medyanını minimize ederek çözüm bulur (Knight ve Wang, 2009).

$$\text{Min}(\text{Median}(v^2)_{h:n}) \quad (3.36)$$

Burada h , dengelemeye ya da regresyona dahil edilen ölçülerin sayısıdır. EKMK yöntemi %50'lik kırılma noktasına sahip yüksek kırılma noktalı bir robust kestiricidir. EKMK yönteminde en yüksek olası kırılma noktasını elde etmek için h aşağıdaki eşitlikteki gibi bulunur (Rousseeuw ve Leroy, 1987: 125; Rousseeuw ve Driessen, 2006):

$$\left(\left\lceil \frac{n-u}{2} \right\rceil + 1\right) / n \quad (3.37)$$

Burada, u regresyon parameterlerinin (bilinmeyenlerin) sayısıdır. Bu yöntem her veri seti için robust değildir ve hesaplama yönü zordur ve düşük verimliliğe sahip olması nedeniyle uyumsuz ölçülerin belirlenmesinde ya da iteratif yöntemlerde başlangıç kestirim olarak kullanılabilir (Birkes ve Dodge, 1993).

3.2.10. En Küçük Kırılmış Kareler

Asimptotik verimlilik açısından çok verimli olmayan EKMK yönteminin bu zafiyetini aşmak amacıyla bu yöntem Rousseeuw tarafından geliştirilmiştir (Rousseeuw ve Leroy, 1987: 15). Düzeltmelerden ağırlıklı kareler toplamı en büyük olanın çıkarılması dışında EKK'ya oldukça benzer bir yöntemdir. Amaç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^h P(v_i^2)_{i:n} \quad (3.38)$$

Eşitlik (3.38)'deki $(v_i^2)_{i:n}$ düzeltme değerlerinin karelerinin küçükten büyüğe sıralanmasıdır (Giloni ve Padberg, 2001):

$$(v)_{(1)}^2 \leq \dots \leq (v)_{(i)}^2 \leq \dots \leq (v)_{(n)}^2 \quad (3.39)$$

Regresyona dahil edilecek düzeltmelerin sayısını belirlemede farklı kıstaslar alınmıştır. Knight ve Wang (2009) çalışmalarında $h=n(1-\alpha)+1$, (burada α regresyondan çıkarılacak yani ayıklanacak düzeltmelerin yüzdesidir) şeklinde bulunmasını önermişlerdir. Fakat en iyi robustluk özellikleri için h değerinin yaklaşık olarak $n/2$ alınması gerektiği ve bu durumda kırılma noktasının %50 olacağı (Rousseeuw ve Leroy, 1987) tarafından belirtilmiştir. Hem EKKK hem de EKMK yöntemleri yüksek kırılma noktasına sahip olmalarından dolayı aynı zamanda birden fazla uyumsuz ölçü ile baş edebilirler. EKKK yönteminde h değeri için olması gereken kesin optimal değer aşağıdaki gibi

$$[(n + u + 1)/2] \quad (3.40)$$

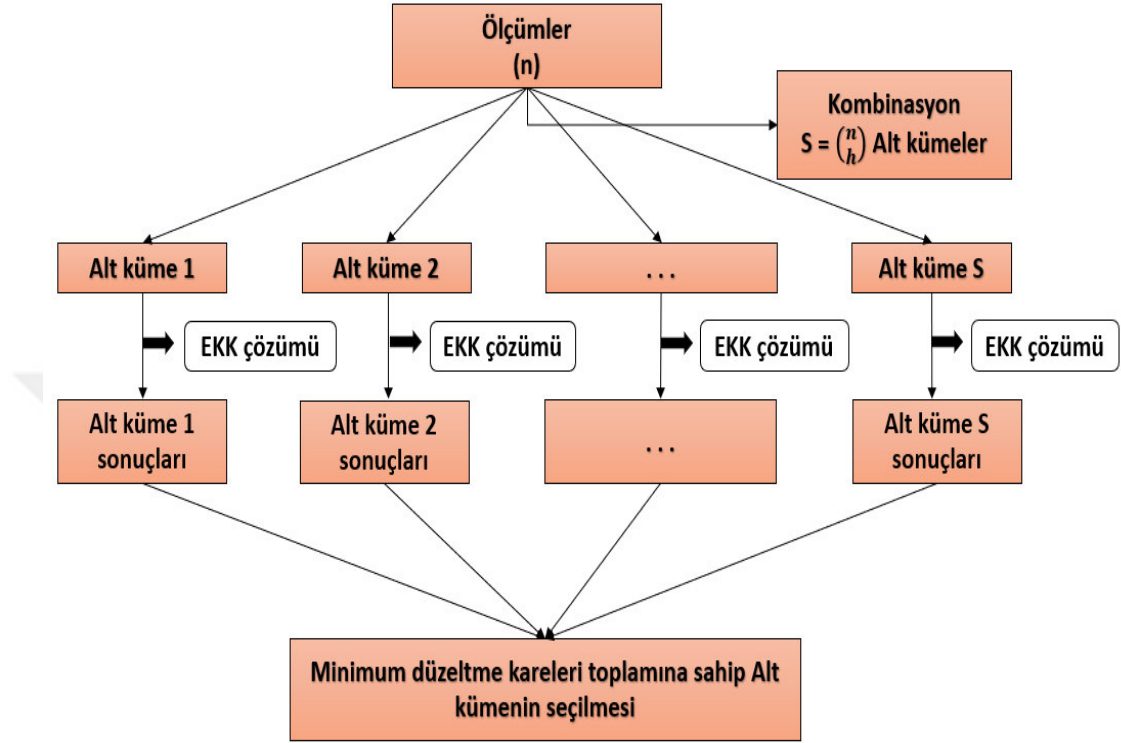
hesaplanması gerektiği yine (Rousseeuw ve Leroy, 1987: 132) tarafından belirtilmiştir. Optimal h değeri bu şekilde hesaplandığında yöntemin kırılma noktası eşitlik (3.37)'de hesaplanan EKMK'ninki ile eşdeğer olur (Rousseeuw ve Leroy, 1987; Rousseeuw ve Driessen, 2006). EKMK yöntemiyle kıyaslandığında EKKK yöntemi daha iyi bir yakınsama (*convergence*) oranına sahiptir (Rousseeuw ve Leroy, 1987). Ayrıca asimptotik verimlilik, yerel etkilere karşı hassaslık gibi özellikler açısından düşünüldüğünde daha üstün bir yöntem olduğundan dolayı (Rousseeuw ve Driessen, 2006) uygulamalarda tercih edilmelidir. EKKK yönteminin EKMK yöntemine karşı ana dezavantajı amaç fonksiyonlarını çözerken daha çok işlem gerektirmesidir. Bu durum, EKKK yöntemi için $O(n \log n)$ işlem gerekirken EKMK yöntemi için $O(n)$ kadar işlem gerekmesi ile açıklanır (Rousseeuw ve Leroy, 1987: 135).

EKKK yönteminin çözümü için literatürde farklı farklı algoritmalar geliştirilmiştir (Rousseeuw ve Driessen, 2006). Bu algoritmalar incelendiğinde sundukları çözümlerle kesin ve yaklaşık çözüm olarak ikiye ayrıldıkları görülmektedir.

1) Kesin EKKK çözümü

Kesin EKKK (exact LTS) çözümünde ortaya çıkacak tüm alt kümeler için çözüm aranır ve genellikle küçük boyutlu veri grupları için işlevsel olan bir çözümdür. Kesin EKKK'da seçilen h değeri için $s = \binom{n}{h}$ kadar alt küme oluşur. Her bir alt küme için EKKK çözümü yapılır. Elde edilen her bir alt küme için hesaplanan düzeltme kareleri

toplamı incelenerek en küçük değere sahip olan seçilir. Seçilen alt küme incelendiğinde o alt kümede olmayan ölçüler için uyumsuz ölçü ya da hatalı ölçü oldukları şeklinde bir varsayım yapılabilir. Aşağıdaki şekilde kesin EKKK çözümü adımları verilmiştir. (Şekil 3.8)



Şekil 3.8. Kesin EKKK çözümü adımları

2) Yaklaşık EKKK çözümü

Ölçülerin boyutunun artmasıyla ortaya çıkan probleme karşı yaklaşık bir çözüm geliştirilmiştir ve yaklaşık EKKK (approximate LTS) adıyla bilinir. Kesin EKKK'daki gibi olası tüm alt kümeler için çözüm aranmadığı için bu adı almıştır. Literatürde yaklaşık EKKK çözümü için birçok algoritma geliştirilmiştir. Bu tezde uygulanması amacıyla Rousseeuw ve Driessen (2006) tarafından geliştirilen algoritma üzerinde durulmuştur. Bu algoritma C-adımı, Hızlı-EKKK algoritması (*FAST-LTS algorithm*) ve Seçici İterasyon olmak üzere üç kısımdan oluşur.

(a) C-adımı (C-step)

Çoklu doğrusal regresyon eşitliği $y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{iu} + \beta_0$ olmak üzere, burada y_i bağımlı değişkenleri, $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iu})$ bağımsız değişkenleri ve $x = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u)$ bilinmeyenleri ifade eder ve β_0 kesişim noktası olarak bilinir.

Kesişim noktası her regresyon modelinde kullanılması zorunlu değildir. Bu şekliyle düşünüldüğünde bilinmeyenler vektörü x in boyutu $u + 1$ kadardır.

Ayrıca yukarıdaki çok doğrusal regresyon modelini çözmek üzere $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1u}, y_1), \dots, (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nu}, y_n)$ şeklinde ölçümler yapılmış olsun. Klasik Gauss-Markov modeli aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{V \quad n,1} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} & 1 \end{bmatrix}}_{A \quad n, u+1} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \\ \beta_0 \end{bmatrix}}_{\hat{x} \quad u+1,1} - \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{l \quad n,1} \quad (3.41)$$

C- adımına göre bu modelin çözümü Adım 1 ve Adım 2 olmak üzere iki adımda gerçekleştirilir.

➤ **Adım 1**

Eldeki tüm ölçüler kullanılarak klasik bir şekilde EKK işlemi yapılır. İlk EKK işlemi sırasında kullanılan tüm ölçüleri içerecek küme $H_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ ile Eşitlik (3.41)'deki model kurulur ve bilinmeyenler vektörü \hat{x}_1 aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{x}_1 = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (3.42)$$

İlk EKK sonrası elde edilecek düzeltme değerleri $v_1(i)$ olmak üzere düzeltmelerin karelerinin toplamı:

$$Q_1 = \sum_{i=1:n} (v_1(i))^2 \quad (3.43)$$

eşitliğiyle bulunur. Burada; $v_1(i) = A\hat{x}_1 - l$ ($i = 1, 2, \dots, n$) şeklindedir.

➤ **Adım 2**

Adım 1'de yapılan ilk EKK sonrası elde edilen düzeltme değerleri mutlak değerce sıralanır:

$$|v_1|_{1:n} \leq |v_1|_{2:n} \leq \dots \leq |v_1|_{n:n} \quad (3.44)$$

Mutlak değerce sıralanan düzeltme değerlerinden, Eşitlik (3.40)'daki gibi hesaplanan yeni h kadar düzeltme seçilir:

$$|v_1|_{1:n} \leq |v_1|_{2:n} \leq \dots \leq |v_1|_{h:n} \quad (3.45)$$

Oluşan yeni küme $H_2 = \{1, 2, \dots, h\}$ olur. Oluşan bu küme ile Eşitlik (3.41)'deki model yeniden düzenlenir ikinci kez EKK işlemi yapılır. İkinci EKK sonrası elde edilen \widehat{x}_2 ile düzeltmelerin karesinin toplamı (3.43) eşitliğinde olduğu gibi bulunur:

$$Q_2 = \sum_{i=1:n} (v_2(i))^2 \quad (3.46)$$

Burada; $v_2(i) = A\widehat{x}_2 - l$ ($i = 1, 2, \dots, n$) şeklindedir. Bu işlemler C-adımı olarak tanımlanır. C- adımını tekrarlanarak iteratif bir sonuca gidilir. İterasyon sayısı k olmak üzere, iterasyon $Q_{k-1} = Q_k$ oluncaya kadar bu işlem yapılır. Böyle bir yakınsamaya, sonlu sayıda iterasyon ile her zaman erişilir (pratikte sıklıkla $k < 10$ dur) (Rousseeuw ve Driessen, 2006). Fakat C-adımında bazı geliştirilmesi ya da dikkate alınması gereken durumlar vardır. Örneğin; başlangıç için ölçülerin tümünün mü yoksa bir kısmının mı kullanılması ve bir kısmı kullanılacaksa hangi ölçüler ile alt kümeler oluşturulacağı, farklı alt kümelerinin aynı sonucu verebilecek olmasından dolayı tekrardan nasıl kaçınılacağı, daha az iterasyon yapıp yapılamayacağı, veri sayısının büyümesi durumu ve benzeri durumlar dikkate alınmalıdır. Bu gibi durumlara cevap olacak şekilde C-adımı daha da geliştirilmiş ve sistematik hale getirilerek Hızlı-EKKK algoritması kurulmuştur.

(b) Hızlı-EKKK algoritması

Hızlı EKKK algoritmasında, C-adımındaki Adım 1 için en başta kullanılacak başlangıç alt küme H_1 oluşturulur. C-adımının Adım 1'inde anlatıldığı üzere başlangıç alt küme H_1 oluşturulurken tüm ölçüler kullanılmaktadır. Ancak bu durum, Hızlı-EKKK algoritmasında geliştirilerek başlangıç alt küme H_1 'in oluşturulması için 2 seçenek sunulmuştur:

- (1) n elemanlı ölçü grubundan rastgele h elemanlı bir alt küme oluşturma.
- (2) n elemanlı ölçü grubundan u elemanlı bir alt küme J oluşturma. Eğer J alt kümesi tekil bir sonuç veremiyorsa (rankı u dan küçükse), tekil sonuçlar verebilecek duruma gelinceye kadar rastgele satırlar eklenmesi.

Ölçü grubunda uyuşumsuz ölçü olmadığında (1) ile (2) arasında pek fazla bir fark olmamaktır (Rousseeuw ve Driessen, 2006). Ancak, Rousseeuw ve Driessen, ölçü grubunda uyuşumsuz ölçü olduğunda (1)'in kötü kaldıraç noktası etkisinden dolayı başarılı bir sonuç vermediğini (2)'nin ise robust bir sonuç verdiğini gözlemlemiştir. Sonuçların farklı çıkmasının sebebi örneğin 1000 ölçüye sahip ($n=1000$), bilinmeyen sayısı 1 olan ($u=1$), uyuşumsuz ölçü oranının %20 olduğu ($\epsilon=0.20$) bir ölçü grubunda (1) ile uyuşumsuz ölçü olmayan bir alt kümeyi rastgele elde etme ihtimalinin aşağıdaki gibi çok düşük bir değere tekabül etmesidir:

$$(1-\epsilon)^h = 0.8^{501} \approx 2.8 \cdot 10^{-49} \quad (3.44)$$

Burada, $\epsilon=0.2$ (ölçü grubundaki ölçülerin %20'lik bir kısmının uyuşumsuz ölçü olarak düşünülmesinden dolayı), $h=501$ (Eşitlik 3.40'da $n=1000$, $u=1$ olarak düşünüldüğünde hesaplanır) alınır. Yönteme kötü seçilmiş bir H_1 alt kümesi ile başlandığında iterasyonların iyi bir sonuca yakınsaması beklenemez. Diğer taraftan (2) durumunda olduğu gibi u elemanlı bir alt kümenin uyuşumsuz ölçü içermeme oranı aşağıdaki gibi yüksek bir değer olarak hesaplanmıştır:

$$(1-\epsilon)^u = 0.8^2 = 0.64 \quad (3.45)$$

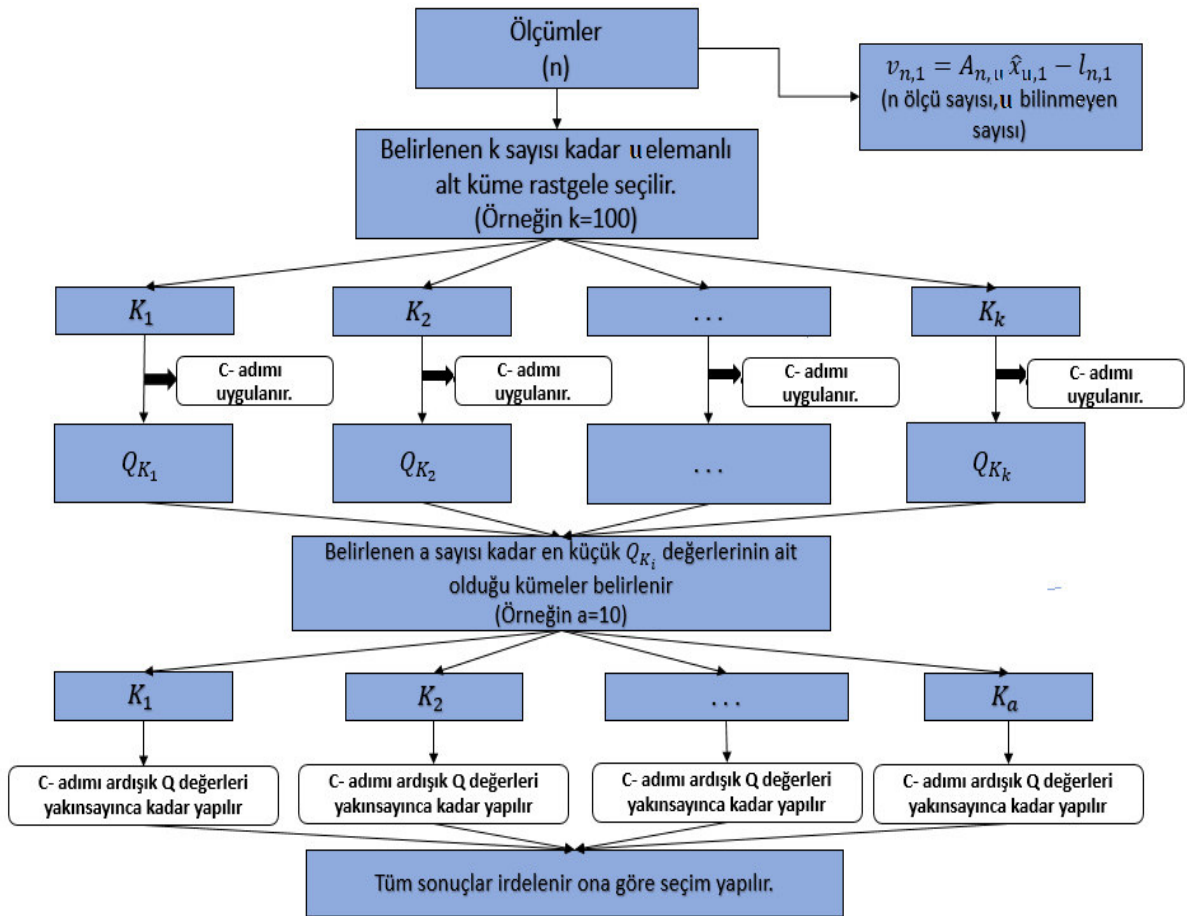
Benzer sonuçlara uyuşumsuz ölçü yüzdesinin düşük tutulduğu senaryolarda da ulaşılmıştır. Bu gibi sebeplerden dolayı uygulamada (2) ile işlem yapılması daha güvenilir ve daha robust bir sonuç verecektir (Rousseeuw ve Driessen, 2006).

(c) Seçici İterasyon

Bu başlık altında C-adımı ve Hızlı-EKKK adımlarının nasıl bir bakış açısıyla kullanılması gerektiği açıklanmıştır. C-adımı ile yöntemin başlangıç aşamasında neler yapılması gerektiğini ve iteratif işlemlerin nasıl yapılması gerektiğini, Hızlı-EKKK algoritması ile başlangıç alt kümenin eleman sayısının en fazla tekil bir sonuç verecek kadar yüksek tutulması gerektiğini bunun da genelde pratikte bilinmeyen sayısı u 'ya eşit tutularak sağlandığı görülmüştür. Ancak hala hangi ölçülerden oluşacak alt küme ile işleme başlanması gerektiğine bir cevap bulunamamıştır. Seçici iterasyon ile yöntemi daha da robust yapmak için; örneğin seçilecek k tane u elemanlı alt küme ile C- adımı yapılır. Bu yüzden her bir k sayıda alt küme ile uygulanan C-adımı sonrasında

oluşan Q değerlerinden en küçük değerlere sahip a kadar alt küme seçilir ve sonuçlar yakınsayınca kadar bu alt kümelerle C-adımları tekrarlanır.

Algoritmanın temel mantığı ve adımları için bir iş akış şeması düzenlenmiştir (Şekil 3.9). Bu iş akışında dikkat edilmesi gereken nokta ilk C-adımı uygulanırken başlangıç alt küme eleman sayısının en az bilinmeyen sayısı (u) kadar olması gerektiğidir. Sonrasındaki her bir iterasyon için işleme sokulacak kümelerin eleman sayısı kırpma değeri (h) kadar alınır. Dikkat edilmesi gereken diğer bir nokta ise düzeltme değerlerinin tüm ölçümler için bulunmasıdır.



Şekil 3.9. Yaklaşık EKKK çözümü adımları

Bu algoritmadan farklı olarak hem kesin EKKK hem de yaklaşık EKKK çözümleri başlığı altına girebilecek çeşitli algoritmalar üretilmiştir (Bai, 2003; Hofmann vd, 2010; Rousseeuw ve Leroy, 1987). EKKK yöntemi literatürde çeşitli amaçlar için kullanılmıştır. Örneğin; EKKK yöntemi doğrudan regresyon problemlerinde tek başına kullanılabilceği gibi, iki aşamalı çözüme sahip Genelleştirilmiş M-Kestiricisi ve MM-kestiricisi gibi yöntemlerin başlangıç noktası

olarak da kullanılabilir (Rousseeuw ve Driessen, 2006). Ayrıca, K-ortalamları (K-means) ve Fuzzy C-ortalamları gibi prototip bazlı kümeleme algoritmalarını daha robust bir yöntem yapmak amacıyla bu yöntemlerle entegre edilerek de kullanılmışlardır. (Kim, vd., 1996).



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Yersel Lidar yöntemiyle Leica TS16 Robotik Total Station aleti kullanılarak 15.09.2020 tarihinde yapılan bir çalışma sonucunda nokta bulutu elde edilmiştir. Bu nokta bulutundan alınan pencere kesitinden bir yüzey geçirmek için, EKK ve EKKK yöntemleri kullanılmıştır. Bu işlemler için Matlab programlama dilinde kod yazılmıştır. Şekil (3.5)'deki nokta bulutu incelendiğinde, veriler bir pencere görüntüsünden alındığından noktaların y ve z ekseninde bir düzlem belirttiği görülmüş ve bu bilgi doğrultusunda uygulamanın altyapısını oluşturacak matematik model

$$X + v_x = aY + bZ + c \quad (4.1)$$

şeklinde kurulmuştur. Burada, (X,Y,Z) üç boyutlu nokta koordinatları, a,b ve c regresyon parametreleri (bilinmeyenler) ve v_x düzeltme değerlerini göstermektedir. Matematik model, Genel Gauss-Markov gösterimi ($V=Ax-l$) şeklinde düzenlenirse:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & Z_1 & 1 \\ Y_2 & Z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & Z_n & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\hat{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}_l \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir. Bilinmeyenler vektörünün \hat{x} ve ardından düzeltme vektörü v çözümü

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (4.3)$$

$$v = A \hat{x} - l \quad (4.4)$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n - u}} \quad (4.5)$$

$$m_{xi} = m_0 \sqrt{q_{xixi}} ; Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} \quad (4.6)$$

eşitlikleri ile bulunur (Bektaş, 2016). Burada; m_0 birim ölçünün ortalama hatası, m_{xi} bilinmeyenlerin ortalama hatalarını ifade eder.

4.1. En Küçük Kareler Yöntemi ile Düzlem Geçirme

EKK yöntemi ile düzlem geçirmede seçip ayıklamaksızın tüm ölçüler kullanılır. $n=1870$ ve $u=3$ olmak üzere yöntemde kullanılacak katsayılar matrisi (A) ve ölçüler vektörü (l), Eşitlik (4.2)'e uygun şekilde kurulmuştur. Ağırlık matrisi (P) için birim matris kullanılmıştır. Ardından Matlab'da yazılan bir kod ile Eşitlik (4.3), (4.4) ve (4.5)'e göre çözüm yapılmıştır. Regresyon parametreleri çözümü Tablo (4.1)'de düzeltmelerin karelerin toplamı ve birim ölçünün karesel ortalama hatası ile birlikte mutlak değerce maximum ve minimum düzeltme değerleri de Tablo (4.2)'de verilmiştir.

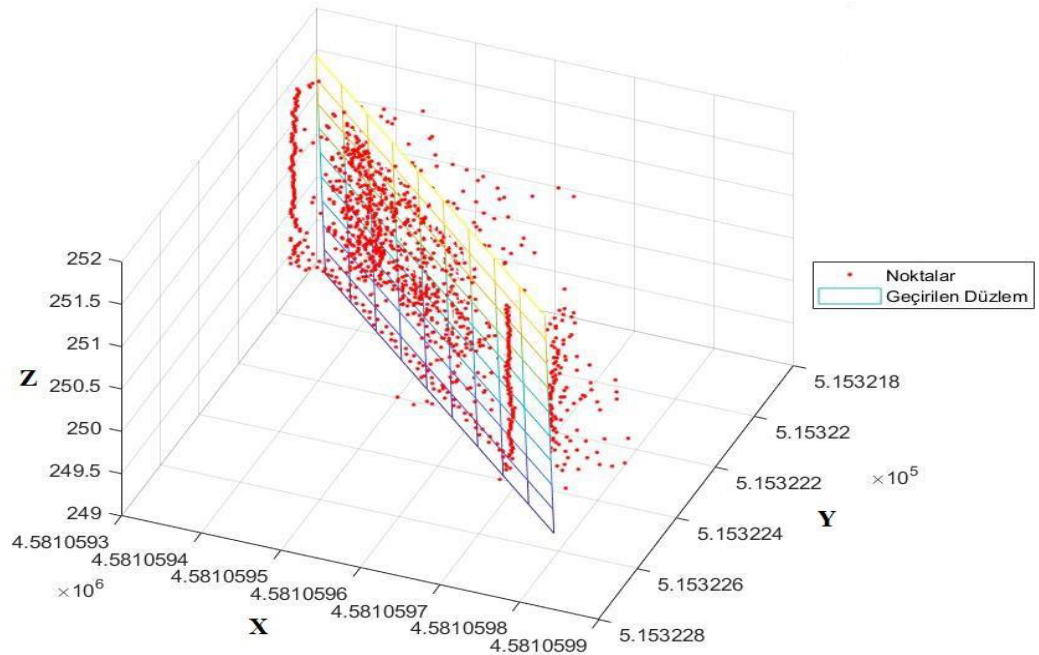
Tablo 4.1. EKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü

Yöntem	a	b	c (m)
EKK	0.649969188	-0.004557469	4246117.099

Tablo 4.2. EKK yöntemine göre düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

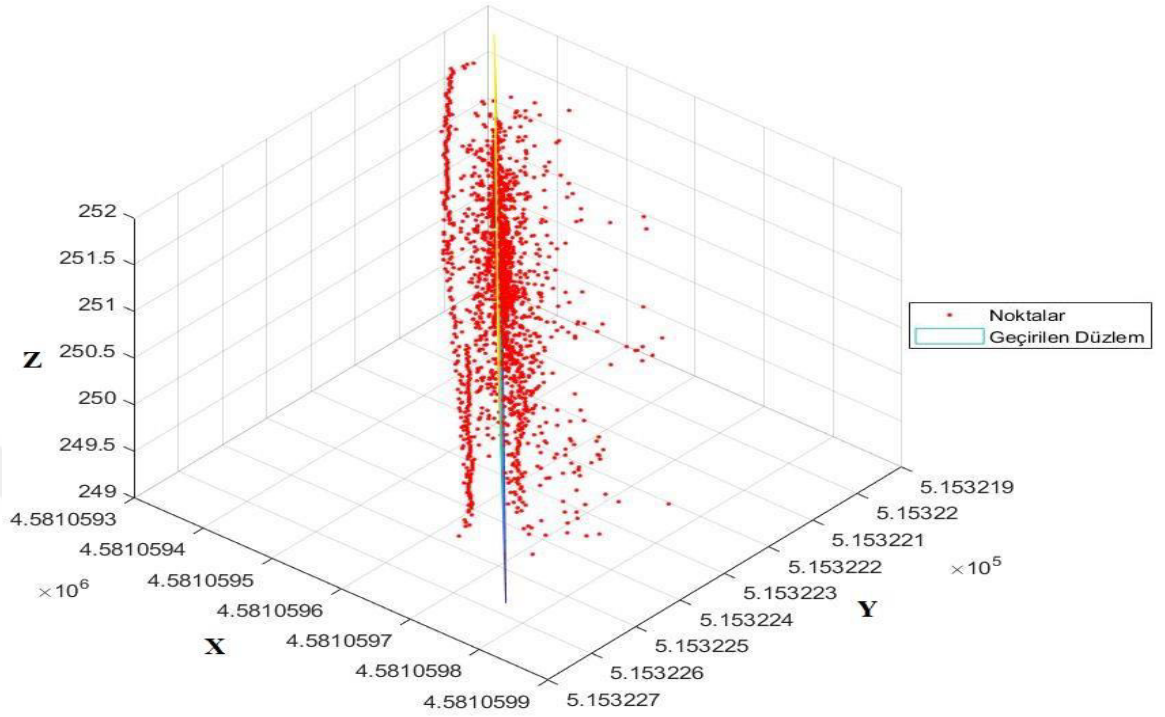
Yöntem	$[VV]$ (cm ²)	v_{max} (cm)	v_{min} (cm)	m_0 (cm)
EKK	32168	23.92	$3.86 \cdot 10^{-4}$	∓ 4.15

Elde edilen EKK regresyon parametreleri (a,b ve c) ile bu noktalardan geçen düzlem Şekil 4.1'deki gibidir.

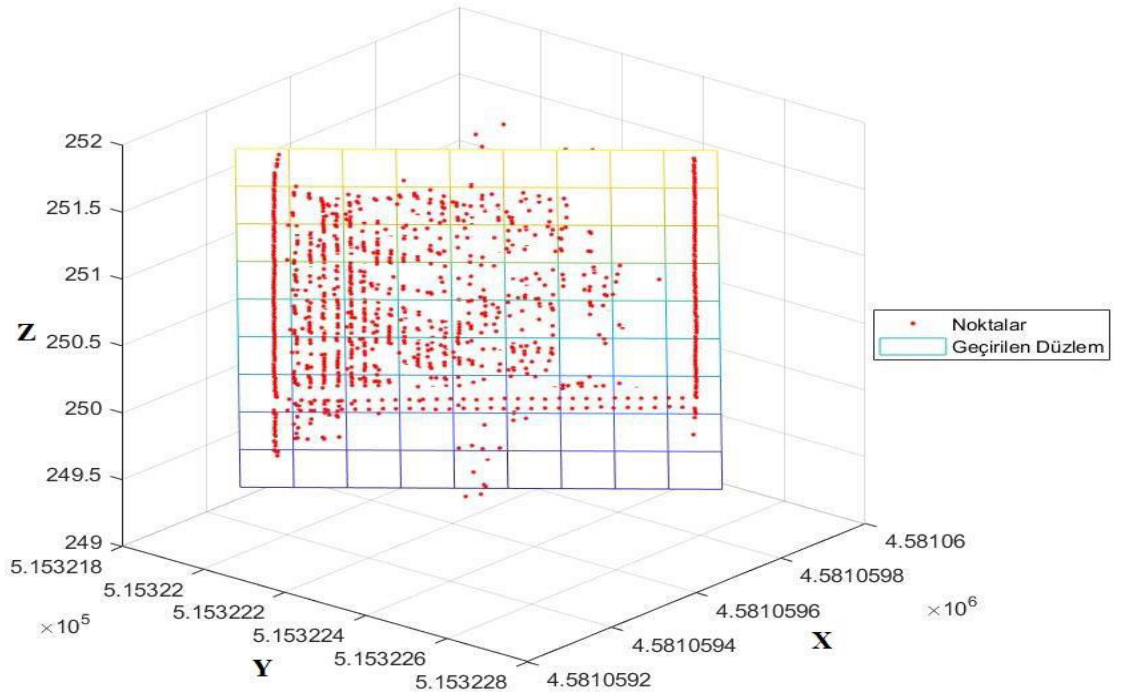


Şekil 4.1. EKK yöntemi ile geçirilen düzlem

EKK yöntemi ile geçirilen düzlemin çeşitli açılardan görünümü aşağıdaki şekillerdeki gibidir.

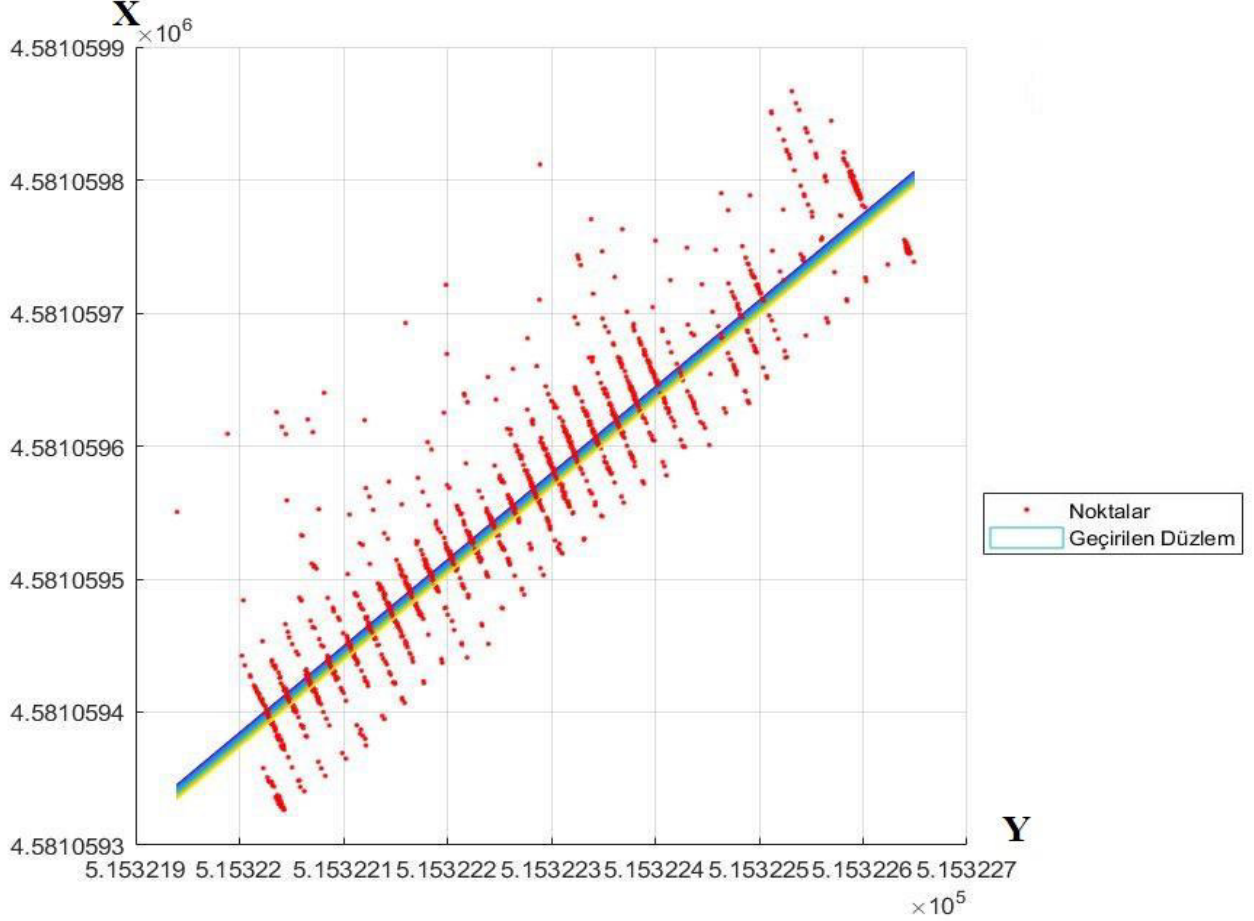


Şekil 4.2. Geçirilen düzlemin profilden görünümü



Şekil 4.3. Geçirilen düzlemin önden görünümü

Geçirilen düzlemin üstten kuş bakışı görünümü incelendiğinde, EKK yönteminin, düzlemi verilerin ortalamasına yakın bir yerden geçirdiği görülmektedir. Nokta bulutu incelendiğinde verilerin çoğunluğunun ön tarafta yığıldığı arka taraftaki nokta bulutu verilerinin camın dışına atılan noktalar olabileceği ve uyuşumsuz ölçü oldukları gibi yorumlar yapılabilir.



Şekil 4.4. EKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü

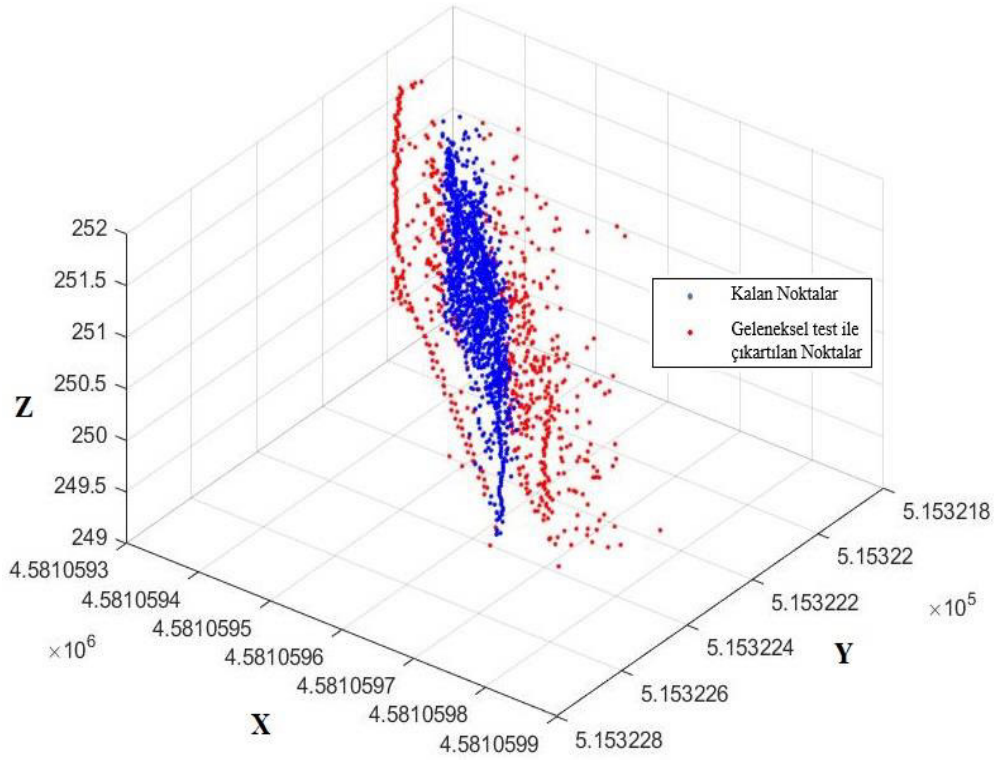
4.1.1. Geleneksel Test Yöntemleriyle Uyuşumsuz Ölçü Analizi

EKK yönteminin sonuçları için geleneksel test yöntemlerinden biri olan t testi kullanılarak uyuşumsuz ölçü analizi yapılmıştır. Matlab ortamında yazılan kod ile iteratif bir şekilde Eşitlik (2.24), (2.25) ve (2.26)'nın çözümleri yapılmıştır. Her bir iterasyon sonucu elde edilen test büyüklükleri ile t tablosundan alınan c tablo değerleri kıyaslandığında 674 tane ölçü uyuşumsuz olarak belirlenmiştir. (Tablo 4.3) Böylece uyuşumsuz ölçü oranının geleneksel testlere göre %36 olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 4.3. İterasyon sonuçları

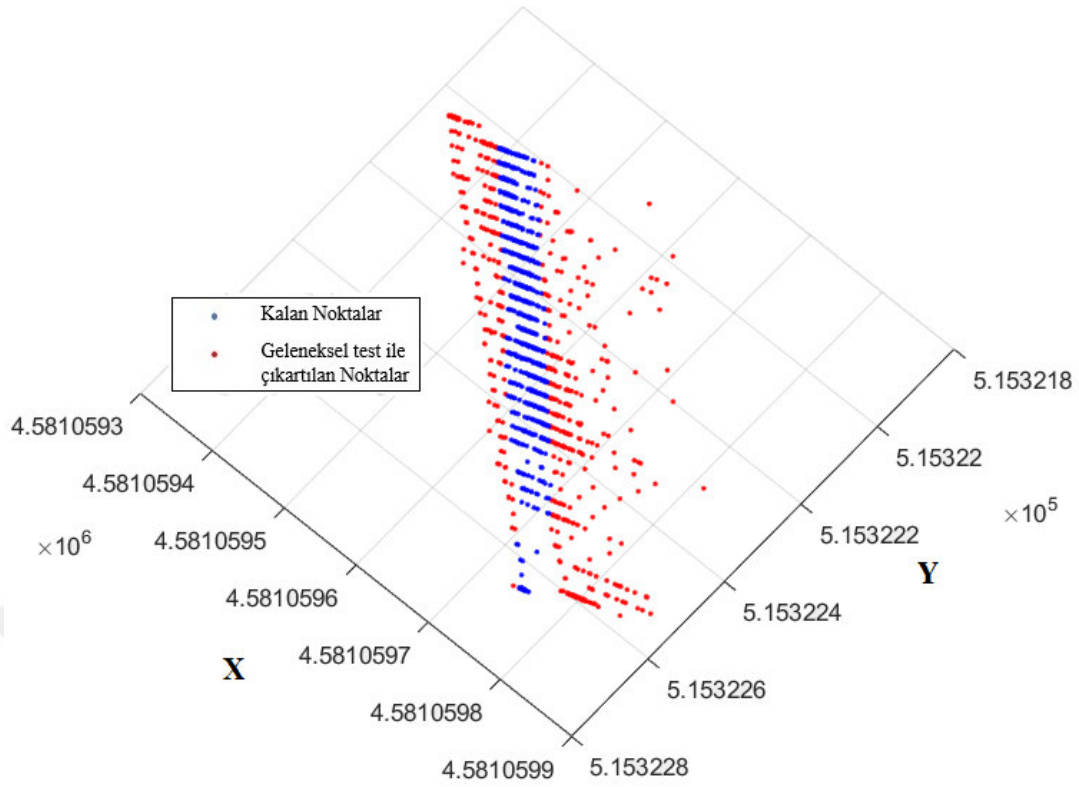
	1.İterasyon	2.İterasyon	3.İterasyon	...	675.İterasyon
[VV] (cm ²)	32168	32268	31310	...	2631
m ₀ (cm)	±4.15	±4.16	±4.10	...	±1.49
Test büyüklüğü	5.5693	5.2407	5.0596	...	1.9524
Tablo değeri	1.9612	1.9612	1.9612	...	1.9620

Geleneksel test yöntemleri ile uyumsuz ölçü analizi sonucu 674 nokta ölçü grubundan çıkarılmıştır. Nokta bulutundan çıkarılan noktaların rengi kırmızı olarak seçilmiştir. Nokta bulutunda kalan noktalar ise mavi olarak seçilmiştir. (Şekil 4.5)



Şekil 4.5. Nokta bulutundan çıkartılmış noktalar

Nokta bulutundan çıkarılan noktaların daha net gösterimi için üstten kuş bakışı görünümü de gösterilmiştir. (Şekil 4.6)



Şekil 4.6. Nokta bulutundan çıkartılmış noktaların kuş bakışı görünümü

4.2. En Küçük Kırılmış Kareler Yöntemi ile Düzlem Geçirme

Ölçü sayısı düşünüldüğünde ($n=1870$), kesin EKKK ile çözüm yapılmasında hesap zorluğu dikkate alınarak yaklaşık EKKK ile çözüm yapılmıştır. Bunun için Rousseeuw ve Driessen'in Hızlı-EKKK algoritmasına uygun bir biçimde Şekil 3.6'daki adımlara uyularak bir işlem yürütülmüştür. Rousseeuw ve Driessen çalışmalarında Şekil (3.9)'da bahsi geçen k ve a (işlem adımlarındaki alt küme sayıları) için alınması gereken belirli değerlerden bahsetmemiş ama uygulamalarında sırasıyla k ve a için 100 ve 10 değerlerini seçmişlerdir. Bu doğrultuda başlangıç işlemi daha robust hale getirmek için uygulamada $k=500$ ve $a=10$ olarak seçilmiştir. Ancak başlangıç alt kümenin eleman sayısı (u) kadar değil ($u+1$) kadar alınmış yani 4 olarak seçilmiştir. Böylece A katsayılar matrisinin rankının olabilecek en minimum şekilde seçimi yapılmış ve bilinmeyenlerin (x) çözümünün $x = A^{-1}b$ yerine $x = (A^T P A)^{-1} A^T P l$ 'ye göre yapılabilmesi sağlanmıştır. MATLAB'da yazılan bir kod ile çözümler yapılmıştır.

EKKK ile çözümde en kritik noktalardan biri h değerinin kaç olması gerektiğidir. Bu nedenle uygulama açısından 4 farklı kırma değeri (h) kullanılmıştır.

Uygulamalardaki kırpma değerleri ölçü grubundaki uyuşumsuz ölçü oranlarının sırasıyla %5, %20, %36 ve %50 olduğu varsayılarak hesaplanmıştır. %5 ve %20 oranları keyfi olarak seçilmiştir. EKK uygulaması sonucu yapılan geleneksel test yöntemi sonuçlarıyla doğrudan kıyaslama yapılabilmesi amacıyla h kırpma değeri 1196 olarak alınmıştır. Bu değer ($1870-674=1196$) şeklinde hesaplanmış ve bu durumda ölçü grubundaki uyuşumsuz ölçü oranı %36 olarak bulunmuştur. %50 oranı ise (Rousseeuw ve Leroy, 1987)'un optimal çözüm için verdiği Eşitlik (3.40) kullanılarak elde edilmiştir.

4.2.1. Kırpma Değeri $h=1780$ için Uygulama Sonuçları

Uyuşumsuz ölçü oranının %5 olarak alınması yaklaşık 90 ölçünün uyuşumsuz ölçü olabileceği anlamına gelir. Bu durumda $h=1780$ olarak hesaplanır. Yaklaşık EKKK'nın ilk adımında rastgele seçilmiş 4 elemanlı (4 ölçüm) 500 alt küme için EKK hesabı yapılır ve düzeltme değerlerinin karelerinin toplamı bulunur. (Tablo 4.4)

Tablo 4.4. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı ($h=1780$)

	K_1	K_2	K_3	...	K_{500}
[VV]	3.2144	3.2178	3.2241	...	10644.1660

*[VV] değerleri birimleri m^2

Elde edilen 500 alt kümeden en küçük düzeltme kareleri toplamına sahip 10 küme seçilir ve bunlarla işleme devam edilir. Bu 10 küme için 10 kez iterasyon yapılmıştır ve her bir iterasyondaki 10 kümeye ait düzeltmelerin kareleri toplamı hesaplanmıştır. Sonuçlar incelendiğinde iterasyon ile yakınsama yapılmadığı görülmüş hatta en küçük düzeltme kareleri toplamı değerinin genellikle ilk iterasyonda elde edildiği görülmüştür. (Tablo 4.5)

Tablo 4.5. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=1780)

	[VV] ₁	[VV] ₂	[VV] ₃	[VV] ₄	[VV] ₅	[VV] ₆	[VV] ₇	[VV] ₈	[VV] ₉	[VV] ₁₀
K ₁	3.2576	3.2656	3.3086	3.3302	3.2672	3.4082	3.2575	3.2870	3.2781	3.2479
K ₂	3.2351	3.4053	3.2812	3.3371	3.2833	3.4405	3.4673	3.2440	3.3948	3.3415
K ₃	3.2194	3.3011	3.2784	3.4492	3.3121	3.3590	3.3479	3.2880	3.3370	3.2668
K ₄	3.2779	3.2499	3.3999	3.3213	3.2999	3.2425	3.3564	3.2812	3.3677	3.2666
K ₅	3.2602	3.3362	3.2589	3.2685	3.4014	3.3795	3.3266	3.2638	3.2470	3.2331
K ₆	3.2844	3.3386	3.3593	3.2779	3.4555	3.2638	3.2646	3.2655	3.3120	3.2622
K ₇	3.2602	3.2479	3.3487	3.3447	3.3671	3.2859	3.3671	3.2653	3.3302	3.3926
K ₈	3.3025	3.2709	3.2871	3.2853	3.3810	3.4060	3.2828	3.2948	3.3121	3.3185
K ₉	3.2635	3.3293	3.3713	3.2608	3.3249	3.3282	3.2824	3.2624	3.2800	3.3539
K ₁₀	3.3340	3.2607	3.3684	3.3588	3.3762	3.3795	3.2970	3.3772	3.2422	3.3084

*[VV] değerleri birimleri m²

Bu durumda en küçük düzeltme kareleri toplamına sahip olan alt küme seçilir ve o kümeye ait değerlerin en robust değerler olduğu kabul edilir. Buna göre bulunan regresyon parametreleri değerleri aşağıdaki gibidir. (Tablo 4.6)

Tablo 4.6. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=1780)

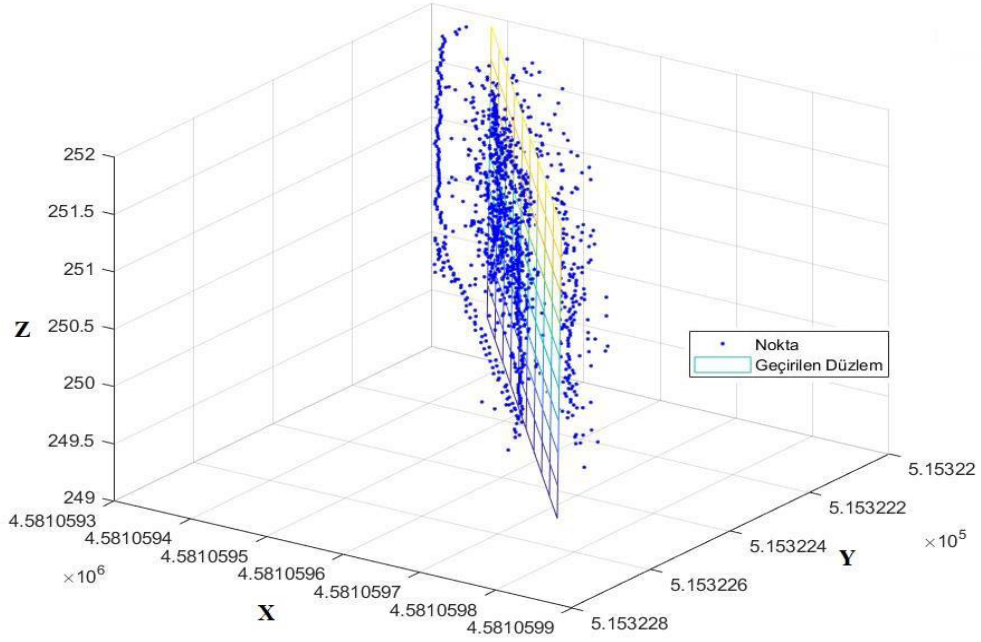
Yöntem	a	b	c (m)
EKKK (h=1780)	0.654068309	0.001048844	4244003.3259

Düzeltilmelerin kareleri toplamı iki ayrı sonuç halinde verilmiştir. Tüm ölçülere göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde ve seçilen 1780 ölçüye göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde elde edilen düzeltilmelerin karelerin toplamı, birim ölçünün karesel ortalama hatası ve mutlak değerce maximum ve minimum düzeltme değerleri Tablo (4.7)'de verilmiştir.

Tablo 4.7. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 1780 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

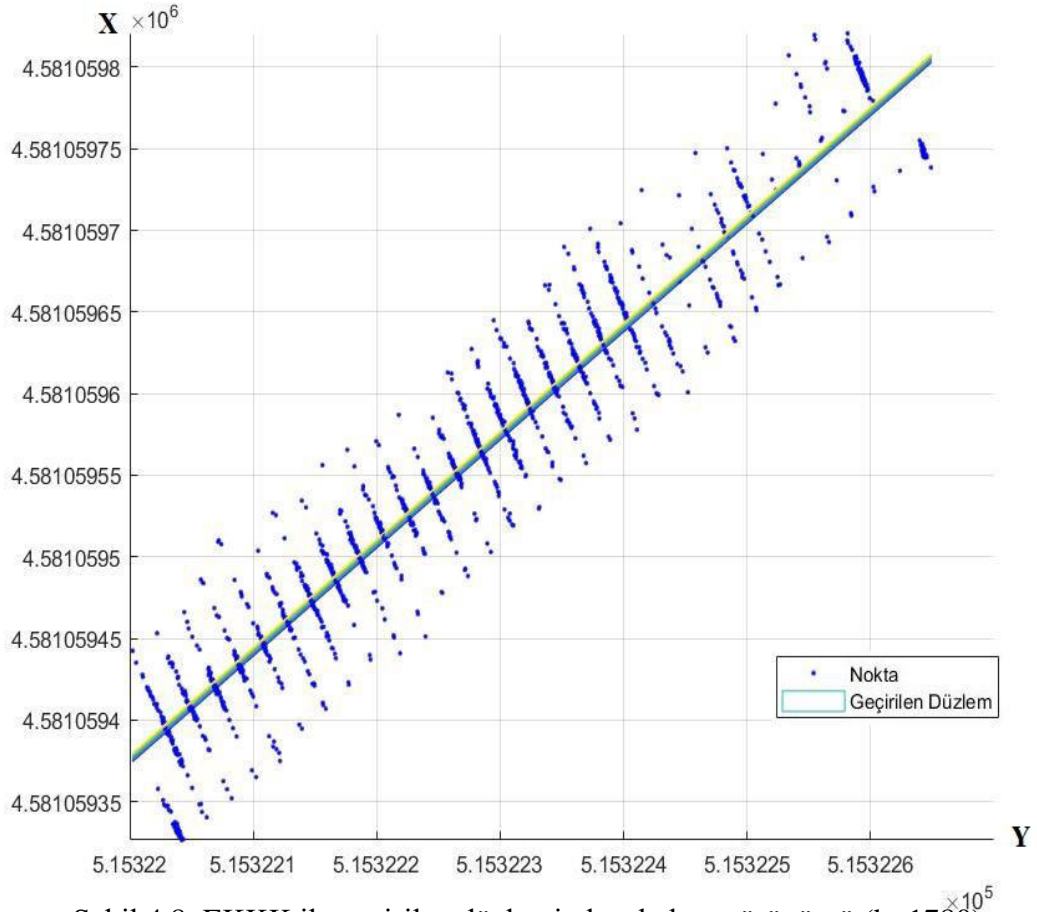
Yöntem	$[VV]$ (cm ²)	v_{max} (cm)	v_{min} (cm)	m_0 (cm)
EKKK (Tüm ölçüler)	32194	24.57	$2.06 \cdot 10^{-4}$	∓ 4.15
EKKK (h=1780)	17934	9.01	$2.06 \cdot 10^{-4}$	∓ 3.18

Elde edilen EKKK regresyon parametreleri (a,b ve c) ile bu noktalardan geçen düzlem Şekil 4.7'de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. EKKK ile geçirilen düzlem ($h=1780$)

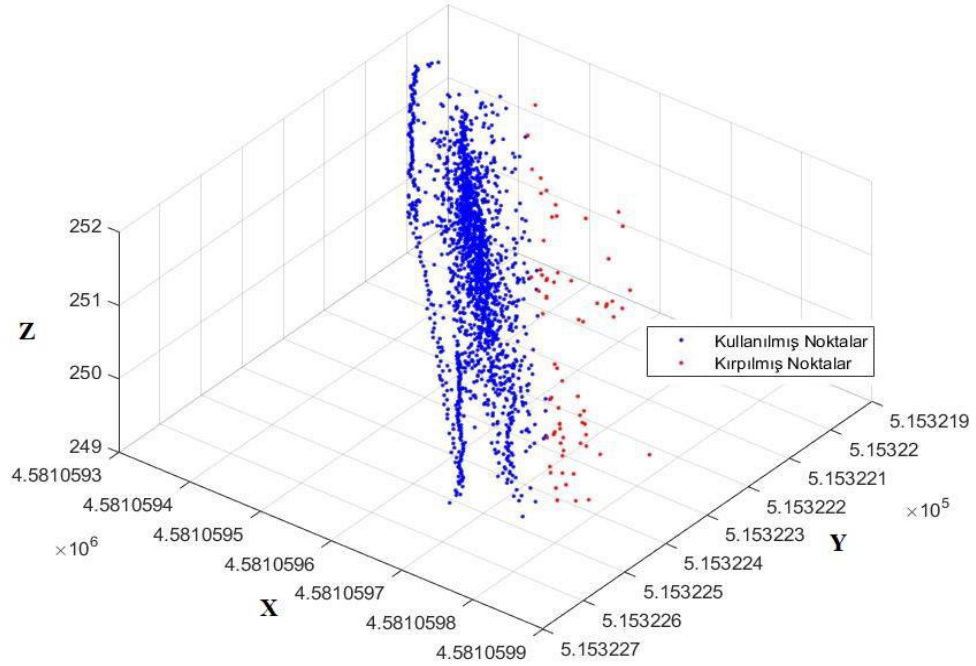
EKKK ile geçirilen düzlemin üstten kuş bakışı görünümü incelendiğinde bazı noktaların olması gerektiği gibi veri setinden çıkarıldığı görülmektedir (Şekil 4.8)



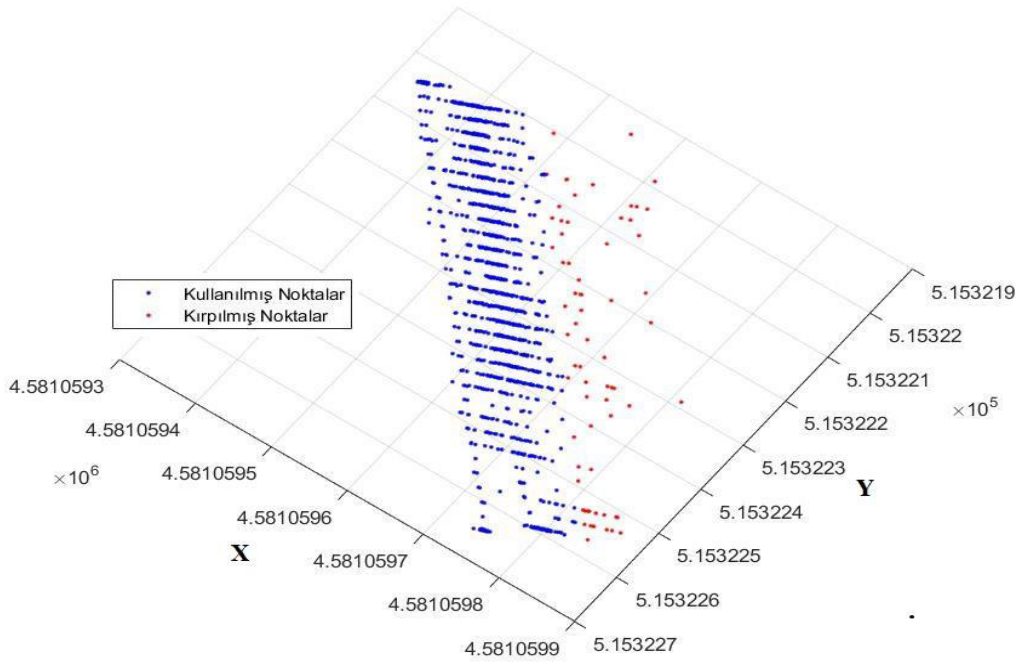
Şekil 4.8. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü ($h=1780$)

Son olarak ayıklanan noktaların hangileri olduğu incelenmiştir. Nokta bulutu verisinin ait olduğu pencere görüntüsü bilindiğinden uyuşumsuz ölçü olduğu düşünülen noktalar pencerenin arka yüzeyindeki görece daha az sıklıkta olan noktalar

olduğu anlaşılmıştır. Kırılan noktaların rengi kırmızı olarak seçilmiştir. Regresyon işlemi için uygulamaya dahil edilen noktalar ise mavi olarak seçilmiştir. (Şekil 4.9) Nokta bulutundan ayıklanan noktaların daha net gösterimi için üstten kuş bakışı görünümü de gösterilmiştir. (Şekil 4.10)



Şekil 4.9. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=1780)



Şekil 4.10. Nokta bulutundan kırılmış noktaların kuş bakışı görünümü (h=1780)

4.2.2. Kırpma Değer $h=1500$ için Uygulama Sonuçları

Uyuşumsuz ölçü oranının %20 olarak alınması yaklaşık 370 ölçünün uyuşumsuz ölçü olabileceği anlamına gelir. Bu durumda $h=1500$ olarak hesaplanır.

Hemen bir önceki uygulamada olduğu gibi aynı şekilde Yaklaşık EKKK'nın ilk adımında rastgele seçilmiş 4 elemanlı (4 ölçüm) 500 alt küme için EKK hesabı yapılır ve düzeltme değerlerinin karelerinin toplamı bulunur. (Tablo 4.8)

Tablo 4.8. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı ($h=1500$)

	K_1	K_2	K_3	...	K_{500}
[VV]	3.1953	3.2125	3.2654	...	38763.8873

*[VV] değerleri birimleri m^2

500 alt kümeden en küçük düzeltme kareleri toplamına sahip 10 küme seçilir ve bunlarla işleme devam edilir. Bu 10 küme için 10 kez iterasyon yapılmıştır ve her bir iterasyondaki 10 kümeye ait düzeltmelerin kareleri toplamı hesaplanmıştır. (Tablo 4.9)

Tablo 4.9. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=1500)

	[VV] ₁	[VV] ₂	[VV] ₃	[VV] ₄	[VV] ₅	[VV] ₆	[VV] ₇	[VV] ₈	[VV] ₉	[VV] ₁₀
K ₁	3.1902	3.1942	3.1997	3.2267	3.2067	3.2224	3.2082	3.2385	3.2485	3.2029
K ₂	3.2195	3.2332	3.2220	3.2144	3.2264	3.2122	3.2499	3.2334	3.2523	3.2284
K ₃	3.2534	3.2537	3.2078	3.2374	3.3051	3.2326	3.2246	3.2205	3.2183	3.2236
K ₄	3.2372	3.2599	3.2441	3.2250	3.2135	3.2248	3.2042	3.2296	3.2079	3.2491
K ₅	3.2172	3.2464	3.2823	3.2276	3.2067	3.3908	3.3590	3.4703	3.5068	3.4914
K ₆	3.3023	3.2308	3.2342	3.3462	3.4495	3.5046	3.4761	3.4665	3.4615	3.3751
K ₇	3.2609	3.3850	3.4428	3.3008	3.3762	3.3176	3.4110	3.4604	3.4999	3.5290
K ₈	3.2874	3.3313	3.3228	3.4507	3.4400	3.4473	3.5060	3.4696	3.4920	3.4580
K ₉	3.2373	3.3350	3.4013	3.4402	3.4629	3.3854	3.4872	3.5662	3.5530	3.5480
K ₁₀	3.2336	3.4111	3.4352	3.3973	3.4333	3.4505	3.4072	3.5033	3.6105	3.6341

*[VV] değerleri birimleri m²

En küçük düzeltme kareleri toplamına sahip olan alt küme seçilir. Bu kümeye göre bulunan regresyon parametreleri değerleri aşağıdaki gibidir. (Tablo 4.10)

Tablo 4.10. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=1500)

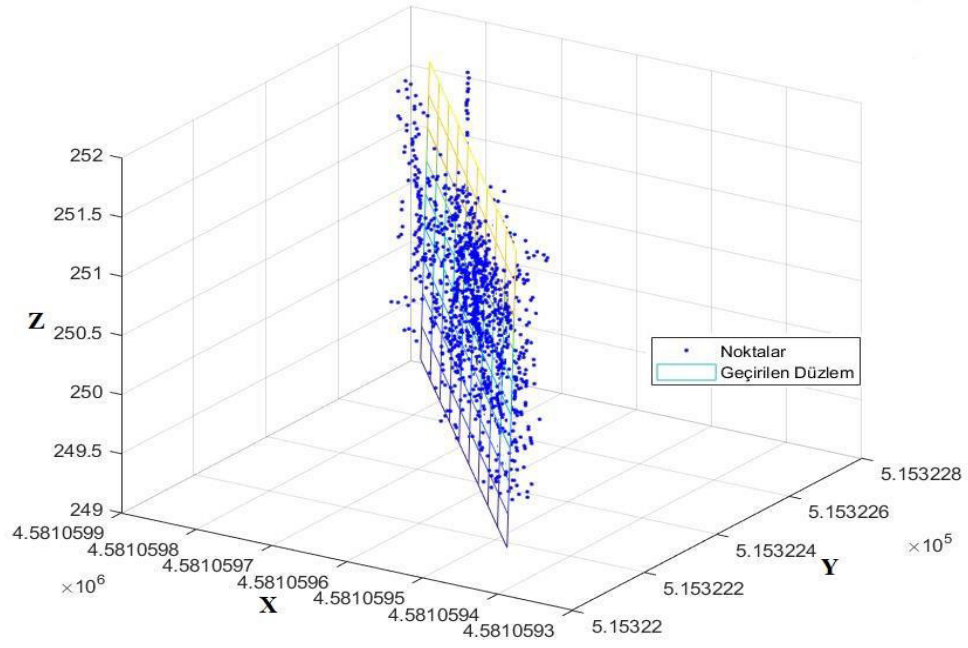
Yöntem	a	b	c (m)
EKKK (h=1500)	0.66409819	-0.00397505	4238835.9692

Düzeltilmelerin kareleri toplamı iki ayrı sonuç halinde verilmiştir. Tüm ölçülere göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde ve seçilen 1500 ölçüye göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde elde edilen düzeltilmelerin karelerin toplamı, birim ölçünün karesel ortalama hatası ve mutlak değerce maximum ve minimum düzeltme değerleri Tablo (4.11)'de verilmiştir.

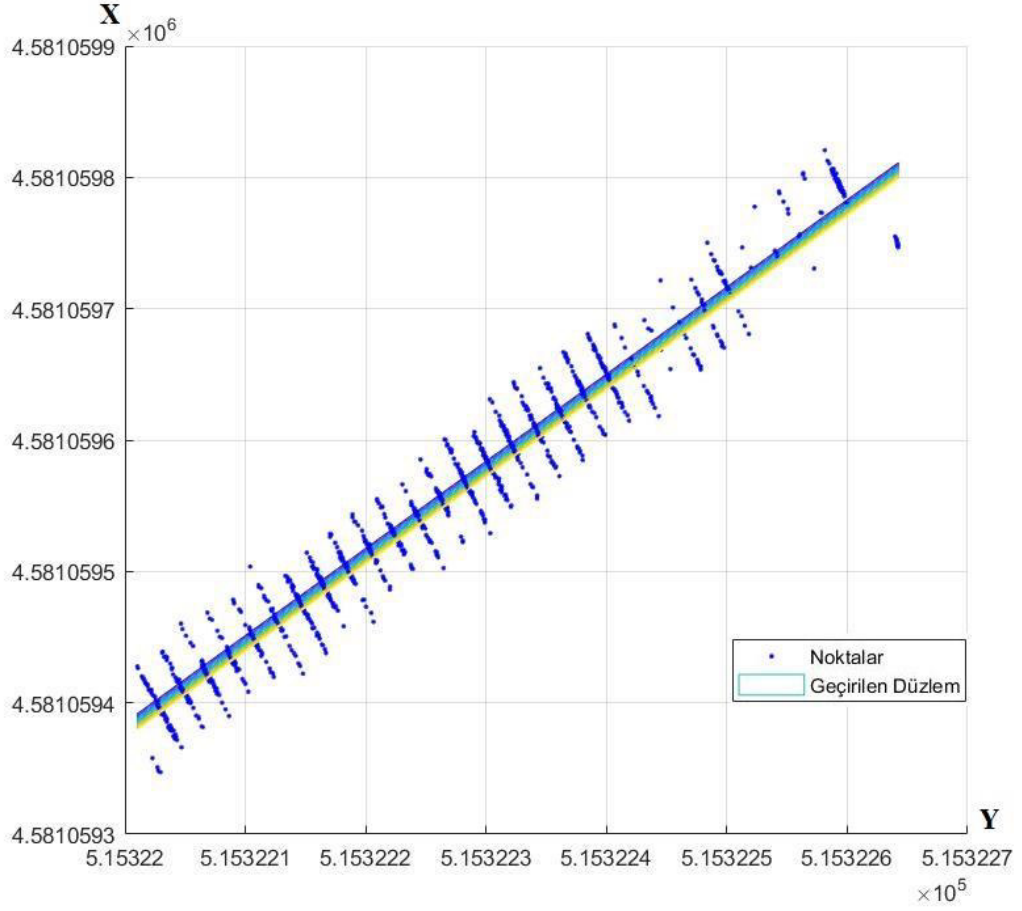
Tablo 4.11. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 1500 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

Yöntem	$[VV]$ (cm ²)	v_{max} (cm)	v_{min} (cm)	m_0 (cm)
EKKK (Tüm ölçüler)	31902	23.70	$9.79 \cdot 10^{-5}$	∓ 4.13
EKKK (h=1500)	6433	6.12	$9.79 \cdot 10^{-5}$	∓ 2.07

Elde edilen EKKK regresyon parametreleri (a,b ve c) ile bu noktalardan geçen düzlem Şekil 4.11'de ve üstten kuş bakışı görünümü de Şekil 4.12'de gösterilmiştir.

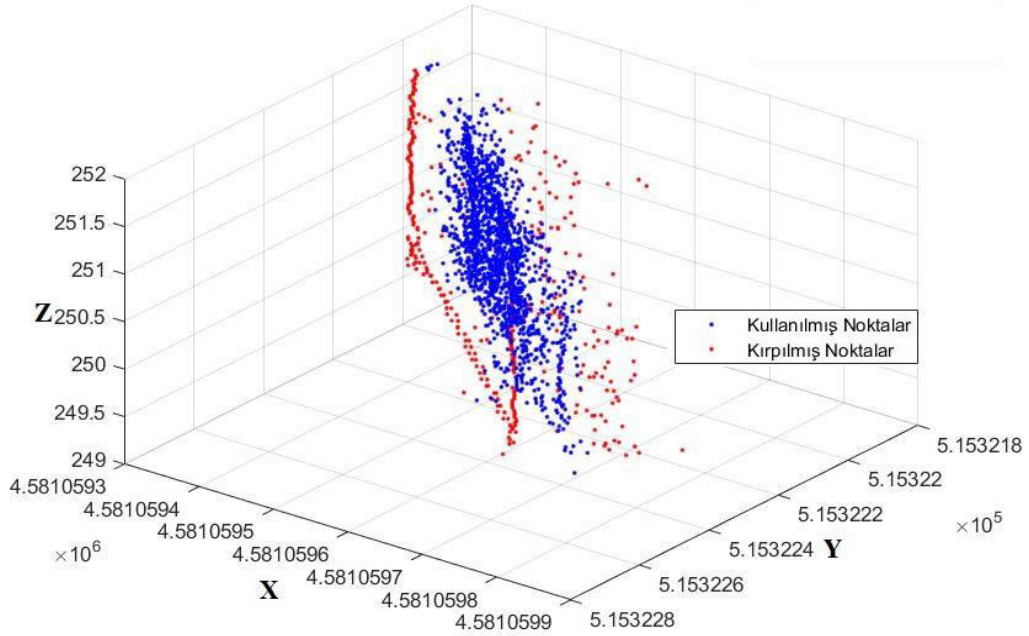


Şekil 4.11. EKKK ile geçirilen düzlem ($h=1500$)

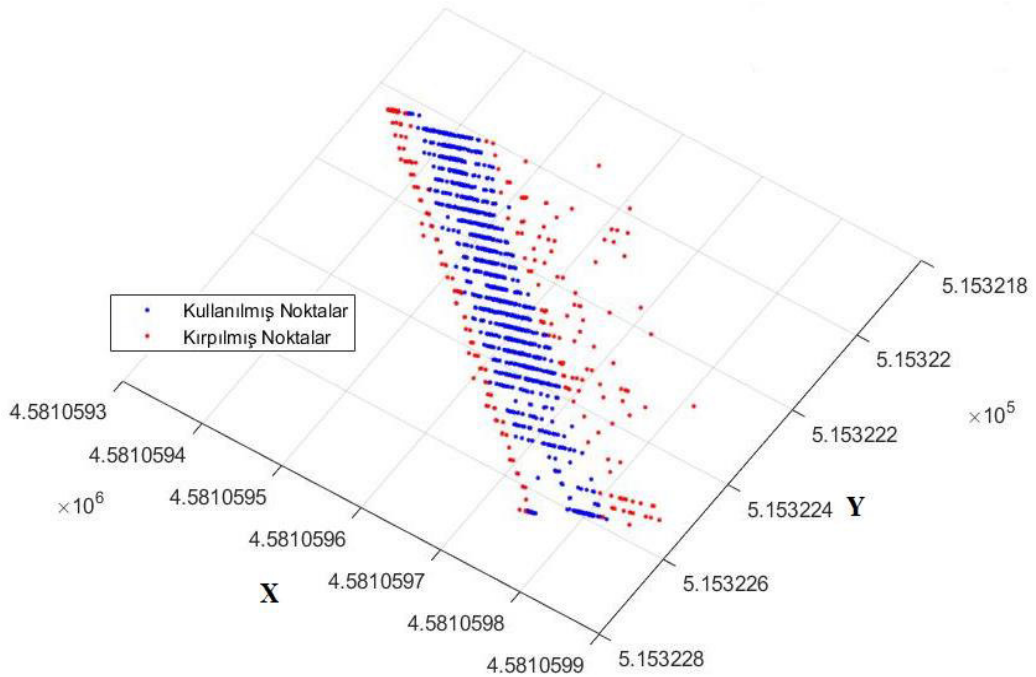


Şekil 4.12. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü ($h=1500$)

Nokta bulutundan kırılan noktaların rengi kırmızı olarak seçilmiştir. Regresyon işlemi için uygulamaya dahil edilen noktalar ise mavi olarak seçilmiştir. (Şekil 4.13) Nokta bulutundan ayıklanan noktaların daha net gösterimi için üstten kuş bakışı görünümü de gösterilmiştir. (Şekil 4.14)



Şekil 4.13. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=1500)



Şekil 4.14. Nokta bulutundan kırılmış noktaların kuş bakışı görünümü (h=1500)

4.2.3. Kırpma Değeri $h=1196$ için Uygulama Sonuçları

Geleneksel test yöntemlerine göre uyuşumsuz ölçü analizinde 674 nokta uyuşumsuz ölçü olarak belirlenmiştir. Bu rakam baz alınarak hesaplanan kirlilik oranı %36'dır. Böylece bu uygulama için kullanılacak h değeri 1196 olarak bulunur. Önceki uygulamalarda olduğu gibi rastgele seçilmiş 4 elemanlı 500 alt küme için EKK hesabı yapılır ve düzeltme değerlerinin karelerinin toplamı bulunur. (Tablo 4.12)

Tablo 4.12. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı ($h=1196$)

	K_1	K_2	K_3	...	K_{500}
[VV]	3.1908	3.2072	3.2371	...	237334.7335

*[VV] değerleri birimleri m^2

500 alt kümeden en küçük düzeltme kareleri toplamına sahip 10 küme seçilmiş ve bunlarla işleme devam edilmiştir. Bu 10 küme için 10 kez iterasyon yapılmıştır ve her bir iterasyondaki 10 kümeye ait düzeltmelerin kareleri toplamı hesaplanmıştır. (Tablo 4.13)

Tablo 4.13. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri (h=1196)

	[VV] ₁	[VV] ₂	[VV] ₃	[VV] ₄	[VV] ₅	[VV] ₆	[VV] ₇	[VV] ₈	[VV] ₉	[VV] ₁₀
K ₁	3.2237	3.1931	3.1988	3.2426	3.2059	3.2294	3.2203	3.2291	3.2131	3.2035
K ₂	3.2073	3.2688	3.2260	3.2515	3.2781	3.2394	3.2077	3.2079	3.2027	3.2229
K ₃	3.2000	3.2299	3.2313	3.2453	3.2243	3.2163	3.2619	3.2799	3.2068	3.2083
K ₄	3.2198	3.2148	3.2173	3.2312	3.2443	3.2319	3.2256	3.2067	3.2204	3.2383
K ₅	3.2276	3.2306	3.2301	3.2069	3.2351	3.2153	3.2104	3.2204	3.2183	3.2588
K ₆	3.1927	3.2587	3.2422	3.2673	3.2547	3.2160	3.2310	3.2448	3.2339	3.2216
K ₇	3.2330	3.2774	3.2413	3.2250	3.2382	3.2341	3.2126	3.2371	3.2329	3.2425
K ₈	3.2608	3.2199	3.2592	3.2391	3.2260	3.2702	3.2472	3.2610	3.2473	3.2165
K ₉	3.2102	3.2058	3.2670	3.2156	3.2279	3.2204	3.2355	3.2377	3.2326	3.2270
K ₁₀	3.2357	3.2325	3.2480	3.2348	3.2400	3.2538	3.2600	3.2338	3.2404	3.2647

*[VV] değerleri birimleri m²

En küçük düzeltme kareleri toplamına sahip olan alt küme seçilir. Bu kümeye göre bulunan regresyon parametreleri değerleri aşağıdaki gibidir. (Tablo 4.14)

Tablo 4.14. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=1196)

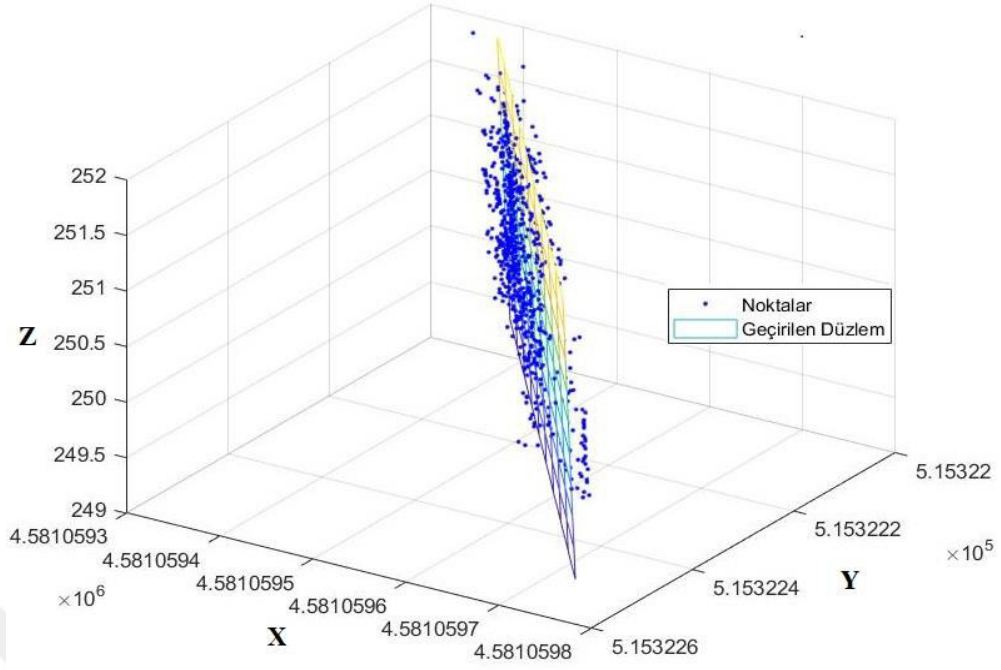
Yöntem	a	b	c (m)
EKKK (h=1196)	0.66568318	-0.005448397	4238019.5530

Düzeltilmelerin kareleri toplamı iki ayrı sonuç halinde verilmiştir. Tüm ölçülere göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde ve seçilen 1500 ölçüye göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde elde edilen düzeltilmelerin karelerin toplamı, birim ölçünün karesel ortalama hatası ve mutlak değerce maximum ve minimum düzeltme değerleri Tablo (4.15)'de verilmiştir.

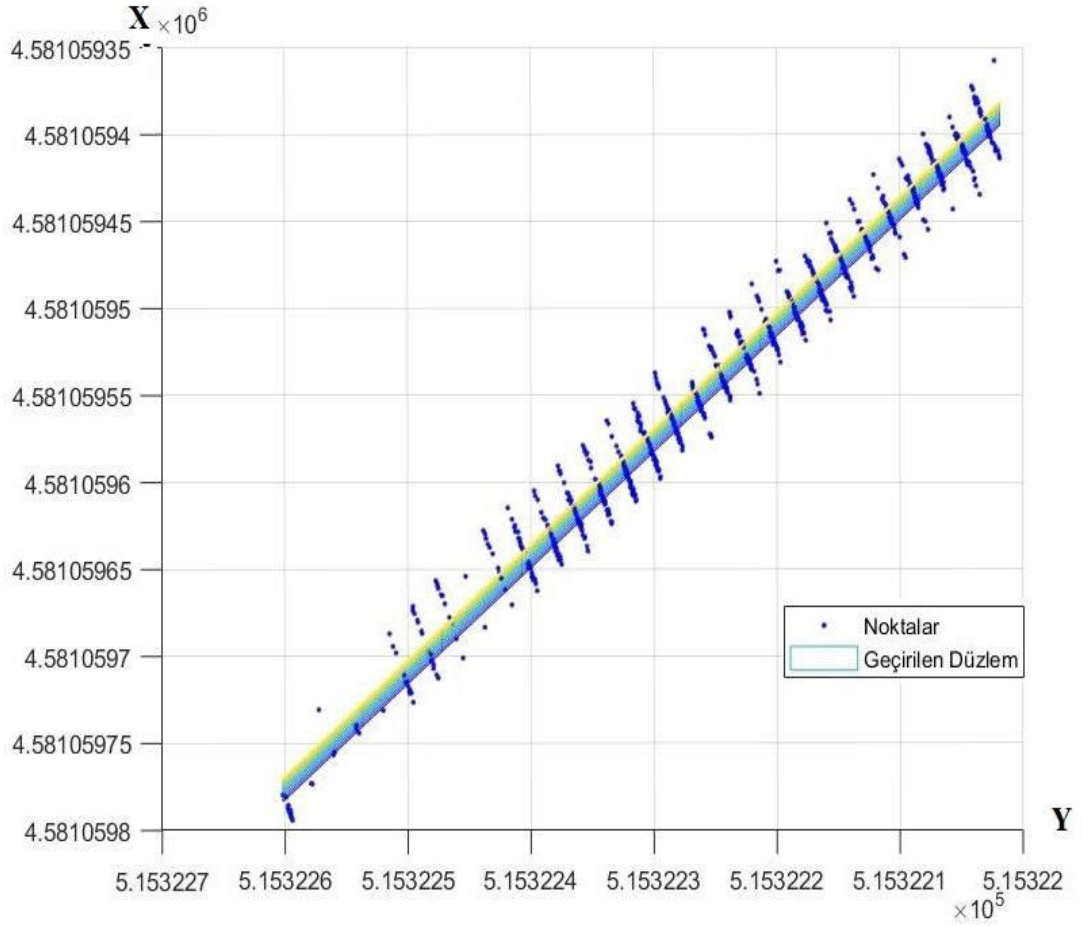
Tablo 4.15. Tüm ölçüler ve kırpm sonucunda elde kalan 1196 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

Yöntem	$[VV]$ (cm ²)	v_{max} (cm)	v_{min} (cm)	m_0 (cm)
EKKK (Tüm Ölçüler)	31927	23.65	$1.58 \cdot 10^{-3}$	∓ 4.14
EKKK (h=1196)	2048	3.67	$1.58 \cdot 10^{-3}$	∓ 1.31

Elde edilen EKKK regresyon parametreleri (a,b ve c) ile bu noktalardan geçen düzlem Şekil 4.15'de ve üstten kuş bakışı görünümü de Şekil 4.16'da gösterilmiştir.

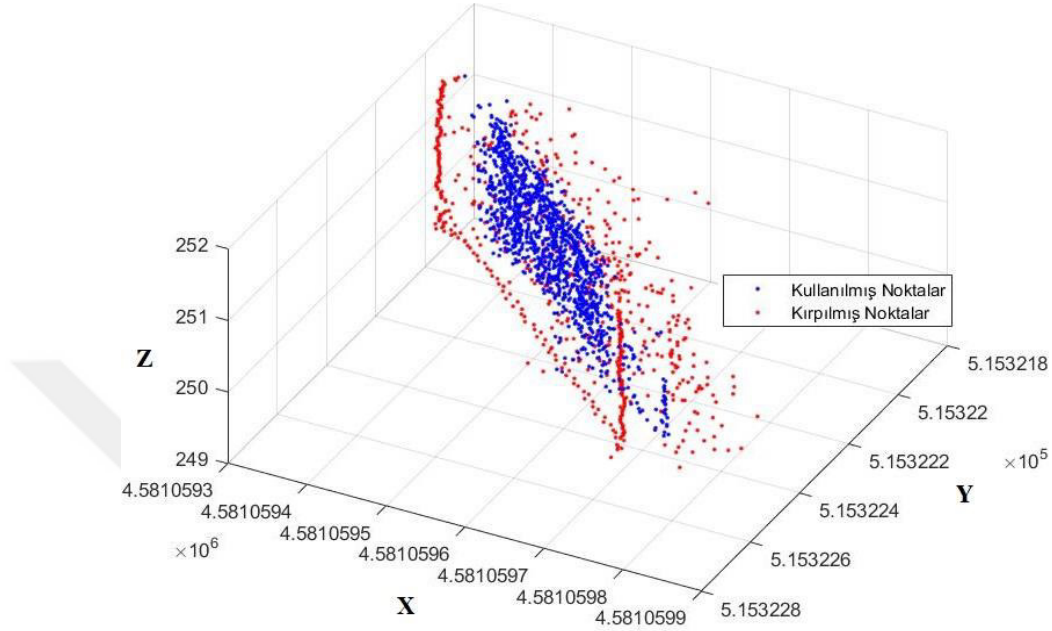


Şekil 4.15. EKKK ile geçirilen düzlem (h=1196)

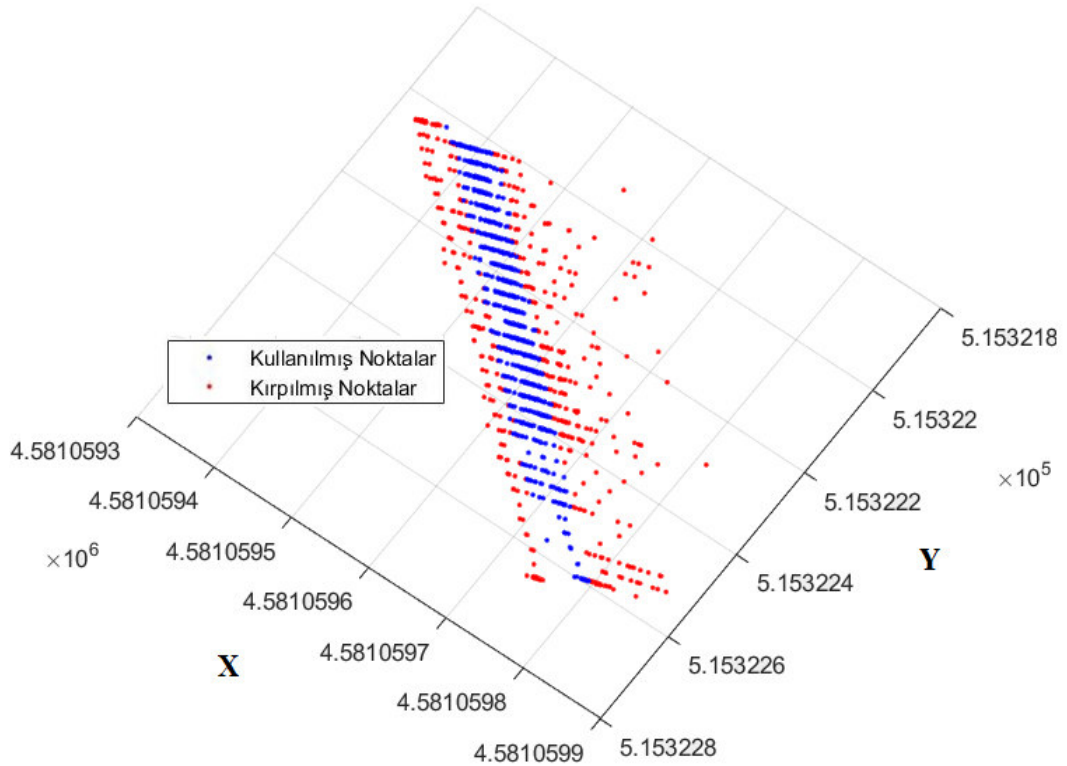


Şekil 4.16. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü (h=1196)

Nokta bulutundan kırılan noktaların rengi kırmızı olarak seçilmiştir. Regresyon işlemi için uygulamaya dahil edilen noktalar ise mavi olarak seçilmiştir. (Şekil 4.17) Nokta bulutundan ayıklanan noktaların daha net gösterimi için üstten kuş bakışı görünümü de gösterilmiştir. (Şekil 4.18)



Şekil 4.17. Nokta bulutundan kırılmış noktalar ($h=1196$)



Şekil 4.18. EKKK ile geçirilen düzlemin kuş bakışı görünümü ($h=1196$)

4.2.4. Kırpma Değeri $h = 937$ için Uygulama Sonuçları

Bu uygulamada h değerinin optimal hesabı için (Rousseeuw ve Leroy, 1987)'nin önerdiği $h = [(n + u + 1)/2]$ formülü kullanılmıştır. Böylece $h=937$ olarak hesaplanmıştır ve bu da uyuşumsuz ölçü oranının %50 olarak kabul edildiği anlamına gelir. Önceki uygulamalarda olduğu gibi rastgele seçilmiş 4 elemanlı 500 alt küme için EKK hesabı yapılır ve düzeltme değerlerinin karelerinin toplamı bulunur. (Tablo 4.16)

Tablo 4.16. Rastgele 4 elemanlı 500 alt küme için düzeltmelerin kareleri toplamı ($h=937$)

	K_1	K_2	K_3	...	K_{500}
[VV]	3.2285	3.2333	3.2445	...	256685.8527

*[VV] değerleri birimleri m^2

500 alt kümeden en küçük düzeltme kareleri toplamına sahip 10 küme seçilmiş ve bunlarla işleme devam edilmiştir. Bu 10 küme için 10 kez iterasyon yapılmıştır ve her bir iterasyondaki 10 kümeye ait düzeltmelerin kareleri toplamı hesaplanmıştır. (Tablo 4.17)

Tablo 4.17. En küçük düzeltme karelerine sahip 10 alt kümenin iterasyon verileri
(h=937)

	[VV] ₁	[VV] ₂	[VV] ₃	[VV] ₄	[VV] ₅	[VV] ₆	[VV] ₇	[VV] ₈	[VV] ₉	[VV] ₁₀
K ₁	3.2252	3.2160	3.2017	3.2916	3.2433	3.1983	3.2145	3.2182	3.2636	3.3009
K ₂	3.2088	3.2088	3.3476	3.3877	3.2023	3.2078	3.2845	3.2343	3.2064	3.4358
K ₃	3.2340	3.2119	3.2178	3.3845	3.2915	3.3404	3.1993	3.4264	3.2288	3.2210
K ₄	3.2678	3.2020	3.2003	3.2181	3.2388	3.2445	3.6934	3.3995	3.3184	3.3346
K ₅	3.2845	3.2340	3.2169	3.2003	3.2270	3.2021	3.2063	3.2567	3.5953	3.5140
K ₆	3.2740	3.2215	3.2475	3.2278	3.2942	3.2203	3.3316	3.3939	3.3258	3.3857
K ₇	3.2273	3.2401	3.2061	3.2259	3.3018	3.4220	3.2689	3.7782	3.9156	3.9823
K ₈	3.1912	3.2238	3.3375	3.4790	3.3810	3.2758	3.6886	3.6724	4.0536	4.1804
K ₉	3.2576	3.2500	3.2499	3.2190	3.3272	3.3990	3.3541	3.6625	4.2603	4.5099
K ₁₀	3.2452	3.3135	3.3189	3.3693	3.5515	3.4824	3.7702	3.9549	4.0272	4.3118

*[VV] değerleri birimleri m²

En küçük düzeltme kareleri toplamına sahip olan alt küme seçilir. Bu kümeye göre bulunan regresyon parametreleri değerleri aşağıdaki gibidir. (Tablo 4.18)

Tablo 4.18. Yaklaşık EKKK yöntemine göre regresyon parametrelerinin çözümü (h=937)

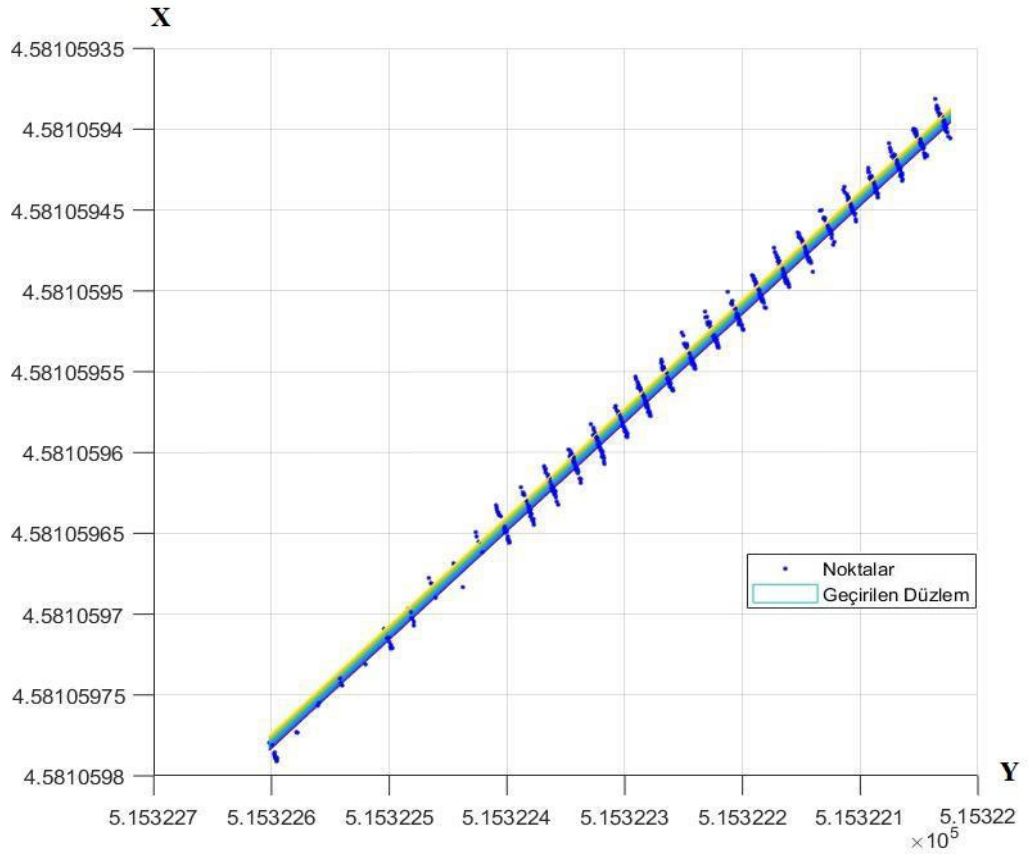
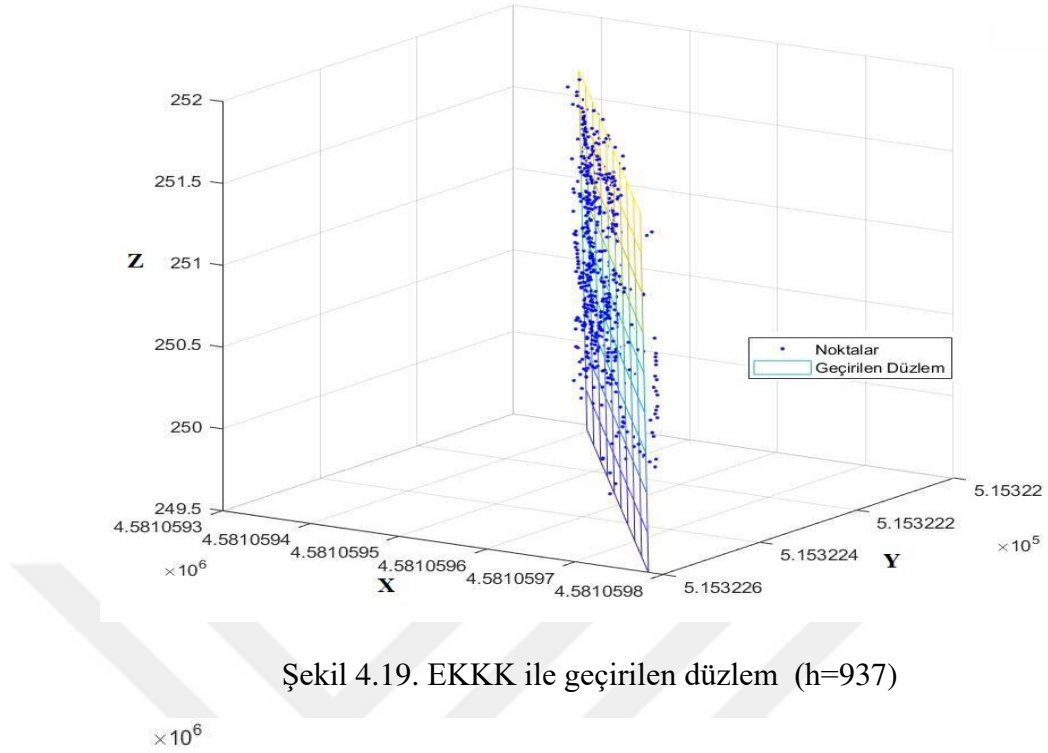
Yöntem	a	b	c (m)
EKKK (h=937)	0.66798017	-0.00572601	4236835.9358

Düzeltilmelerin kareleri toplamı iki ayrı sonuç halinde verilmiştir. Tüm ölçülere göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde ve seçilen 1500 ölçüye göre dizayn edilen katsayılar matrisi (A) ve ölçü vektörü (l) ile bir çözüme gidildiğinde elde edilen düzeltilmelerin karelerin toplamı, birim ölçünün karesel ortalama hatası ve mutlak değerce maximum ve minimum düzeltme değerleri Tablo (4.19)'da verilmiştir.

Tablo 4.19. Tüm ölçüler ve kırpma sonucu elde kalan 937 ölçü kullanılarak elde edilmiş düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

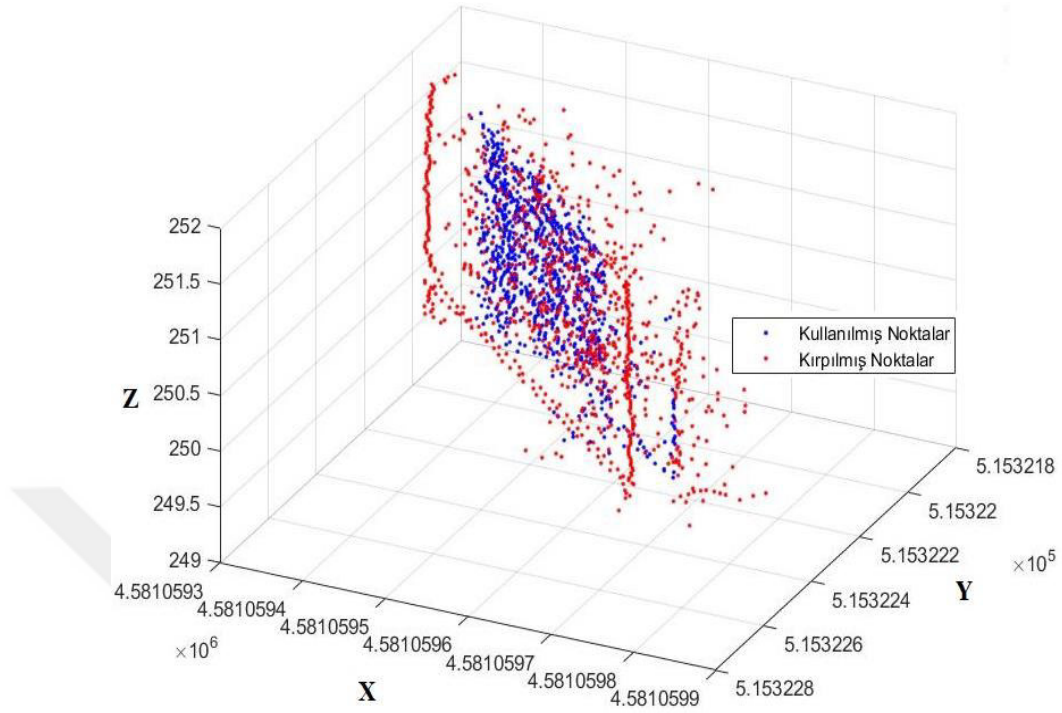
Yöntem	$[VV]$ (cm ²)	v_{max} (cm)	v_{min} (cm)	m_0 (cm)
EKKK (Tüm Ölçüler)	31913	23.57	$4.67 \cdot 10^{-4}$	∓ 4.13
EKKK (h=937)	763	2.62	$4.67 \cdot 10^{-4}$	∓ 0.9

Elde edilen EKKK regresyon parametreleri (a,b ve c) ile bu noktalardan geçen düzlem Şekil 4.19'da ve üstten kuş bakışı görünümü de Şekil 4.20'de gösterilmiştir.

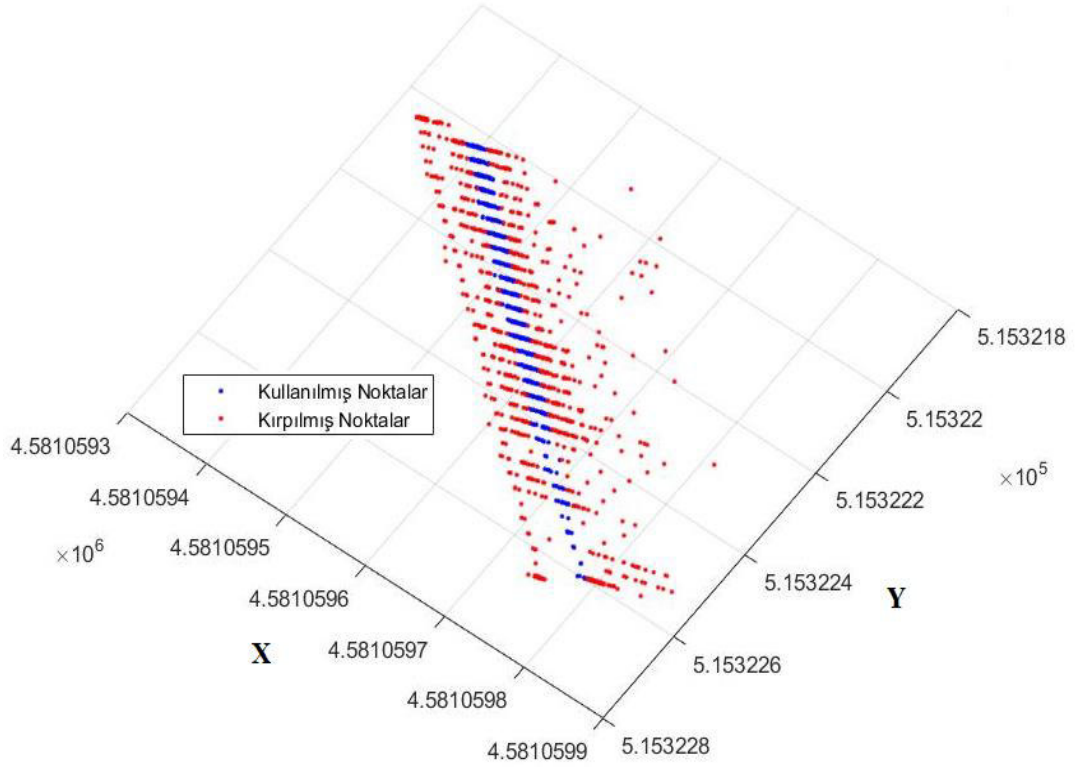


Nokta bulutundan kırılan noktaların rengi kırmızı olarak seçilmiştir. Regresyon işlemi için uygulamaya dahil edilen noktalar ise mavi olarak seçilmiştir. (Şekil 4.21)

Nokta bulutundan ayıklanan noktaların daha net gösterimi için üstten kuş bakışı görünümü de gösterilmiştir. (Şekil 4.22)



Şekil 4.21. Nokta bulutundan kırılmış noktalar (h=937)



Şekil 4.22. Nokta bulutundan kırılmış noktaların kuş bakışı görünümü (h=937)

5. SONUÇ

Birçok bilim dalında olduğu gibi Harita mühendisliği alanında da ölçümlerin modellenmesi, analizi ve dengelenmesi gibi işlemler için sıklıkla En Küçük Kareler (EKK) yöntemi kullanılır. Ancak veri setinde uyuşumsuz ölçü olması, EKK sonuçlarını olumsuz yönde etkilemektedir. Her ne kadar uyuşumsuz ölçüleri belirlemek adına dengeleme sonrası uyuşumsuz ölçü testleri olsa da, EKK'nın hataları yayıcı etkilerinden dolayı uyuşumsuz ölçüler doğru bir şekilde belirlenmemektedir. Bu yüzden *Robust* başlığı altında bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu tezde, birçok robust yöntem ele alınmış ve genel hatlarıyla açıklanmıştır. Tezin ana konusunu oluşturan Robust En Küçük Kırpılmış Kareler (EKKK) yöntemi de bir çok yönüyle ele alınmış ve üzerine uygulamalar yapılmıştır. Tezde 5 uygulamaya yer verilmiştir. Eldeki nokta bulutu verileriyle EKK ve EKKK yöntemlerine göre düzlemler geçirilmiştir. İlk uygulamada EKK'ya göre sonraki 4 uygulamada ise EKKK ile düzlem geçirme işlemi h kırpma değeri farklı değerler seçilerek yapılmıştır.

Her bir uygulamadaki tüm ölçüler kullanılarak hesaplanan düzeltmelerin kareleri toplamı ($[VV]$) değerleri incelendiğinde aralarında belirgin farklar görülmektedir. (Tablo 5.1) Düzeltmelerin kareleri toplamı sonucu dengeleme işleminin ne kadar robust olduğu hakkında bilgi veren bir faktör olsa da verilerin yapısı da bu sonuçların yorumlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Tablo (5.1)'deki maximum ve minimum düzeltme ve karesel ortalama hata (m_0) değerleri incelendiğinde de bu durum ortaya çıkmaktadır. Kırpma değeri h sayısı düştükçe, $[VV]$ değerlerinin düştüğü gözlemlense de bu durumun herhangi bir kararlılığı olmadığı görülmüştür. Ayrıca h sayısı düştükçe $[VV]$ değerinin düştüğü gözlemlense de bu bir yandan o kadar az veriden de yararlanıldığı anlamına gelmektedir. Bu da yararlı olabilecek ölçümlerin dengeleme işleminden çıkarılmasına sebep olabilir. O yüzden EKKK yönteminin uygulamadaki en önemli noktalardan biri de h değerinin belirlenebilmesidir.

Tablo 5.1. Her bir uygulama ait regresyon parametreleri ve tüm ölçüler kullanılarak hesaplanmış düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

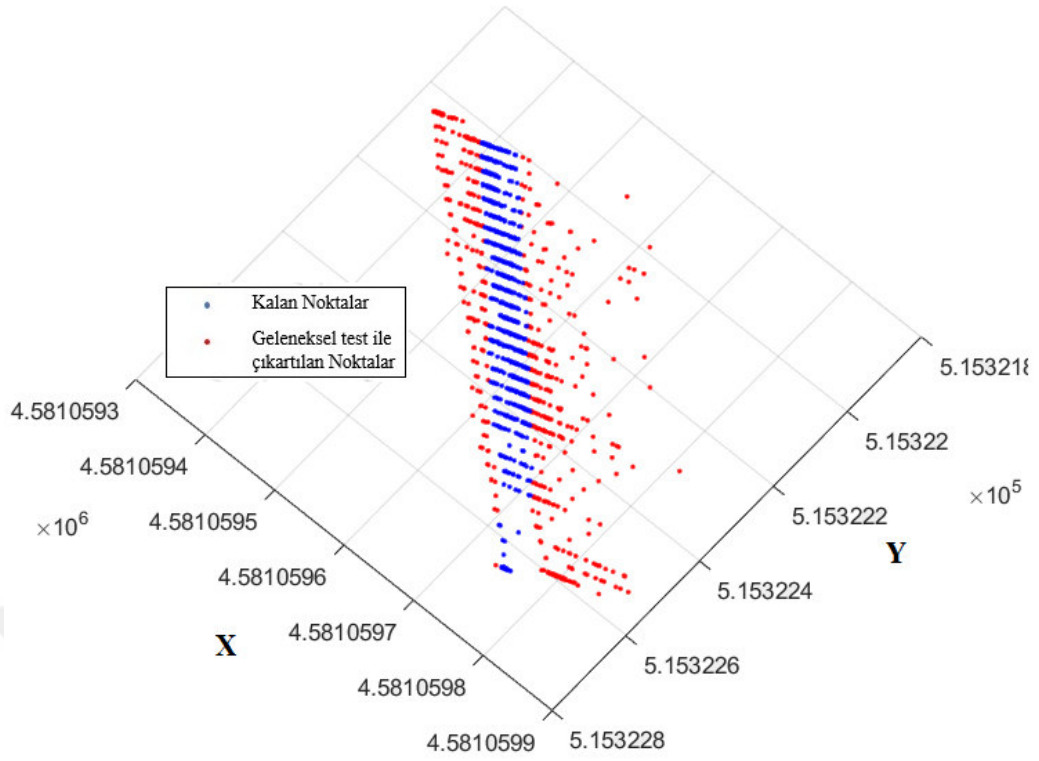
Uygulama No	a	b	c (m)	[VV] (cm ²)	v_{min} (cm)	v_{max} (cm)	m_0 (cm)
I	0.64997	-0.00456	4246117.099	32168	$3.86 \cdot 10^{-4}$	23.9	∓ 4.15
II	0.65407	0.00105	4244003.326	32194	$2.06 \cdot 10^{-4}$	24.6	∓ 4.15
III	0.66410	-0.00398	4238835.969	31902	$9.79 \cdot 10^{-5}$	23.7	∓ 4.13
IV	0.66568	-0.00545	4238019.553	31927	$1.58 \cdot 10^{-3}$	23.6	∓ 4.14
V	0.66798	-0.00573	4236835.936	31913	$4.67 \cdot 10^{-4}$	23.6	∓ 4.13

Geleneksel test sonucu elde kalan ölçü grubu ve EKKK uygulamalarında kırılmış ölçüler kullanılarak hesaplanan ([VV]) değerleri incelendiğinde aralarında belirgin farklar olduğu görülmektedir.(Tablo 5.2) Bu düzeltme kareleri toplamı değerleri ile Tablo 5.1'deki tüm ölçüler kullanılarak hesaplanan düzeltme kareleri toplamı değerleri ve karesel ortalama hata değerleri kıyaslandığında ise göze çarpar şekilde azaldıkları görülmektedir. Ayrıca EKKK uygulamaları için kırma değeri (h) azaldıkça Tablo 5.2'deki değerlerin kendi aralarında da bariz seviyede düştükleri gözlemlenmiştir. Böyle bir düşüşün kaynağı için ölçü sayısının azalması yanında uyuşumsuz ölçülerin ayıklanmış olabileceği ihtimalinden de bahsedilebilir. Tablo 5.2'deki sonuçlardan en önemlisi ise EKK yöntemi dayalı olarak uyuşumsuz ölçü testi için yapılan geleneksel test yöntemi sonuçlarıyla EKKK yöntemini doğrudan kıyaslayabilmek için h değerinin 1196 alınarak bulunan EKKK sonuçlarının kıyaslanmasıdır. Sonuç olarak EKKK yöntemi ile bulunan [VV] ve karesel ortalama hata (m_0) değerlerinin daha düşük olduğu görülmektedir.

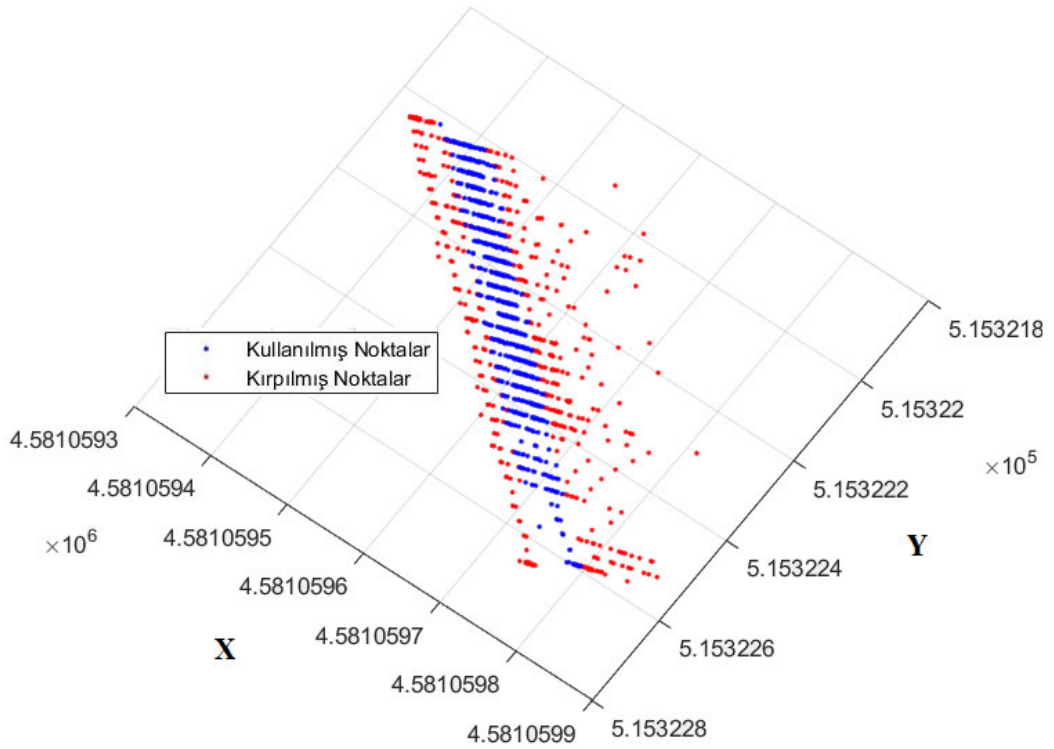
Tablo 5.2. Geleneksel test ve EKKK sonucu elde kalan ölçüler kullanılarak bulunan düzeltme ve karesel ortalama hata değerleri

Uygulama No	[VV] (cm ²)	v_{min} (m)	v_{max} (cm)	m_0 (cm)
I	2631	$2.22 \cdot 10^{-3}$	3.06	∓ 1.49
II	17934	$2.06 \cdot 10^{-4}$	9.01	∓ 3.18
III	6433	$9.79 \cdot 10^{-5}$	6.12	∓ 2.07
IV	2048	$1.58 \cdot 10^{-3}$	3.67	∓ 1.31
V	763	$4.67 \cdot 10^{-4}$	2.62	∓ 0.9

Geleneksel test sonucu nokta bulutundan çıkarılan ölçüler ile $h=1196$ alınarak yapılan EKKK yöntemi sonucu ölçü grubundan kırılan ölçüler kıyaslandığında EKKK yönteminin uyumsuz ölçüleri daha doğru bir şekilde belirlediği görülmektedir. (Şekil 5.1)



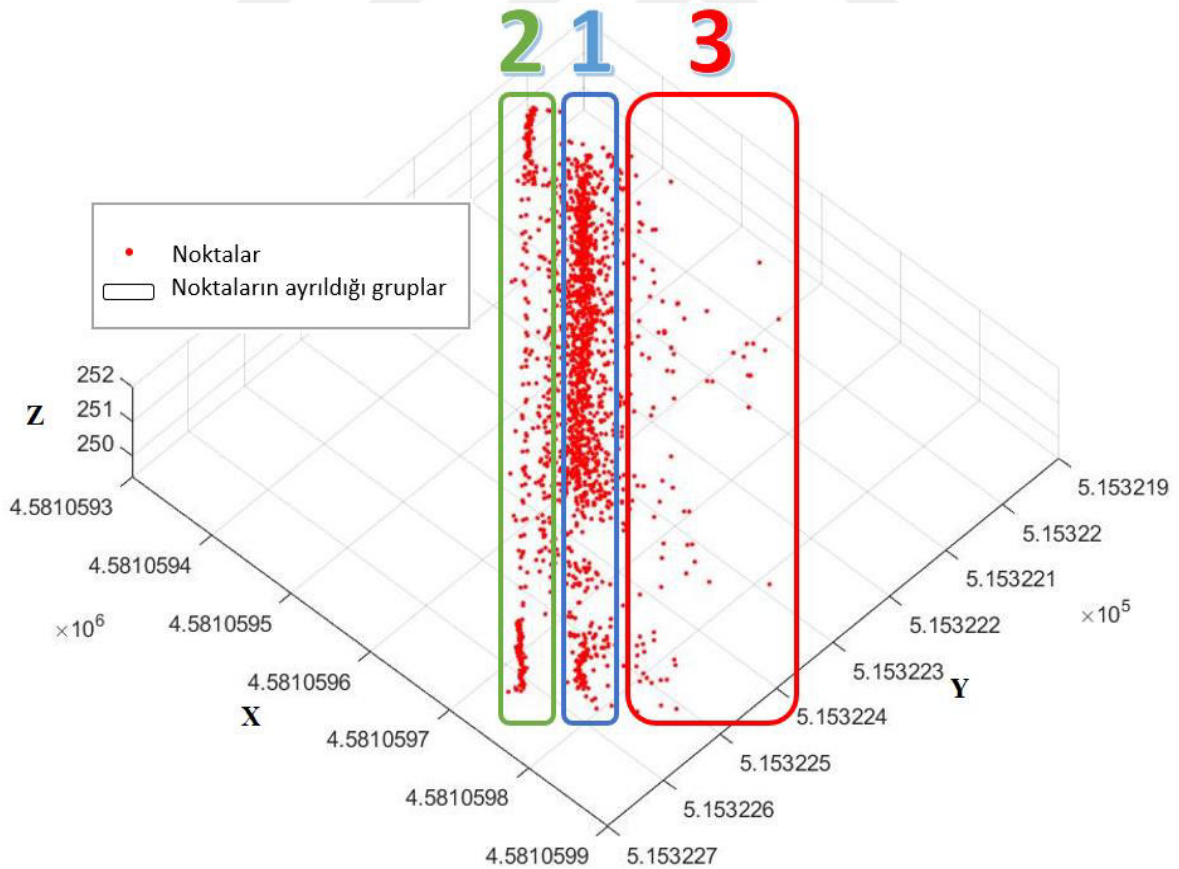
(a)



(b)

Şekil 5.1. (a) Geleneksel test sonucu nokta bulutundan çıkartılmış noktalar (b) EKKK (h=1196) sonucu kırılmış noktalar

Nokta bulutundaki noktalar incelendiğinde temelde 3 farklı gruba ayrıldıkları gözükmektedir. (Şekil 5.2) Eldeki nokta bulutundaki noktaların bu şekilde 3 gruba ayrılması, düzeltme değerleri toplamının ($[VV]$), neden birbirine yakın değerlerde olduklarını açıklamak açısından önemlidir. I. Uygulamada tüm veriler kullanıldığı için tüm bu 3 grup verinin ortalamasına yakın bir düzlem geçirilmiştir. 3. gruptaki verilerin varlığı her ne kadar uyuşumsuz ölçü olsalar da geçirilecek düzlemi 2. gruptan 1. grup yönüne doğru çektiği için $[VV]$ değerinin görece düşük çıkmasını sağlamıştır. Bu 3. gruptaki verilerin II. Uygulamada ayıklandıkları sıra neden $[VV]$ değerinin I. uygulamadakinine kıyasla daha yüksek olduklarını da açıklamaktadır. Uyuşumsuz ölçülerin ayıklanması açısından II. Uygulama, I. Uygulamaya kıyasla daha robust olmasına karşın $[VV]$ değerinin büyüklüğü açısından da daha büyük bir değere sahiptir. Bu da bir dengeleme işleminin tamamiyle başarılı bir şekilde gerçekleştiğini sorgulamada sadece $[VV]$ değerlerine bakmanın her zaman doğru olmayabileceğini göstermektedir. Ardından yapılan III. ve IV. Uygulamalarda h kırpma değerinin düşürülmesi ile de $[VV]$ değerlerinin düştüğü görülmektedir.



Şekil 5.2. Nokta bulutundaki noktaların ayrıldığı 3 grup

Kırpma değeri h 'ın 1780 seçildiği II. Uygulamada ilk olarak 3. gruptaki noktalar, kırpma değeri h 'ın 1500 ve 1196 seçildiği III ve IV. Uygulamada 2 ve 3. gruptaki noktalar, kırpma değeri h 'ın 937 seçildiği IV ve V. Uygulamada, 2 ve 3. gruptaki noktalar ile birlikte 1. gruptaki noktaların da bir kısmının dengeleme işleminden çıkarıldığı gözlenlenmiştir. Bu durumlar Şekil 4.10, Şekil 4.14, Şekil 4.18 ve Şekil 4.22'de görülmektedir. Sonuç olarak EKKK yöntemini uygulamada en kritik noktalardan biri de h değerinin doğru seçimi olduğu ortaya çıkmaktadır. Genel olarak tüm bu sonuçlardan aşağıdaki gibi çıkarımlar yapılmıştır:

- Düzeltmelerin kareleri toplamı ($[VV]$) değerleri, dengeleme işleminin ne kadar başarılı olabildiği hakkında önemli bir faktör olsa da tek başına incelendiğinde özellikle de uyuşumsuz ölçüler rastgele hata sınırına yakın değerlere sahip iken yanlış yönlendirici olabilirler.
- EKKK ile EKK'ya kıyasla daha robust sonuçlar üretilebilir ve aynı zamanda uyuşumsuz ölçüler çok daha doğru ve basit bir şekilde, tek tek değil, istenilen sayıda tek defada belirlenebilir.
- EKKK sonucunun en robust değerini alması için h değerinin doğru seçimi de kritik bir rol oynamaktadır. Bu değer uygulamadan uygulamaya değişebileceği sabit bir şekilde formülize edilemeyeceği de bu uygulamanın sonuçları açısından ortaya çıkmaktadır.
- Kırpma değeri h 'ın yanlış seçilmesi, dengeleme işleminde uyuşumsuz ölçü haricinde doğru olan ölçülerin de işleminden çıkarılabileceği anlamına geldiğinden büyük önem arz etmektedir.
- EKK yöntemine dayalı olarak yapılan geleneksel test yöntemleri iteratif bir şekilde uyuşumsuz ölçüleri belirler. Ancak her bir iterasyonda yalnızca bir ölçüyü uyuşumsuz olarak belirler ve ölçü grubundan çıkarır. EKKK yöntemi buna kıyasla belirlenen kırpma değeri (h) kadar ölçüyü aynı anda ölçü grubundan çıkarır ve olabilecek tüm kombinasyonları araştırarak en iyi sonuçları bulur. Bu da uyuşumsuz ölçülerin etkisini sınırlandırma anlamında daha olumlu sonuçlar verebilir.

KAYNAKLAR

- Acar, M., Ayan, T. ve Akyılmaz, O. (2009). En Küçük Kareler ve Toplam En Küçük Kareler Yöntemleri ile Deformasyon Analizi. 12. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 11-15 Mayıs, Ankara.
- Aggarwal, R. ve Ranganathan, P. (2017). Common pitfalls in statistical analysis: Linear regression analysis. *Perspective in Clinical Research*, 8(2), 100.
- Akyılmaz, O. (2007). Total Least Squares Solution of Coordinate Transformation. *Survey Review*, 39(303), 68-80.
- Alma, Ö. G. (2011). Comparison of Robust Regression Methods in Linear Regression. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 6:9, 409-421 Hekimoğlu, Ş. 2006. Kaba Hataların Belirlenmesindeki Sorunlar.
- Almongy, H. M. ve Almetwaly, E. M. (2018). Comparison between methods of robust estimation to reduce the effect of outliers.
- Amiri-Simkooei, A. (2003). Formulation of L1 Norm Minimization in Gauss-Markov Models. *Journal of Surveying Engineering*, 129(1), 37:43.
- Anonim, (2010). Statistical Analysis Techniques, Robust Estimators, Alternative to OLS, <http://www.statisticalconsultants.co.nz/blog/r-estimators.html> (Erişim tarihi: 29.01.2021)
- Baarda, W. (1968). *A testing procedure for use in geodetic networks*. Netherlands Geodetic Com., New Series, Delft, Netherlands, 2(5).
- Bai, E. W. (2003). A random least-trimmed-squares identification algorithm. *Automatica*. 39(9), 1651-1659.
- Barsanti, S. G., Remondino, F. Ve Visintini, D. (2012). Photogrammetry and Laser Scanning for Archaeological Site 3D modeling- Some critical issues. *In Proc. of the 2nd Workshop on 'The New Technologies for Aquileia', V. Roberto, L. Fozzati*.
- Bektaş, S. (2016). *Dengeleme Hesabı*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları No:118, ISBN 975-7636-54-1. Samsun.
- Birkes, D. ve Dodge, Y. (1993). *Alternative Methods of Regression*. John Wiley ve Sons, Inc, 605 Third Avenue New York, NY 10158-0012.
- Bosche, F., Forster, A., ve Valero, E. (2015). 3D Surveying Technologies and Applications: Point Cloud and Beyond. *Heriot-Watt University, Edinburg*.
- Chatterjee, S. ve Hadi, A. S. (2012). *Regression Analysis By Example* (Fifth edition). John Wiley ve Sons, Inc, Hoboken, New Jersey.
- Chatterjee, S. Ve Simonoff, J. S. (2013). *Handbook of Regression Analysis*. John Wiley ve Sons, Inc, Hoboken, New Jersey.
- Čížek, P. ve Víšek, J. Á. (2005). Least Trimmed Squares. *XploRe®—Application Guide*, 49-63. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Coakley, C. W. ve Hettmansperger, T. (1993). A Bounded Influence, High Breakdown, Efficient Regression Estimator, *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 872-880.
- Dielman, T. E. (2005). Least Absolute value regression: recent contributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 75(4), 263-286.
- Duran, Z., Atik, M. E. ve Çelik, M. F. (2017). Yersel Fotogrametrik Yöntem ile Yersel Lazer Taramanın Karşılaştırılması ve Doğruluk Analizi. *Harita Dergisi*, 158, 20-25.

- Erdogan, B. (2014). An outlier Detection method in geodetic networks based on the original observations. *Boletim de Ciencias Geodesicas*, 20(3), 578-589.
- Erenoglu, R. C. ve Hekimoglu, S. (2009). An investigation into robust estimation applied to correlated GPS Networks. Sideris M.G. (eds), *Observing our changing earth*, International Association of Geodesy Symposia, 133, 639-644. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., Rachev, S. T. Ve Arshanapalli, B. G. (2014). *The Basics of Financial Econometric: Tools, Concepts and Asset Management Applications*. John Wiley ve Sons, Inc.
- Fan, H. (1993). *Theory of errors ve least squares adjusment*. Royal Institute of Technology, 72, 100-44, Stockholm, Sweden.
- Felus, Y. A. (2004). Application of total least squares for spatial point process analysis. *Journal of Surveying Engineering*, 130(3), 126-133.
- Fox, J. ve Weisberg, S. (2002). Robust Regression. *An R and S- Plus companion to applied regression*, 91.
- Freund, R. J., Wilson, W. J. ve Sa, P. (2006). *Regression Analysis*. Elsevier Inc.
- Gašincová, S., Gašinec, J., Weiss, G. ve Labant, S. (2011). Application of robust estimation methods for the analysis of outlier measurements. *GeoScience Engineering*, 57(3). 14-9.
- Ghilani, C. D. (2017). *Adjustment computations: Spatial data analysis* (Sixth edition). John Wiley ve Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Ghilani, C. D. ve Wolf, P. R. (2012). *Elementary Surveying An Introduction to Geomatics* (Thirteenth Edition). Pearson Education, Inc, Upper Saddle River, New Jersey.
- Giloni, A., Simonof, J. S. ve Sengupta, B. (2006). Robust weighted LAD regression. *Computaional Analysis & Data Analysis*, 50, 3124-3140.
- Giloni, A. ve Padberg, M. (2001). Least Trimmed Squares Regression, Least Median Squares Regression and Mathematical Programming. *Matmetical and Computer Modelling*, 35(9-10), 1043-1060.
- Golub, G. H. ve Van Loan, C. F. (1980). An analysis of the total least squares problem. *SIAM journal on numerical analysis*, 17(6), 883-893.
- Gökalp, E. ve Boz, Y. (2005). Robust M-Kestirimlerin GPS Ağlarındaki Uyuşumsuz Baz Vektörlerini Belirlemede Karşılaştırılması. *Harita Dergisi*, 1(17), 134.
- Gökalp, E., Güngör, O. ve Boz, Y. (2008). Evaluation of Different Outlier Detection Methods for GPS Networks. *Sensors*, 8, 7344-7358.
- Grafarend, E. W. ve Sansò, F. (drl.). (2012). *Optimization and design of geodetic networks*. Springer Science & Business Media, Heidelberg, Berlin.
- Gui, Q. ve Zhang, J. (1998). Robust biased estimation and its applications in geodetic adjustments. *Journal of Geodesy*, 72(7-8), 430-435.
- Habib, A. F., Ghanma, M. S. ve Tait, M. (2004). Integration of LIDAR and Photogrammetry for Close Range Applications. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 35 (B5). 1045-1050.
- Hekimoglu, S. (2005). Do Robust Methods Identify Outliniers More Reliably Than Conventional Tests for Outliniers? *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 3, 174-180.
- Hekimoğlu, Ş. (2006). Kaba Hataların Belirlenmesindeki Sorular, *Harita Dergisi*, 5(3), 174-180.

- Hekimoğlu, Ş. ve Erenoğlu, C. R. (2007). Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Klasik Yaklaşım ve Robust Yöntemlerle Belirlenmesi. *Jeodezi ve Jeoinformasyon Dergisi*: 97, 3-14.
- Hekimoğlu, Ş., Erdogan, B., Soyacan, M. ve Durdag, U. M. (2014). Univariate Approach for Detecting Outliers in Geodetic Networks. *Journals of Surveying Engineering*, 140(2). 1-8.
- Hofmann, M., Gatu, C. ve Kontoghiorghes, E. J. (2010). An Exact Least Trimmed Squares Algorithm for a Range of Coverage Values. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 19(1), 191-204
- Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. John Wiley and Sons, Inc.
- Hubert, M., Rousseeuw, P. J. ve Van Aelst, S. (2008). High-breakdown robust multivariate methods. *Statistical science*, 23(1), 92-119.
- Ingram, E. L. (1911). *Geodetic surveying and the adjustment of observations* (methods of least squares). McGraw-Hill Book Company, Inc. 370 Seventh Avenue, New York.
- İnal, C. ve Yetkin, M. (2006). Robust yöntemlerle uyumsuz ölçülerin belirlenmesi. *Selçuk Üniversitesi Mühendisler-Mimarlar Fakültesi Dergisi*, 21, 3-4.
- Jureckova, J. ve Picek, J. (2006). *Robust Statistical Methods with R*. Taylor ve Francis Group.
- Kanatani, K. (2005). *Statistical optimization for geometric computation: theory and practice*. Courier Corporation.
- Kim, J., Krishnapuram, R. ve Dave, R. (1996). Application of the least trimmed squares technique to prototype-based clustering. *Pattern Recognition Letters*. 17(6), 633-641.
- Knight, N. L. ve Wang, J. (2009). A comparison of outlier detection procedures and robust estimation methods in GPS positioning. *The Journal of Navigation*, 62(4), 699-709
- Koch, K. R. (1999). *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. 2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York.
- Koch, I. E., Veronez, M. R., da Silva, R. M., Klein, I., Matsuoka, M. T., Gonzaga Jr, L. Ve Laroocca, A. P. C. (2017). Least trimmed squares estimator with redundancy constraint for outlier detection in GNSS networks. *Expert Systems with Applications*, 88, 230-237
- Kolenda, Z., Donizak, J. ve Bocardo, J. C. E. (1999). Least-squares adjustment of mathematical model of heat and mass transfer processes during solidification of binary alloys. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 30(3), 505-513
- Kuçak, R. A., Erol, S., Özögel, E. Ve Erol, B. (2019). İHA ve Hava LİDAR Verilerinden Üretilen SAM ile Geoit Modellerinin Değerlendirilmesi Üzerine Bir İnceleme. *TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, 17 Türkiye Harita ve Bilimsel Teknik Kurultayı*, 25-27 Nisan 2019, Ankara.
- Lemmens, M. (2011). *Terrestrial Laser Scanning*. Geo-Information, 101-121. Springer, Dordrecht.
- Leyang, W. (2012). Properties of the total least squares estimation. *Geodesy and geodynamics*, 3(4), 39-46.
- Markovsky, I. ve Van Huffel, S. (2007). Overview of total least-squares methods. *Signal processing*, 87(10), 2283-2302.
- Marshall, J. ve Bethel, J. (1996). Basic Concepts of L_1 Norm Minimization For Surveying Applications. *Journal of Surveying Engineering*, 122(4), 168-179.
- Maronna, R. A., Martin, R. D. ve Yohai, V. J. (2006). *Robust Statistics: Theory and Methods*. John Wiley ve Sons Ltd, England.

- Mikhail, E. M. ve Ackermann, F. E. (1976). *Observations and least squares*. Thomas Y. Crowell Company, Inc. 666 Fifth Avenue, New York.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A. ve Vining, G. G. (2012). *Introduction to linear regression analysis* (Fifth edition). John Wiley & Sons, Inc, 821, Hoboken, New Jersey.
- Muhlbauer, A., Spichtinger, P. ve Lohmann, U. (2009). Application and comparison of robust linear regression methods for trend estimation. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 48(9), 1961-1970.
- Nex, F. ve Remondino, F. (2014). UAV for 3D Mapping applications: a review. *Applied Geomatics*, 6(1), 1-15.
- Ogundare, J. O. (2018). *Understanding Least Squares Estimation and Geomatics Data Analysis*. John Wiley ve Sons, Inc, 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA
- Polat, N ve Uysal, M. (2016). Hava Lzer Tarama Sistemi, Uygulama Alanları ve Kullanılan Yazılımlara Genel Bir Bakış. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 16(3), 679-692.
- Pope, A. J. (1976). *The statistics of residuals and the detection of outliers*. NOAA Technical Report, NOS 65 NGS 1, U. S. Dept. Of Commerce, Rockville, Md.
- Ronchetti, E. M. (2006). The Historical Development of Robust Statistics. Proceedings of 7. International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-7), 02-07 Temmuz, International Statistical Institute: Working Cooperatively in Statistics Education. Salvador, Brazil.
- Rousseeuw, P. J. (1991). Tutorial to robust statistics. *Journal of Chemometrics*, 5:1, 1-20.
- Rousseeuw, P. J. (1990). Robust estimation and identifying outliers. *Handbook of statistical methods for engineers and scientists*, 16-1.
- Rousseeuw, P. J. ve Driessen, K. V. (2006). Computing LTS Regression for Large Data Sets. *Data Mining and Knowledge Discovery*. 12(1), 29-45.
- Rousseeuw, P. J. ve Hubert, M. (2018). Anomaly detection by robust statistics. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 8:2, e1236.
- Rousseeuw, J. R. ve Leroy, A. M. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley ve Sons, Inc.
- Siegel, A. F. (1980). *Robust Regression Using Repeated Medians*. (Rapor No. 172). Princeton University, Princeton, NJ 08540
- Sisman, Y. (2005). Uyuşumsuz Ölçü Gruplarının Belirlenmesi Yöntemleri. *Harita Dergisi Sayı*, 133.
- Sisman, Y. (2010). Outlier measurements analysis with the robust estimation. *Scientific Research and Essays*, 5(6), 668-678.
- Staudte, R. G. ve Sheather, S. J. (2011). *Robust estimation and testing*. John Wiley ve Sons, Inc, 918.
- Stephanie, (2017). L-Estimator Definition Examples, <https://www.statisticshowto.com/l-estimator/> (Erişim tarihi: 29.01.2021)
- Strejc, V. (1980). Least squares parameter estimation. *Automatica*, 16(5), 535-550.
- Susanti, Y., Pratiwi, H., Sulistijowati, S. ve Liana, T. (2014). M estimation, S estimation, and MM estimation in robust regression. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 91(3), 349-360.

- Şanlıoğlu, İ., Zeybek, M. ve Karauğuz G. (2013). Photogrammetric Survey and 3D Modeling of Ivriz Rock Relief in Late Hittite Era. *Mediterranean Archaeology and Archaeometry*, 13(2), 147-157.
- Şişman, Y., Bektaş, S. ve Yıldırım, Ö. (2009). Uyuşumsuz ölçü analizinde robust kestirim ve L1 norm yöntemleri. *TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, 12. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı*, Ankara.
- Tiku, M. L. ve Akkaya, A. D. (2004). *Robust estimation and hypothesis testing*. New Age International.
- Toka, O. ve Cetin, M. (2011). The comparing of S-estimator and M-estimators in linear regression. *Gazi University Journal of Science*, 24(4), 747-752
- Uzar, M. ve Özemir, I. (2019). İHA ile Fotogrametrik Veri Üretiminde Maliyet Analizi. *Harita Derisi*, Ocak, 161, 35-45.
- Uzun, Y. (2003). Üç Boyutlu Astrojeodezik Dik Koordinat Sistemlerinde Dönüşüm Modelleri ve Uyuşumsuz Ölçü Gruplarının Belirlenmesi Yöntemlerinin Karşılaştırılması. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Harita Mühendisliği Anabilim Dalı, 146, Trabzon.
- Valero, J. L. B. ve Moreno, S. B. (2005). Robust estimation in geodetic networks. *Física de la Tierra*, 17, 7.
- Wang, C., Tanahashi, H., Hirayu, H., Niwa, Y., ve Yamamoto, K. (2001). Comparison of local plane fitting methods for range data. In *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2001* (Vol. 1, pp. I-I). IEEE.
- Weingarten, J. W., Gruener, G., ve Siegwart, R. (2004). Probabilistic plane fitting in 3D and an application to robotic mapping. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Proceedings. ICRA'04. 2004 (Vol. 1, pp. 927-932). IEEE.
- Wells, D. ve Krakiwsky, E. (1971). *The Method of least squares*. University of New Brunswick: Canada
- Yan, X. ve Su, X. (2009). *Linear regression analysis: theory and computing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Yang, Y., Song, L. ve Xu, T. (2001). Robust Estimator for the Adjustment of Correlated GPS Networks. *First International Symposium on Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS*, Zurich, Switzerland.
- Yang, Y., Song, L. ve Xu, T. (2002). Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights. *Journal of Geodesy*, 76, 353-358.
- Yang, Y. (1999). Robust estimation of geodetic datum transformation. *Journal of geodesy*, 73(5), 268-274.
- Yaşayan, A. (1992). ‘‘Robust’’ Kestirim Kavramı, İlkesi ve Uygulamaları Üzerine İrdemeler. *Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi*, 72, 56-66.
- Yetkin, M. ve Berber, M. (2013). Application of the sign-constrained robust least-squares method to surveying networks. *Journal of Surveying Engineering*, 139(1), 59-65.
- Yetkin, M. ve Inal, C. (2011). L1 norm minimization in GPS networks. *Survey Review*, 43(323), 523-532.
- Zelížňaková, V. ve Hurčík, T. (2018). The comparison of selected robust estimation methods for adjustment of measurements in geodetic network. *Advances and Trends in Geodesy, Cartography and Geoinformatics: Proceedings of the 10th International Scientific and Professional Conference on Geodesy, Cartography and Geoinformatics (GCG 2017)*, October 10-13, 2017, Demänovská Dolina, Low Tatras, Slovakia, CRC Press, 119

