

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ AĞIRLIKLI SEGAL  
CEBİRİNDE OLAN FONKSİYON UZAYLARI VE BAZI TIKIZ  
GÖMÜLMELER**

Doktora Tezi

**Erdem TOKSOY**

Danışman

**Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI**

SAMSUN  
2021

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığımı taahhüt ve beyan ederim.

İmza

21 /06 / 2021

Erdem TOKSOY

## TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

**Tez Başlığı:** Kesirli Fourier Dönüşümü Ağırlıklı Segal Cebirinde Olan Fonksiyon Uzayları ve Bazı Tıkız Gömülmeler

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 17.05.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 10

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

İmza

21 /06 / 2021

Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

## ÖZET

### KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ AĞIRLIKLIL SEGAL CEBİRİNDE OLAN FONKSİYON UZAYLARI VE BAZI TIKIZ GÖMÜLMELER

Erdem TOKSOY

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Doktora, Haziran/2021

Danışman: Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

Bu çalışmada ilk olarak, kendisi ağırlıklı Lebesgue uzayında, kesirli Fourier dönüşümü  $p$ -kuvvetli ağırlıklı Lebesgue uzayında olan fonksiyonlar uzayının kapsama özellikleri, tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri ağırlık fonksiyonlarının sağladığı belli koşullara bağlı olarak ifade edildi. Ayrıca gerek koşullu olarak ifade edilen bazı teoremlerin yeterlilik koşullarının sağlanmadığını gösteren örnekler verildi.

Sonra, kendisi ağırlıklı Lebesgue uzayında, kesirli Fourier dönüşümü bir normlu ideal uzayında olan fonksiyonların kümesi tanımlandı. Bu alt vektör uzayı, ağırlıklı Lebesgue uzayının ve ağırlıklı Segal cebirinin normlarının toplam normuyla donatılarak uzayın bir Banach uzayı olduğu gösterildi. Bu uzayı tanımlamakta kullanılan ağırlıklı Segal cebiri bir katı (solid) uzay olduğunda bu yeni tanımlanan uzayın bir Banach cebiri olduğu ve ağırlık fonksiyonu ile çarpımları mutlak integrallenebilir olan fonksiyonların uzayının Banach ideali olduğu gösterildi. Bu alt uzayın öteleme ve karakter işlemcileri altında değişmez olduğu ve bu işlemcilerin sürekli olduğu gösterildi. Ayrıca uzayın kapsama ilişkileri araştırıldı. Bu bölümde, 2000 yılında Doğan ve Gürkanlı tarafından tanımlanan uzay için elde edilen bulgulara benzer bulguların yeni tanımlanan uzay için de sağlandığını göstermek amaçlandı. Böylece 2000 yılında Doğan ve Gürkanlı tarafından yapılan çalışmalar genelleştirilmiştir.

Son bölümde ise, üzerinde kesirli Fourier dönüşümüyle uyumlu girişim işlemi tanımlı olan ağırlık fonksiyonu ile çarpımları mutlak integrallenebilir fonksiyonların uzayının yaklaşık biriminin var olduğu gösterilerek bu uzayın without order (sıra değiştiremez) Banach cebiri olduğu ifade edildi. Ağırlık fonksiyonunun düzenli büyüyen olması durumunda çalışmada ifade edilen uzayların kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli yaklaşık birimleri bulundu. Bu uzayların çarpanlar tanımı verildi. Bazı koşullar altında, kesirli Fourier dönüşümü ağırlıklı Segal cebirlerinde olan fonksiyonların uzayının bir soyut Segal cebiri olduğu gösterildi.

**Anahtar Sözcükler:** Kesirli Fourier dönüşümü, girişim işlemi, kompakt gömülmeler, ağırlıklı Segal cebirleri.

## ABSTRACT

### ON FUNCTION SPACES WITH FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM IN THE WEIGHTED SEGAL ALGEBRA AND SOME COMPACT EMBEDDINGS

Erdem TOKSOY

Ondokuz Mayıs University  
Institute of Graduate Studies  
Department of Mathematics

Ph.D., June/2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşe SANDIKÇI

In this study, firstly we denoted inclusion properties, compact and non-compact embeddings between the spaces of functions in weighted Lebesgue space whose fractional Fourier transform belonging to  $p$ -power weighted Lebesgue space which depending on certain conditions provided by weight functions. Also we gave examples showing that the sufficient conditions of some theorems expressed by a necessary condition are not provided.

Later, we defined a set of functions in weighted Lebesgue space whose fractional Fourier transform belonging to a normed ideal space. By endowing this linear subspace with the sum norm of weighted Lebesgue space and weighted Segal algebra we indicated that this space is a Banach space. When the weighted Segal algebra used to describe this space is a solid space, we showed that this newly defined space is a Banach algebra and a Banach ideal of the space of functions whose product by a weight function are absolutely integrable. We proved that this subspace is translation and character invariant, translation and character operators are continuous. Also we investigated the inclusion properties of these spaces. In this section, we aimed to show that findings of the newly defined space are similar to the findings obtained for the space of functions defined by Doğan and Gürkanlı in 2000. Thus the studies given by Doğan and Gürkanlı in 2000 were generalized.

In the last part of this study, by showing that there are approximate identities of the space of functions whose product by a weight function are absolutely integrable under the convolution which is compatible with the fractional Fourier transform, we stated that this space is the without order Banach algebra. We found approximate identities with compactly supported fractional Fourier transform in these spaces such that weight function is regular growth. We gave definitions of multipliers of these spaces. Under certain conditions, we showed that this space of functions whose fractional Fourier transform in weighted Segal algebra is an abstract Segal algebra.

**Keywords:** Fractional Fourier transform, convolution, compact embeddings, weighted Segal algebras.

## ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince beni yönlendiren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, anlayışını benden esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI'ya teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

Doktora süreci boyunca önerileri ile tezime katkıda bulunan hocalarım Sayın Prof. Dr. Emin ÖZTEKİN ve Sayın Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Manevi desteğini, ilgisini ve sevgisini her an hissettiğim hem sevgili eşim hem de en iyi arkadaşım Berna TOKSOY'a, varlığıyla hayatıma ışık olan sevgisiyle hayat bulduğum oğlum Taha TOKSOY'a, sevgili annem Zühre TOKSOY'a, sevgili babam Cihat TOKSOY'a ve abim Tolga TOKSOY'a sevgi ve minnet duygularımı sunarım.

Erdem TOKSOY

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT .....	iv
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ .....	5
2.1. Temel Kavramlar.....	5
2.2. Literatür Özeti .....	25
3. MATERYAL VE YÖNTEM .....	29
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	30
4.1. $A_{\alpha,p}^{w,\omega}$ Uzayında Tıkız Gömülmeler .....	30
4.2. $S_w^\alpha$ Uzayının Bazı Özellikleri.....	58
4.2.1. $S_w^\alpha$ Uzayının Kapsama Özellikleri.....	82
4.2.2. $S_w^\alpha$ Uzayının Çarpanlar Uzayı .....	86
5. SONUÇ .....	124
KAYNAKLAR .....	125
ÖZ GEÇMİŞ.....	128

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### SİMGELER

$\hat{f}, Ff$	: $f$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$F_a f, F^a f$	: $f$ fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü
$T_x$	: Öteleme işlemcisi
$M_x$	: Karakter işlemcisi
$\delta$	: Dirac delta fonksiyonu
$f * g$	: $f$ ve $g$ fonksiyonlarının girişim işlemi
$f \Theta g$	: $f$ ve $g$ fonksiyonlarının girişim işlemi
$\mathbb{R}^d$	: $d$ boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$C_0(\mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı, sürekli, sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı
$\text{supp } f$	: $f$ fonksiyonunun desteği
$C_c(\mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı, sürekli, tıkHz destekli olan fonksiyonların uzayı
$L^p(\mathbb{R}^d)$	: Lebesgue uzayı
$\text{ess sup}$	: $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayının normu
$L_w^p(\mathbb{R}^d)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$S(\mathbb{R}^d)$	: Segal cebiri
$S_w(\mathbb{R}^d)$	: Ağırlıklı Segal cebiri
$M(A)$	: $A$ Banach cebiri üzerindeki çarpanlar kümesi

### KISALTMALAR

h.h.h. : Hemen hemen her yerde

## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Dirac delta fonksiyonu .....	12
2.2. Zaman-frekans düzlemi.....	13



# 1. GİRİŞ

Bu çalışmada kullanılan temel uzaylar  $\mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı Lebesgue uzayları ve ağırlıklı Segal cebirleridir. Bu uzaylarda çalışılırken kullanılan temel işlemci ise Fourier dönüşümünün bir  $\alpha$  parametresiyle genelleştirmesi olan kesirli Fourier dönüşümüdür. Kesirli Fourier dönüşümünde ifade edilen  $\alpha$  parametresi,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  olmak üzere her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $\alpha_j = \frac{\pi}{2}$  olarak alınırsa kesirli Fourier dönüşümü Fourier dönüşümüne karşılık gelir. Ayrıca zaman frekans analizi açısından bakıldığında, zaman bölgesinde tanımlı bir fonksiyonun Fourier dönüşümü frekans bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olurken bu fonksiyonun kesirli Fourier dönüşümü zaman frekans arasında kalan bölgede tanımlı bir fonksiyona dönüşebilmektedir. Kesirli Fourier dönüşümü son yıllarda ön plana çıkan ve geniş uygulama alanına sahip bir dönüşümdür. Bu dönüşüm zaman frekans analizinde, sinyal işlemede, optikte ve kuantum mekaniğinde uygulamalara sahiptir (Alieva et al., 1994; Almeida, 1994; Namias, 1980; Ozaktas et al., 2001).

Bu tez çalışmasında iki farklı problem ele alındı. İlk olarak (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında kesirli Fourier dönüşümü  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayında olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri araştırıldı. (Gürkanlı, 2008) çalışmasında Fourier dönüşümü  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayında olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri incelenmiştir. Bu çalışmada, (Gürkanlı, 2008) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri için elde edilen bulgulara benzer bulguların  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı için de sağlandığını göstermek amaçlandı.  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında  $\alpha$  parametresi,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  olmak üzere her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $\alpha_j = \frac{\pi}{2}$  olarak alındığında kesirli Fourier dönüşümü Fourier dönüşümüne karşılık geldiğinden  $\alpha$  parametresinin bu özel seçimi  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayını vermektedir. Bu açıdan bakıldığında  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri çalışması (Gürkanlı, 2008) çalışmasının bir genelleştirmesidir. Sonra kesirli Fourier dönüşümü  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$

uzayındaki fonksiyonların  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesi tanımlandı. (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasında,  $G$  yerel tıkHz Abel grup ve  $\hat{G}$  bu grubun karakter grubu olmak üzere Fourier dönüşümü  $S_\omega(\hat{G})$  uzayında olan  $L_w^1(G)$  uzayındaki fonksiyonların  $S_{w,\omega}(G)$  uzayı tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. Bu çalışmada, (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak  $S_{w,\omega}(G)$  uzayı için elde edilen bazı bulguların  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı için de sağlandığını göstermek amaçlandı. Yine  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki  $\alpha$  parametresi,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  olmak üzere her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $\alpha_j = \frac{\pi}{2}$  olarak alındığında kesirli Fourier dönüşümü ve  $\Theta$  girişim işlemi sırasıyla Fourier dönüşümüne ve  $*$  girişim işlemine karşılık geldiğinden  $\alpha$  parametresinin bu özel seçimi  $S_{w,w}(\mathbb{R}^d)$  uzayını vermektedir. Bu açıdan bakıldığında  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $S_{w,w}(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir genelleştirmesidir.

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde bu çalışma süresince kullanılan temel tanımlar, önermeler, teoremler ifade edildi. Bulgular ve Tartışma bölümündeki ispatlarda ikinci bölümde yer alan bu temel kavramlar referans alındı. Ayrıca çalışmada kullanılan kesirli Fourier dönüşümüyle ve uzaylarla ilgili literatürde var olan araştırmalardan kısaca bahsedildi.

Üçüncü bölümde çalışmada materyal olarak kullanılan işlemcilerden ve uzaylardan bahsedilerek verilen problemlerin çözümünde kullanılan yöntemler ifade edildi.

Dördüncü Bölüm olan Bulgular ve Tartışma bölümünde ilk olarak (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında kesirli Fourier dönüşümü  $L_\omega^p(\mathbb{R}^d)$  uzayında olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri araştırıldı. Tek yönlü olarak ifade edilen bazı teoremlerin ters yönlerinin doğru olmadığına örnekler verildi. Ayrıca (Toksoy ve Sandıkçı, 2015) çalışmasında  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının kapsama özellikleri bölümündeki ifadelerin bazılarında ikinci ağırlık fonksiyonu  $\omega = 1$  olarak alınmıştır. Bu çalışmada

$A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının kapsama özellikleri  $\omega$  ağırlığına bir kısıtlama getirilmeden yeniden incelendi.

Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında, Segal cebirlerinde ve ağırlıklı Segal cebirlerinde çarpma işlemi olarak  $*$  girişim işlemi alınmaktadır. Ancak iki fonksiyonun girişiminin kesirli Fourier dönüşümü bu fonksiyonların kesirli Fourier dönüşümlerinin çarpımı olarak yazılamamaktadır. Bu nedenle (Singh and Saxena, 2012) çalışmasında bir  $\Theta$  girişim işlemi tanımlanmıştır. Sonra bu girişim işlemi (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında  $\mathbb{R}^d$  kümesinde yeniden tanımlanmıştır. Bulgular ve tartışma kısmının ikinci bölümünde öncelikle Segal cebirlerindeki ve ağırlıklı Segal cebirlerindeki  $*$  girişim işlemi yerine  $\Theta$  girişim işlemi alınarak sırasıyla  $S^\Theta(\mathbb{R}^d)$  ve  $S_w^\Theta(\mathbb{R}^d)$  uzayları tanımlandı ve bu uzaylara örnekler verildi. Sonra kesirli Fourier dönüşümü  $S_w^\Theta(\mathbb{R}^d)$  uzayında olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki fonksiyonların  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesi tanımlandı. Bir vektör uzayı olduğu ifade edilen  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı

$$\|f\|_{S_w^\alpha} = \|f\|_{L_w^1} + \|F_\alpha f\|_{S_w^\Theta}$$

normuyla donatılarak Banach uzayı olduğu gösterildi.  $S_w^\Theta(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı (solid) uzay olduğunda  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir Banach cebiri ve  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının Banach ideali olduğu gösterildi. Bu uzayın öteleme ve karakter işlemcileri altında değişmez olduğu ve bu işlemcilerin sürekli olduğu gösterildi. Ayrıca uzayın kapsama özellikleri araştırıldı.

Banach cebirlerinin çarpanları araştırılırken bu cebirlerin without order (sıra değiştiremez) özelliğine sahip olması önem arz eder (Larsen, 1971). Üzerinde  $*$  girişim işlemi tanımlı olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı yaklaşık birime sahip olduğundan without order (sıra değiştiremez) Banach cebiridir. Bu uzayın çarpanlar tanımı öteleme işlemcisiyle değişmeli doğrusal ve sürekli işlemciler olarak verilmiştir (Bourouhiya, 2006).  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının çarpanlar uzayı başlığı altında ilk olarak üzerinde  $\Theta$  girişim işlemi tanımlı olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının yaklaşık biriminin var olduğu gösterilerek bu uzayın without order (sıra değiştiremez) Banach cebiri olduğu ifade

edildi. Bu uzayın çarpanlar tanımı herhangi bir  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $y = (y_1, \dots, y_d)$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $f \rightarrow T_y M_\gamma f$  dönüşümü ile değişmeli olan sürekli ve doğrusal işlemciler olarak yapıldı. Dikkat edilirse  $\alpha$  parametresi,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  olmak üzere her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $\alpha_j = \frac{\pi}{2}$  olarak alındığında bu tanım, üzerinde  $*$  girişim işlemi tanımlı olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı için verilen tanıma karşılık gelmektedir. Sonra  $w$  düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere üzerlerinde  $\Theta$  girişim işlemi tanımlı olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzaylarının kesirli Fourier dönüşümleri tıkız destekli yaklaşık birimleri bulundu. Bazı koşullar altında  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir soyut Segal cebiri olduğu gösterildi. Son olarak bazı koşullar altında  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına çarpanlar tanımı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yapılan tanıma benzer şekilde verildi.

Beşinci bölüm olan sonuç bölümünde, dördüncü bölümde elde edilen bulguların amaçlarla bağdaştığı ifade edilerek gelecekte yapılacak araştırmalar için önerilerde bulunuldu.

## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde çalışmanın kuramsal temellerini oluşturan temel kavramlar ve bu çalışmada faydalanılan literatürdeki bazı araştırmalara yer verildi.

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1:**  $f$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli herhangi bir fonksiyon olsun.

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına  $f$  fonksiyonunun desteği denir ve  $\text{supp } f$  simgesi ile gösterilir.  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli, tıkHz destekli fonksiyonların vektör uzayı  $C_c(\mathbb{R}^d)$  ile gösterilir (Rudin, 1966).

**Tanım 2.1.2:**  $f$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere her  $x \in \mathbb{R}^d - K$  ve herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $|f(x)| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $K \subset \mathbb{R}^d$  tıkHz alt kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna sonsuzda sıfırdır denir. Sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonların uzayı  $C_0(\mathbb{R}^d)$  ile gösterilir (Rudin, 1966).

**Tanım 2.1.3:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli, ölçülebilir ve

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan  $f$  fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) vektör uzayı  $L^p(\mathbb{R}^d)$  ile gösterilir. Bu uzay  $1 \leq p < \infty$  ve  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  olmak üzere

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Eğer  $p = \infty$  ise  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli ve hemen hemen her yerde sınırlı olan ölçülebilir  $f$

fonksiyonların uzayıdır. Bu uzay  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Rudin, 1966).

**Tanım 2.1.4:**  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir  $w$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

i) Her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w(x) \geq 1$ ,

ii) Her  $x, y \in \mathbb{R}^d$  için  $w(x+y) \leq w(x)w(y)$ ,

iii)  $w$  yerel sınırlı.

Bu takdirde  $w$  fonksiyonuna Beurling ağırlık fonksiyonu denir (Reiter and Stegeman, 2000).

Bu çalışmada kullanılan ağırlık fonksiyonları, Beurling ağırlık fonksiyonlarıdır.

**Tanım 2.1.5:**  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı bir  $w$  ağırlık fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

i) Her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\rho \geq 1$  olmak üzere

$$w\left(\frac{x}{\rho}\right) \leq w(x),$$

ii) Her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\rho \geq 1$  olmak üzere

$$w(\rho x) \leq C\rho^\lambda w(x)$$

olacak şekilde  $C \geq 1$  ve  $\lambda > 0$  sabitleri vardır.

O halde  $w$  fonksiyonuna düzenli büyüyen (regular growth) ağırlık fonksiyonu denir.

Tanımda verilen ii koşulu kullanılarak,  $\|x\| \geq 1$  olan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $C \geq 1$ ,  $\lambda > 0$  sabitler ve  $C_1 = C \sup\{w(x) \mid \|x\|=1\}$  olmak üzere

$$w(x) \leq C_1 \|x\|^2 \quad (2.1)$$

yazılır (Reiter and Stegeman, 2000).

**Tanım 2.1.6:**  $w_1$  ve  $w_2$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu olsun. Her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w_2(x) \leq cw_1(x)$  olacak şekilde  $c > 0$  reel sayısı varsa  $w_2$  ağırlık fonksiyonu  $w_1$  ağırlık fonksiyonundan önde gelir denir ve  $w_2 \prec w_1$  şeklinde gösterilir. Eğer  $w_2 \prec w_1$  ve  $w_1 \prec w_2$  ise  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları denktir denir ve  $w_1 \approx w_2$  biçiminde gösterilir (Feichtinger and Gürkanlı, 1990).

**Tanım 2.1.7:**  $1 \leq p < \infty$  ve  $w$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  kümesini

$$L_w^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^d) \mid fw \in L^p(\mathbb{R}^d) \right\}$$

biçiminde tanımlayalım.  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  bir vektör uzayı olup

$$\|f\|_{p,w} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Ayrıca  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli, ölçülebilir ve

$$\text{ess sup} \frac{|\phi(x)|}{w(x)} < \infty$$

koşulunu sağlayan  $\phi$  fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) vektör uzayı  $L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  ile gösterilir. Bu uzay  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının dual uzayı olup, herhangi bir  $\phi \in L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|\phi\|_{\infty,w} = \text{ess sup} \frac{|\phi(x)|}{w(x)}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerindeki sürekli doğrusal fonksiyoneller her  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $\phi \in L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  için

$$f \rightarrow \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\phi(x)} dx$$

biçiminde tanımlıdır (Reiter and Stegeman, 2000).

**Tanım 2.1.8:**  $A$ ,  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı ve her  $x, y \in A$  için  $xy \in A$  olsun. Eğer

i) Her  $x, y, z \in A$  için  $x(yz) = (xy)z$ ,

ii) Her  $x, y, z \in A$  için

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yx + zx,$$

iii) Her  $x, y \in A$  ve her  $\alpha, \beta \in K$  için  $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$ ,

koşulları sağlanıyorsa,  $A$  kümesine,  $K$  üzerinde bir cebirdir denir. Eğer  $A$  cebiri her  $x \in A$  için  $ex = xe = x$  olacak şekilde bir  $e$  elemanı içeriyorsa birimli cebir,  $e$  elemanına da cebirin birim elemanı denir. Yine her  $x, y \in A$  için  $xy = yx$  ise  $A$  cebirine değişmeli cebir denir.

$A$ ,  $K$  cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer  $(A, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve her  $x, y \in A$  için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $A$  cebirine  $K$  cismi üzerinde normlu cebir denir. Özel olarak  $(A, \|\cdot\|)$  normlu uzayı bir Banach uzayı ise  $A$  cebirine Banach cebiri denir (Larsen, 1973).

Örneğin  $L^1(\mathbb{R})$  uzayı  $*$  girişim işlemiyle bir Banach cebiridir.

**Tanım 2.1.9:**  $(B, \|\cdot\|)$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı, ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı ve  $B'$ ,  $B$  uzayının dual uzayı olsun.  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı,  $B$  uzayında değer alan, ölçülebilir ve  $\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\| dx$  integrali sonlu herhangi bir  $f$  fonksiyonu ve  $\varphi \in B'$

için  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$  integrali  $B$  uzayının bir elemanı olarak

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle f(x), \varphi \rangle dx \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right\| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\| dx$$

eşitsizliği sağlanır (Wang, 1977).

**Tanım 2.1.10:**  $f$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  ölçülebilir ve her  $K \subset \mathbb{R}^d$  tıkmaz kümesi için  $\int_K |f(x)| dx < \infty$  oluyorsa  $f$  fonksiyonuna, yerel integrallenebilir fonksiyon denir.  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı yerel integrallenebilen fonksiyonların vektör uzayı  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  ile gösterilir (Feichtinger and Gürkanlı, 1990).

**Tanım 2.1.11:**  $(A, \|\cdot\|_A)$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir Banach uzayı olmak üzere her  $f \in A$  ve  $K \subset \mathbb{R}^d$  tıkmaz kümesi için

$$\int_K |f(x)| dx \leq c_K \|f\|_A$$

olacak şekilde  $c_K > 0$  sabiti varsa,  $(A, \|\cdot\|_A)$  uzayına Banach fonksiyon uzayı (veya kısaca BF-uzayı) denir (Feichtinger and Gürkanlı, 1990).

**Tanım 2.1.12:**  $(A, \|\cdot\|_A)$  uzayı Banach fonksiyon uzayı olmak üzere hemen hemen her yerde  $|g(x)| \leq |f(x)|$  koşulunu sağlayan  $f \in A$  ve ölçülebilir  $g$  fonksiyonu verildiğinde,  $g \in A$  ve  $\|g\|_A \leq \|f\|_A$  oluyorsa bu uzaya solid (katı) uzay denir (Feichtinger, 1977).

**Teorem 2.1.13 (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi):**  $E$  sonlu ölçümlü bir küme olsun. Ayrıca  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $E$  kümesi üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $x \in E$  için  $|f_n(x)| \leq M$  olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı var olsun. Eğer her  $x \in E$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  oluyorsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

eşitliği vardır (Royden, 1968).

**Teorem 2.1.14 (Kapalı Grafik Teoremi):**  $X$  ve  $Y$  iki Banach uzayı ve  $A$ ,  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlı doğrusal bir fonksiyon olsun. Eğer  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $X$  uzayında bir  $x$  elemanına yakınsak ve  $(A(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi de  $Y$  uzayında bir  $y$  elemanına yakınsak olduğunda  $y = A(x)$  oluyorsa  $A$  dönüşümü süreklidir (Royden, 1968).

**Tanım 2.1.15:**  $f$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$T_x f(t) = f(t - x)$$

ve herhangi  $w \in \mathbb{R}^d$  için

$$M_w f(t) = \exp(itw) f(t)$$

biçiminde tanımlanan işlemcilerle sırasıyla öteleme işlemcisi ve karakter (modülasyon) işlemcisi denir (Rudin, 1973).

**Tanım 2.1.16:**  $(A, \|\cdot\|_A)$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir uzayı olmak üzere herhangi bir  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $T_x$  öteleme işlemcisi verilsin. Eğer her  $f \in A$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $T_x f(t) = f(t - x) \in A$  oluyorsa  $A$  uzayı ötelemeler altında değişmezdir (invarianttır) denir. Yine  $A$  ötelemeler altında değişmez olmak üzere

$$\|T_x f\|_A = \|f\|_A$$

eşitliği varsa  $A$  ötelemeler altında kuvvetli olarak değişmezdir denir (Feichtinger and Gürkanlı, 1990).

**Tanım 2.1.17:**  $(A, \|\cdot\|_A)$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir uzayı olmak üzere herhangi bir  $w \in \mathbb{R}^d$  için  $M_w$ , karakter işlemcisi olsun. Eğer her  $f \in A$  ve her  $w \in \mathbb{R}^d$  için  $M_w f(t) = \exp(itw) f(t) \in A$  oluyorsa  $A$  uzayına karakter

işlemcisi altında değişmezdir denir. Yine  $A$  karakter işlemcisi altında değişmez ve

$$\|M_w f\|_A = \|f\|_A$$

koşulu sağlanıyorsa  $A$  uzayına karakter işlemcisi altında kuvvetli olarak değişmezdir denir (Feichtinger and Gürkanlı, 1990).

**Tanım 2.1.18:**  $G$  bir yerel tıkHz Abel grubu ve  $h$ ,  $G$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her  $x \in G$  için  $|h(x)| = 1$  ve her  $x, y \in G$  için

$$h(x+y) = h(x)h(y)$$

koşulları sağlanıyorsa,  $h$  fonksiyonuna  $G$  grubunun bir karakteri denir.  $G$  grubunun bütün sürekli karakterlerinin kümesi  $\hat{G}$  ile gösterilir.  $\hat{G}$  kümesi üzerindeki toplama işlemini her  $x \in G$  ve  $h_1, h_2 \in \hat{G}$  için

$$(h_1 + h_2)(x) = h_1(x)h_2(x)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu işleme göre  $\hat{G}$  bir grup olup, buna  $G$  grubunun karakter grubu (ya da dual grubu) denir. Eğer  $G = \mathbb{R}^d$  alınırsa  $\hat{G} = \mathbb{R}^d$  olur (Rudin, 1960).

**Tanım 2.1.19:** Herhangi bir  $f \in L^1(\mathbb{R})$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü  $t \in \mathbb{R}$  ve  $\omega \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$  olmak üzere

$$Ff(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-it\omega) dt$$

şeklinde tanımlanır (Rudin, 1966).

**Tanım 2.1.20:** Bir  $\delta_\varepsilon$  fonksiyonu

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \quad (2.3)$$

olsun. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) dx$$

$$= 0 + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx + 0 = \frac{1}{2\varepsilon}(\varepsilon + \varepsilon) = 1$$
(2.4)

olup,  $\delta_{\varepsilon}$  fonksiyonunun  $\varepsilon \rightarrow 0$  için limiti  $\delta(x)$  ile gösterilir. Yani

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(x)$$
(2.5)

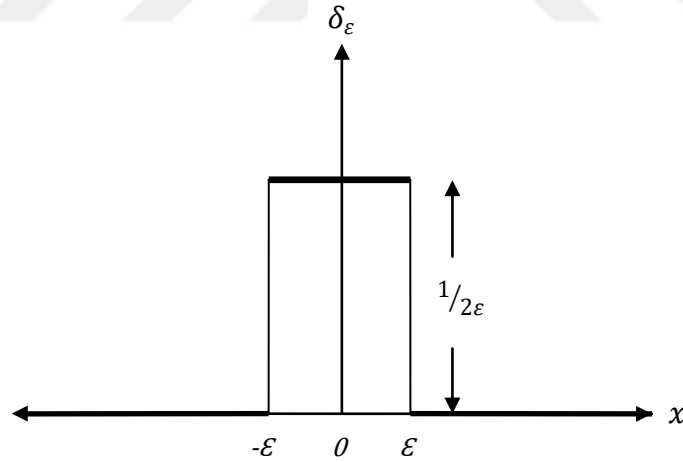
yazılır. Bu takdirde  $\delta$ , Dirac delta fonksiyonu olarak bilinir. (2.3), (2.4) ve (2.5) eşitlikleri kullanılarak Dirac delta fonksiyonu

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

olarak tanımlanır (Raisinghania, 2007).



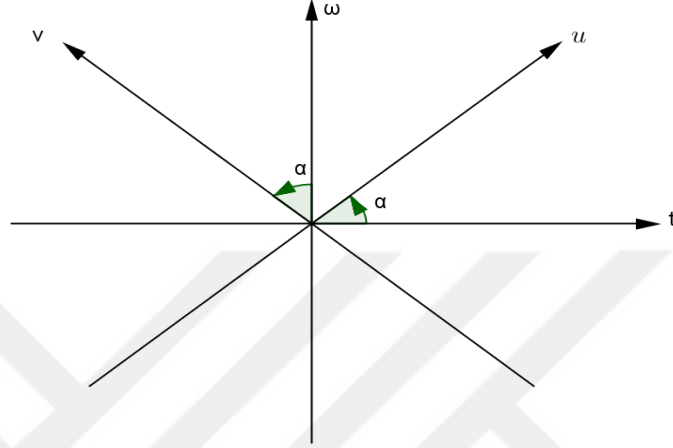
2.1. Dirac delta fonksiyonu

Zaman-frekans analizinde, zamana ve frekansa karşılık gelen iki dik eksenli bir düzlem kullanılır. Eğer  $f(t)$  fonksiyonunun zaman eksenini üzerinde, bunun Fourier dönüşümünün de frekans eksenini üzerinde temsil edildiği düşünülürse,  $F$  ile gösterilen Fourier işlemcisi, fonksiyonun, saat yönünün tersine  $\frac{\pi}{2}$  radyanlık eksen dönmesine karşılık gelen bir değişimi olarak görülebilir. Bu  $F$  işlemcisine tekrar

Fourier dönüşümü uygulanırsa;

$$FFf(t) = f(-t)$$

olur. Yani  $t$  ekseninin üst üste iki kez  $\frac{\pi}{2}$  radyan döndürülmesi,  $-t$  boyunca yönlendirilen bir eksen meydana getirir.



## 2.2. Zaman-frekans düzlemi

Bu durumda hangi doğrusal işlemcinin zaman eksenini herhangi bir  $\alpha$  açısı yaparak bir eksen döndürmesine karşılık geldiği sorusu akla gelebilir. Bir an için böyle bir işlemcinin var olduğunu kabul edelim ve bu işlemciyi  $R^\alpha$  ile gösterelim. Bu işlemci aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır:

- 1) Sıfır dönme:  $R^0 = I$
- 2) Fourier dönüşümü ile uygunluk:  $R^{\frac{\pi}{2}} = F$
- 3) Dönmelerin toplanabilirliği:  $R^\alpha R^\beta = R^{\alpha+\beta}$
- 4)  $2\pi$  dönme:  $R^{2\pi} = I$

Burada 4. özellik 2. ve 3. özelliklerin sonucudur. Gerçekten de

$$R^{2\pi} = R^{4\left(\frac{\pi}{2}\right)} = F^4 = I$$

yazılır.

Şimdi verilen bu özelliklere sahip olan kesirli Fourier dönüşümünün tanımını yapacağız. Bunun için önce  $K_\alpha$  ile gösterilen çekirdek fonksiyonunun tanımını ve

özelliklerini verelim.

**Tanım 2.1.21:**  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  üzerinde  $M = \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}}$  olmak üzere

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} M \exp\left(\frac{i}{2}(u^2 + t^2) \cot \alpha - iut \operatorname{cosec} \alpha\right), & \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(t-u), & \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(t+u), & \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona çekirdek fonksiyonu denir (Almeida, 1994).

$\alpha = \frac{a\pi}{2}$  olmak üzere çekirdek fonksiyonu

$$K_a(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2}(u^2 + t^2) \cot \alpha - iut \operatorname{cosec} \alpha\right), & a \notin 2\mathbb{Z} \\ \delta(t-u), & a \in 4\mathbb{Z} \\ \delta(t+u), & a \in 2+4\mathbb{Z} \end{cases}$$

biçiminde de yazılabilir (Bultheel and Martinez, 2002).

**Teorem 2.1.22:**  $K_a(u, t)$  çekirdek fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Bultheel and Martinez, 2002).

- 1)  $K_a(u, t) = K_a(t, u)$  (Simetri)
- 2)  $K_{-a}(u, t) = \overline{K_a(u, t)}$  (Kompleks eşlenik)
- 3)  $K_a(-u, t) = K_a(u, -t)$
- 4)  $\int_{-\infty}^{+\infty} K_a(u, t) K_b(t, x) dt = K_{a+b}(u, x)$  (Toplanabilirlik)
- 5)  $\int_{-\infty}^{+\infty} K_a(x, u) \overline{K_a(x, t)} dx = \delta(t-u)$

**Tanım 2.1.23:**  $f \in L^1(\mathbb{R})$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun kesirli Fourier

dönüşümü  $M = \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}}$  için

$$F_\alpha f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(u,t) f(t) dt$$

$$= \begin{cases} M \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp\left(\frac{i}{2}(u^2+t^2) \cot \alpha - iut \operatorname{cosec} \alpha\right) dt, & \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ f(u), & \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ f(-u), & \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Kesirli Fourier dönüşümü  $K_\alpha(u,t)$  çekirdeği tarafından üretilen bir integral işlemcisidir (Almeida, 1997).

$\alpha$  açısının farklı değerleri için  $F_\alpha f(u)$  kesirli Fourier dönüşümünü yazalım.

i)  $\alpha = 0$  ise  $F_0 f = f$  yazılır. Buradan  $F_0 = I$  olur.

ii)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  olsun. Bu durumda  $F_\alpha f = Ff$  olur. Böylece  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  olduğunda

kesirli Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümüne karşılık gelir.

iii)  $\alpha = \pi$  ise kesirli Fourier dönüşümünün tanımından  $F_\pi f(u) = f(-u)$  yazılır.

Ayrıca

$$F_\pi f(u) = f(-u) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t) \exp(-iut) dt = F(Ff(u)) = F^2 f(u)$$

olur.

iv)  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  ise

$$F_{\frac{3\pi}{2}} f(u) = Ff(-u)$$

olup

$$F_{\frac{3\pi}{2}} f(u) = Ff(-u) = F(F^2 f(u)) = F^3 f(u)$$

yazılır.

v) Eğer  $\alpha = 2\pi$  ise  $F_{2\pi} f(u) = f(u)$  olur. Buradan  $F_{2\pi} = I$  olup  $\alpha = 2\pi$  ise kesirli Fourier dönüşümü, birim dönüşüme karşılık gelir. Ayrıca

$$F_{2\pi} f(u) = f(u) = F^2 f(-u) = F(Ff(-u)) = F(F^3 f(u)) = F^4 f(u)$$

yazılır (Bultheel and Martinez, 2002).

Böylece  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\alpha = \frac{a\pi}{2}$  olduğunda kesirli Fourier dönüşümünü

$$M = \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha}{2\pi}} \text{ için}$$

$$F^a f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(u, t) f(t) dt = \begin{cases} M \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp\left(\frac{i}{2}(u^2 + t^2) \cot \alpha - iut \operatorname{cosec} \alpha\right) dt, & a \notin 2\mathbb{Z} \\ f(u), & a \in 4\mathbb{Z} \\ f(-u), & a \in 2 + 4\mathbb{Z} \end{cases}$$

biçiminde de yazabiliriz (Bultheel and Martinez, 2002).

**Teorem 2.1.24:**  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $F^a, F^b, F^c$  kesirli Fourier dönüşümü olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$1) F^a F^b = F^{a+b}$$

$$2) F^a F^b = F^b F^a$$

$$3) F^c (F^a F^b) = (F^c F^a) F^b$$

4)  $F^a$  kesirli Fourier dönüşümü doğrusaldır.

$$5) (F^a)^{-1}, F^a \text{ kesirli Fourier dönüşümünün tersi olmak üzere } (F^a)^{-1} = F^{-a}$$

eşitliği vardır (Bultheel and Martinez, 2002). Böylece  $F^a f \in L^1(\mathbb{R})$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu, ters kesirli Fourier dönüşümü kullanılarak

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^\alpha f(u) K_{-\alpha}(u, t) du$$

biçiminde yeniden elde edilebilir.

**Önerme 2.1.25:** Eğer  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ise her  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ve  $y, v \in \mathbb{R}$  için aşağıdaki özellikler doğrudur (Almeida, 1994).

$$i) F_\alpha(T_y f)(u) = F_\alpha f(u - y \cos \alpha) \exp\left(i \frac{y^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - iuy \sin \alpha\right)$$

$$ii) F_\alpha(M_v f)(u) = F_\alpha f(u - v \sin \alpha) \exp\left(-i \frac{v^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + iuv \cos \alpha\right).$$

**Tanım 2.1.26:**  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d), t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$K_\alpha(u, t) = K_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}(u_1, \dots, u_d; t_1, \dots, t_d) = K_{\alpha_1}(u_1, t_1) K_{\alpha_2}(u_2, t_2) \dots K_{\alpha_d}(u_d, t_d)$$

olmak üzere kesirli Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} (F_{\alpha_1, \dots, \alpha_d} f)(u_1, \dots, u_d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}(u_1, \dots, u_d; t_1, \dots, t_d) f(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(u, t) f(t) dt \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır (Bultheel and Martinez, 2002).

**Önerme 2.1.27:** Her  $f \in L^1(\mathbb{R})$  için  $F_\alpha f$  aşağıdaki özellikleri sağlar (Prasad et al., 2013).

$$i) F_\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ olup, } \|F_\alpha f\|_\infty \leq \left| \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha}{2\pi}} \right| \|f\|_1 \text{ eşitsizliği sağlanır.}$$

ii)  $F_\alpha f$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde süreklidir.

iii)  $u \rightarrow \pm\infty$  için  $F_\alpha f(u) \rightarrow 0$  olur.

**Tanım 2.1.28:** Herhangi iki  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonların girişimi  $f * g$  ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

biçiminde tanımlanır (Reiter and Stegeman, 2000; Zayed, 1998).

Yine

$$(f * g)^{\hat{}} = (\sqrt{2\pi})^d \hat{f} \hat{g} \quad (2.6)$$

olduğu bilinmektedir. Fakat bu eşitlik kesirli Fourier dönüşümü için sağlanmaz. Ancak, yeni bir girişim işlemi tanımlayarak, (2.6) eşitliğine benzer bir eşitlik kesirli Fourier dönüşümü için de elde edilebilir. Şimdi bu girişim işlemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 2.1.29:**  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere herhangi iki  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  fonksiyonu için girişim işlemi

$$(f \Theta g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) \exp(iy(y-x) \cot \alpha) dy$$

biçiminde tanımlanır (Singh and Saxena, 2012).

**Teorem 2.1.30**  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ve  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  olsun.  $F_\alpha f$  ve  $F_\alpha g$  de sırasıyla  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının kesirli Fourier dönüşümü olmak üzere

$$F_\alpha (f \Theta g)(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{1-i \cot \alpha}} \exp\left(-\frac{i}{2} u^2 \cot \alpha\right) F_\alpha f(u) F_\alpha g(u)$$

yazılır (Singh and Saxena, 2012).

**Tanım 2.1.31:**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olsun. Her  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\Theta$  girişim işlemi

$$(f \Theta g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j - x_j) \cot \alpha_j\right) dy$$

biçiminde tanımlanır (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

**Teorem 2.1.32:**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olsun. Her  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  için  $F_\alpha f$ ,  $F_\alpha g$  sırasıyla  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının kesirli Fourier dönüşümü olsunlar. Bu takdirde

$$F_\alpha(f \Theta g)(u) = \left[ \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2\pi}{1 - i \cot \alpha_j}} \right] \exp\left( \sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j \right) F_\alpha f(u) F_\alpha g(u)$$

eşitliği vardır (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

**Teorem 2.1.33:**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olsun.  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiridir (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

Şimdi bulgular bölümünün ilk kısmında kullanılan ve (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında tanımlanan  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayını ve bu uzayın temel özelliklerini ifade edelim.

**Tanım 2.1.34:**  $w$  ve  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu olsunlar.  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  kümesi

$$A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \mid F_\alpha f \in L_\omega^p(\mathbb{R}^d) \right\}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu küme bir vektör uzayı olup, üzerinde tanımlı

$$\|f\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \|f\|_{L_w^1} + \|F_\alpha f\|_{L_\omega^p}$$

normuyla bir Banach uzayıdır (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

**Önerme 2.1.35:**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olsun. Her  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $y \in \mathbb{R}^d$  için

$$F_\alpha(T_y f)(u) = \exp\left( \sum_{j=1}^d \left( \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j - i u_j y_j \sin \alpha_j \right) \right) F_\alpha f(u_1 - y_1 \cos \alpha_1, \dots, u_d - y_d \cos \alpha_d) \quad (2.7)$$

ve her  $z \in \mathbb{R}^d$  için

$$F_\alpha (M_z f)(u) = \exp \left( \sum_{j=1}^d \left( -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j + i u_j z_j \cos \alpha_j \right) \right) F_\alpha f(u_1 - z_1 \sin \alpha_1, \dots, u_d - z_d \sin \alpha_d) \quad (2.8)$$

eşitlikleri vardır (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

**Teorem 2.1.36:**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olsun.

i)  $1 \leq p < \infty$ ,  $w$  ve  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmezdir ve her  $y \in \mathbb{R}^d$  için

$$\|T_y f\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq w(y) \|f\|_{1,w} + \omega(y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d) \|F_\alpha f\|_{p,\omega} \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii)  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı sınırlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Her  $f \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $y \rightarrow T_y f$  fonksiyonu süreklidir (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

**Teorem 2.1.37:**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olsun.

i)  $1 \leq p < \infty$ ,  $w$  ve  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı karakter fonksiyonu altında değişmezdir ve her  $z \in \mathbb{R}^d$  için

$$\|M_z f\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq \|f\|_{1,w} + \omega(z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d) \|F_\alpha f\|_{p,\omega} \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii)  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı sınırlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Her  $f \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $z \rightarrow M_z f$  fonksiyonu süreklidir (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

**Yardımcı Teorem 2.1.38:**  $w_1, w_2$  ve  $\omega_1, \omega_2$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  ise  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayı

$\|f\| = \|f\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} + \|f\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}}$  normuna göre bir Banach uzayıdır (Toksoy and Sandıkçı,

2015).

**Önerme 2.1.39:**  $w_1, w_2$  ve  $\omega_1, \omega_2$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $w_2 \prec w_1$  ve  $\omega_2 \prec \omega_1$  ise  $A_{\alpha,p}^{w_1, \omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,p}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olur (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

Bulgular bölümünün birinci kısmında  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde tanımlanan tıkız ve tıkız olmayan işlemciler çalışıldı. Şimdi de tıkız işlemci tanımını ve ilgili teoremleri ifade edelim.

**Tanım 2.1.40:**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar,  $T$ ,  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlı doğrusal bir işlemci olsun.  $X$  uzayındaki sınırlı her  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $Y$  uzayında yakınsak bir alt diziye sahipse  $T$  işlemcisi tıkızdır denir (Rynne and Youngson, 2000).

**Tanım 2.1.41:**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar,  $T$ ,  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlı doğrusal bir işlemci olsun.  $T$  işlemcisinin tıkız olması için gerekli yeterli koşul;  $X$  uzayındaki sınırlı her  $A$  kümesi için  $\overline{T(A)}$  kümesinin  $Y$  kümesinde tıkız olmasıdır (Kreyszig, 1978).

**Teorem 2.1.42:**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar olmak üzere  $T$ ,  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlı tıkız işlemci olsun. O halde  $T$  sınırlıdır (Rynne and Youngson, 2000).

**Sonuç 2.1.43:**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar olsun. Yine  $B(X, Y)$  ve  $K(X, Y)$  kümelerini

$$B(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y, f \text{ doğrusal ve sınırlı}\}$$

ve

$$K(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y, f \text{ tıkız}\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda  $K(X, Y) \subset B(X, Y)$  olur (Rynne and Youngson, 2000).

**Tanım 2.1.44:**  $X \subseteq Y$  olmak üzere  $X$  ve  $Y$  birer Banach uzayı olsunlar.  $X$  uzayından  $Y$  uzayına her  $x \in X$  için  $j(x) = x$  biçiminde tanımlanan  $j$  işlemcisine gömülme işlemcisi denir. Ayrıca  $X \subseteq Y$  gömülmesinin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul  $j$  işlemcisinin sürekli olmasıdır. Yine  $X \subseteq Y$  gömülmesinin tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul  $j$  işlemcisinin tıkız olmasıdır (Siddiqi, 2003).

Son olarak da bulgular bölümünün  $S_w^\alpha$  uzayının bazı özellikleri ve  $S_w^\alpha$  uzayının çarpanlar uzayı bölümlerinde kullanılan tanım ve teoremleri verelim:

2.1.8. Tanımdan anlaşılacağı gibi birim elemana sahip olmayan normlu cebirler vardır. Bu çalışmada, birim elemanı olmayan ancak yaklaşık birimi var olan Banach cebirleri ele alınacaktır. Şimdi yaklaşık birim tanımını verelim.

**Tanım 2.1.45:**  $(A, \|\cdot\|)$  normlu cebirinde bir  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağı verilsin. Eğer her  $x \in A$  için  $\lim_{\alpha \in I} e_\alpha x = x$  koşulu sağlanıyorsa  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağı  $A$  normlu cebiri için sol yaklaşık birimdir, yine her  $x \in A$  için  $\lim_{\alpha \in I} x e_\alpha = x$  oluyorsa  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağına  $A$  normlu cebiri için sağ yaklaşık birimdir denir. Eğer her iki özellik birden sağlanıyorsa  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağına  $A$  normlu cebirinin yaklaşık birimi denir. Ayrıca her  $\alpha \in I$  için  $\|e_\alpha\| \leq M$  olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı varsa  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağına  $A$  normlu cebirinin sınırlı yaklaşık birimi denir (Doran and Wichman, 1979).

**Önerme 2.1.46:** Bir  $(A, \|\cdot\|)$  normlu cebirinin yaklaşık birime sahip olması için gerekli ve yeterli koşul  $A$  normlu cebirindeki her  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sonlu kümesi ve her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $i = 1, \dots, n$  olmak üzere

$$\|x_i - e x_i\| < \varepsilon$$

ve

$$\|x_i - x_i e\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $e \in A$  elemanının bulunmasıdır (Doran and Wichman, 1979).

**Tanım 2.1.47:**  $A$ ,  $K$  cismi üzerinde bir cebir ve  $I \subset A$  olsun. Eğer  $I$  kümesi  $A$  uzayının bir alt vektör uzayı ve her  $x, y \in I$  için  $xy \in I$  oluyorsa  $I$  kümesine  $A$  cebirinin bir alt cebiridir denir (Larsen, 1973).

**Tanım 2.1.48:**  $A$  bir cebir olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $xI \subseteq I$  ( $Ix \subseteq I$ ) olacak şekilde bir  $I$  alt vektör uzayı varsa bu uzaya  $A$  cebirinin bir sol (sağ) ideali denir. Eğer  $I$  uzayı hem sol hem de sağ ideal ise  $I$  uzayına  $A$  cebirinin bir ideali denir. Ayrıca  $I \subseteq A$  ideali  $I \neq A$  koşulunu sağlıyorsa  $I$  idealine  $A$  cebirinin bir öz ideali denir (Larsen, 1973).

**Tanım 2.1.49:**  $A$  ve  $B$ ,  $K$  cismi üzerinde birer Banach cebiri olmak üzere  $B \subset A$  olsun. Eğer her  $f \in B$  ve her  $g \in A$  için  $fg \in B$ ,  $\|f\|_A \leq \|f\|_B$  ve  $\|fg\|_B \leq \|f\|_B \|g\|_A$  koşulları sağlanıyorsa  $B$  cebirine  $A$  cebirinin Banach ideali denir (Feichtinger et al., 1979).

**Tanım 2.1.50:** Aşağıdaki koşulları sağlayan  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir  $N$  idealine normlu ideal denir (Cigler, 1969).

i)  $N$  kümesi  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yoğundur.

ii)  $N$  uzayı her  $f \in N$  için  $\|f\|_1 \leq \|f\|_N$  olacak şekilde  $\|\cdot\|_N$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

iii) Her  $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $f \in N$  için  $\|h * f\|_N \leq \|h\|_1 \|f\|_N$  eşitsizliği sağlanır.

En önemli normlu idealler Segal cebirleridir.

**Tanım 2.1.51:** Aşağıdaki koşulları sağlayan  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $S(\mathbb{R}^d)$  alt cebirine Segal cebiri denir (Cigler, 1969).

i)  $S(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yoğundur.

ii)  $S(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\|\cdot\|_s$  normuna göre bir Banach cebiridir ve herhangi bir  $f \in S(\mathbb{R}^d)$  için  $\|f\|_1 \leq \|f\|_s$  eşitsizliği sağlanır.

iii)  $S(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmezdir. Ayrıca herhangi bir  $f \in S(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $y \rightarrow T_y f$  fonksiyonu süreklidir.

iv) Herhangi bir  $f \in S(\mathbb{R}^d)$  ve her  $y \in \mathbb{R}^d$  için  $\|T_y f\|_s = \|f\|_s$  olur. Yani  $S(\mathbb{R}^d)$  ötelemeler altında kuvvetli olarak değişmezdir.

**Tanım 2.1.52:**  $w, \mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiridir. Bu cebire ağırlıklı Segal cebiri denir (Cigler, 1969).

i)  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yoğundur.

ii)  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\|\cdot\|_{S_w}$  normuna göre bir Banach cebiridir ve herhangi bir  $f \in S_w(\mathbb{R}^d)$  için  $\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{S_w}$  eşitsizliği sağlanır.

iii)  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmezdir. Ayrıca herhangi bir  $f \in S_w(\mathbb{R}^d)$  ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $y \in U$  için  $\|T_y f - f\|_{S_w} < \varepsilon$  olacak şekilde sıfırın bir  $U$  komşuluğu vardır.

iv) Herhangi bir  $f \in S_w(\mathbb{R}^d)$  ve her  $y \in \mathbb{R}^d$  için  $\|T_y f\|_{S_w} \leq w(y) \|f\|_{S_w}$  eşitsizliği sağlanır.

**Önerme 2.1.53:**  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir katı uzay olsun.

i)  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmezdir.

ii) Eğer  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun ise  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $z \rightarrow M_z f$  fonksiyonu süreklidir (Doğan and Gürkanlı, 2000).

**Tanım 2.1.54:**  $(A, \|\cdot\|_A)$  bir Banach cebiri olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan  $B$  cebirine,  $(A, \|\cdot\|_A)$  Banach cebirine göre bir soyut Segal cebiri denir (Burnham, 1972).

i)  $B, A$  cebirinde her yerde yoğun bir idealdir.

ii)  $(B, \|\cdot\|_B)$  bir Banach cebiridir.

iii) Her  $g \in B$  için  $\|g\|_A \leq M \|g\|_B$  olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı vardır.

iv) Her  $g, h \in B$  için  $\|gh\|_B \leq C \|g\|_A \|h\|_B$  olacak şekilde bir  $C > 0$  sayısı vardır.

**Tanım 2.1.55:**  $A$  bir değişmeli Banach cebiri olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $xA = \{0\}$  olduğunda  $x = 0$  oluyorsa,  $A$  cebirine without order (sıra değiştirmek) Banach cebiri denir (Larsen, 1971).

Eğer bir Banach cebiri yaklaşık birime sahipse bu cebir sıra değiştirmek Banach cebiridir.

**Tanım 2.1.56 :**  $A$  bir Banach cebiri olsun. Eğer  $A$  cebirinden  $A$  cebirine tanımlı bir  $T$  dönüşümü her  $x, y \in A$  için

$$x(Ty) = (Tx)y$$

eşitliğini sağlıyorsa, bu  $T$  dönüşümüne  $A$  cebirinin çarpanı (multiplier) denir ve  $A$  cebirinin çarpanlarının kümesi  $M(A)$  ile gösterilir.

Eğer  $A$  Banach cebiri sıra değiştirmek cebir ise herhangi bir  $T \in M(A)$  ve her  $x, y \in A$  için

$$T(xy) = x(Ty) = (Tx)y$$

eşitliği sağlanır ve  $T$  dönüşümü doğrusal ve sınırlı bir dönüşüm olur (Larsen, 1971).

## 2.2. Literatür Özeti

Bu çalışmada kullanılan temel bir araç olan kesirli Fourier dönüşümü ile ilgili literatürde yer alan araştırmalardan bazıları aşağıda verilmektedir.

1929 yılında Wiener tarafından Fourier dönüşümünün kesirli kuvvetleri ilk defa araştırılmıştır. Bu araştırmada elde edilen işlemciye Fourier dönüşümünün bir genelleştirmesi olarak bakılmıştır (Wiener, 1929).

1937 yılında Condon tarafından kesirli Fourier dönüşümü faz-uzay sisteminde dönmeler olarak ele alınarak bu dönüşümün çekirdeği araştırılmıştır (Condon, 1937).

1980 yılında Namias tarafından Fourier dönüşümü bir  $\alpha$  parametresiyle genelleştirilerek kesirli Fourier dönüşümü tanımlanmıştır. Bu çalışmada kesirli Fourier dönüşümü kuantum mekaniğinden doğan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde bir araç olarak kullanılmıştır (Namias, 1980).

1987 yılında McBride ve Kerr tarafından Namias'ın çalışmasından yararlanılarak kesirli Fourier dönüşümü Schwartz uzayında tanımlanmış ve dönüşümün özellikleri araştırılmıştır (McBride and Kerr, 1987).

1994 yılında Almeida tarafından kesirli Fourier dönüşümü zaman-frekans düzleminde  $\alpha$  açısıyla dönmeler olarak ele alınarak özellikleri incelenmiştir (Almeida, 1994).

1994 yılında Karasik tarafından  $\mathbb{R}^d$  kümesinde kesirli Fourier dönüşümünün çekirdeği,  $\mathbb{R}$  kümesi için bilinen çekirdek fonksiyonlarının çarpımı olarak tanımlanmıştır (Karasik, 1994).

1996 yılında Zayed tarafından kesirli Fourier dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasında bir ilişki kurularak kesirli Fourier dönüşümünün tersi tanımlanmıştır (Zayed, 1996).

1997 yılında Almeida tarafından kesirli Fourier dönüşümü için yeni bir girişim işlemi tanımlanmıştır. Bu tanımda, verilen iki fonksiyonun girişiminin kesirli Fourier dönüşümü bu fonksiyonların kesirli Fourier dönüşümlerinin çarpımı olarak yazılamamaktadır (Almeida, 1997).

1998 yılında Zayed tarafından kesirli Fourier dönüşümü için yeni bir girişim işlemi tanımlanmıştır. Bu tanımda, verilen iki fonksiyonun girişiminin kesirli Fourier dönüşümü bu fonksiyonların kesirli Fourier dönüşümlerinin çarpımı olarak yazılabilmektedir (Zayed, 1998).

2001 yılında Ozaktas, Zalevsky ve Kutay tarafından kesirli Fourier dönüşümünün tanımını ve özelliklerini veren bu dönüşümün optikte ve sinyal işlemede var olan uygulamalarını detaylı olarak anlatan bir kitap yazılmıştır (Ozaktas et al., 2001).

2002 yılında Bultheel ve Martinez tarafından kesirli Fourier dönüşümüyle ilgili o zamana kadar yapılan araştırmalardan elde edilen bulguların belli bir düzen içinde ifade edildiği bir çalışma yapılmıştır (Bultheel and Martinez, 2002).

2012 yılında Singh ve Saxena tarafından kesirli Fourier dönüşümü için yeni bir girişim işlemi tanımlanmıştır. Bu tanımda, verilen iki fonksiyonun girişiminin kesirli Fourier dönüşümü bu fonksiyonların kesirli Fourier dönüşümlerinin çarpımı olarak

yazılabilmektedir. Yine bu girişim işleminde verilen  $\alpha$  parametresi  $\frac{\pi}{2}$  alındığında bilinen \* girişim işlemi elde edilmektedir (Singh and Saxena, 2012).

2013 yılında Prasad, Manna, Mahato ve Singh tarafından kesirli Fourier dönüşümünün sonsuzda sıfır ve sürekli bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir (Prasad et al., 2013).

2015 yılında Toksoy ve Sandıkçı tarafından 2012 yılında Singh ve Saxena tarafından verilen girişim işlemi  $\mathbb{R}^d$  kümesinde yeniden tanımlanmıştır (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

2020 yılında Kamalakkannan ve Roopkumar tarafından  $L^1(\mathbb{R}^d)$  kümesinde tanımlı bir fonksiyonun kesirli Fourier dönüşümünün  $C_0(\mathbb{R}^d)$  uzayında olduğu gösterilerek  $\mathbb{R}^d$  kümesinde kesirli Fourier dönüşümünün tersi ve Parseval özdeşliği ifade edilmiştir (Kamalakkannan and Roopkumar, 2020).

Bu çalışmada kullanılan uzaylarla ilişkili olan literatürdeki araştırmalardan bazıları aşağıda verilmektedir.

1932 yılında Wiener tarafından Segal cebirlerinin ilk tanımı yapılmıştır. Bu çalışmada Segal cebirleri için verilen ilk örnek yer almaktadır (Wiener, 1932).

1947 yılında Segal tarafından Wiener'in cebirindeki bir cebirsel yapı fark edilerek çalışmasındaki Teorem 3.1 de ifade edilmiştir (Segal, 1947).

1964 yılında Larsen, Lui ve Wang tarafından  $G$  yerel tıkHz Abel grup ve  $\hat{G}$  bu grubun karakter grubu olmak üzere Fourier dönüşümü  $L^p(\hat{G})$  uzayında olan  $L^1(G)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_p(G)$  uzayı tanımlanarak bu uzayın bazı özellikleri araştırılmıştır (Larsen et al., 1964).

1965 yılında Reiter tarafından Segal'in 1947 yılındaki çalışmasında ifade ettiği aksiyomlarının gerçek önemi fark edilmiş ve bu aksiyomların yerel tıkHz Abel gruplarla olan ilişkisi ifade edilmiştir (Reiter, 1965).

1969 yılında Cigler tarafından Segal cebirlerinin bir genelleştirmesi olan normlu ideallerin tanımı yapılmıştır. Ayrıca Cigler bu çalışmada  $G$  yerel tıkHz Abel grup ve  $w$  Beurling ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^1(G)$  uzayının bir alt cebiri

olan  $S_w(G)$  ağırlıklı Segal cebirini tanımlamıştır (Cigler, 1969).

1969 yılında Lai tarafından  $A_p(G)$  uzayının Fourier dönüşümü tıkHz destekli yaklaşık birimlerinin varlığı gösterilerek bu uzayın bazı özellikleri araştırılmıştır (Lai, 1969).

1971 yılında Reiter tarafından Segal cebirlerinin özelliklerini detaylı bir şekilde inceleyen bir kitap yazılmıştır (Reiter, 1971).

1972 yılında Burnham tarafından Segal cebirinin bir genelleştirmesi olan soyut Segal cebiri tanımı yapılarak bu cebirin özellikleri araştırılmıştır (Burnham, 1972).

1990 yılında Feichtinger ve Gürkanlı tarafından  $G$  yerel tıkHz Abel grup ve  $\hat{G}$  bu grubun karakter grubu olmak üzere Fourier dönüşümü  $L_w^p(\hat{G})$  uzayında olan  $L_w^1(G)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_{w,\omega}^p(G)$  uzayı tanımlanarak bu uzayın özellikleri incelenmiştir (Feichtinger and Gürkanlı, 1990).

1996 yılında Fischer, Gürkanlı ve Liu tarafından  $G$  yerel tıkHz Abel grup ve  $\hat{G}$  bu grubun karakter grubu olmak üzere Fourier dönüşümü  $L_w^q(\hat{G})$  uzayında olan  $L_w^p(G)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_{w,\omega}^{p,q}(G)$  uzayı tanımlanarak bu uzayın özellikleri araştırılmıştır (Fischer et al., 1996).

2000 yılında Doğan ve Gürkanlı tarafından  $G$  yerel tıkHz Abel grup ve  $\hat{G}$  bu grubun karakter grubu olmak üzere Fourier dönüşümü  $S_w(\hat{G})$  uzayında olan  $L_w^1(G)$  uzayındaki fonksiyonların  $S_{w,\omega}(G)$  uzayı tanımlanarak bu uzayın özellikleri incelenmiştir (Doğan and Gürkanlı, 2000).

2008 yılında Gürkanlı tarafından  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz gömülmeleri araştırılmıştır (Gürkanlı, 2008).

2015 yılında Toksoy ve Sandıkçı tarafından kesirli Fourier dönüşümü  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayında olan  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki fonksiyonların  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı tanımlanarak bu uzayın bazı özellikleri incelenmiştir (Toksoy and Sandıkçı, 2015).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında Fourier dönüşümü, kesirli Fourier dönüşümü,  $\Theta$  girişim işlemi, öteleme ve karakter işlemcileri, tıkız ve tıkız olmayan işlemciler,  $C_c(\mathbb{R}^d)$  ve  $C_0(\mathbb{R}^d)$  uzayları, katı (solid) uzaylar, ağırlıklı Lebesgue uzayları, Segal cebirleri, ağırlıklı Segal cebirleri, soyut Segal cebirleri ve sıra değiştiremez Banach cebirleri materyal olarak kullanıldı. Bu kavramların tanımları ve özellikleri ikinci bölümde yer alan temel kavramlar başlığı altında detaylı bir şekilde verildi.

Bu çalışmada öncelikle (Gürkanlı, 2008) çalışmasındaki  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayında tıkız gömülmeler incelenirken kullanılan yöntemler kullanıldı. Bir fonksiyonun ötelemesinin Fourier dönüşümüyle kesirli Fourier dönüşümü arasında istenen benzerlik sağlanmadığından ispatlar yapılırken herhangi bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  verildiğinde her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_b g$  işlemcisinden yararlanıldı.

Bulgular kısmının ikinci bölümünde ifade edilen  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının özellikleri incelenirken (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasındaki yöntemler kullanıldı. Bu bölümde çalışılan uzaylar üzerinde çarpma işlemi olarak (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında  $\mathbb{R}^d$  kümesine genelleştirilerek yeniden tanımlanan  $\Theta$  girişim işlemi kullanıldı.  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının çarpanlar uzayı bölümünde (Larsen, 1971) ve (Bourouhiya, 2006) çalışmasındaki yöntemler kullanıldı. Yine çarpanlar uzayı bölümünde yer alan örnekler oluşturulurken (Reiter ve Stegeman, 2000) çalışmasında Fourier dönüşümü için verilen 1.1.8. Örnek, 1.1.11. Örnek ve 1.1.12. Örnek kullanıldı.

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe, kesirli Fourier dönüşümde yer alan  $\alpha$  parametresi  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  ve  $i = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_i \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olarak alınacaktır.

### 4.1. $A_{\alpha,p}^{w,\omega}$ Uzayında Tıkız Gömülmeler

Öncelikle  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzaylarının kapsama özelliklerini ve bu uzaylardaki tıkız olmayan gömülmeleri göstermede bir araç olarak kullanacağımız aşağıdaki temel bulguları verelim.

**Önerme 4.1.1:** Herhangi bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  olsun. Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere

$$\|T_y M_b g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq w(y) \|g\|_{1,w} + \|F_\alpha g\|_{p,\omega} \quad (4.1)$$

eşsizliği sağlanır ve böylece  $T_y M_b g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  olur.

**İspat:** Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun. Herhangi bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  verilsin. Buradan  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha g \in L_\omega^p(\mathbb{R}^d)$  olur. Böylece

$$\begin{aligned} \|T_y M_b g\|_{1,w} &= \int_{\mathbb{R}^d} |M_b g(x-y)| w(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| |\exp(i(x-y)b)| w(x) dx = \|T_y g\|_{1,w} \end{aligned}$$

yazılır. Yine

$$\|T_y g\|_{1,w} \leq w(y) \|g\|_{1,w}$$

eşsizliğinin sağlandığı (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. Buradan

$$\|T_y M_b g\|_{1,w} = \|T_y g\|_{1,w} \leq w(y) \|g\|_{1,w} \quad (4.2)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha(T_y M_b g)\|_{p,\omega}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |F_\alpha(T_y M_b g)(u)|^p \omega^p(u) dx \\
&= \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right|^p \\
&\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (T_y M_b g)(t) \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2}(u_j^2 + t_j^2) \cot \alpha_j - i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dt \right|^p \\
&\quad \omega^p(u) du \\
&= \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right|^p \\
&\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(t-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d i(t_j - y_j) b_j\right) \right. \\
&\quad \left. \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2}(u_j^2 + t_j^2) \cot \alpha_j - i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dt \right|^p \omega^p(u) du
\end{aligned}$$

olup, eğer  $t - y = l$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha(T_y M_b g)\|_{p,\omega}^p &= \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right|^p \\
&\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(l) \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2}(u_j^2 + (l_j + y_j)^2) \cot \alpha_j \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i u_j (l_j + y_j) \operatorname{cosec} \alpha_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d -i l_j y_j \cot \alpha_j\right) dl \right|^p \omega^p(u) du \\
&= \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right|^p \int_{\mathbb{R}^d} \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j - i u_j y_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) \right|^p \quad (4.3) \\
&\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(l) \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2}(u_j^2 + l_j^2) \cot \alpha_j - i u_j l_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dl \right|^p \\
&\quad \omega^p(u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |F_\alpha g(u)|^p \omega^p(u) du \\
&= \|F_\alpha g\|_{p,\omega}^p
\end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde (4.2) ve (4.3) ifadelerinden (4.1) eşitsizliği elde edilir. Böylece

$T_y M_b g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  olur.

**Önerme 4.1.2:** Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için sırasıyla  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  ve  $a = (z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  olsun. Her  $0 \neq g \in A_{\alpha, p}^{w, \omega}(\mathbb{R}^d)$  için

$$c(g)w(y) \leq \|T_y M_b g\|_{A_{\alpha, p}^{w, \omega}} \leq w(y) \|g\|_{A_{\alpha, p}^{w, \omega}} \quad (4.4)$$

ve

$$c(F_\alpha g)\omega(a) \leq \|M_z g\|_{A_{\alpha, p}^{w, \omega}} \leq \omega(a) \|g\|_{A_{\alpha, p}^{w, \omega}} \quad (4.5)$$

olacak şekilde  $c(g), c(F_\alpha g) > 0$  sayıları vardır.

**İspat:** Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için sırasıyla  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  ve  $a = (z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  olsun. Her  $0 \neq g \in A_{\alpha, p}^{w, \omega}(\mathbb{R}^d)$  için  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha g \in L_\omega^p(\mathbb{R}^d)$  olur. Yine

$$c(g)w(y) \leq \|T_y g\|_{1, w} \leq w(y) \|g\|_{1, w} \quad (4.6)$$

eşitsizliğini sağlayan  $c(g) > 0$  sayısının varlığı (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. Böylece (4.2), (4.3) ve (4.6) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} c(g)w(y) &\leq \|T_y g\|_{1, w} \leq \|T_y M_b g\|_{1, w} + \|F_\alpha(T_y M_b g)\|_{p, \omega} \\ &\leq w(y) \|g\|_{1, w} + \|F_\alpha g\|_{p, \omega} \\ &\leq w(y) \|g\|_{1, w} + w(y) \|F_\alpha g\|_{p, \omega} = w(y) \|g\|_{A_{\alpha, p}^{w, \omega}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.4) eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca (2.8) eşitliğinde  $a = (z_1 \sin \alpha_1, z_2 \sin \alpha_2, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  alınırsa

$$\|F_\alpha(M_z g)\|_{p, \omega} = \|T_a(F_\alpha g)\|_{p, \omega} \quad (4.7)$$

yazılır. Yine

$$c(F_\alpha g)\omega(a) \leq \|T_a(F_\alpha g)\|_{p, \omega} \leq \omega(a) \|F_\alpha g\|_{p, \omega} \quad (4.8)$$

eşitsizliğini sağlayan  $c(F_\alpha g) > 0$  sayısının varlığı (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. Buradan  $\|M_z g\|_{1, w} = \|g\|_{1, w}$  eşitliği ve (4.7), (4.8) ifadeleri

kullanılırsa

$$\begin{aligned} c(F_\alpha g)\omega(a) &\leq \|T_a(F_\alpha g)\|_{p,\omega} \leq \|M_z g\|_{1,w} + \|F_\alpha(M_z g)\|_{p,\omega} \\ &\leq \omega(a)\|g\|_{1,w} + \omega(a)\|F_\alpha g\|_{p,\omega} = \omega(a)\|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.5) eşitsizliği sağlanır.

**Yardımcı Teorem 4.1.3:**  $w, \omega$  ve  $v$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  ise  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\|g\| = \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} + \|g\|_{1,v}$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

*İspat:*  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Böylece her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|g_n - g_m\| = \|g_n - g_m\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} + \|g_n - g_m\|_{1,v} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Buradan her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|g_n - g_m\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq \|g_n - g_m\| < \varepsilon$$

ve

$$\|g_n - g_m\|_{1,v} \leq \|g_n - g_m\| < \varepsilon$$

olduğundan  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $(A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}})$  ve  $(L_v^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,v})$  uzaylarında Cauchy dizisi olur.  $(A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}})$  ve  $(L_v^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,v})$  uzayları birer Banach uzayı olduklarından  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $(A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}})$  uzayında bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  elemanına,  $(L_v^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,v})$  uzayında bir  $h \in L_v^1(\mathbb{R}^d)$  elemanına yakınsar. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n \geq n_1$  için

$$\|g_n - g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|g_n - h\|_{1,v} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.10)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,w} \leq \|\cdot\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}$  ve  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,v}$  eşitsizlikleri kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n \geq n_1$  için

$$\|g_n - g\|_1 \leq \|g_n - g\|_{1,w} \leq \|g_n - g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.11)$$

ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|g_n - h\|_1 \leq \|g_n - h\|_{1,v} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.12)$$

olur. Eğer  $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$  alınır, (4.11) ve (4.12) eşitsizlikleri kullanılarak, aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için

$$\|g - h\|_1 = \|g - g_n + g_n - h\|_1 \leq \|g - g_n\|_1 + \|g_n - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılır. O halde  $g = h$  h.h.h. bulunur. Buradan (4.9) ve (4.10) eşitsizlikleri kullanılarak aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_1 &= \|g_n - g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} + \|g_n - h\|_{1,v} \\ &= \|g_n - g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} + \|g_n - h\|_{1,v} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde  $(A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$  bir Banach uzayıdır.

**Teorem 4.1.4:**  $w, \omega$  ve  $v$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  olması için gerekli ve yeterli koşul  $v \prec w$  olmasıdır.

*İspat:* İlk olarak  $v \prec w$  olduğunu kabul edelim. Böylece her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $v(x) \leq c_1 w(x)$  olacak şekilde bir  $c_1 > 0$  sayısı vardır. Herhangi bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  alalım. O halde  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha g \in L_\omega^p(\mathbb{R}^d)$  olur. Buradan

$$\|gv\|_1 \leq c_1 \|gw\|_1$$

olup

$$\|g\|_{1,v} \leq c_1 \|g\|_{1,w}$$

yazılır. Böylece

$$\|g\|_{1,v} \leq c_1 \|g\|_{1,w} + c_1 \|F_\alpha g\|_{p,\omega} = c_1 \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} < \infty$$

olduğundan  $g \in L_v^1(\mathbb{R}^d)$  bulunur. O halde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  kapsamaları sağlanır.

Tersine  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  olduğunu kabul edelim. Böylece herhangi bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  için  $g \in L_v^1(\mathbb{R}^d)$  olur. Yine her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun. O halde Önerme 4.1.2 den

$$c_2 w(y) \leq \|T_y M_b g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq c_3 w(y) \quad (4.13)$$

olacak şekilde  $c_2, c_3 > 0$  sayıları vardır. Yine (Feichtinger and Gürkanlı, 1990) çalışmasındaki Lemma 2.2 ve (4.2) ifadesinden

$$c_4 v(y) \leq \|T_y M_b g\|_{1,v} = \|T_y g\|_{1,v} \leq c_5 v(y) \quad (4.14)$$

olacak şekilde  $c_4, c_5 > 0$  sayıları vardır. Ayrıca  $(A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$  uzayının Banach uzayı olduğu olduğu Yardımcı Teorem 4.1.3 de gösterildi. Böylece kapalı grafik teoreminden her  $g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|g\|_{1,v} \leq c_6 \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}$$

olacak şekilde  $c_6 > 0$  sayısı vardır. Yine  $T_y M_b g \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  olduğundan

$$\|T_y M_b g\|_{1,v} \leq c_6 \|T_y M_b g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \quad (4.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan (4.13), (4.14) ve (4.15) eşitsizlikleri kullanılarak

$$c_4 v(y) \leq \|T_y g\|_{1,v} = \|T_y M_b g\|_{1,v} \leq c_6 \|T_y M_b g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq c_6 c_3 w(y)$$

yazılır. Eğer  $c = \frac{c_6 c_3}{c_4}$  denirse her  $y \in \mathbb{R}^d$  için

$$v(y) \leq cw(y)$$

olup  $v \prec w$  elde edilir.

**Teorem 4.1.5:**  $w_1, w_2$  ve  $\omega_1, \omega_2$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olması için gerekli ve yeterli koşul  $w_2 \prec w_1$  ve  $\omega_2 \prec \omega_1$  olmasıdır.

*İspat:* İlk olarak  $w_2 \prec w_1$  ve  $\omega_2 \prec \omega_1$  olduğunu kabul edelim. O halde 2.1.39. Önermeden  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olur.

Şimdi tersine  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olduğunu kabul edelim. Buradan herhangi bir  $g \in A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  için  $g \in A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olur. Böylece Önerme 4.1.2 den her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere

$$c_1 w_1(y) \leq \|T_y M_b g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} \leq c_2 w_1(y) \quad (4.16)$$

olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları ve

$$c_3 w_2(y) \leq \|T_y M_b g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_4 w_2(y) \quad (4.17)$$

olacak şekilde  $c_3, c_4 > 0$  sayıları vardır. Ayrıca  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının her  $g \in A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|g\| = \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} + \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \quad (4.18)$$

normuyla Banach uzayı olduğu 2.1.38. Yardımcı Teoremden biliniyor. Böylece kapalı grafik teoreminden

$$\|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_5 \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}}$$

olacak şekilde  $c_5 > 0$  sayısı vardır. Benzer şekilde  $T_y M_b g \in A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  olup Teorem 4.1.4 de verilen ispattaki metot kullanılırsa  $w_2 \prec w_1$  elde edilir. Yine Önerme 4.1.2 den her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $a = (z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  olmak üzere

$$c_6 \omega_1(a) \leq \|M_z g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} \leq c_7 \omega_1(a) \quad (4.19)$$

olacak şekilde  $c_6, c_7 > 0$  sayıları ve

$$c_8 \omega_2(a) \leq \|M_z g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_9 \omega_2(a) \quad (4.20)$$

olacak şekilde  $c_8, c_9 > 0$  sayıları vardır. Ayrıca  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının her  $g \in A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  için (4.18) normuyla bir Banach uzayı olduğu 2.1.38. Yardımcı Teoremden biliniyor. Böylece kapalı grafik teoreminden

$$\|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_{10} \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}}$$

olacak şekilde  $c_{10} > 0$  sayısı vardır. Yine  $M_z g \in A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  olduğundan

$$\|M_z g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_{10} \|M_z g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} \quad (4.21)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde (4.19), (4.20) ve (4.21) eşitsizlikleri kullanılarak

$$c_8 \omega_2(a) \leq \|M_z g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_{10} \|M_z g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} \leq c_{10} c_7 \omega_1(a)$$

yazılır. Eğer  $c = \frac{c_{10} c_7}{c_8}$  denirse her  $a \in \mathbb{R}^d$  için

$$\omega_2(a) \leq c \omega_1(a)$$

olup  $\omega_2 \prec \omega_1$  elde edilir.

**Önerme 4.1.6:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki herhangi bir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sifıra yakınsıyorsa her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) k(x) dx \rightarrow 0$$

olur.

**İspat:**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sifıra yakınsayan bir dizi olsun. Her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) k(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)| |k(x)| dx \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)| dx \\
&= \|k\|_{\infty} \|f_n\|_1 \\
&\leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_{1,w} \\
&\leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca  $n \rightarrow \infty$  için  $\|f_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \rightarrow 0$  olduğundan

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) k(x) dx \right| \rightarrow 0$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.7:**  $w, \omega$  ve  $v$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $v \prec w$  ve  $\omega$  fonksiyonu sınırlı ise  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

*İspat:*  $v \prec w$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $v(x) \leq c_1 w(x)$  olacak şekilde bir  $c_1 > 0$  sayısı vardır. Böylece  $L_w^1(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  kapsamaları sağlanır. Yine  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Ayrıca  $I, A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan birim dönüşüm olmak üzere her  $f \in A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|I(f)\|_{1,v} = \|f\|_{1,v} \leq c_1 \|f\|_{1,w} \leq c_1 \|f\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}$$

olup  $I$  dönüşümü süreklidir.

Şimdi  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini ve bir  $g \in C_c(\mathbb{R}^d) \cap A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim.  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesinin tıkHz olmadığını göstermek için bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = M_{t_n} g$  biçiminde tanımlayalım. Hipotez gereği  $\omega$  fonksiyonu sınırlı olup, her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\omega(x) \leq c_2$  olacak şekilde bir  $c_2 \geq 1$  sayısı vardır. Böylece

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \|M_{t_n} g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq \|g\|_{1,w} + c_2 \|F_\alpha g\|_{p,\omega} \leq c_2 \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \quad (4.22)$$

olur. O halde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır.

Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmadığını gösterelim. Herhangi bir  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) k(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |M_{t_n} g(x)| |k(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |M_{t_n} g(x)| dx \\ &= \|k\|_\infty \|g\|_1 \\ &= \|k\|_\infty \|T_{t_n} g\|_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

yazılır.  $g \in C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{t_n} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x - t_n) = 0 \quad (4.24)$$

bulunur. O halde (4.24) ifadesinden her  $n \geq N$  için

$$\text{supp } g(x - t_n) = \overline{\{x - t_n \in \mathbb{R}^d \mid g(x - t_n) \neq 0\}} = \emptyset$$

olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Diğer yandan  $j = 1, 2, \dots, N-1$  olmak üzere  $\text{supp } f(x - t_j) = K_j$  denirse her  $j = 1, 2, \dots, N-1$  için  $K_j$  kümeleri tıkız olur. Eğer  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{N-1}$  alınırsa (4.23) eşitsizliğinden

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) k(x) dx \right| \leq \|k\|_\infty \int_K |T_{t_n} g(x)| dx \quad (4.25)$$

yazılır. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$|T_{t_n} g(x)| = |g(x - t_n)| \leq \sup_{x - t_n \in \mathbb{R}^d} |g(x - t_n)| = \|g\|_\infty \quad (4.26)$$

olup, sınırlı yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |T_{t_n} g(x)| dx = 0$$

elde edilir. Böylece (4.25) eşitsizliğinden

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)k(x)dx \rightarrow 0$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)k(x)dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)||k(x)|dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)|dx \\ &= \|k\|_{\infty} \|g_n\|_1 \\ &\leq \|k\|_{\infty} \|g_n\|_{1,v} \\ &\leq c_1 \|k\|_{\infty} \|g_n\|_{1,w} \\ &\leq c_1 \|k\|_{\infty} \|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \end{aligned}$$

olduğundan ve Önerme 4.1.6 dan  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise sıfıra yakınsamalıdır. Ayrıca (Feichtinger and Gürkanlı, 1990) çalışmasından her  $f \in L_v^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$c_3 v(x) \leq \|T_x f\|_{1,v} \leq c_4 v(x) \quad (4.27)$$

olacak şekilde  $c_3, c_4 > 0$  sayıları vardır. O halde (4.27) eşitsizliği dikkate alınarak

$$\|g_n\|_{1,v} = \|M_{t_n} g\|_{1,v} = \|g\|_{1,v} \geq \frac{\|T_{t_n} g\|_{1,v}}{v(t_n)} \geq \frac{c_3 v(t_n)}{v(t_n)} = c_3$$

bulunur. Bu takdirde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisi yoktur. O halde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

Şimdi Teorem 4.1.7 nin tersinin doğru olmadığına bir örnek verelim.

**Örnek 4.1.8:**  $v$ ,  $w$  ve  $\omega$  fonksiyonları her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $v(x) = w(x) = (1 + \|x\|)^2$  ve  $\omega(x) = 1 + \|x\|$  biçiminde tanımlansın.

Öncelikle  $w$  ve  $\omega$  fonksiyonlarının ağırlık fonksiyonları olduğunu gösterelim.  $\omega$  fonksiyonu için herhangi bir  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  ve herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.  $\|x - x_0\| < \delta$  olduğunda

$$\begin{aligned}
|\omega(x) - \omega(x_0)| &= |1 + \|x\| - 1 - \|x_0\|| \\
&= |\|x\| - \|x_0\|| \\
&= |\|x - x_0 + x_0\| - \|x_0\|| \\
&\leq \|x - x_0\| + \|x_0\| - \|x_0\| \\
&= \|x - x_0\| < \delta
\end{aligned}$$

olur. Böylece  $\delta = \varepsilon$  bulunur. Yani  $\omega$  fonksiyonu keyfi bir  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  noktasında süreklidir. Dolayısıyla  $\omega$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  kümesinde süreklidir. O halde  $\omega$  ölçülebilir ve yerel sınırlı bir fonksiyondur.

Ayrıca  $\mathbb{R}^d$  üzerinde verilen  $\|\cdot\|$  normunun tanımından her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\|x\| \geq 0$  olup  $\omega(x) = 1 + \|x\| \geq 1$  olur.

Yine her  $x, y \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned}
\omega(x+y) &= 1 + \|x+y\| \\
&\leq 1 + \|x\| + \|y\| \\
&\leq 1 + \|x\| + \|y\| + \|x\|\|y\| \\
&= (1 + \|x\|) + \|y\|(1 + \|x\|) \\
&= (1 + \|x\|)(1 + \|y\|) \\
&= \omega(x)\omega(y)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde  $\omega$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonudur.

Şimdi  $w$  fonksiyonu için  $\mathbb{R}$  kümesinden  $\mathbb{R}$  kümesine  $l(x) = x^2$  biçiminde tanımlı  $l$  fonksiyonunu alalım. Böylece  $w$  fonksiyonunu  $l \circ \omega$  bileşke fonksiyonu yardımıyla her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w(x) = l \circ \omega(x)$  olarak ifade edebiliriz. Buradan  $l$  ve  $\omega$  fonksiyonları sürekli olduklarından  $w$  bileşke fonksiyonu da süreklidir. O halde  $w$  fonksiyonu ölçülebilir ve yerel sınırlı bir fonksiyondur.

Ayrıca  $\mathbb{R}^d$  üzerinde verilen  $\|\cdot\|$  normunun tanımından her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\|x\| \geq 0$  yazılır. Böylece her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w(x) = (1 + \|x\|)(1 + \|x\|) \geq 1$  elde edilir.

Yine (4.28) eşitsizliği dikkate alınarak her  $x, y \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned}
w(x+y) &= (1+\|x+y\|)(1+\|x+y\|) \\
&\leq (1+\|x\|)(1+\|y\|)(1+\|x\|)(1+\|y\|) \\
&= (1+\|x\|)^2 (1+\|y\|)^2 \\
&= w(x)w(y)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde  $w$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonudur.

Ayrıca her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $v(x) = w(x) = (1+\|x\|)^2$  olduğundan  $v \prec w$  olur. Böylece  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan birim dönüşüm süreklidir.

Şimdi  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_d$  olmak üzere  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  için  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesinin tıkHz olmadığını gösterelim. Yine  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini ve  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim. Böylece bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{T_{t_n} g}{w(t_n)}$  biçiminde tanımlayalım. Buradan

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \left\| \frac{T_{t_n} g}{w(t_n)} \right\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \frac{1}{w(t_n)} \|T_{t_n} g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \quad (4.29)$$

yazılır. Ayrıca her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\omega(x) = 1 + \|x\| \leq (1 + \|x\|)^2 = w(x) \quad (4.30)$$

olur. Yine (2.9) eşitsizliğinden her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\|T_x g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq w(x) \|g\|_{1,w} + \omega(x \cos \alpha_1) \|F_\alpha g\|_{p,\omega} \quad (4.31)$$

yazılır. Buradan (4.30) eşitsizliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\|T_x g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} &\leq w(x)\|g\|_{1,w} + \omega(x \cos \alpha_1)\|F_\alpha g\|_{p,\omega} \\
&= w(x)\|g\|_{1,w} + (1+\|x \cos \alpha_1\|)\|F_\alpha g\|_{p,\omega} \\
&= w(x)\|g\|_{1,w} + (1+|\cos \alpha_1|\|x\|)\|F_\alpha g\|_{p,\omega} \\
&\leq w(x)\|g\|_{1,w} + (1+\|x\|)\|F_\alpha g\|_{p,\omega} \\
&\leq w(x)\|g\|_{1,w} + w(x)\|F_\alpha g\|_{p,\omega} \\
&\leq w(x)\|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.29) ifadesinden

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \left\| \frac{T_{t_n} g}{w(t_n)} \right\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq \frac{w(t_n)}{w(t_n)} \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}$$

elde edilir. O halde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır.

Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmadığını gösterelim. Herhangi bir  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \right| &\leq \frac{1}{w(t_n)} \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} g(x)| |h(x)| dx \\
&\leq \frac{1}{w(t_n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} g(x)| dx \\
&= \frac{1}{w(t_n)} \|h\|_\infty \|T_{t_n} g\|_1 \\
&= \frac{1}{w(t_n)} \|h\|_\infty \|g\|_1
\end{aligned} \tag{4.32}$$

yazılır. Diğer yandan  $x \rightarrow \infty$  için  $w(x) = (1+\|x\|)^2 \rightarrow \infty$  olduğundan  $n \rightarrow \infty$  için  $w(t_n) \rightarrow \infty$  olur. Böylece (4.32) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra yakınsar. Bu zaman  $n \rightarrow \infty$  için

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \rightarrow 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)h(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)||h(x)| dx \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| dx \\
&= \|h\|_{\infty} \|g_n\|_1 \\
&\leq \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{1,v} \\
&= \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{1,w} \\
&\leq \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

olduğundan ve Önerme 4.1.6 dan  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise sıfıra yakınsamalıdır. Yine (Feichtinger and Gürkanlı, 1990) çalışmasından her  $g \in L_v^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$cv(x) \leq \|T_x g\|_{1,v} \tag{4.34}$$

olacak şekilde bir  $c > 0$  sayısı vardır. O halde (4.34) eşitsizliği dikkate alınarak

$$\|g_n\|_{1,v} = \frac{1}{w(t_n)} \|T_{t_n} g\|_{1,v} \geq c \frac{v(t_n)}{w(t_n)} = c \frac{w(t_n)}{w(t_n)} = c$$

yazılır. Bu takdirde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisi yoktur.

O halde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir. Ancak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \omega(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \|x\|) = \infty$$

olduğundan  $\omega$  fonksiyonu sınırlı değildir.

**Teorem 4.1.9:**  $w, \omega$  ve  $v$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $v \prec w$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{v(x)}{w(x)}$  fonksiyonunun limiti sıfır değilse  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

**İspat:**  $v \prec w$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $v(x) \leq c_1 w(x)$  olacak şekilde bir  $c_1 > 0$  sayısı vardır. Yine Teorem 4.1.4 den  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  kapsaması vardır ve Teorem 4.1.7 nin ispatından  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $I$

birim dönüşüm süreklidir.

Öncelikle  $x \rightarrow \infty$  için  $w(x) \rightarrow \infty$  olduğunu kabul edelim. Yine  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım. Böylece bir  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her bir koordinat dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $b_{nj} = -t_{nj} \cot \alpha_j$  olacak şekilde tanımlayalım. Ayrıca  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim.  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesinin tıkHz olmadığını göstermek için bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{T_{t_n} M_{b_n} g}{w(t_n)}$  biçiminde tanımlayalım. Buradan

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \left\| \frac{T_{t_n} M_{b_n} g}{w(t_n)} \right\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \frac{1}{w(t_n)} \|T_{t_n} M_{b_n} g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}$$

yazılır. Böylece (4.1) eşitsizliği dikkate alınarak

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \leq \frac{w(t_n)}{w(t_n)} \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} = \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}} \quad (4.35)$$

bulunur. O halde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır.

Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmadığını gösterelim. Herhangi bir  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \right| &\leq \frac{1}{w(t_n)} \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} M_{b_n} g(x)| |h(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{w(t_n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} g(x)| dx \\ &= \frac{1}{w(t_n)} \|h\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| dx \\ &= \frac{1}{w(t_n)} \|h\|_{\infty} \|g\|_1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

olur. Yine  $n \rightarrow \infty$  için  $w(t_n) \rightarrow \infty$  olduğundan (4.36) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra yakınsak olup

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \rightarrow 0$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| |h(x)| dx \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| dx \\
&= \|h\|_{\infty} \|g_n\|_1 \\
&\leq \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{1,v} \\
&\leq c_1 \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{1,w} \\
&\leq c_1 \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w,\omega}}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

olduğundan ve Önerme 4.1.6 dan  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise sıfıra yakınsamalıdır. Böylece (4.2) ve (4.34) ifadelerinden

$$\|g_n\|_{1,v} = \frac{1}{w(t_n)} \|T_{t_n} M_{b_n} g\|_{1,v} = \frac{1}{w(t_n)} \|T_{t_n} g\|_{1,v} \geq c \frac{v(t_n)}{w(t_n)} \tag{4.38}$$

olacak şekilde bir  $c > 0$  sayısı vardır. Yine  $n \rightarrow \infty$  için  $t_n \rightarrow \infty$  olup  $\frac{v(t_n)}{w(t_n)}$  fonksiyonu sıfıra yakınsamadığından  $\frac{v(t_n)}{w(t_n)} \geq \delta$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı

vardır. Buradan  $n \rightarrow \infty$  için

$$\|g_n\|_{1,v} \geq c \frac{v(t_n)}{w(t_n)} \geq c\delta \tag{4.39}$$

yazılır. Bu takdirde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisi yoktur.

O halde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

Şimdi kabul edelim ki  $w$  sınırlı veya sabit bir ağırlık fonksiyonu olsun. Yine

$v \prec w$  olduğundan  $\frac{v(x)}{w(x)}$  fonksiyonu da sınırlı veya sabit bir fonksiyon olup  $x \rightarrow \infty$

için  $\frac{v(x)}{w(x)}$  fonksiyonu sıfıra yakınsamaz. Yine  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde

bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım. Böylece bir  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her bir koordinat dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $b_{nj} = -t_{nj} \cot \alpha_j$  olacak şekilde tanımlayalım. Ayrıca

$g \in C_c(\mathbb{R}^d) \cap A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  olacak şekilde bir  $g$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim.

$A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesinin tıkHz olmadığını göstermek için

bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{T_{t_n} M_{b_n} g}{w(t_n)}$  biçiminde tanımlayalım. O halde

(4.35) ifadesinden  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır.

Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmadığını gösterelim. Herhangi bir  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \right| &\leq \frac{1}{w(t_n)} \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} g(x)| |h(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{w(t_n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} g(x)| dx \\ &= \frac{1}{w(t_n)} \|h\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |T_{t_n} g(x)| dx \end{aligned}$$

yazılır. Yine  $g \in C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$  olduğundan (4.25) ve (4.26) ifadeleri dikkate alınarak

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \rightarrow 0$$

bulunur. Böylece (4.37), (4.38) ve (4.39) ifadelerinden  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisi yoktur. O halde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

Şimdi Teorem 4.1.9 un tersinin doğru olmadığına bir örnek verelim.

**Örnek 4.1.10:**  $v$  ve  $w$  fonksiyonları her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $v(x) = (1 + \|x\|)$  ve  $w(x) = (1 + \|x\|)^2$  biçiminde tanımlansın. Ayrıca  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı sınırlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Yine  $v$  ve  $w$  fonksiyonlarının ağırlık fonksiyonu olduğu Örnek 4.1.8 de gösterildi.

Böylece her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$v(x) = 1 + \|x\| \leq (1 + \|x\|)^2 = w(x)$$

olup  $v \prec w$  olur. O halde  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) \subset L_v^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan birim dönüşüm süreklidir. Yine  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı sınırlı bir ağırlık fonksiyonu olduğundan Teorem 4.1.7 gereği  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_v^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir. Ancak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{w(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+\|x\|)}{(1+\|x\|)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\|x\|)} = 0$$

olur.

**Teorem 4.1.11:**  $w_1, w_2$  ve  $\omega_1, \omega_2$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $w_2 \prec w_1$ ,  $\omega_2 \prec \omega_1$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  veya  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonunun limiti sıfır değilse  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

**İspat:**  $w_2 \prec w_1$ ,  $\omega_2 \prec \omega_1$  olsun. Böylece 2.1.39. Önermeden

$$A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$$

olduğu biliniyor. Yine  $w_2 \prec w_1$  ve  $\omega_2 \prec \omega_1$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w_2(x) \leq c_1 w_1(x)$  ve  $\omega_2(x) \leq c_2 \omega_1(x)$  olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları vardır. Ayrıca  $I$ ,  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan birim dönüşüm olmak üzere her  $f \in A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|I(f)\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} = \|f\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} = \|f\|_{1,w_2} + \|F_\alpha f\|_{p,\omega_2} \leq c_1 \|f\|_{1,w_1} + c_2 \|F_\alpha f\|_{p,\omega_1}$$

olur. Eğer  $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$  denirse

$$\|I(f)\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \leq c_3 \|f\|_{1,w_1} + c_3 \|F_\alpha f\|_{p,\omega_1} = c_3 \|f\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}}$$

bulunur. O halde  $I$  dönüşümü süreklidir.

İlk olarak  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  fonksiyonunun limiti sıfırdan farklı olsun.

Öncelikle  $x \rightarrow \infty$  için  $w_1(x) \rightarrow \infty$  olduğunu kabul edelim. Yine  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım. Böylece bir  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her bir koordinat dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $b_{nj} = -t_{nj} \cot \alpha_j$  olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim.  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesinin tıkHz olmadığını göstermek

için bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{T_{t_n} M_{b_n} g}{w_1(t_n)}$  biçiminde tanımlayalım.

Böylece (4.35) eşitsizliğinden  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır. Şimdi

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir  $(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  alt dizisinin olduğunu

kabul edelim. O halde  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d) \subset L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$

uzayında da yakınsak olur. Ancak Teorem 4.1.9 un ispatından  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin

$L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin bulunamayacağını biliyoruz. O halde

$A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir. Şimdi  $w_1$

fonksiyonunun sabit veya sınırlı bir ağırlık fonksiyonu olduğunu kabul edelim.

$w_2 \prec w_1$  olduğundan  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  fonksiyonu da sınırlı veya sabit bir fonksiyon olup

$x \rightarrow \infty$  iken  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  fonksiyonu sifıra yakınsamaz. Yine  $g \in C_c(\mathbb{R}^d) \cap A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$

olacak şekilde bir  $g$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim. Ayrıca  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$

olacak şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım. Böylece bir  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her bir

koordinat dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $b_{nj} = -t_{nj} \cot \alpha_j$  olacak şekilde alarak bir

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{T_{t_n} M_{b_n} g}{w_1(t_n)}$  biçiminde tanımlayalım. Yine (4.35)

eşitsizliğinden dolayı bu dizi sınırlıdır. Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında

yakınsak bir  $(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  alt dizisinin olduğunu kabul edelim. O halde

$A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d) \subset L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında da yakınsak

olur. Ancak Teorem 4.1.9 un ispatından  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L^1_{w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin bulunamayacağını biliyoruz. O halde  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

Şimdi  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonunun limiti sıfırdan farklı olsun.

Öncelikle  $x \rightarrow \infty$  için  $\omega_1(x) \rightarrow \infty$  olduğunu kabul edelim. Yine  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım. Böylece bir  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini her bir koordinat dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $u_{nj} = t_n \sin \alpha_j$  olacak şekilde tanımlayalım. O halde  $n \rightarrow \infty$  için  $u_n \rightarrow \infty$  olur. Şimdi  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g$  fonksiyonunu alıp, sabitleyelim. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{M_{t_n} g}{\omega_1(u_n)}$  olacak şekilde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini tanımlayalım. Buradan

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} = \left\| \frac{M_{t_n} g}{\omega_1(u_n)} \right\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} = \frac{1}{\omega_1(u_n)} \|M_{t_n} g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} \quad (4.40)$$

olur. Ayrıca (2.10) ve (4.40) ifadeleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} &\leq \frac{1}{\omega_1(u_n)} \|g\|_{1,w_1} + \frac{\omega_1(u_n)}{\omega_1(u_n)} \|F_\alpha g\|_{p,\omega_1} \\ &\leq \|g\|_{1,w_1} + \|F_\alpha g\|_{p,\omega_1} \\ &= \|g\|_{A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}} \end{aligned}$$

yazılır. O halde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır.

Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmadığını gösterelim. Herhangi bir  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \right| &\leq \frac{1}{\omega_1(u_n)} \int_{\mathbb{R}^d} |M_{t_n} g(x)| |h(x)| dx \\
&\leq \frac{1}{\omega_1(u_n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |M_{t_n} g(x)| dx \\
&= \frac{1}{\omega_1(u_n)} \|h\|_{\infty} \|g\|_1
\end{aligned} \tag{4.41}$$

olur. Ayrıca  $n \rightarrow \infty$  için  $u_n \rightarrow \infty$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\omega_1(x) \rightarrow \infty$  olduğundan (4.41) eşitsizliğinin sağ tarafı sifira yakınsak olup

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) h(x) dx \rightarrow 0$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) k(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| |h(x)| dx \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| dx \\
&= \|h\|_{\infty} \|g_n\|_1 \\
&\leq \|h\|_{\infty} \|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}}
\end{aligned}$$

olduğundan ve Önerme 4.1.6 dan  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise sifira yakınsamalıdır. Yine (2.8) eşitliğinde  $b = (z_1 \sin \alpha_1, z_2 \sin \alpha_2, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  alınırsa

$$\|F_{\alpha}(M_z g)\|_{p,\omega_2} = \|T_b(F_{\alpha} g)\|_{p,\omega_2}$$

yazılır. Ayrıca (Feichtinger and Gürkanlı, 1990) çalışmasındaki 2.2. Lemmadan her  $f \in L_{\omega_2}^p(\mathbb{R}^d)$  ve  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$c\omega_2(x) \leq \|T_x f\|_{p,\omega_2}$$

olacak şekilde bir  $c > 0$  sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} &= \frac{1}{\omega_1(u_n)} \|M_{t_n} g\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \\
&\geq \frac{1}{\omega_1(u_n)} \|F_\alpha(M_{t_n} g)\|_{p,\omega_2} \\
&= \frac{1}{\omega_1(u_n)} \|T_{u_n}(F_\alpha g)\|_{p,\omega_2} \\
&\geq \frac{\omega_2(u_n)}{\omega_1(u_n)} c
\end{aligned}$$

bulunur. Yine  $n \rightarrow \infty$  için  $u_n \rightarrow \infty$  olduğundan ve  $\frac{\omega_2(u_n)}{\omega_1(u_n)}$  fonksiyonu sıfıra

yakınsamadığından  $n \rightarrow \infty$  iken  $\frac{\omega_2(u_n)}{\omega_1(u_n)} \geq \delta$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı vardır.

Buradan  $n \rightarrow \infty$  için

$$\|g_n\|_{A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}} \geq \frac{\omega_2(u_n)}{\omega_1(u_n)} c \geq c\delta$$

yazılır. Bu takdirde  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisi yoktur. O halde  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

Şimdi kabul edelim ki  $\omega_1$  fonksiyonu sınırlı veya sabit bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$\omega_2 \prec \omega_1$  olduğundan  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonu da sınırlı veya sabit bir fonksiyon olup

$x \rightarrow \infty$  iken  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonu sıfıra yakınsamaz. Yine  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $t_n \rightarrow \infty$  olacak

şekilde bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini ve bir  $g \in C_c(\mathbb{R}^d) \cap A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonunu alıp,

sabitleyelim. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  iken  $g_n = M_{t_n} g$  biçiminde bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi

tanımlayalım. O halde (4.22) eşitsizliğinden  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayında

sınırlıdır. Şimdi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir  $(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  alt

dizisinin olduğunu kabul edelim. Bu zaman  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d) \subset L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan

$(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında da yakınsak olur. Ancak Teorem 4.1.7 nin

ispatından  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_{w_2}^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin

bulunamayacağını biliyoruz. O halde  $A_{\alpha,p}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,p}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıkHz değildir.

**Teorem 4.1.12:**  $w_1, w_2$  ve  $\omega_1, \omega_2$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları ve  $w_2 \prec w_1$ ,  $\omega_2 \prec \omega_1$  olsun. Bu takdirde  $A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesinin tıkHz olması için gerekli ve yeterli koşul  $x \rightarrow \infty$  iken  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  ve  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonlarının limitinin sıfır olmasıdır.

**İspat:**  $w_2 \prec w_1$ ,  $\omega_2 \prec \omega_1$  olduğundan  $A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d) \subset A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olup  $A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan birim dönüşüm süreklidir.

İlk olarak  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  ve  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonlarının limitinin sıfır olduğunu kabul edelim. TıkHz gömülme için  $A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayından alınan herhangi bir sınırlı  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisi olduğunu göstereyim.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi,  $A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|f_n\|_{A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}} \leq c_1 \quad (4.42)$$

olacak şekilde bir  $c_1 > 0$  sayısı vardır. Yine  $A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $I$  birim dönüşüm sürekli olduğundan

$$\|I(f_n)\|_{A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}} = \|f_n\|_{A_{\alpha,1}^{w_2,\omega_2}} \leq c_2 \|f_n\|_{A_{\alpha,1}^{w_1,\omega_1}} \quad (4.43)$$

olacak şekilde bir  $c_2 > 0$  sayısı vardır. Ayrıca  $x \rightarrow \infty$  iken  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  ve  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$

fonksiyonlarının limiti sıfır olduğundan herhangi bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $\|x\| > \delta_k$  iken

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} < \frac{1}{k}$$

olacak şekilde bir  $\delta_k > 0$  sayısı ve  $\|x\| > \delta'_k$  iken

$$\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} < \frac{1}{k}$$

olacak şekilde bir  $\delta'_k > 0$  sayısı vardır. Yani herhangi bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $x \in \mathbb{R}^d - B[0, \delta_k]$  ve  $x \in \mathbb{R}^d - B[0, \delta'_k]$  iken

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} < \frac{1}{k}, \quad \frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} < \frac{1}{k}$$

olacak şekilde  $k \rightarrow \infty$  için  $\delta_k \rightarrow \infty$ ,  $\delta'_k \rightarrow \infty$  olan orijin merkezli artan yuvarların  $(B[0, \delta_k])_{k \in \mathbb{N}}$  ve  $(B[0, \delta'_k])_{k \in \mathbb{N}}$  dizileri vardır. Eğer  $k \in \mathbb{N}$  için  $S_k = (B[0, \delta_k] \cup B[0, \delta'_k])$  alınırsa  $x \in \mathbb{R}^d - S_k$  iken

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} < \frac{1}{k}, \quad \frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} < \frac{1}{k} \quad (4.44)$$

yazılır.

Sonra  $S_1$  kümesinde yoğun olan herhangi bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi alınırsa, (4.43) ifadesinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \|F_\alpha f_n\|_\infty &= \sup_{u \in \mathbb{R}^d} |F_\alpha f_n(u)| \\ &= \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(t) \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2}(u_j^2 + t_j^2) \cot \alpha_j - i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dt \right| \\ &\leq \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2}(u_j^2 + t_j^2) \cot \alpha_j - i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dt \right| \\ &= \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)| dt \\ &= \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \|f_n\|_1 \\ &\leq \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \|f_n\|_{1, w_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|F_\alpha f_n\|_\infty &\leq \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \|f_n\|_{A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}} \\ &\leq \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| c_2 \|f_n\|_{A_{\alpha,1}^{w_1, \omega_1}}\end{aligned}$$

yazılır. Eğer  $c_0 = \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| c_1 c_2$  denirse (4.42) eşitsizliğinden

$$\|F_\alpha f_n\|_\infty \leq c_0 \quad (4.45)$$

bulunur. O halde  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin,  $(F_\alpha f_{n_1(k)}(t_1))_{n_1(k) \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\mathbb{C}$  kümesinde yakınsak olacak şekilde bir  $(f_{n_1(k)})_{n_1(k) \in \mathbb{N}}$  alt dizisi vardır. Yine  $(f_{n_1(k)})_{n_1(k) \in \mathbb{N}}$  dizisinin,  $(F_\alpha f_{n_2(k)}(t_2))_{n_2(k) \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\mathbb{C}$  kümesinde yakınsak olacak şekilde bir  $(f_{n_2(k)})_{n_2(k) \in \mathbb{N}}$  alt dizisi vardır. Bu şekilde devamla  $(f_{n_{l-1}(k)})_{n_{l-1}(k) \in \mathbb{N}}$  dizisinin,  $(F_\alpha f_{n_l(k)}(t_l))_{n_l(k) \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\mathbb{C}$  kümesinde yakınsak olacak şekilde bir  $(f_{n_l(k)})_{n_l(k) \in \mathbb{N}}$  alt dizisi elde edilir. Yani  $r \leq l$  olan her  $l \in \mathbb{N}$  için  $(F_\alpha f_{n_l(k)}(t_r))_{n_l(k) \in \mathbb{N}}$  dizisi yakınsaktır. Eğer  $m(k) = n_k(k)$  alınırsa  $(F_\alpha f_{m(k)}(t_l))_{m(k) \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $l \in \mathbb{N}$  için yakınsak olur. Yani  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin, her  $l \in \mathbb{N}$  için  $(F_\alpha g_m(t_l))_{m \in \mathbb{N}}$  yakınsak olacak şekilde bir  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  alt dizisi vardır. Ayrıca  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $S_1$  kümesinde yoğun olduğundan herhangi bir  $x \in S_1$  için  $a_n \rightarrow x$  olacak şekilde bir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. Yine her  $m \in \mathbb{N}$  için  $F_\alpha g_m$  sürekli olduğundan dizisel sürekli olup  $F_\alpha g_m(a_n) \rightarrow F_\alpha g_m(x)$  yazılır. Yani her  $m \in \mathbb{N}$  için herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n \geq n_0$  iken

$$|F_\alpha g_m(a_n) - F_\alpha g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.46)$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Eğer  $(F_\alpha g_m(a_{n_0}))_{m \in \mathbb{N}}$  dizisinin yakınsak olduğu nokta  $z \in \mathbb{C}$  ise aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $m \geq m_1$  iken

$$\left| F_\alpha g_m(a_{n_0}) - z \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.47)$$

olacak şekilde bir  $m_1 \in \mathbb{N}$  vardır. Böylece aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için ve her  $m \geq m_1$  iken (4.46), (4.47) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| F_\alpha g_m(x) - z \right| &= \left| F_\alpha g_m(x) - F_\alpha g_m(a_{n_0}) + F_\alpha g_m(a_{n_0}) - z \right| \\ &\leq \left| F_\alpha g_m(x) - F_\alpha g_m(a_{n_0}) \right| + \left| F_\alpha g_m(a_{n_0}) - z \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. Buradan herhangi bir  $x \in S_1$  için  $(F_\alpha g_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$  yakınsak olur. Yukarıda izlenen metot tekrar kullanılarak  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  dizisinin öyle bir  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  alt dizisi bulunur ki her  $x \in S_2$  için  $(F_\alpha u_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$  yakınsaktır. Bu şekilde devam ederek  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin, her  $x \in S_k$  için  $(F_\alpha h_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  yakınsak olacak şekilde bir  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi ele edilir. Ayrıca (4.42) ve (4.43) ifadelerinden her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_\alpha h_n \in L^1_{\omega_2}(\mathbb{R}^d)$  olup  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  olmak üzere her  $i = 1, 2, \dots, d$  için  $\beta_i + \alpha_i = 2\pi$  olacak şekilde  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$  alınırsa

$$\|h_n\|_\infty = \|F_\beta(F_\alpha h_n)\|_\infty \leq \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1 - i \cot \beta_j}{2\pi}} \|F_\alpha h_n\|_1$$

yazılır. Eğer  $\prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1 - i \cot \beta_j}{2\pi}} = M_1$  denirse

$$\|h_n\|_\infty \leq M_1 \|F_\alpha h_n\|_1 \leq M_1 \|F_\alpha h_n\|_{1, \omega_2} \leq M_1 \|F_\alpha h_n\|_{A_{\alpha_1}^{\omega_2, \omega_2}} \leq M_1 c_2 \|F_\alpha h_n\|_{A_{\alpha_1}^{\omega_1, \omega_1}} \leq M_1 c_2 c_1 \quad (4.48)$$

bulunur. O halde ispatın ilk bölümündeki adımlar uygulanarak  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin, her  $k \in \mathbb{N}$  için  $S_k$  kümesi üzerinde yakınsak olacak şekilde bir  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alt dizisi elde edilir.

Şimdi bu  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Eğer (4.42) ve (4.44) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\|_{A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}} &= \|s_n - s_m\|_{1, w_2} + \|F_\alpha(s_n - s_m)\|_{1, \omega_2} \\
&= \|s_n - s_m\|_{1, w_2} + \|F_\alpha s_n - F_\alpha s_m\|_{1, \omega_2} \\
&= \int_{S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d - S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx \\
&\quad + \int_{S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d - S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx \\
&< \int_{S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx + \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^d - S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_1(x) dx \\
&\quad + \int_{S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^d - S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_1(x) dx \\
&\leq \int_{S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx + \int_{S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{k} (\|s_n\|_{1, w_1} + \|s_m\|_{1, w_1}) + \frac{1}{k} (\|F_\alpha s_n\|_{1, \omega_1} + \|F_\alpha s_m\|_{1, \omega_1}) \\
&\leq \int_{S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx + \int_{S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx + \frac{4c_1}{k}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

yazılır. Ayrıca herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde ve  $k$  sayısı  $\frac{4c_1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$  olacak

şekilde yeterince büyük seçildiğinde,  $\overline{S_k}$  kümesi  $S_k$  kümesinin kapanışı olmak üzere

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $(F_\alpha s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri  $\overline{S_k}$  kümesi üzerinde yakınsak olurlar. O halde  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ve  $(F_\alpha s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizilerinin  $\overline{S_k}$  kümesi üzerinde noktasal yakınsamaları ve (4.45),

(4.48) ifadeleri dikkate alınarak, sınırlı yakınsaklık teoremi gereği  $S_k$  kümesi

üzerinde  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $(F_\alpha s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri sırasıyla  $\|\cdot\|_{1, w_2}$  ve  $\|\cdot\|_{1, \omega_2}$  normlarına göre

yakınsak olurlar. Böylece  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $m, n \geq n_1$  için

$$\int_{S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.50}$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı ve her  $m, n \geq n_2$  için

$$\int_{S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.51)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $N = \max\{n_1, n_2\}$  alınırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $m, n \geq N$  için (4.49), (4.50) ve (4.51) ifadeleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_{A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}} &\leq \int_{S_k} |s_n(x) - s_m(x)| w_2(x) dx + \int_{S_k} |F_\alpha s_n(x) - F_\alpha s_m(x)| \omega_2(x) dx + \frac{4c_1}{k} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi,  $A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir Cauchy dizisidir. Yine  $A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayı Banach uzayı olduğundan  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak olan bir alt dizisidir. Bu takdirde  $A_{\alpha,1}^{w_1, \omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıktır.

Diğer yandan, eğer  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  veya  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonunun limiti sıfır değilse, Teorem 4.1.11 den  $A_{\alpha,1}^{w_1, \omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıktır değildir. O halde  $A_{\alpha,1}^{w_1, \omega_1}(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $A_{\alpha,1}^{w_2, \omega_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayına gömülmesi tıktır ise  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_2(x)}{w_1(x)}$  ve  $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$  fonksiyonlarının limiti sıfırdır.

## 4.2. $S_w^\alpha$ Uzayının Bazı Özellikleri

Bu bölümde (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasında tanımlanan  $S_{w, \omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayına benzer bir  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı tanımlanacaktır. Bu uzay,  $\Theta$  girişim işlemi ve kesirli Fourier dönüşümü kullanılarak tanımlandığından, (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasındaki  $S_{w, w}(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir genelleştirmesidir.  $w$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğu 2.1.33. Teoremden biliniyor. Eğer  $w$  fonksiyonu özel olarak her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w(x) = 1$  olarak alınırsa  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı elde edilir. O halde  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı da  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

Bu bölümde  $\Theta$  girişim işlemine göre 2.1.51. Tanımdaki koşulları sağlayan uzaya  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Segal cebiri diyeceğiz. Bu uzayı  $S^\Theta(\mathbb{R}^d)$  ile, üzerindeki normu da  $\|\cdot\|_{S^\Theta}$  ile göstereceğiz. Şimdi  $S^\Theta(\mathbb{R}^d)$  uzayına bir örnek vereceğiz. Bunun için önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

**Yardımcı Teorem 4.2.1:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L^p(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach modüldür.

*İspat:* Herhangi  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
\|f\Theta g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |(f\Theta g)(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j - x_j) \cot \alpha_j\right) dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)| dy \right)^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (|f(y)| |g(x-y)|^p)^{1/p} |f(y)|^{p-1/p} dy \right)^p dx
\end{aligned} \tag{4.52}$$

yazılır. Eğer her  $x, y \in \mathbb{R}^d$  için  $l(x, y) = (|f(y)| |g(x-y)|^p)^{1/p}$  denirse Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\|l\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)|^p dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^p dx \right) |f(y)| dy \\
&= \|g\|_p^p \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy \\
&= \|g\|_p^p \|f\|_1
\end{aligned} \tag{4.53}$$

olup  $l \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$  olur. Yine  $|f|^{1-\frac{1}{p}} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^d)$  dir. Ayrıca  $p$  ile  $\frac{p}{p-1}$  sayıları eşlenik sayılardır. Böylece (4.52) ifadesinde Hölder eşitsizliği uygulanırsa (4.53) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|f \Theta g\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (|f(y)| |g(x-y)|^p)^{1/p} |f(y)|^{p-1} dy \right)^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{p-1} dy \right)^{p-1} \right)^p dx \\
&= \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)|^p dy dx \\
&= \|f\|_1^{p-1} \|g\|_p^p \|f\|_1 \\
&= \|f\|_1^p \|g\|_p^p
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\|f \Theta g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

eşitsizliği elde edilir. Banach modül olmanın diğer özelliklerini göstermek kolaydır.

**Örnek 4.2.2:**  $1 < p < \infty$  olmak üzere  $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının herhangi bir  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|f\|_s = \|f\|_1 + \|f\|_p$$

normuna ve  $*$  girişim işlemi göre bir Segal cebiri olduğu (Reiter, 1971) çalışmasından biliniyor. Eğer  $*$  girişim işlemi yerine  $\Theta$  girişim işlemi kullanılırsa  $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\|f\|_{s^\circ} = \|f\|_1 + \|f\|_p$  normuna göre bir  $S^\circ(\mathbb{R}^d)$  Segal cebiri olur. Bunun için de bu uzayın  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğunu göstermek yeterlidir.  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı da  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğundan herhangi bir  $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|f \Theta g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (4.54)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca  $L^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach modül olduğu Yardımcı Teorem 4.2.1 de gösterildi. O halde

$$\|f \Theta g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \quad (4.55)$$

yazılır. Böylece (4.54) ve (4.55) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\|f \Theta g\|_{s^\ominus} &= \|f \Theta g\|_1 + \|f \Theta g\|_p \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_p \\
&= \|f\|_1 (\|g\|_1 + \|g\|_p) \\
&\leq \|f\|_{s^\ominus} \|g\|_{s^\ominus}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Banach cebiri olmanın diğer koşullarını göstermek kolaydır. O halde  $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir  $S^\ominus(\mathbb{R}^d)$  Segal cebiridir.

$w$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere 2.1.52. Tanımda verilen  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayındaki  $*$  girişim işlemi yerine  $\Theta$  girişim işlemi alınır, üzerinde bir  $\|\cdot\|_{S_w^\ominus}$  normu tanımlı olan, yine bu tanımda ifade edilen koşulları sağlayan uzayı  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ile göstereceğiz. Şimdi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına bir örnek vereceğiz. Bunun için önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

**Yardımcı Teorem 4.2.3:**  $1 \leq p < \infty$  ve  $w, \mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayı,  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach modüldür.

*İspat:* Herhangi  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $g \in L_w^p(\mathbb{R}^d)$  verilsin. O halde  $fw \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $gw \in L^p(\mathbb{R}^d)$  olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|f \Theta g\|_{p,w} &= \|(f \Theta g)w\|_p \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |(f \Theta g)(x)w(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j - x_j) \cot \alpha_j\right) w(x-y+y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)w(y)g(x-y)w(x-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j - x_j) \cot \alpha_j\right) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (fw)(y)(gw)(x-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j - x_j) \cot \alpha_j\right) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |(fw) \Theta (gw)(x)|^p dx \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\|f \Theta g\|_{p,w} \leq \|(fw) \Theta (gw)\|_p$$

yazılır. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.2.1 de  $L^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach modül olduğu gösterildi. Böylece

$$\|(fw) \Theta (gw)\|_p \leq \|fw\|_1 \|gw\|_p \quad (4.56)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde (4.56) ifadesi dikkate alınarak

$$\|f \Theta g\|_{p,w} \leq \|(fw) \Theta (gw)\|_p \leq \|fw\|_1 \|gw\|_p = \|f\|_{1,w} \|g\|_{p,w}$$

bulunur. Banach modül olmanın diğer özelliklerini göstermek kolaydır.

**Örnek 4.2.4:**  $1 < p < \infty$  olmak üzere  $w, \mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun.  $L_w^1(\mathbb{R}^d) \cap L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının herhangi bir  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \cap L_w^p(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|f\|_{S_w} = \|f\|_{1,w} + \|f\|_{p,w}$$

normuna ve  $*$  girişim işlemine göre bir  $S_w(\mathbb{R}^d)$  uzayı olduğu (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasından biliniyor. Eğer  $*$  girişim işlemi yerine  $\Theta$  girişim işlemi kullanılırsa  $L_w^1(\mathbb{R}^d) \cap L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\|f\|_{S_w^\Theta} = \|f\|_{1,w} + \|f\|_{p,w}$  normuna göre bir  $S_w^\Theta(\mathbb{R}^d)$  uzayı olur. Bunun için de bu uzayın  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğunu göstermek yeterlidir.  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı da  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğundan herhangi bir  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \cap L_w^p(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|f \Theta g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w} \|g\|_{1,w} \quad (4.57)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca  $L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach modül olduğu Yardımcı Teorem 4.2.3 de gösterildi. O halde

$$\|f \Theta g\|_{p,w} \leq \|f\|_{1,w} \|g\|_{p,w} \quad (4.58)$$

yazılır. Böylece (4.57) ve (4.58) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\|f \Theta g\|_{S_w^\ominus} &= \|f \Theta g\|_{L_w^1} + \|f \Theta g\|_{L_w^p} \\
&\leq \|f\|_{L_w^1} \|g\|_{L_w^1} + \|f\|_{L_w^1} \|g\|_{L_w^p} \\
&= \|f\|_{L_w^1} (\|g\|_{L_w^1} + \|g\|_{L_w^p}) \\
&\leq \|f\|_{S_w^\ominus} \|g\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Banach cebiri olmanın diğer koşullarını göstermek kolaydır. O halde  $L_w^1(\mathbb{R}^d) \cap L_w^p(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayıdır.

Şimdi  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayını tanımlayabiliriz.

**Tanım 4.2.5:**  $w, \mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun.  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesini

$$S_w^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \mid F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu uzay bir vektör uzayıdır. Gerçekten de, herhangi iki  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  verildiğinde  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f, F_\alpha g \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olup,  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  birer vektör uzayı olduklarından  $f + g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f + F_\alpha g \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Ayrıca kesirli Fourier dönüşümü doğrusal olduğundan

$$F_\alpha(f + g) = F_\alpha f + F_\alpha g$$

olup  $F_\alpha(f + g) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Buradan  $f + g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  elde edilir.

Yine herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  ve  $\gamma \in K$  verildiğinde  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olup,  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  birer vektör uzayı olduklarından  $\gamma f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $\gamma F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Kesirli Fourier dönüşümü doğrusal olduğundan

$$F_\alpha(\gamma f) = \gamma F_\alpha f$$

olup  $F_\alpha(\gamma f) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Böylece  $\gamma f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  elde edilir.  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının, vektör uzayı olmanın diğer koşullarını sağladığını göstermek kolaydır.

**Önerme 4.2.6:** Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  vektör uzayı üzerinde tanımlı

$$\|f\|_{S_w^\alpha} = \|f\|_{1,w} + \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}$$

fonksiyonu bir normdur.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olup,  $(L_w^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,w})$  ve  $(S_w^\ominus(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_w^\ominus})$  uzayları normlu uzaylar olduklarından üzerlerinde tanımlı olan  $\|f\|_{1,w}$  ve  $\|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}$  normlarının toplamının oluşturduğu  $\|f\|_{S_w^\alpha}$  fonksiyonu da  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı üzerinde bir normdur.

**Önerme 4.2.7:**  $(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_w^\alpha})$  normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

**İspat:**  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayında  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi verilsin. O halde verilen her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n, m \geq n_0$  için

$$\|g_m - g_n\|_{S_w^\alpha} = \|g_m - g_n\|_{1,w} + \|F_\alpha(g_m - g_n)\|_{S_w^\ominus} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Böylece her  $n, m \geq n_0$  için

$$\|g_m - g_n\|_{1,w} < \varepsilon$$

ve

$$\|F_\alpha(g_m - g_n)\|_{S_w^\ominus} = \|F_\alpha g_m - F_\alpha g_n\|_{S_w^\ominus} < \varepsilon$$

olup,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $(F_\alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri sırasıyla  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzaylarında birer Cauchy dizisi olurlar. Ayrıca  $(L_w^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,w})$  ve  $(S_w^\ominus(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_w^\ominus})$  uzayları birer Banach uzayı olduklarından,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonuna,  $(F_\alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi de  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $h \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonuna yakınsar. O halde herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n \geq n_1$  için

$$\|g_m - g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.59}$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|F_\alpha g_m - h\|_{S_w^\ominus} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.60)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır.  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,w} \leq \|\cdot\|_{S_w^\ominus}$  eşitsizliği kullanılarak, aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_1$  için

$$\|g_n - g\|_1 \leq \|g_n - g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|F_\alpha g_n - h\|_1 \leq \|F_\alpha g_n - h\|_{1,w} \leq \|F_\alpha g_n - h\|_{S_w^\ominus} < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. Yani  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $(F_\alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri sırasıyla  $g$  ve  $h$  fonksiyonlarına yakınsaktırlar. Şimdi hemen hemen her yerde  $F_\alpha g = h$  olduğunu gösterelim.  $(F_\alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $h$  fonksiyonuna yakınsadığından bu dizinin  $h$  fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsayan bir  $(F_\alpha g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  alt dizisi vardır. Eğer  $(F_\alpha g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  alt dizisinin  $h$  fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesi  $A$  ile gösterilirse  $\mu(A) = 0$  olur. Böylece her  $u \notin A$  ve aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $n \geq n_3$  olduğunda

$$|F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.61)$$

olacak şekilde bir  $n_3 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Yine  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g$  fonksiyonuna yakınsadığından bu dizinin  $(g_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$  alt dizisi de  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında aynı  $g$  fonksiyonuna yakınsaktır. Bu takdirde aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_4$  için

$$\|g_{n_k} - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha_j}{2\pi}}} \quad (4.62)$$

olacak şekilde bir  $n_4 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $n_5 = \max\{n_3, n_4\}$  denir, (4.61) ve

(4.62) ifadeleri kullanılırsa her  $n \geq n_\varepsilon$  ve  $u \notin A$  için

$$\begin{aligned}
|F_\alpha g(u) - h(u)| &= |F_\alpha g(u) - F_\alpha g_{n_k}(u) + F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| \\
&\leq |F_\alpha g_{n_k}(u) - F_\alpha g(u)| + |F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| \\
&= |F_\alpha (g_{n_k} - g)(u)| + |F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| \\
&= \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \\
&\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g_{n_k} - g)(t) \exp\left( \sum_{j=1}^d \frac{i}{2} (u_j^2 + t_j^2) \cot \alpha_j - i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j \right) dt \right| \\
&\quad + |F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| \\
&\leq \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^d} |(g_{n_k} - g)(t)| dt + |F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| \\
&= \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \|g_{n_k} - g\|_1 + |F_\alpha g_{n_k}(u) - h(u)| \\
&< \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \frac{\varepsilon}{2 \prod_{j=1}^d \left| \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. O halde hemen hemen her yerde  $F_\alpha g = h$  olur. Şimdi  $N = \max\{n_1, n_2\}$  olsun. Eğer (4.59) ve (4.60) ifadeleri kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık ve her  $n \geq N$  için

$$\begin{aligned}
\|g_n - g\|_{S_w^\alpha} &= \|g_n - g\|_{1,w} + \|F_\alpha (g_n - g)\|_{S_w^\circ} \\
&= \|g_n - g\|_{1,w} + \|F_\alpha g_n - F_\alpha g\|_{S_w^\circ} \\
&= \|g_n - g\|_{1,w} + \|F_\alpha g_n - h\|_{S_w^\circ} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha g = h \in S_w^\circ(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Böylece  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayında  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonuna yakınsar. O halde  $(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_w^\alpha})$  normlu uzay bir Banach uzayıdır.

**Önerme 4.2.8:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olsun. Bu takdirde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

*İspat:*  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının Banach uzayı olduğu Önerme 4.2.7 de gösterildi. Herhangi  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  verilsin.  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının tanımından  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f, F_\alpha g \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Yine  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğundan

$$\|f \Theta g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w} \|g\|_{1,w} \quad (4.63)$$

yazılır. Ayrıca  $F_\alpha f$  tanımı ve 2.1.32. Teorem kullanılırsa her  $u \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned} |F_\alpha(f \Theta g)(u)| &= \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2\pi}{1-i \cot \alpha_j}} \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) F_\alpha f(u) F_\alpha g(u) \right| \\ &= \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2\pi}{1-i \cot \alpha_j}} \right| |F_\alpha g(u)| \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \right| \\ &\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} (u_j^2 + t_j^2) \cot \alpha_j - i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dt \right| \\ &\leq |F_\alpha g(u)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| dt \\ &\leq |F_\alpha g(u)| \|f\|_{1,w} \end{aligned} \quad (4.64)$$

olur. Yine  $F_\alpha(f \Theta g)$  fonksiyonu sürekli olduğundan ölçülebilirdir. Böylece  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olduğundan ve (4.64) eşitsizliğinden  $F_\alpha(f \Theta g) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ve

$$\|F_\alpha(f \Theta g)\|_{S_w^\ominus} \leq \|F_\alpha g\|_{S_w^\ominus} \|f\|_{1,w} = \|F_\alpha g\|_{S_w^\ominus} \|f\|_{1,w} \quad (4.65)$$

bulunur. Buradan (4.63) ve (4.65) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \|f \Theta g\|_{S_w^\alpha} &= \|f \Theta g\|_{1,w} + \|F_\alpha(f \Theta g)\|_{S_w^\ominus} \\ &\leq \|f\|_{1,w} \|g\|_{1,w} + \|F_\alpha g\|_{S_w^\ominus} \|f\|_{1,w} \\ &= \|f\|_{1,w} \left( \|g\|_{1,w} + \|F_\alpha g\|_{S_w^\ominus} \right) \\ &= \|f\|_{1,w} \|g\|_{S_w^\alpha} \\ &\leq \|f\|_{S_w^\alpha} \|g\|_{S_w^\alpha} \end{aligned} \quad (4.66)$$

elde edilir. Banach cebiri olmanın diğer koşullarını göstermek kolaydır. O halde

$S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

**Önerme 4.2.9:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olsun. Bu takdirde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach idealidir.

*İspat:* Herhangi  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  verilsin.  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının tanımından  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha g \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Yine  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre Banach cebiri olduğundan  $f \Theta g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  dir. Ayrıca  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olduğundan, Önerme 4.2.8 in ispatı dikkate alınarak,  $F_\alpha(f \Theta g) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olup  $f \Theta g = g \Theta f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  bulunur.  $\|\cdot\|_{S_w^\alpha}$  normunun tanımından  $\|\cdot\|_{L_w^1} \leq \|\cdot\|_{S_w^\alpha}$  eşitsizliği sağlanır. Yine (4.65) ifadesinden

$$\|f \Theta g\|_{S_w^\alpha} \leq \|f\|_{L_w^1} \|g\|_{S_w^\alpha}$$

yazılır. O halde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre bir Banach idealidir.

**Önerme 4.2.10:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay ve  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olsun. Bu takdirde her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d)$  ve  $v = (-y_1 \sin \alpha_1, \dots, -y_d \sin \alpha_d)$  olmak üzere her  $f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow M_v T_b f$  fonksiyonu süreklidir.

*İspat:* Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d)$  ve  $v = (-y_1 \sin \alpha_1, \dots, -y_d \sin \alpha_d)$  olmak üzere  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $\mathbb{R}^d$  kümesine  $l(y) = b$  ve  $k(y) = v$  biçiminde tanımlı  $l$  ve  $k$  fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. Yine  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayının tanımı ve 2.1.53. Önerme kullanılırsa herhangi bir  $f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı

$$y \rightarrow T_y f \text{ ve } y \rightarrow M_y f \quad (4.67)$$

fonksiyonları sürekli olur. Böylece  $l$  ve  $k$  fonksiyonlarının (4.67) fonksiyonları ile bileşkesi olan  $y \rightarrow T_b f$  ve  $y \rightarrow M_v f$  fonksiyonları da sürekli olur. Herhangi bir

$y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*) \in \mathbb{R}^d$  ve herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.  
 $b^* = (y_1^* \cos \alpha_1, \dots, y_d^* \cos \alpha_d)$ ,  $v^* = (-y_1^* \sin \alpha_1, \dots, -y_d^* \sin \alpha_d)$  olmak üzere  
 $\|y - y^*\| < \delta_1$  olduğunda

$$\|T_b f - T_{b^*} f\|_{S_w^\ominus} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.68)$$

olacak şekilde bir  $\delta_1 > 0$  sayısı vardır. Yine  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan  $T_{b^*} f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olup, aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y - y^*\| < \delta_2$  olduğunda, 2.1.53. Önermedeki (ii) kullanılırsa

$$\|M_v(T_{b^*} f) - M_{v^*}(T_{b^*} f)\|_{S_w^\ominus} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.69)$$

olacak şekilde bir  $\delta_2 > 0$  sayısı vardır. Eğer  $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  denirse, 2.1.53. Önerme gereği,  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayının karakter işlemcisi altında kuvvetli olarak değişmez olduğu ve (4.68), (4.69) eşitsizlikleri dikkate alınır aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y - y^*\| < \delta_3$  olduğunda

$$\begin{aligned} \|M_v T_b f - M_{v^*} T_{b^*} f\|_{S_w^\ominus} &= \|M_v T_b f - M_v T_{b^*} f + M_v T_{b^*} f - M_{v^*} T_{b^*} f\|_{S_w^\ominus} \\ &\leq \|M_v T_b f - M_v T_{b^*} f\|_{S_w^\ominus} + \|M_v T_{b^*} f - M_{v^*} T_{b^*} f\|_{S_w^\ominus} \\ &= \|M_v(T_b f - T_{b^*} f)\|_{S_w^\ominus} + \|M_v(T_{b^*} g) - M_{v^*}(T_{b^*} g)\|_{S_w^\ominus} \\ &= \|T_b f - T_{b^*} f\|_{S_w^\ominus} + \|M_v(T_{b^*} g) - M_{v^*}(T_{b^*} g)\|_{S_w^\ominus} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow M_v T_b f$  fonksiyonu süreklidir.

**Teorem 4.2.11:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olsun.

i)  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmezdir ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için

$$\|T_y f\|_{S_w^\alpha} \leq w(y) \|f\|_{1,w} + w(y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d) \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii)  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olsun. O halde her  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y f$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:** i) Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  verilsin. Buradan  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $T_y f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olduğu ve

$$\|T_y f\|_{1,w} \leq w(y) \|f\|_{1,w} \quad (4.70)$$

eşitsizliğinin sağlandığı (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. Yine  $b = (y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d)$  ve  $v = (-y_1 \sin \alpha_1, \dots, -y_d \sin \alpha_d)$  denirse (2.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_\alpha(T_y f)(u) &= \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d -i u_j y_j \sin \alpha_j\right) T_b F_\alpha f(u) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_v T_b F_\alpha f(u) \end{aligned} \quad (4.71)$$

yazılır. Ayrıca her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b \in \mathbb{R}^d$  olup  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan  $T_b F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  dır. Yine  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olduğundan, 2.1.53. Önerme gereği, bu uzay karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmezdir. Böylece her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $v \in \mathbb{R}^d$  olduğundan

$M_v T_b F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Son olarak  $\exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \in \mathbb{C}$  olup  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$

bir vektör uzayı olduğundan

$$\exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_v T_b F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$$

bulunur. Yani  $F_\alpha(T_y f) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  dır. Bu takdirde  $T_y f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Ayrıca  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmez olduğundan ve (4.71) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha(T_y f)\|_{S_w^\ominus} &= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_v T_b F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \\
&= \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \right| \|M_v T_b F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&= \|T_b F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&\leq w(b) \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

yazılır. O halde (4.70) ve (4.72) ifadelerinden

$$\|T_y f\|_{S_w^\alpha} \leq w(y) \|f\|_{L_{1,w}} + w(y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d) \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \tag{4.73}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y f$  fonksiyonu sürekliliğini göstermek için 0 noktasındaki sürekliliği göstermek yeterlidir. Şimdi  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  olacak şekilde bir  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$  dizisi verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
\|T_{y_n} f - f\|_{S_w^\alpha} &= \|T_{y_n} f - f\|_{L_{1,w}} + \|F_\alpha(T_{y_n} f - f)\|_{S_w^\ominus} \\
&= \|T_{y_n} f - f\|_{L_{1,w}} + \|F_\alpha T_{y_n} f - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olup  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y f$  fonksiyonu sürekli olduğu (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  olduğunda  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{y_n} f = f$  olur. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $n \geq n_1$  için

$$\|T_{y_n} f - f\|_{L_{1,w}} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.74}$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri, koordinat dizileri sırasıyla her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $b_{nj} = y_{nj} \cos \alpha_j$ ,  $v_{nj} = -y_{nj} \sin \alpha_j$  olacak şekilde tanımlanırsa (4.71) eşitliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha(T_{y_n}f - f)\|_{S_w^\ominus} &= \|F_\alpha(T_{y_n}f) - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f - F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \\
&= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f \right. \\
&\quad \left. - \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) F_\alpha f \right. \\
&\quad \left. + \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) F_\alpha f - F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \\
&\leq \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \right| \left\| (M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f - F_\alpha f) \right\|_{S_w^\ominus} \\
&\quad + \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1 \right| \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&= \left\| (M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f - F_\alpha f) \right\|_{S_w^\ominus} + \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1 \right| \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $b = (y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d)$  ve  $v = (-y_1 \sin \alpha_1, \dots, -y_d \sin \alpha_d)$  olmak üzere  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow M_v T_b F_\alpha f$  fonksiyonunun sürekli olduğu Önerme 4.2.10 da gösterildi. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  olduğunda  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f = F_\alpha f$  olup, aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.75)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$h_n = \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1$$

olsun. Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  olduğundan  $1 \leq j \leq d$  olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{nj} = 0$  olup

$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  olur. Böylece aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için

$$|h_n| = \left| \exp \left( \sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j \right) - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{3 \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}} \quad (4.76)$$

olacak şekilde bir  $n_3 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$  alınır (4.74), (4.75) ve (4.76) ifadeleri kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_0$  için

$$\begin{aligned} \|T_{y_n} f - f\|_{S_w^\alpha} &= \|T_{y_n} f - f\|_{1,w} + \|F_\alpha(T_{y_n} f) - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\ &\leq \|T_{y_n} f - f\|_{1,w} + \|(M_{v_n} T_{b_n} F_\alpha f - F_\alpha f)\|_{S_w^\ominus} \\ &\quad + \left| \exp \left( \sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j \right) - 1 \right| \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3 \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}} \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y f$  fonksiyonu süreklidir.

**Önerme 4.2.12:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay ve  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olsun. Bu takdirde her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $c = (z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  ve  $a = (z_1 \cos \alpha_1, \dots, z_d \cos \alpha_d)$  olmak üzere her  $f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow M_a T_c f$  fonksiyonu süreklidir.

*İspat:* Önerme 4.2.10 nun ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.2.13:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olsun.

i)  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı karakter fonksiyonu altında değizmezdir ve her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için

$$\|M_z f\|_{S_w^\alpha} \leq \|f\|_{1,w} + w(z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d) \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii)  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olsun. O halde her  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $z \rightarrow M_z f$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:** i) Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  verilsin. Buradan  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $M_z f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve

$$\|M_z f\|_{1,w} = \|f\|_{1,w} \quad (4.77)$$

yazılır. Yine  $c = (z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  ve  $a = (z_1 \cos \alpha_1, \dots, z_d \cos \alpha_d)$  denirse (2.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_\alpha(M_z f)(u) &= \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d i u_j z_j \cos \alpha_j\right) T_c F_\alpha f(u) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_a T_c F_\alpha f(u) \end{aligned} \quad (4.78)$$

yazılır. Ayrıca her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $c \in \mathbb{R}^d$  olup  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan  $T_c F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  dir. Yine  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olduğundan, 2.1.53. Önerme gereği, bu uzay karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmezdir. Böylece her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $a \in \mathbb{R}^d$  olup  $M_a T_c F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Son olarak  $\exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \in \mathbb{C}$  olup  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$

bir vektör uzayı olduğundan

$$\exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_a T_c F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$$

bulunur. Yani  $F_\alpha(M_z f) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  dir. Bu takdirde  $M_z f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Ayrıca  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmez olduğundan ve (4.78) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|F_\alpha(M_z f)\|_{S_w^\ominus} &= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_a T_c F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \\ &= \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \right| \|M_a T_c F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\ &= \|T_c F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\ &\leq w(c) \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \end{aligned} \quad (4.79)$$

yazılır. O halde (4.77) ve (4.79) ifadelerinden

$$\|M_z f\|_{S_w^\alpha} \leq \|f\|_{L_{1,w}} + w(z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d) \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $z \rightarrow M_z f$  fonksiyonu sürekliliğini göstermek için 0 noktasındaki sürekliliği göstermek yeterlidir. Şimdi  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  olacak şekilde bir  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$  dizisi verilsin. Buradan

$$\begin{aligned} \|M_{z_n} f - f\|_{S_w^\alpha} &= \|M_{z_n} f - f\|_{L_{1,w}} + \|F_\alpha (M_{z_n} f - f)\|_{S_w^\ominus} \\ &= \|M_{z_n} f - f\|_{L_{1,w}} + \|F_\alpha M_{z_n} f - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olup  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $z \rightarrow M_z f$  fonksiyonu sürekli olduğu (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  olduğunda  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{z_n} f = f$  olur. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $n \geq n_1$  için

$$\|M_{z_n} f - f\|_{L_{1,w}} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.80)$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri, koordinat dizileri sırasıyla her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq j \leq d$  için  $a_{nj} = z_{nj} \cos \alpha_j$ ,  $c_{nj} = z_{nj} \sin \alpha_j$  olacak şekilde tanımlanırsa (4.78) eşitliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \|F_\alpha (M_{z_n} f - f)\|_{S_w^\ominus} &= \|F_\alpha (M_{z_n} f) - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\ &= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f - F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \\ &= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) F_\alpha f \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) F_\alpha f - F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha(M_{z_n}f - f)\|_{S_w^\ominus} &\leq \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \right| \|(M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f - F_\alpha f)\|_{S_w^\ominus} \\
&\quad + \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1 \right| \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&= \|(M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f - F_\alpha f)\|_{S_w^\ominus} + \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1 \right| \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca her  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $c = (z_1 \sin \alpha_1, \dots, z_d \sin \alpha_d)$  ve  $a = (z_1 \cos \alpha_1, \dots, z_d \cos \alpha_d)$  olmak üzere  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow M_a T_c F_\alpha f$  fonksiyonunun sürekli olduğu Önerme 4.2.12 den biliniyor. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  olduğunda  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f = F_\alpha f$  olup, aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.81)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$k_n = \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1$$

olsun. Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  olduğundan  $1 \leq j \leq d$  olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{nj} = 0$  olup  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$  olur. Böylece aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için

$$|k_n| = \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{3 \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}} \quad (4.82)$$

olacak şekilde bir  $n_3 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$  alınır (4.80), (4.81) ve (4.82) ifadeleri kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_0$  için

$$\begin{aligned}
\|M_{z_n}f - f\|_{S_w^\alpha} &= \|M_{z_n}f - f\|_{1,w} + \|F_\alpha(M_{z_n}f) - F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&\leq \|M_{z_n}f - f\|_{1,w} + \|(M_{a_n} T_{c_n} F_\alpha f - F_\alpha f)\|_{S_w^\ominus} \\
&\quad + \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} z_{nj}^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) - 1 \right| \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned}$$

$$\|M_{z_n} f - f\|_{S_w^\alpha} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}} \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} = \varepsilon$$

bulunur. O halde  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $z \rightarrow M_z f$  fonksiyonu süreklidir.

**Teorem 4.2.14:**  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun.

i) Her  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $T_y M_\gamma f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur ve

$$\|T_y M_\gamma f\|_{S_w^\alpha} \leq w(y) \|f\|_{S_w^\alpha} \quad (4.83)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii)  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olsun. O halde her  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma f$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:** i) Herhangi bir  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  verilsin. Buradan  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  olup  $M_\gamma f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve

$$\|M_\gamma f\|_{L_w^1} = \|f\|_{L_w^1} \quad (4.84)$$

yazılır. Böylece  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının öteleme işlemcisi altında değişmezliği ve (4.70) eşitsizliğinden

$$\|T_y M_\gamma f\|_{L_w^1} \leq w(y) \|f\|_{L_w^1} \quad (4.85)$$

bulunur. Ayrıca (4.71) eşitliğinden  $b = (y_1 \cos \alpha_1, \dots, y_d \cos \alpha_d)$  olmak üzere

$$F_\alpha(T_y M_\gamma f)(u) = \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d -i u_j y_j \sin \alpha_j\right) \quad (4.86)$$

$$F_\alpha(M_\gamma f)(u - b)$$

olur. Yine (4.78) eşitliğinden

$$c = (\gamma_1 \sin \alpha_1, \dots, \gamma_d \sin \alpha_d) = (-y_1 \cos \alpha_1, \dots, -y_d \cos \alpha_d) = -b$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
F_\alpha(M_\gamma f)(u-b) &= \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} \gamma_j^2 \sin \alpha_j \cos \alpha_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d i(u_j-b_j) \gamma_j \cos \alpha_j\right) \\
&\quad F_\alpha f(u-b+b) \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} y_j^2 \frac{\cos^3 \alpha_j}{\sin \alpha_j}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d -iu_j y_j \frac{\cos^2 \alpha_j}{\sin \alpha_j} + iy_j^2 \frac{\cos^3 \alpha_j}{\sin \alpha_j}\right) \\
&\quad F_\alpha f(u) \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \frac{\cos^3 \alpha_j}{\sin \alpha_j}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d -iu_j y_j \frac{\cos^2 \alpha_j}{\sin \alpha_j}\right) F_\alpha f(u)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlik (4.86) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_\alpha(T_y M_\gamma f)(u) &= \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cos \alpha_j \left(\sin \alpha_j + \frac{\cos^2 \alpha_j}{\sin \alpha_j}\right)\right) \\
&\quad \exp\left(\sum_{j=1}^d -iu_j y_j \left(\sin \alpha_j + \frac{\cos^2 \alpha_j}{\sin \alpha_j}\right)\right) F_\alpha f(u) \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^d -iu_j y_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) F_\alpha f(u)
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer  $\tau = (-y_1 \operatorname{cosec} \alpha_1, \dots, -y_d \operatorname{cosec} \alpha_d)$  alınırsa

$$F_\alpha(T_y M_\gamma f)(u) = \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) M_\tau F_\alpha f(u) \quad (4.87)$$

elde edilir. Yine  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı katı uzay olduğundan 2.1.53. Önerme gereği, bu uzay karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmezdir. O halde her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\tau \in \mathbb{R}^d$  olduğundan  $M_\tau F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Ayrıca

$\exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) \in \mathbb{C}$  olup  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir vektör uzayı olduğundan

$$\exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) M_\tau F_\alpha f \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$$

bulunur. Yani  $F_\alpha(T_y M_\gamma f) \in S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olur. Böylece (4.85) ifadesi dikkate alınarak  $T_y M_\gamma f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  elde edilir. Diğer yandan  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayı karakter fonksiyonu altında kuvvetli olarak değişmez olduğundan ve (4.87) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha(T_y M_\gamma f)\|_{S_w^\ominus} &= \left\| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) M_\tau F_\alpha f \right\|_{S_w^\ominus} \\
&= \left| \exp\left(\sum_{j=1}^d \frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) \right| \|M_\tau F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \\
&= \|M_\tau F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} = \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

yazılır. O halde (4.85) ve (4.88) ifadelerinden

$$\|T_y M_\gamma f\|_{S_w^\alpha} \leq w(y) \|f\|_{l,w} + \|F_\alpha f\|_{S_w^\ominus} \leq w(y) \|f\|_{S_w^\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) İlk olarak  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma f$  fonksiyonunun 0 noktasındaki sürekliliğini gösterelim. Yine  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $\mathbb{R}^d$  kümesine  $l(y) = \gamma$  biçiminde tanımlı  $l$  fonksiyonu süreklidir. Ayrıca  $C_c(\mathbb{R}^d) \cap S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olduğundan Teorem 4.2.13 (ii) gereği her  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı

$$y \rightarrow M_\gamma f \tag{4.89}$$

fonksiyonu süreklidir. Böylece  $l$  fonksiyonu ile (4.89) fonksiyonunun bileşkesi olan  $y \rightarrow M_\gamma f$  fonksiyonu da sürekli olur. Buradan herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $\|y\| < \delta_1$  olduğunda

$$\|M_\gamma f - f\|_{S_w^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.90}$$

olacak şekilde bir  $\delta_1 > 0$  sayısı vardır. Ayrıca Teorem 4.2.13 (i) den her  $y \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$  olmak üzere  $M_\gamma f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. O halde Teorem 4.2.11 (ii) den aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y\| < \delta_2$  olduğunda

$$\|T_y(M_\gamma f) - M_\gamma f\|_{S_w^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.91}$$

olacak şekilde bir  $\delta_2 > 0$  sayısı vardır. Eğer  $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  alınırsa (4.90) ve (4.91)

eşitsizlikleri dikkate alınarak aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y\| < \delta_3$  olduğunda

$$\begin{aligned}
\|T_y(M_\gamma f) - f\|_{S_w^\alpha} &= \|T_y(M_\gamma f) - M_\gamma f + M_\gamma f - f\|_{S_w^\alpha} \\
&\leq \|T_y(M_\gamma f) - M_\gamma f\|_{S_w^\alpha} + \|M_\gamma f - f\|_{S_w^\alpha} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.92}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma f$  fonksiyonu 0 noktasındaki süreklidir. Şimdi keyfi sabit bir  $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*) \in \mathbb{R}^d$  noktasında bu fonksiyonun sürekli olduğunu gösterelim. Öncelikle  $\gamma^* = (-y_1^* \cot \alpha_1, \dots, -y_d^* \cot \alpha_d)$  olmak üzere her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned}
T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} (T_{y^*} M_{\gamma^*} f)(x) &= M_{\gamma-\gamma^*} (T_{y^*} M_{\gamma^*} f)(x-y+y^*) \\
&= \exp(i(\gamma-\gamma^*)(x-y+y^*)) \\
&\quad (T_{y^*} M_{\gamma^*} f)(x-y+y^*) \\
&= \exp(i(\gamma-\gamma^*)(x-y+y^*)) \\
&\quad (M_{\gamma^*} f)(x-y+y^*-y^*) \\
&= \exp(i(\gamma-\gamma^*)(x-y+y^*)) \\
&\quad \exp(i\gamma^*(x-y)) f(x-y) \\
&= \exp(iy^* \gamma - iy^* \gamma^*) \exp(i\gamma(x-y)) f(x-y) \\
&= \exp(iy^* \gamma - iy^* \gamma^*) T_y M_\gamma f(x)
\end{aligned} \tag{4.93}$$

olur. Böylece bun son eşitlik kullanılarak

$$\|T_y M_\gamma f - T_{y^*} M_{\gamma^*} f\|_{S_w^\alpha} = \|\exp(iy^* \gamma - iy^* \gamma^*) T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} (T_{y^*} M_{\gamma^*} f) - T_{y^*} M_{\gamma^*} f\|_{S_w^\alpha}$$

yazılır. Teoremin i. bölümü gereği keyfi sabit bir  $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*) \in \mathbb{R}^d$  için

$T_{y^*} M_{\gamma^*} f = g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|T_y M_\gamma f - T_{y^*} M_{\gamma^*} f\|_{S_w^\alpha} &= \|\exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - g\|_{S_w^\alpha} \\
&= \|\exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - \exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) g \\
&\quad + \exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) g - g\|_{S_w^\alpha} \\
&\leq \|\exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - \exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) g\|_{S_w^\alpha} \\
&\quad + \|\exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma) g - g\|_{S_w^\alpha} \tag{4.94} \\
&= |\exp(iy^* \gamma^* - iy^* \gamma)| \|T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - g\|_{S_w^\alpha} \\
&\quad + \|g\|_{S_w^\alpha} \left| 1 - \frac{\exp(iy^* \gamma^*)}{\exp(iy^* \gamma)} \right| \\
&= \|T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - g\|_{S_w^\alpha} + \|g\|_{S_w^\alpha} |\exp(iy^* \gamma) - \exp(iy^* \gamma^*)|
\end{aligned}$$

bulunur. Sabit bir  $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*) \in \mathbb{R}^d$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $\mathbb{C}$  kümesine tanımlı  $k(y) = \exp(iy^* y)$  fonksiyonu süreklidir. O halde  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $\mathbb{C}$  kümesine tanımlı  $k \circ l(y) = \exp(iy^* \gamma)$  bileşke fonksiyonu da sürekli olur. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $\|y - y^*\| < \delta_4$  olduğunda

$$|\exp(iy^* \gamma) - \exp(iy^* \gamma^*)| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{S_w^\alpha}} \tag{4.95}$$

olacak şekilde bir  $\delta_4 > 0$  sayısı vardır. Yine  $y \rightarrow T_y M_\gamma f$  fonksiyonu 0 noktasında sürekli olduğundan aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y - y^*\| < \delta_5$  olduğunda

$$\|T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - g\|_{S_w^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.96}$$

olacak şekilde bir  $\delta_5 > 0$  sayısı vardır. Eğer  $\delta_6 = \min\{\delta_4, \delta_5\}$  alınırsa (4.94), (4.95) ve (4.96) eşitsizlikleri dikkate alınarak aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y - y^*\| < \delta_6$  olduğunda

$$\begin{aligned}
\|T_y M_\gamma f - T_{y^*} M_{\gamma^*} f\|_{S_w^\alpha} &\leq \|T_{y-y^*} M_{\gamma-\gamma^*} g - g\|_{S_w^\alpha} \\
&\quad + \|g\|_{S_w^\alpha} \left| \exp(iy^* \gamma) - \exp(iy^* \gamma^*) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon \|g\|_{S_w^\alpha}}{2 \|g\|_{S_w^\alpha}} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.97}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma f$  fonksiyonu keyfi sabit bir  $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*) \in \mathbb{R}^d$  noktasında süreklidir. O halde bu fonksiyon  $\mathbb{R}^d$  kümesinde sürekli olur.

**Örnek 4.2.15:**  $w$  ve  $\omega$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu olsunlar.  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında tanımlanan

$$A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \mid F_\alpha f \in L_\omega^p(\mathbb{R}^d) \right\}$$

$A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayını alalım. Eğer her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\omega(x) = w(x)$  ve  $p = 1$  alınırsa

$$B = \left\{ f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \mid F_\alpha f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \right\}$$

uzayı elde edilir. Bu uzay her  $f \in B$  için

$$\|f\|_B = \|f\|_{1,w} + \|F_\alpha f\|_{1,w}$$

normuyla bir  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayıdır. Yine her  $1 \leq i \leq d$  için  $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$  alınırsa,  $B$  uzayı (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasındaki  $S_{w,w}(\mathbb{R}^d)$  uzayı olur. Dolayısıyla  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $S_{w,w}(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir genelleştirmesidir.

#### 4.2.1. $S_w^\alpha$ Uzayının Kapsama Özellikleri

**Önerme 4.2.1.1:**  $w$ ,  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun. Her  $0 \neq g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$c(g)w(y) \leq \|T_y M_\gamma g\|_{S_w^\alpha} \leq w(y) \|g\|_{S_w^\alpha} \tag{4.98}$$

olacak şekilde bir  $c(g) > 0$  sayısı vardır.

**İspat:** Her  $0 \neq g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olur. Her  $0 \neq g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$c(g)w(y) \leq \|T_y g\|_{1,w} \leq w(y)\|g\|_{1,w} \quad (4.99)$$

eşitsizliğini sağlayan  $c(g) > 0$  sayısının varlığı (Fischer et al., 1996) çalışmasından biliniyor. Böylece (4.2), (4.88) ve (4.99) ifadeleri kullanılarak her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} c(g)w(y) &\leq \|T_y g\|_{1,w} \leq \|T_y M_\gamma g\|_{1,w} + \|F_\alpha(T_y M_\gamma g)\|_{S_w^\ominus} \\ &\leq w(y)\|g\|_{1,w} + \|F_\alpha g\|_{S_w^\ominus} \\ &\leq w(y)\|g\|_{1,w} + w(y)\|F_\alpha g\|_{S_w^\ominus} = w(y)\|g\|_{S_w^\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.98) eşitsizliği sağlanır.

**Yardımcı Teorem 4.2.1.2:**  $w_1$  ve  $w_2$   $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer  $S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  ise  $S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{S_{w_1}^\alpha} + \|\cdot\|_{S_{w_2}^\alpha}$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

**İspat:**  $(S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$  uzayında bir  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. O halde her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|g_n - g_m\| = \|g_n - g_m\|_{S_{w_1}^\alpha} + \|g_n - g_m\|_{S_{w_2}^\alpha} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Böylece her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|g_n - g_m\|_{S_{w_1}^\alpha} \leq \|g_n - g_m\| < \varepsilon$$

ve

$$\|g_n - g_m\|_{S_{w_2}^\alpha} \leq \|g_n - g_m\| < \varepsilon$$

olup,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $(S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_{w_1}^\alpha})$  ve  $(S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_{w_2}^\alpha})$  uzaylarında bir Cauchy dizisi olur. Ayrıca  $(S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_{w_1}^\alpha})$  ve  $(S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{S_{w_2}^\alpha})$  uzayları birer Banach uzayı olduklarından  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $g \in S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  elemanına,  $S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $h \in S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  elemanına yakınsar. O halde herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı

verildiğinde her  $n \geq n_1$  için

$$\|g_n - g\|_{S_{w_1}^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|g_n - h\|_{S_{w_2}^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,w_1} \leq \|\cdot\|_{S_{w_1}^\alpha}$  ve  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,w_2} \leq \|\cdot\|_{S_{w_2}^\alpha}$  eşitsizlikleri kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n \geq n_1$  için

$$\|g_n - g\|_1 \leq \|g_n - g\|_{1,w_1} \leq \|g_n - g\|_{S_{w_1}^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.100)$$

ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|g_n - h\|_1 \leq \|g_n - h\|_{1,w_2} \leq \|g_n - h\|_{S_{w_2}^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.101)$$

yazılır.  $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$  olsun. O halde aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için, (4.100) ve (4.101) ifadelerinden

$$\|g - h\|_1 = \|g - g_n + g_n - h\|_1 \leq \|g - g_n\|_1 + \|g_n - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup,  $g = h$  h.h.h. bulunur. Buradan aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için

$$\begin{aligned} \|g_n - g\| &= \|g_n - g\|_{S_{w_1}^\alpha} + \|g_n - g\|_{S_{w_2}^\alpha} \\ &= \|g_n - g\|_{S_{w_1}^\alpha} + \|g_n - h\|_{S_{w_2}^\alpha} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde  $(S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$  bir Banach uzayıdır.

**Önerme 4.2.1.3:**  $w_1$  ve  $w_2$   $\mathbb{R}^d$  üzerinde ağırlık fonksiyonları ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun. Eğer  $S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  ise  $w_2 \prec w_1$  olur.

**İspat:**  $S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olsun. Böylece herhangi bir  $g \in S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$g \in S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Ayrıca Önerme 4.2.1.1 gereği her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere

$$c_1 w_1(y) \leq \|T_y M_\gamma g\|_{S_{w_1}^\alpha} \leq c_2 w_1(y) \quad (4.102)$$

olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları ve

$$c_3 w_2(y) \leq \|T_y M_\gamma g\|_{S_{w_2}^\alpha} \leq c_4 w_2(y) \quad (4.103)$$

olacak şekilde  $c_3, c_4 > 0$  sayıları vardır. Ayrıca  $(S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$  uzayının Banach uzayı olduğu Yardımcı Teorem 4.2.1.2 de gösterildi. O halde kapalı grafik teoreminden her  $g \in S_{w_1}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|g\|_{S_{w_2}^\alpha} \leq c \|g\|_{S_{w_1}^\alpha}$$

olacak şekilde bir  $c > 0$  sayısı vardır. Ayrıca  $T_y M_\gamma g \in S_{w_2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olup,

$$\|T_y M_\gamma g\|_{S_{w_2}^\alpha} \leq c \|T_y M_\gamma g\|_{S_{w_1}^\alpha} \quad (4.104)$$

eşitsizliği vardır. Böylece (4.102), (4.103) ve (4.104) eşitsizliklerinden

$$c_3 w_2(y) \leq \|T_y M_\gamma g\|_{S_{w_2}^\alpha} \leq c \|T_y M_\gamma g\|_{S_{w_1}^\alpha} \leq c c_2 w_1(y)$$

olup,

$$w_2(y) \leq \frac{c c_2}{c_3} w_1(y)$$

bulunur. Eğer  $\frac{c c_2}{c_3} = k$  denirse her  $y \in \mathbb{R}^d$  için

$$w_2(y) \leq k w_1(y)$$

yazılır. Buradan  $w_2 \prec w_1$  elde edilir.

#### 4.2.2. $S_w^\alpha$ Uzayının Çarpanlar Uzayı

Bu bölümde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının çarpanlar uzayı araştırılacaktır. Bunun için önce  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre sıra değiştiren Banach cebiri olduğu gösterilecektir.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 4.2.14 (ii) deki adımlar izlenerek yapılır

**Teorem 4.2.2.1:** Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun.

i) Her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $T_y M_\gamma g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olur.

ii) Her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonu süreklidir.

**Önerme 4.2.2.2:**  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir yaklaşık birime sahiptir.

**İspat:**  $F \subset L_w^1(\mathbb{R}^d)$  herhangi bir sonlu alt küme olmak üzere  $F = \{g_1, \dots, g_n\}$  olsun. Teorem 4.2.2.1 gereği her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere herhangi bir  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlanan  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonu sürekli olduğundan herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $i = 1, \dots, n$  için  $\|y\| < \delta_i$  olduğunda

$$\|T_y M_\gamma g_i - g_i\|_{1,w} < \varepsilon$$

olacak şekilde  $\delta_i > 0$  sayıları vardır. Eğer  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  alınırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y\| < \delta$  iken

$$\|T_y M_\gamma g_i - g_i\|_{1,w} < \varepsilon \quad (4.105)$$

yazılır. şimdi  $\text{supp } u \subset B(0, \delta)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^d} u(x) dx = 1$  ve  $u \geq 0$  olacak şekilde bir

$u \in C_c(\mathbb{R}^d)$  alalım. Böylece her  $x \in \mathbb{R}^d$  ve  $i = 1, \dots, n$  için

$$\begin{aligned}
(u \Theta g_i)(x) - g_i(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) T_y M_\gamma g_i(x) dy - g_i(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) T_y M_\gamma g_i(x) dy + \int_{\mathbb{R}^d} u(y) g_i(x) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) (T_y M_\gamma g_i(x) - g_i(x)) dy
\end{aligned} \tag{4.106}$$

yazılır. Böylece (4.105) ve (4.106) ifadeleri kullanılarak aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $i = 1, \dots, n$  iken

$$\begin{aligned}
\|(u \Theta g_i) - g_i\|_{1,w} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} u(y) (T_y M_\gamma g_i - g_i) dy \right\|_{1,w} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|u(y) (T_y M_\gamma g_i - g_i)\|_{1,w} dy \\
&= \int_{\text{supp } u} |u(y)| \|T_y M_\gamma g_i - g_i\|_{1,w} dy \\
&< \varepsilon \int_{\text{supp } u} u(y) dy = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. O halde 2.1.46. Önermeden  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir yaklaşık birime sahiptir.

$L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $\Theta$  girişim işlemine göre bir yaklaşık birime sahip olduğundan sıra değiştiremez Banach cebiridir.

Bu kısımdan itibaren uzaylar üzerinde çarpma işlemi olarak  $\Theta$  girişim işlemi alınacaktır.

**Tanım 4.2.2.3:**  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  Banach cebirinin bir  $T$  çarpanı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı sürekli, doğrusal ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere  $T_y M_\gamma$  işlemcisiyle değişmeli olan bir dönüşümdür ve  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  cebirinin çarpanlarının kümesi  $M(L_w^1(\mathbb{R}^d))$  ile gösterilir.

**Önerme 4.2.2.4:** Her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olsun. Bu takdirde her  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$T_y M_\gamma f \Theta g = f \Theta T_y M_\gamma g \tag{4.107}$$

eşitliği vardır.

**İspat:** Her  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned} (T_y M_\gamma f \Theta g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} T_y M_\gamma f(z) g(x-z) \exp\left(\sum_{j=1}^d iz_j(z_j - x_j) \cot \alpha_j\right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z-y) g(x-z) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j - z_j) \cot \alpha_j\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{j=1}^d iz_j(z_j - x_j) \cot \alpha_j\right) dz \end{aligned}$$

yazılır. Eğer  $u = z - y$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} (T_y M_\gamma f \Theta g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) g(x-u-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d -iu_j y_j \cot \alpha_j\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{j=1}^d i(u_j + y_j)(u_j + y_j - x_j) \cot \alpha_j\right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) g(x-u-y) \\ &\quad \exp\left(\sum_{j=1}^d i(u_j^2 + y_j^2 + u_j y_j - x_j u_j - y_j x_j) \cot \alpha_j\right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) g(x-u-y) \exp\left(\sum_{j=1}^d iy_j(y_j + u_j - x_j) \cot \alpha_j\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{j=1}^d iu_j(u_j - x_j) \cot \alpha_j\right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) T_y M_\gamma g(x-u) \exp\left(\sum_{j=1}^d iu_j(u_j - x_j) \cot \alpha_j\right) du \\ &= f \Theta T_y M_\gamma g(x) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik her  $x \in \mathbb{R}^d$  için sağlandığından (4.107) eşitliği elde edilir.

Şimdi 2.1.56. Tanımda ifade edilen Banach cebirlerinin çarpanlar tanımının,  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  Banach cebiri için verilen Tanım 4.2.2.3 ile denk olduğunu söyleyen aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 4.2.2.5:**  $T, L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu takdirde  $T \in M(L_w^1(\mathbb{R}^d))$  olması için gerekli ve yeterli koşul her  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$T(f \ominus g) = Tf \ominus Tg = f \ominus Tg \quad (4.108)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

*İspat:* İlk olarak her  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için (4.108) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. O halde herhangi bir  $h \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned} f \ominus T(\lambda g + \beta h) &= Tf \ominus (\lambda Tg + \beta Th) \\ &= Tf \ominus \lambda Tg + Tf \ominus \beta Th \\ &= \lambda(Tf \ominus Tg) + \beta(Tf \ominus Th) \\ &= \lambda(f \ominus Tg) + \beta(f \ominus Th) \\ &= (f \ominus \lambda Tg) + (f \ominus \beta Th) \\ &= f \ominus (\lambda Tg + \beta Th) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$f \ominus T(\lambda g + \beta h) - f \ominus (\lambda Tg + \beta Th) = 0$$

olup

$$f \ominus (T(\lambda g + \beta h) - (\lambda Tg + \beta Th)) = 0$$

olur.  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  cebiri sıra değiştiren Banach cebiri olduğundan

$$T(\lambda g + \beta h) = \lambda Tg + \beta Th$$

bulunur. O halde  $T$  işlemcisi doğrusaldır.

şimdi herhangi bir  $h \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  alalım.  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında bir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonuna,  $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi de  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonuna yakınsak olsun. O halde herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n \geq n_1$  için

$$\|f_n - f\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2\|Th\|_{1,w}} \quad (4.109)$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  için

$$\|Tf_n - g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{1,w}} \quad (4.110)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$  alınırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_3$  için (4.109) ve (4.110) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\|h\Theta g - h\Theta Tf\|_{1,w} &= \|h\Theta g - h\Theta Tf_n + h\Theta Tf_n - h\Theta Tf\|_{1,w} \\
&\leq \|h\Theta g - h\Theta Tf_n\|_{1,w} + \|h\Theta Tf_n - h\Theta Tf\|_{1,w} \\
&= \|h\Theta(g - Tf_n)\|_{1,w} + \|Th\Theta f_n - Th\Theta f\|_{1,w} \\
&\leq \|h\|_{1,w} \|Tf_n - g\|_{1,w} + \|Th\|_{1,w} \|f_n - f\|_{1,w} \\
&< \|h\|_{1,w} \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{1,w}} + \|Th\|_{1,w} \frac{\varepsilon}{2\|Th\|_{1,w}} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.111}$$

yazılır. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde (4.111) eşitsizliği sağlandığından

$$h\Theta g - h\Theta Tf = h\Theta(g - Tf) = 0$$

bulunur. Ayrıca  $h, L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında herhangi bir fonksiyon ve  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  cebiri sıra değiştiremez Banach cebiri olduğundan  $Tf = g$  olur. O halde kapalı grafik teoreminden  $T$  işlemcisi süreklidir.

Son olarak (4.108) eşitliğini sağlayan  $T$  dönüşümünün her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere  $T_y M_\gamma$  işlemcisiyle değişmeli olduğunu gösterelim. Her  $f, g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için (4.108) ve 4.2.2.4. Önermede verilen (4.107) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
TT_y M_\gamma f \Theta g &= T(T_y M_\gamma f \Theta g) \\
&= T(f \Theta T_y M_\gamma g) \\
&= Tf \Theta T_y M_\gamma g \\
&= T_y M_\gamma Tf \Theta g
\end{aligned}$$

olup

$$(TT_y M_\gamma f - T_y M_\gamma Tf) \Theta g = 0$$

olur. Yine  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  cebiri sıra değiştiremez Banach cebiri olduğundan

$$TT_y M_\gamma f = T_y M_\gamma Tf$$

bulunur. Bu son eşitlik her  $f \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için sağlandığından  $TT_y M_\gamma = T_y M_\gamma T$  elde edilir. Bu takdirde Tanım 4.2.2.3 gereği  $T \in M(L_w^1(\mathbb{R}^d))$  olur.

Şimdi tersine  $T \in M(L_w^1(\mathbb{R}^d))$  olsun. Herhangi bir  $\phi \in L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  ve her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $l(g) = \int_{\mathbb{R}^d} Tg(x)\overline{\phi(x)} dx$  biçiminde tanımlı  $l$  fonksiyoneli alalım. Böylece her  $h \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$  için  $T$  işlemcisinin doğrusallığı kullanılarak

$$\begin{aligned} l(\lambda g + \beta h) &= \int_{\mathbb{R}^d} T(\lambda g + \beta h)(x)\overline{\phi(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda Tg + \beta Th)(x)\overline{\phi(x)} dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} Tg(x)\overline{\phi(x)} dx + \beta \int_{\mathbb{R}^d} Th(x)\overline{\phi(x)} dx \\ &= \lambda l(g) + \beta l(h) \end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde  $l$  fonksiyoneli doğrusaldır. Ayrıca her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\|T\|$ ,  $T$  işlemcisinin operatör normu olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} Tg(x)\overline{\phi(x)} dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |Tg(x)| |\phi(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |Tg(x)| w(x) \frac{|\phi(x)|}{w(x)} dx \\ &\leq \|\phi\|_{\infty, w} \int_{\mathbb{R}^d} |Tg(x)| w(x) dx \\ &= \|\phi\|_{\infty, w} \|Tg\|_{1, w} \\ &\leq \|\phi\|_{\infty, w} \|T\| \|g\|_{1, w} \end{aligned}$$

olur. O halde  $l$  fonksiyoneli doğrusal ve sınırlıdır. Böylece  $L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  uzayı  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının dual uzayı olduğundan her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$\int_{\mathbb{R}^d} Tg(x)\overline{\phi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\overline{\kappa(x)} dx \quad (4.112)$$

eşitliğini sağlayan bir  $\kappa \in L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  vardır. Buradan her  $g, h \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere (4.112) eşitliği

kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (g \ominus Th)(x) \overline{\phi(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) T_y M_\gamma Th(x) dy \overline{\phi(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} T T_y M_\gamma h(x) \overline{\phi(x)} dx g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} T_y M_\gamma h(x) \overline{\kappa(x)} dx g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} T_y M_\gamma h(x) g(y) dy \overline{\kappa(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (g \ominus h)(x) \overline{\kappa(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} T(g \ominus h)(x) \overline{\phi(x)} dx
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlik her  $\phi \in L_w^\infty(\mathbb{R}^d)$  için sağlandığından Hahn Banach Teoreminden dolayı her  $g, h \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$T(g \ominus h) = g \ominus Th$$

bulunur. Ayrıca  $\ominus$  girişim işlemi değişmeli olduğundan her  $g, h \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$T(g \ominus h) = T(h \ominus g) = h \ominus Tg = Tg \ominus h$$

olup (4.108) eşitliği elde edilir.

Şimdi sırasıyla  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzaylarında kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli olan yaklaşık birimler araştırılacaktır. İlk olarak  $L^1(\mathbb{R})$  uzayında kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli olan bir  $g$  fonksiyonunun var olduğunu gösterelim. Özel olarak  $\mathbb{R}$  kümesi üzerinde çalışırken kesirli Fourier dönüşümde yer alan  $\alpha$  parametresi  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olarak alınacaktır.

**Örnek 4.2.2.6:**  $\mathbb{R}$  kümesinde bir  $g$  fonksiyonunu  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $t \neq 0$  için

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \exp\left(-\frac{i}{2} t^2 \cot \alpha\right)$$

ve  $g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  biçiminde tanımlayalım. Bu  $g$  fonksiyonunun sürekli olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 dt = \sqrt{2\pi}$$

olduğu (Bachman et al., 2000) çalışmasındaki 5.17.3. Örnekten biliniyor. Böylece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \right| dt < \infty$$

olup  $g \in L^1(\mathbb{R})$  olur. Şimdi  $\mathbb{R}$  kümesinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunu  $t \neq 0$  için

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \text{ ve } f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ biçiminde alalım. Buradan}$$

$$g(t) = \exp\left(-\frac{i}{2}t^2 \cot \alpha\right) f(t)$$

yazılır. Böylece (Reiter and Stegeman, 2000) çalışmasındaki 1.1.8. Örnek ve ters Fourier dönüşümü kullanılarak

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega|, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases} \quad (4.113)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} F_\alpha g(u) &= \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2}u^2 \cot \alpha\right) \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{i}{2}t^2 \cot \alpha + \frac{i}{2}t^2 \cot \alpha\right) \exp(-iut \operatorname{cosec} \alpha) f(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2}u^2 \cot \alpha\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iut \operatorname{cosec} \alpha) f(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2}u^2 \cot \alpha\right) \hat{f}(u \operatorname{cosec} \alpha) \end{aligned}$$

olup (4.113) ifadesinden

$$F_\alpha g(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2} u^2 \cot \alpha\right) (1-|u \operatorname{cosec} \alpha|), & |u \operatorname{cosec} \alpha| \leq 1 \\ 0, & |u \operatorname{cosec} \alpha| > 1 \end{cases} \quad (4.114)$$

elde edilir. O halde  $F_\alpha g$  fonksiyonu tıkkız desteklidir. Bu takdirde  $F_\alpha g \in C_c(\mathbb{R})$  olacak şekilde bir  $g \in L^1(\mathbb{R})$  fonksiyonu vardır.

Şimdi  $f$  fonksiyonu yardımıyla  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında kesirli Fourier dönüşümü tıkkız destekli olan bir  $l$  fonksiyonunun var olduğunu gösterelim.

**Örnek 4.2.2.7:** Herhangi bir  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$g(t_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin \frac{t_j}{2}}{\frac{t_j}{2}} \right)^2 \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right)$$

fonksiyonlarıyla,  $\mathbb{R}^d$  kümesinde bir  $l$  fonksiyonunu

$$l(t) = g(t_1)g(t_2)\dots g(t_d) \quad (4.115)$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca önceki örnekte verilen  $f$  fonksiyonunu alalım. Böylece  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$g(t_j) = \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(t_j)$$

yazılır. O halde önceki örnekten her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $g(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olur. Buradan (4.115) ifadesi ve (Reiter and Stegeman, 2000) çalışmasındaki 1.1.12. Örnek kullanılarak  $l \in L^1(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Ayrıca her  $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned}
F_\alpha l(u_1, \dots, u_d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha_1}(u_1, t_1) \dots K_{\alpha_d}(u_d, t_d) g(t_1) \dots g(t_d) dt_1 \dots dt_d \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha_1}(u_1, t_1) g(t_1) dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha_d}(u_d, t_d) g(t_d) dt_d \\
&= F_{\alpha_1} g(u_1) \dots F_{\alpha_d} g(u_d)
\end{aligned} \tag{4.116}$$

yazılır. O halde (4.114) ifadesinden her  $j=1,2,\dots,d$  için  $F_{\alpha_j} g \in C_c(\mathbb{R})$  olup  $F_\alpha l \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olur. Bu takdirde  $F_\alpha l \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olacak şekilde bir  $l \in L^1(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu vardır.

Şimdi  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her  $n \in \mathbb{N}$  için integralleri 1 ve kesirli Fourier dönüşümleri tıkHz destekli olan bir  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi oluşturalım.

**Örnek 4.2.2.8:** İlk olarak 4.2.2.6. Örnekte verilen  $f \in L^1(\mathbb{R})$  fonksiyonunu alalım. Herhangi bir  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ , her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $j=1,2,\dots,d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$A_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} n \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j) dt_j \neq 0$$

olmak üzere

$$h_n(t_j) = \frac{n}{A_n^j} \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j)$$

fonksiyonlarıyla

$$k_n(t_1, \dots, t_d) = h_n(t_1) h_n(t_2) \dots h_n(t_d) \tag{4.117}$$

olacak şekilde bir  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi tanımlayalım. Şimdi  $j=1,2,\dots,d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$g_n(t_j) = n \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j)$$

fonksiyonlarını alalım. Böylece her  $j=1,2,\dots,d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $h_n(t_j) = \frac{g_n(t_j)}{A_n^j}$

olur. Ayrıca  $f$  fonksiyonu sürekli olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $j=1,2,\dots,d$  için

$g_n(\cdot_j)$  fonksiyonları süreklidir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t_j)| dt_j = n \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_j)| dt_j$$

olup  $nt_j = x_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t_j)| dt_j = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_j)| dx_j = \|f\|_1 < \infty$$

yazılır. O halde her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $g_n(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olup

$h_n(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olur. Buradan (4.117) ifadesi ve (Reiter and Stegeman, 2000)

çalışmasındaki 1.1.12. Örnek kullanılarak  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $\int_{\mathbb{R}^d} k_n(t) dt = 1$

bulunur. Yine (4.117) ifadesi kullanılarak her  $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$F_{\alpha} k_n(u_1, \dots, u_d) = F_{\alpha_1} h_n(u_1) F_{\alpha_2} h_n(u_2) \dots F_{\alpha_d} h_n(u_d) \quad (4.118)$$

yazılır. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $j = 1, 2, \dots, d$  için

$$\begin{aligned} F_{\alpha_j} h_n(u_j) &= \frac{n}{A_n^j} \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j + \frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) \exp(-i u_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j) f(nt_j) dt_j \end{aligned}$$

yazılır. Eğer  $nt_j = x_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} F_{\alpha_j} h_n(u_j) &= \frac{n}{n A_n^j} \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i u_j \frac{x_j}{n} \operatorname{cosec} \alpha_j\right) f(x_j) dx_j \\ &= \frac{1}{A_n^j} \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i \frac{u_j}{n} x_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) f(x_j) dx_j \\ &= \frac{1}{A_n^j} \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \hat{f}\left(\frac{u_j}{n} \operatorname{cosec} \alpha_j\right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece 4.2.2.6. Örnekte verilen (4.113) ifadesinden her  $n \in \mathbb{N}$  ve her

$j = 1, 2, \dots, d$  için  $B_j = \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}}$  olmak üzere

$$F_{\alpha_j} h_n(u_j) = \begin{cases} \frac{B_j}{A_n^j} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \left(1 - \left|\frac{u_j}{n} \operatorname{cosec} \alpha_j\right|\right), & \left|\frac{u_j}{n} \operatorname{cosec} \alpha_j\right| \leq 1 \\ 0, & \left|\frac{u_j}{n} \operatorname{cosec} \alpha_j\right| > 1 \end{cases}$$

elde edilir. O halde her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $F_{\alpha_j} h_n \in C_c(\mathbb{R})$  olur. Buradan (4.118) ifadesi kullanılarak her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_{\alpha} k_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Bu takdirde  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\int_{\mathbb{R}^d} k_n(t) dt = 1$  ve  $F_{\alpha} k_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olacak şekilde bir  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır.

**Önerme 4.2.2.9:** Bir önceki örnekte verilen  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli bir yaklaşık birimdir.

**İspat:** Önceki örnekte tanımlanan  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$  dizisini alalım. Böylece her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  olduğunda  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere herhangi bir  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned} (k_n \Theta g)(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) T_y M_{\gamma} g(x) dy - g(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) T_y M_{\gamma} g(x) dy - \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) g(x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) (T_y M_{\gamma} g(x) - g(x)) dy \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \|k_n \Theta g - g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) (T_y M_{\gamma} g(x) - g(x)) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(y)| |T_y M_{\gamma} g(x) - g(x)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |T_y M_{\gamma} g(x) - g(x)| dx \right) |k_n(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(y)| \|T_y M_{\gamma} g - g\|_1 dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|k_n \Theta g - g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{n}{A_n^1} \exp\left(-\frac{i}{2} y_1^2 \cot \alpha_1\right) f(ny_1) \dots \frac{n}{A_n^d} \exp\left(-\frac{i}{2} y_d^2 \cot \alpha_d\right) f(ny_d) \right| \\ &\quad \|T_y M_\gamma g - g\|_1 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{n^d}{A_n^1 \dots A_n^d} \right| |f(ny_1) \dots f(ny_d)| \|T_y M_\gamma g - g\|_1 dy \end{aligned}$$

olur. Eğer her  $j=1,2,\dots,d$  için  $ny_j = z_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $\tau = (-z_1 \cot \alpha_1, \dots, -z_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere

$$\|k_n \Theta g - g\|_1 \leq \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z_1) \dots f(z_d)| \left\| T_{\frac{\tau}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_1 dz \quad (4.119)$$

bulunur. Burada  $j=1,2,\dots,d$  olmak üzere her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$A_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} n \exp\left(-\frac{i}{2} y_j^2 \cot \alpha_j\right) f(ny_j) dy_j$$

olup yine  $j=1,2,\dots,d$  için  $ny_j = z_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$A_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) dz_j$$

bulunur. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) \right) = f(z_j)$$

ve

$$\left| \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) \right| = |f(z_j)|$$

eşitlikleri sağlanır. Yine  $f \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan Lebesgue monoton yakınsaklık teoreminden  $j=1,2,\dots,d$  için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^j &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) \right) dz_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_j) dz_j \end{aligned}$$

yazılır. Buradan  $j = 1, 2, \dots, d$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^j| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^j \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_j) dz_j \right| = C$$

denirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_n^1 \dots A_n^d|} = \frac{1}{C^d}$$

elde edilir. Yani  $\left( \frac{1}{|A_n^1 \dots A_n^d|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi yakınsaktır. O halde bu dizi sınırlıdır. Yani her

$n \in \mathbb{N}$  için

$$\left| \frac{1}{|A_n^1 \dots A_n^d|} \right| \leq M \quad (4.120)$$

olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı vardır. Ayrıca her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonunun sürekli olduğu Teorem 4.2.2.1 in ii. şikkında gösterildi. Bu teoreme eğer her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w(x) = 1$  alınırsa  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayı elde edileceğinden Teorem 4.2.2.1 in ii. şikkında ifade edilen bu süreklilik  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında da sağlanır. Böylece her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere her  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\gamma}{n}} g - g \right\|_1 = 0$$

yazılır. Eğer  $s(z) = f(z_1) \dots f(z_d)$  denirse (Reiter and Stegeman, 2000) çalışmasındaki 1.1.12. Örnekten  $s \in L^1(\mathbb{R}^d)$  olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\gamma}{n}} g - g \right\|_1 = 0$$

olur. Diğer yandan

$$\left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_1 \leq \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g \right\|_1 + \|g\|_1 = 2\|g\|_1 = C_1$$

olup

$$|s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_1 \leq C_1 |s(z)|$$

yazılır. Yine  $s \in L^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan Lebesgue monoton yakınsaklık teoremi gereği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_1 dz = 0$$

bulunur. Yani herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n \geq n_0$  için

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_1 dz < \frac{\varepsilon}{M} \quad (4.121)$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. O halde aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_0$  için (4.119), (4.120) ve (4.121) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \|k_n \Theta g - g\|_1 &\leq \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z_1) \dots f(z_d)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_1 dz \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli bir yaklaşık birimdir.

Şimdi  $w$ ,  $\mathbb{R}$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^1(\mathbb{R})$  uzayında kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli olan bir  $l$  fonksiyonunun var olduğunu gösterelim.

**Örnek 4.2.2.10:** Öncelikle  $\alpha \neq m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  olsun.  $\mathbb{R}$  kümesi üzerinde sürekli bir  $l$  fonksiyonunu,  $\mathbb{R}$  kümesinde tanımlı, tıkHz destekli ve  $k \geq 2$  olduğunda  $k$ . mertebeden sürekli türevlenebilir sıfırdan farklı bir  $g$  fonksiyonu ile

$$h(t) = \exp\left(\frac{i}{2} t^2 \cot \alpha\right) g(t) \text{ olarak verilen } h \text{ fonksiyonu yardımıyla } l = F_{-\alpha} h$$

biçiminde tanımlayalım.  $M = \sqrt{\frac{1+i \cot \alpha}{2\pi}}$  olsun. Şimdi bir  $f$  fonksiyonunu her  $x \in \mathbb{R}$  için

$$f(x) = M \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt \quad (4.122)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan  $l = F_{-\alpha} h$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} l(x) &= M \exp\left(-\frac{i}{2} x^2 \cot \alpha\right) \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp\left(-\frac{i}{2} t^2 \cot \alpha\right) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2} x^2 \cot \alpha\right) f(x) \end{aligned} \quad (4.123)$$

yazılır. Ayrıca  $g$  fonksiyonu  $k$ . mertebeden sürekli türevlenebilir ve tıkHz destekli olduğundan kısmi integrasyon  $k$  kere sağlanır.  $\operatorname{supp} g = [a, b]$  olduğunu kabul edelim. Böylece (4.122) ifadesinde verilen integralin kısmi integrasyonu  $x \neq 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x) &= M \left( \frac{g(t)}{ix \operatorname{cosec} \alpha} \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) \Big|_a^b \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{ix \operatorname{cosec} \alpha} \int_a^b g'(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt \right) \end{aligned} \quad (4.124)$$

olur. Yine  $g$  sürekli fonksiyonu tıkHz destekli ve  $\operatorname{supp} g = [a, b]$  olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow a^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow b^+} g(t) = g(a) = g(b) = 0$$

bulunur. O halde (4.124) ifadesinden  $x \neq 0$  olmak üzere

$$f(x) = M (-ix \operatorname{cosec} \alpha)^{-1} \int_a^b g'(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt$$

yazılır. Yine her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt = \int_a^b g^{(k)}(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt$$

olduğu dikkate alınarak (4.122) ifadesinde verilen integrale  $k$  kere kısmi integrasyon uygulanırsa  $x \neq 0$  olmak üzere

$$f(x) = M (-ix \operatorname{cosec} \alpha)^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt \quad (4.125)$$

elde edilir. Şimdi bir  $B$  sabitini

$$B = \max \left\{ 2^k |M| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt, 2^k |M| |\operatorname{cosec} \alpha|^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^{(k)}(t)| dt \right\} \quad (4.126)$$

alalım. Öncelikle  $|x| \leq 1$  olsun. Böylece (4.122) ifadesinden

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |M| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt \right| \\ &\leq |M| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \end{aligned}$$

olup (4.126) ifadesinden

$$2^k |f(x)| \leq 2^k |M| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \leq B$$

yazılır. Buradan

$$|x| \leq 1 \Rightarrow 1 + |x| \leq 2$$

ifadesi dikkate alınarak

$$|f(x)| \leq \frac{B}{2^k} \leq \frac{B}{(1+|x|)^k} \quad (4.127)$$

bulunur. Şimdi de  $|x| \geq 1$  olsun. Böylece (4.125) ifadesinden

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |M| |x|^{-k} |\operatorname{cosec} \alpha|^{-k} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(t) \exp(ixt \operatorname{cosec} \alpha) dt \right| \\ &\leq |M| |x|^{-k} |\operatorname{cosec} \alpha|^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^{(k)}(t)| dt \end{aligned}$$

olup (4.126) ifadesinden

$$2^k |f(x)| \leq 2^k |M| |x|^{-k} |\operatorname{cosec} \alpha|^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^{(k)}(t)| dt \leq B |x|^{-k}$$

yazılır. O halde

$$|x| \geq 1 \Rightarrow 1 + |x| \leq |x| + |x| = 2|x|$$

ifadesi kullanılarak

$$|f(x)| \leq \frac{B}{|2x|^k} \leq \frac{B}{(1+|x|)^k} \quad (4.128)$$

bulunur. Bu takdirde (4.127), (4.128) ifadeleri gereği (4.126) da verilen  $B$  sabiti ve her  $x \in \mathbb{R}$  için

$$|f(x)| \leq \frac{B}{(1+|x|)^k} \quad (4.129)$$

elde edilir. Ayrıca  $k \geq 2$  için  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B}{(1+|x|)^k} dx$  has olmayan integrali yakınsak olduğundan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B}{(1+|x|)^k} dx < \infty$$

yazılır. Böylece (4.123) eşitliğinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |l(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \exp\left(-\frac{i}{2}x^2 \cot \alpha\right) \right| |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

olup  $l \in L^1(\mathbb{R})$  bulunur. O halde  $l = F_{-\alpha} h$  ve  $l \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan  $F_{\alpha} l = h$  elde edilir.

Şimdi  $w$ ,  $\mathbb{R}$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olduğunda  $l \in L^1_w(\mathbb{R})$  olduğunu göstereyim. Öncelikle  $K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$  kümesini alalım. Bu  $K$  kümesi tıkmaz olduğundan yerel sınırlı  $w$  ağırlık fonksiyonu bu küme üzerinde sınırlıdır. Yani her  $x \in K$  için  $|w(x)| \leq T$  olacak şekilde bir  $T > 0$  sayısı vardır. Böylece

$$\int_K |l(x)| w(x) dx \leq T \int_K |l(x)| dx < \infty \quad (4.130)$$

olur. Ayrıca  $L = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$  kümesini alalım. O halde 2.1.5. Tanımda verilen

(2.1) ifadesi  $d = 1$  için düşünülürse ve her  $x \in \mathbb{R}$  için  $|l(x)| = |f(x)|$  olduğu dikkate alınarak (4.129) eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_L |l(x)|w(x) dx \leq BC_1 \int_L \frac{|x|^\lambda}{(1+|x|)^k} dx \leq BC_1 \int_L \frac{(1+|x|)^\lambda}{(1+|x|)^k} dx$$

olacak şekilde  $B$  ve  $C_1$  sabitleri ve  $\lambda > 0$  sayısı vardır. Eğer  $k$  sayısı  $k \geq \lceil \lambda \rceil + 3$

alınırsa  $k - \lambda > 2$  olup  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x|)^{k-\lambda}} dx$  has olmayan integrali yakınsak olacağından

$$\int_L |l(x)|w(x) dx \leq BC_1 \int_L \frac{1}{(1+|x|)^{k-\lambda}} dx < \infty \quad (4.131)$$

bulunur. O halde (4.130) ve (4.131) eşitsizliklerinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |l(x)|w(x) dx = \int_K |l(x)|w(x) dx + \int_L |l(x)|w(x) dx < \infty \quad (4.132)$$

elde edilir. Böylece  $l \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan ve (4.132) eşitsizliği sağlandığından  $l \in L_w^1(\mathbb{R})$  bulunur. Bu takdirde  $F_\alpha l = h \in C_c(\mathbb{R})$  olacak şekilde bir  $l \in L_w^1(\mathbb{R})$  fonksiyonu vardır.

Şimdi bu  $l$  fonksiyonu yardımıyla  $w$ ,  $\mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında kesirli Fourier dönüşümü tıkız destekli olan bir  $r$  fonksiyonunun var olduğunu gösterelim.

**Örnek 4.2.2.11:** İlk olarak önceki örnekte verilen  $g$  fonksiyonunu alalım. Herhangi bir  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$l(x_j) = \sqrt{\frac{1+i \cot \alpha_j}{2\pi}} \exp\left(-\frac{i}{2} x_j^2 \cot \alpha_j\right) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_j) \exp(ix_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j) dt_j \quad (4.133)$$

sürekli fonksiyonlarıyla,  $\mathbb{R}^d$  kümesinde bir  $r$  fonksiyonunu

$$r(x_1, \dots, x_d) = l(x_1)l(x_2) \dots l(x_d) \quad (4.134)$$

biçiminde tanımlayalım. Önceki örnekteki yol izlenerek, her  $j=1,2,\dots,d$  için  $l(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olduğu görülür. Yine (4.134) ifadesi ve (Reiter and Stegeman, 2000) çalışmasındaki 1.1.12. Örnekten  $r \in L^1(\mathbb{R}^d)$  olur. Ayrıca  $w$ ,  $\mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere 2.1.5. Tanımdaki (2.1) eşitsizliğinde verilen  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$  Öklid normu yerine, bu norma denk olan  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$  maksimum normunu alalım. O halde  $\|x\|_\infty \geq 1$  olan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $C \geq 1, \lambda > 0$  sabitler ve  $C_1 = C \sup\{w(x) \mid \|x\|_\infty = 1\}$  olmak üzere

$$w(x) \leq C_1 \|x\|_\infty^\lambda \quad (4.135)$$

yazılır. Öncelikle  $K = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$  kümesini alalım.  $K$  kümesi tıkız olduğundan yerel sınırlı  $w$  ağırlık fonksiyonu bu küme üzerinde sınırlıdır. Yani her  $x \in K$  için  $|w(x)| \leq T$  olacak şekilde bir  $T > 0$  sayısı vardır. Böylece her  $j=1,2,\dots,d$  için  $l(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan

$$\begin{aligned} \int_K |r(x)| w(x) dx &\leq T \int_K |r(x)| dx \\ &\leq T \int_{\mathbb{R}^d} |r(x)| dx \\ &= T \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_1)| dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_2)| dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_d)| dx_d < \infty \end{aligned} \quad (4.136)$$

bulunur. Şimdi her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\|x\|_\infty = |x_{j_0}|$  olduğunu kabul edelim. Yine  $L = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty \geq 1\}$  kümesini alalım. Böylece (4.135) ifadesinden

$$\begin{aligned} \int_L |r(x)| w(x) dx &\leq C_1 \int_L |r(x)| \|x\|_\infty^\lambda dx \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^d} |r(x)| |x_{j_0}|^\lambda dx \\ &= C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_1)| dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_{j_0})| |x_{j_0}|^\lambda dx_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_d)| dx_d \end{aligned} \quad (4.137)$$

olacak şekilde  $C_1$  sabiti ve  $\lambda > 0$  sayısı vardır. Ayrıca önceki örneğe benzer şekilde her  $j=1,2,\dots,d$  için  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere

$$f(x_j) = \sqrt{\frac{1+i \cot \alpha_j}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_j) \exp(ix_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j) dt_j$$

biçiminde tanımlı  $f$  fonksiyonu alınırsa (4.133) ifadesinden her  $x_j \in \mathbb{R}$  için

$$l(x_j) = \exp\left(-\frac{i}{2} x_j^2 \cot \alpha_j\right) f(x_j) \quad (4.138)$$

yazılır. O halde önceki örnekteki yol izlenerek her  $j=1,2,\dots,d$  için

$$M_j = \sqrt{\frac{1+i \cot \alpha_j}{2\pi}} \text{ iken}$$

$$B_j = \max \left\{ 2^k |M_j| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t_j)| dt_j, 2^k |M_j| |\operatorname{cosec} \alpha_j|^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^{(k)}(t_j)| dt_j \right\}$$

olmak üzere

$$|f(x_j)| \leq \frac{B_j}{(1+|x_j|)^k} \quad (4.139)$$

elde edilir. Yine her  $j=1,2,\dots,d$  için  $l(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan her  $j \neq j_0$  için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_j)| dx_j < \infty$$

olup  $j \neq j_0$  için

$$\prod_{j=1}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_j)| dx_j \right) = C_2$$

denirse (4.137) eşitsizliği ve  $j=1,2,\dots,d$  olmak üzere her  $x_j \in \mathbb{R}$  için

$|l(x_j)| = |f(x_j)|$  olduğu dikkate alınarak (4.139) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_L |r(x)|w(x) dx &\leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_1)| dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_{j_0})| |x_{j_0}|^\lambda dx_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_d)| dx_d \\
&= C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |l(x_{j_0})| |x_{j_0}|^\lambda dx_{j_0} \\
&\leq B_{j_0} C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x_{j_0}|^\lambda}{(1+|x_{j_0}|)^k} dx_{j_0} \\
&\leq B_{j_0} C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|x_{j_0}|)^\lambda}{(1+|x_{j_0}|)^k} dx_{j_0}
\end{aligned} \tag{4.140}$$

yazılır. Eğer  $k$  sayısı  $k \geq \lceil \lambda \rceil + 3$  alınırsa  $k - \lambda > 2$  olup  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x_{j_0}|)^{k-\lambda}} dx_{j_0}$  has

olmayan integrali yakınsak olacağından

$$\int_L |r(x)|w(x) dx \leq B_{j_0} C_1 N_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x_{j_0}|)^{k-\lambda}} dx_{j_0} < \infty \tag{4.141}$$

bulunur. O halde (4.136) ve (4.141) eşitsizliklerinden

$$\int_{\mathbb{R}^d} |r(x)|w(x) dx = \int_K |r(x)|w(x) dx + \int_L |r(x)|w(x) dx < \infty \tag{4.142}$$

elde edilir. Bu takdirde  $r \in L^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan ve (4.142) eşitsizliği sağlandığından  $r \in L^1_w(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Ayrıca (4.134) ifadesi kullanılarak her  $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$  için

$$F_\alpha r(u_1, \dots, u_d) = F_{\alpha_1} l(u_1) F_{\alpha_2} l(u_2) \dots F_{\alpha_d} l(u_d) \tag{4.143}$$

yazılır. Son olarak  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ve her  $t_j \in \mathbb{R}$  için

$$h(t_j) = \exp\left(\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) g(t_j)$$

biçiminde tanımlı  $h$  fonksiyonu alınır (4.133) ifadesinden her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $F_{-\alpha_j} h = l$  olup  $l(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan  $F_{\alpha_j} l = h \in C_c(\mathbb{R})$  olur. Böylece (4.143) eşitliğinden  $F_\alpha r \in C_c(\mathbb{R}^d)$  bulunur.

Şimdi  $w$ ,  $\mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu

olmak üzere  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her  $n \in \mathbb{N}$  için integralleri 1 ve kesirli Fourier dönüşümleri tıkHz destekli olan bir  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi oluşturalım.

**Örnek 4.2.2.12:** İlk olarak, önceki örnekte verilen  $l$  ve  $f$  fonksiyonlarını alalım. Herhangi bir  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ , her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$A_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} n \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j) dt_j \neq 0$$

olmak üzere

$$k_n(t_j) = \frac{n}{A_n^j} \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j)$$

fonksiyonlarıyla

$$p_n(t_1, \dots, t_d) = k_n(t_1) k_n(t_2) \dots k_n(t_d) \quad (4.144)$$

olacak şekilde bir  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi tanımlayalım. Şimdi  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere  $\alpha_j \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$g_n(t_j) = n \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j)$$

fonksiyonlarını alalım. Böylece her  $j = 1, 2, \dots, d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $k_n(t_j) = \frac{g_n(t_j)}{A_n^j}$

olur. Ayrıca her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $l(\cdot_j)$  fonksiyonları sürekli olduğundan ve (4.138)

ifadesinden  $f(\cdot_j)$  fonksiyonları da sürekli olur. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $g_n(\cdot_j)$  fonksiyonları sürekli ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t_j)| dt_j = n \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_j)| dt_j$$

olup  $nt_j = x_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t_j)| dt_j = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_j)| dx_j = \|f\|_1 < \infty$$

yazılır. O halde her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $g_n(\cdot, j) \in L^1(\mathbb{R})$  olup  $k_n(\cdot, j) \in L^1(\mathbb{R})$  olur. Buradan (4.144) ifadesi ve (Reiter and Stegeman, 2000) çalışmasındaki 1.1.12. Örnek kullanılarak  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$  ve  $\int_{\mathbb{R}^d} p_n(t) dt = 1$  bulunur. Yine  $j = 1, 2, \dots, d$  olmak üzere her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$A_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} n \exp\left(-\frac{i}{2} t_j^2 \cot \alpha_j\right) f(nt_j) dt_j$$

olduğundan  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $nt_j = z_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$A_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) dz_j$$

bulunur. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) \right) = f(z_j)$$

ve

$$\left| \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) \right| = |f(z_j)|$$

eşitlikleri sağlanır. Yine  $f \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan Lebesgue monoton yakınsaklık teoremi gereği  $j = 1, 2, \dots, d$  için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^j &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{z_j^2}{n^2} \cot \alpha_j\right) f(z_j) \right) dz_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_j) dz_j \end{aligned}$$

yazılır. Buradan  $j = 1, 2, \dots, d$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^j| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^j \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_j) dz_j \right| = C$$

denirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} = \frac{1}{C^d}$$

elde edilir. Yani  $\left( \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi yakınsaktır. O halde bu dizi sınırlı olup her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\left| \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \right| \leq D \quad (4.145)$$

olacak şekilde bir  $D > 0$  sayısı vardır.  $w$ ,  $\mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olsun. Öncelikle  $K = \{t \in \mathbb{R}^d \mid \|t\|_\infty \leq 1\}$  kümesini alalım.  $K$  kümesi tıkız olduğundan yerel sınırlı olan  $w$  ağırlık fonksiyonu bu  $K$  kümesi üzerinde sınırlıdır. Yani her  $t \in K$  için  $|w(t)| \leq T$  olacak şekilde bir  $T > 0$  sayısı vardır. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için (4.145) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_K |p_n(t)| w(t) dt &\leq T \int_K |p_n(t)| dt \\ &\leq T \left| \frac{n^d}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \right| \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(t_1)| |k_n(t_2)| \dots |k_n(t_d)| dt \\ &\leq TD n^d \int_{\mathbb{R}^d} \left| \exp\left(-\frac{i}{2} t_1^2 \cot \alpha_1\right) \right| |f(nt_1)| \dots \\ &\quad \left| \exp\left(-\frac{i}{2} t_d^2 \cot \alpha_d\right) \right| |f(nt_d)| dt \\ &= TD n^d \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_1)| dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_d)| dt_d \end{aligned}$$

bulunur. Eğer eşitsizliğin sağ tarafında  $j=1,2,\dots,d$  olmak üzere  $nt_j = z_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \int_K |p_n(t)| w(t) dt &\leq TD \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_1)| dz_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_d)| dz_d \\ &= TD \|f\|_1^d < \infty \end{aligned} \quad (4.146)$$

elde edilir. Şimdi herhangi bir  $t \in \mathbb{R}^d$  için  $\|t\|_\infty = |t_{j_0}|$  olduğunu kabul edelim. Yine  $L = \{t \in \mathbb{R}^d \mid \|t\|_\infty \geq 1\}$  kümesini alalım. Böylece (4.135) ifadesinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\int_L |p_n(t)| w(t) dt &\leq C_1 \int_L |p_n(t)| \|t\|_\infty^\lambda dt \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^d} |p_n(t)| |t_{j_0}|^\lambda dt \\
&= C_1 \left| \frac{n^d}{A_n^1 \dots A_n^d} \right| \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} |k_n(t_1)| dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |k_n(t_{j_0})| |t_{j_0}|^\lambda dt_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |k_n(t_d)| dt_d \\
&= C_1 \left| \frac{n^d}{A_n^1 \dots A_n^d} \right| \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_1)| dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_{j_0})| |t_{j_0}|^\lambda dt_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_d)| dt_d
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $C_1$  sabiti ve  $\lambda > 0$  sayısı vardır. Yine (4.145) ifadesinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\int_L |p_n(t)| w(t) dt \leq DC_1 n^d \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_1)| dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_{j_0})| |t_{j_0}|^\lambda dt_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt_d)| dt_d$$

yazılır. Eğer eşitsizliğin sağ tarafında  $j=1, 2, \dots, d$  için  $nt_j = z_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa  $\lambda > 0$  olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\int_L |p_n(t)| w(t) dt &\leq DC_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_1)| dz_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_{j_0})| \left| \frac{z_{j_0}}{n} \right|^\lambda dz_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_d)| dz_d \\
&= \frac{DC_1}{n^\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_1)| dz_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_{j_0})| |z_{j_0}|^\lambda dz_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_d)| dz_d \quad (4.147) \\
&\leq DC_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_1)| dz_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_{j_0})| |z_{j_0}|^\lambda dz_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_d)| dz_d
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her  $j=1, 2, \dots, d$  için  $f(\cdot_j) \in L^1(\mathbb{R})$  olduğundan her  $j \neq j_0$  için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_j)| dz_j < \infty$$

olur. Yine  $j \neq j_0$  için

$$\prod_{j=1}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_j)| dz_j \right) = C_2$$

denirse (4.147) ve (4.139) ifadelerinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\int_L |p_n(t)| w(t) dt &\leq DC_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_1)| dz_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_{j_0})| |z_{j_0}|^\lambda dz_{j_0} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_d)| dz_d \\
&= DC_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z_{j_0})| |z_{j_0}|^\lambda dz_{j_0} \\
&\leq DC_1 C_2 B_{j_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|z_{j_0}|^\lambda}{(1+|z_{j_0}|)^k} dz_{j_0} \\
&\leq DC_1 C_2 B_{j_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|z_{j_0}|)^\lambda}{(1+|z_{j_0}|)^k} dz_{j_0}
\end{aligned} \tag{4.148}$$

yazılır. Eğer  $k$  sayısı  $k \geq \lceil \lambda \rceil + 3$  alınrsa  $k - \lambda > 2$  olup  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|z_{j_0}|)^{k-\lambda}} dz_{j_0}$  has

olmayan integrali yakınsak olur. Yine

$$C_3 = DC_1 C_2 B_{j_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|z_{j_0}|)^{k-\lambda}} dz_{j_0}$$

denirse (4.147) eşitsizliğinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\int_L |p_n(t)| w(t) dt \leq C_3 < \infty \tag{4.149}$$

bulunur. O halde (4.146) ve (4.149) eşitsizliklerinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\int_{\mathbb{R}^d} |p_n(x)| w(x) dx = \int_K |p_n(x)| w(x) dx + \int_L |p_n(x)| w(x) dx < \infty \tag{4.150}$$

elde edilir. Bu takdirde  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan ve (4.150) eşitsizliği sağlandığından  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_w^1(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Yine  $C_4 = TD \|f\|_1^d + C_3$  alınrsa (4.146) ve (4.149) ifadelerinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|p_n\|_{1,w} = \int_{\mathbb{R}^d} |p_n(x)| w(x) dx \leq C_4 \tag{4.151}$$

olur. Yani  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır. Yine (4.144) ifadesi kullanılarak her  $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$F_\alpha p_n(u_1, \dots, u_d) = F_{\alpha_1} k_n(u_1) F_{\alpha_2} k_n(u_2) \dots F_{\alpha_d} k_n(u_d) \tag{4.152}$$

yazılır. Ayrıca  $j=1,2,\dots,d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $N_j = \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}}$  olmak üzere

$$F_{\alpha_j} k_n(u_j) = \frac{n}{A_n^j} N_j \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(nt_j) \exp(-iu_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j) dt_j$$

olur. Eğer  $j=1,2,\dots,d$  için  $nt_j = y_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$F_{\alpha_j} k_n(u_j) = \frac{N_j}{A_n^j} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_j) \exp\left(-i \frac{u_j}{n} y_j \operatorname{cosec} \alpha_j\right) dy_j \quad (4.153)$$

bulunur. Şimdi önceki örnekte verilen  $h$  ve  $g$  fonksiyonlarını alalım. Böylece her  $j=1,2,\dots,d$  için  $F_{\alpha_j} l = h$  olur. O halde kesirli Fourier dönüşümü tanımından her

$j=1,2,\dots,d$  için  $N_j = \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha_j}{2\pi}}$  olmak üzere

$$g(u_j) = N_j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_j) \exp(-iu_j t_j \operatorname{cosec} \alpha_j) dt_j$$

yazılır. Böylece (4.153) ifadesinden her  $j=1,2,\dots,d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$F_{\alpha_j} k_n(u_j) = \frac{1}{A_n^j} \exp\left(\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) g\left(\frac{u_j}{n}\right)$$

bulunur. Buradan  $g \in C_c(\mathbb{R})$  olduğundan her  $j=1,2,\dots,d$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_{\alpha_j} k_n \in C_c(\mathbb{R})$  olur. O halde (4.152) ifadesi kullanılarak her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_{\alpha} p_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$  bulunur. Bu takdirde  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\int_{\mathbb{R}^d} p_n(t) dt = 1$  ve  $F_{\alpha} p_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$  olacak şekilde sınırlı bir  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır.

**Önerme 4.2.2.13:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere önceki örnekte verilen  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli sınırlı bir yaklaşık birimidir.

*İspat:* Önceki örnekte tanımlanan  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_w^1(\mathbb{R}^d)$  dizisini alalım. Böylece

her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  olduğunda  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere herhangi bir  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$\begin{aligned} (p_n \Theta g)(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} p_n(y) T_y M_\gamma g(x) dy - g(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} p_n(y) T_y M_\gamma g(x) dy - \int_{\mathbb{R}^d} p_n(y) g(x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} p_n(y) (T_y M_\gamma g(x) - g(x)) dy \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \|p_n \Theta g - g\|_{1,w} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} p_n(y) (T_y M_\gamma g(x) - g(x)) dy \right| w(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |p_n(y)| |T_y M_\gamma g(x) - g(x)| dy w(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |T_y M_\gamma g(x) - g(x)| w(x) dx \right) |p_n(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |p_n(y)| \|T_y M_\gamma g - g\|_{1,w} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{n}{A_n^1} \exp\left(-\frac{i}{2} y_1^2 \cot \alpha_1\right) f(ny_1) \dots \frac{n}{A_n^d} \exp\left(-\frac{i}{2} y_d^2 \cot \alpha_d\right) f(ny_d) \right| \\ &\quad \|T_y M_\gamma g - g\|_{1,w} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{n^d}{A_n^1 \dots A_n^d} \right| |f(ny_1) \dots f(ny_d)| \|T_y M_\gamma g - g\|_{1,w} dy \end{aligned}$$

olur. Eğer  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $ny_j = z_j$  değişken değiştirmesi yapılırsa  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  ve  $\tau = (-z_1 \cot \alpha_1, \dots, -z_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere

$$\|p_n \Theta g - g\|_{1,w} \leq \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z_1) \dots f(z_d)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} dz \quad (4.154)$$

bulunur. Yine önceki örnekte verilen (4.145) ifadesinden her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\left| \frac{1}{A_n^1 \dots A_n^d} \right| \leq D \quad (4.155)$$

olacak şekilde bir  $D > 0$  sayısı vardır. Ayrıca her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için  $\mathbb{R}^d$  kümesinden

$L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonunun sürekli olduğu Teorem 4.2.2.1 in ii. şıkında gösterildi. Böylece bu süreklilikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} = 0$$

yazılır. Eğer  $s(z) = f(z_1) \dots f(z_d)$  denirse Örnek 4.2.2.11 den  $s \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} = 0$$

olur. Diğer yandan, 2.1.5. Tanımda verilen i koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} &\leq \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g \right\|_{1,w} + \|g\|_{1,w} \\ &\leq w\left(\frac{z}{n}\right) \|g\|_{1,w} + \|g\|_{1,w} \\ &\leq w\left(\frac{z}{n}\right) \|g\|_{1,w} + w\left(\frac{z}{n}\right) \|g\|_{1,w} \\ &= 2 \|g\|_{1,w} w\left(\frac{z}{n}\right) \\ &\leq 2 \|g\|_{1,w} w(z) \end{aligned}$$

olup eğer  $C_1 = 2 \|g\|_{1,w}$  denirse

$$|s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} \leq C_1 |s(z)| w(z)$$

yazılır. Yine  $s \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $sw \in L^1(\mathbb{R}^d)$  olup Lebesgue monoton yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} dz = 0$$

bulunur. Yani herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n \geq n_0$  için

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s(z)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} dz < \frac{\varepsilon}{D} \quad (4.156)$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. O halde aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $n \geq n_0$  için (4.154), (4.155) ve (4.156) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \|p_n \Theta g - g\|_{1,w} &\leq \frac{1}{|A_n^1| \dots |A_n^d|} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z_1) \dots f(z_d)| \left\| T_{\frac{z}{n}} M_{\frac{\tau}{n}} g - g \right\|_{1,w} dz \\ &< D \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının  $\Theta$  girişim işlemine göre kesirli Fourier dönüşümü tıkız destekli sınırlı bir yaklaşık birimdir.

**Sonuç 4.2.2.14:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L_w^1(\mathbb{R}^d) \mid F_\alpha f \text{ tıkız destekli} \right\}$  kümesi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğundur.

**İspat:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olsun. Örnek 4.2.2.12 de tanımlanan  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini ve herhangi bir  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonunu alalım. Yine Önerme 4.2.2.13 gereği  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında kesirli Fourier dönüşümü tıkız destekli bir yaklaşık birimdir. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n \geq n_0$  için

$$\|(p_n \Theta g) - g\|_{1,w} < \varepsilon \quad (4.157)$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Ayrıca 2.1.32. Teorem gereği her  $u \in \mathbb{R}^d$  için

$$M = \left[ \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2\pi}{1 - i \cot \alpha_j}} \right] \text{ olmak üzere}$$

$$F_\alpha(p_{n_0} \Theta g)(u) = M \exp\left(\sum_{j=1}^d -\frac{i}{2} u_j^2 \cot \alpha_j\right) F_\alpha p_{n_0}(u) F_\alpha g(u)$$

yazılır. Böylece  $F_\alpha p_{n_0}$  fonksiyonu tıkız destekli olduğundan  $F_\alpha(p_{n_0} \Theta g)$  fonksiyonu tıkız destekli olup  $p_{n_0} \Theta g \in F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  bulunur. O halde (4.157) ifadesinden aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için

$$\|(p_{n_0} \Theta g) - g\|_{1,w} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $p_{n_0} \Theta g \in F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu vardır. Bu takdirde  $F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğundur.

**Önerme 4.2.2.15:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ise  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğundur.

**İspat:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olsun. O halde  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının tanımı gereği

$$F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset L_w^1(\mathbb{R}^d) \quad (4.158)$$

yazılır. Yine Sonuç 4.2.2.14 den  $F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesinin  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olduğu biliniyor. Böylece herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $g \in L_w^1(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|g - h\|_{1,w} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $h \in F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu vardır. Buradan (4.158) kapsaması dikkate alınarak  $h \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Bu takdirde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğundur.

**Önerme 4.2.2.16:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  katı uzay ve  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ise  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir soyut Segal cebiridir.

**İspat:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olsun. Sırasıyla Önerme 4.2.8 ve Önerme 4.2.9 dan  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir Banach cebiri ve bu uzay  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir Banach ideali olup her  $g, h \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|g\|_{1,w} \leq \|g\|_{S_w^\alpha}$$

ve

$$\|g \Theta h\|_{S_w^\alpha} \leq \|g\|_{S_w^\alpha} \|h\|_{1,w}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Son olarak Önerme 4.2.2.15 den  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $L_w^1(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğundur. O halde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı bir soyut Segal cebiridir.

**Önerme 4.2.2.17:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  katı uzay,  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ve  $C_c(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun ise  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli bir yaklaşık birimi vardır.

**İspat:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu ve  $S \subset S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  herhangi bir sonlu alt küme olmak üzere  $S = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  olsun. Böylece  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  katı uzay ve  $\overline{C_c(\mathbb{R}^d)} = S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olduğundan Teorem 4.2.14 gereği her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere herhangi bir  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu için  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonu süreklidir. Buradan herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\|y\| < \delta_i$  olduğunda

$$\|T_y M_\gamma g_i - g_i\|_{S_w^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $\delta_i > 0$  sayıları vardır. Eğer  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$  alınırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|y\| < \delta$  olduğunda

$$\|T_y M_\gamma g_i - g_i\|_{S_w^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.159)$$

yazılır. Şimdi  $\text{supp } h \subset B(0, \delta)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = 1$  ve  $h \geq 0$  olacak şekilde bir  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  alalım. O halde her  $x \in \mathbb{R}^d$  ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için

$$\begin{aligned} (h \ominus g_i)(x) - g_i(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(y) T_y M_\gamma g_i(x) dy - g_i(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h(y) T_y M_\gamma g_i(x) dy - \int_{\mathbb{R}^d} h(y) g_i(x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h(y) (T_y M_\gamma g_i(x) - g_i(x)) dy \end{aligned}$$

olup (4.159) ifadesi kullanılarak aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $i = 1, 2, \dots, n$  iken

$$\begin{aligned}
\|(h \Theta g_i) - g_i\|_{S_w^\alpha} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} h(y) (T_y M_\gamma g_i - g_i) dy \right\|_{S_w^\alpha} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|h(y) (T_y M_\gamma g_i - g_i)\|_{S_w^\alpha} dy \\
&= \int_{\text{supp } u} |h(y)| \|T_y M_\gamma g_i - g_i\|_{S_w^\alpha} dy \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \int_{\text{supp } u} h(y) dy = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned} \tag{4.160}$$

bulunur. Ayrıca  $C = \max\{\|g_1\|_{S_w^\alpha}, \|g_2\|_{S_w^\alpha}, \dots, \|g_d\|_{S_w^\alpha}\}$  olsun. Yine Sonuç 4.2.2.14 den aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için

$$\|h - f\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2C} \tag{4.161}$$

olacak şekilde bir  $f \in F_{0,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  vardır. Böylece  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  olduğundan  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olup (4.160) ve (4.161) ifadelerinden aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için

$$\begin{aligned}
\|(f \Theta g_i) - g_i\|_{S_w^\alpha} &= \|(f \Theta g_i) - (h \Theta g_i) + (h \Theta g_i) - g_i\|_{S_w^\alpha} \\
&\leq \|(f \Theta g_i) - (h \Theta g_i)\|_{S_w^\alpha} + \|(h \Theta g_i) - g_i\|_{S_w^\alpha} \\
&= \|h - f\|_{1,w} \|g_i\|_{S_w^\alpha} + \|(h \Theta g_i) - g_i\|_{S_w^\alpha} \\
&\leq \|h - f\|_{1,w} C + \|(h \Theta g_i) - g_i\|_{S_w^\alpha} \\
&< \frac{\varepsilon}{2C} C + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. O halde 2.1.46. Önermeden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının kesirli Fourier dönüşümü tıkHz destekli bir yaklaşık birimi vardır.

**Sonuç 4.2.2.18:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  katı uzay,  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ve  $C_c(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olduğunda  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının yaklaşık birimi var olduğundan bu koşulları sağlayan  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı sıra değiştiremez Banach cebiridir.

**Tanım 4.2.2.19:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  katı uzay,  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ve  $C_c(\mathbb{R}^d)$  kümesi

$S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olsun. O halde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir  $T$  çarpanı  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı sürekli, doğrusal ve her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  için  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere  $T_y M_\gamma$  işlemcisiyle değişmeli olan bir dönüşümdür. Ayrıca  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  cebirinin çarpanlarının kümesi  $M(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))$  ile gösterilir.

Şimdi 2.1.56. Tanımda ifade edilen Banach cebirlerinin çarpanlar tanımının,  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  Banach cebiri için verilen Tanım 4.2.2.19 ile denk olduğunu söyleyen aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 4.2.2.20:**  $w, \mathbb{R}^d$  kümesinde tanımlı, düzenli büyüyen ağırlık fonksiyonu,  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  katı uzay,  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  ve  $C_c(\mathbb{R}^d)$  kümesi  $S_w^\ominus(\mathbb{R}^d)$  uzayında her yerde yoğun olmak üzere  $T, S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu takdirde  $T \in M(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))$  olması için gerekli ve yeterli koşul  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$T(f \Theta g) = Tf \Theta g = f \Theta Tg \quad (4.162)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat:** Öncelikle her  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için (4.162) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının sıra değiştiremez Banach cebiri olması kullanılarak Teorem 4.2.2.5 in ispatının ilk kısmına benzer şekilde  $T \in M(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))$  olduğu görülür.

Şimdi tersine  $T \in M(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))$  olsun. Her  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  ve  $(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))'$  uzayı  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının dual uzayı olmak üzere herhangi bir  $\varphi \in (S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))'$  için  $l(g) = \langle Tg, \varphi \rangle$  biçiminde tanımlı  $l$  fonksiyoneli alalım. Böylece sırasıyla  $T$  ve  $\varphi$  işlemcilerinin doğrusallıkları kullanılarak her  $g, h \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  ve her  $a, b \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned}
l(ag + bh) &= \langle T(ag + bh), \varphi \rangle \\
&= \langle (aTg + bTh), \varphi \rangle \\
&= a \langle Tg, \varphi \rangle + b \langle Th, \varphi \rangle \\
&= al(g) + bl(h)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde  $l$  fonksiyoneli doğrusaldır. Ayrıca  $\|T\|$  ve  $\|\varphi\|$  sırasıyla  $T$  ve  $\varphi$  işlemcilerinin operatör normları olmak üzere her  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$|\langle Tg, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\| \|Tg\|_{S_w^\alpha} \leq \|\varphi\| \|T\| \|g\|_{S_w^\alpha}$$

yazılır. Buradan  $l$ ,  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayında tanımlı doğrusal ve sınırlı bir fonksiyoneldir.

Bu takdirde  $(S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))'$  uzayı  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayının dual uzayı olduğundan her  $g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$\langle g, \psi \rangle = \langle Tg, \varphi \rangle \quad (4.163)$$

olacak şekilde bir tek  $\psi \in (S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))'$  vardır. Şimdi her  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  olduğunda  $\gamma = (-y_1 \cot \alpha_1, \dots, -y_d \cot \alpha_d)$  olmak üzere her  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$k(y) = f(y) T_y M_\gamma g \quad (4.164)$$

biçiminde tanımlı  $k$  fonksiyonunu alalım. Böylece Teorem 4.2.14 den  $T_y M_\gamma g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olur. Yine  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  bir vektör uzayı ve  $f(y) \in \mathbb{C}$  olduğundan  $f(y) T_y M_\gamma g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  bulunur. O halde  $k$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca  $\mathbb{R}^d$  kümesinden  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayına tanımlı  $y \rightarrow T_y M_\gamma g$  fonksiyonunun sürekli olduğu Teorem 4.2.14 de gösterildi. Buradan  $f \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  olduğundan ölçülebilir olup (4.164) ifadesinden  $k$  fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyon olur. Diğer yandan Teorem 4.2.14 de verilen (4.83) ifadesi ve  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset L_w^1(\mathbb{R}^d)$  kapsamı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \|k(y)\|_{S_w^\alpha} dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \|f(y)T_y M_\gamma g\|_{S_w^\alpha} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \|T_y M_\gamma g\|_{S_w^\alpha} dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| w(y) \|g\|_{S_w^\alpha} dy \\
&= \|g\|_{S_w^\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| w(y) dy \\
&= \|g\|_{S_w^\alpha} \|f\|_{L^1, w} < \infty
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece 2.1.9. Tanımda verilen (2.2) ifadesinden

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^d} k(y) dy, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle k(y), \varphi \rangle dy$$

bulunur. Buradan  $\Theta$  girişim işleminin tanımı ve (4.164) ifadesinden

$$\langle f\Theta g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle f(y)T_y M_\gamma g, \varphi \rangle dy$$

olur. Yine  $f(y) \in \mathbb{C}$  olması ve  $\varphi$  fonksiyonelinin doğrusallığı gereği

$$\langle f\Theta g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \langle T_y M_\gamma g, \varphi \rangle dy \quad (4.165)$$

elde edilir. O halde Tanım 4.2.2.19, (4.163) ve (4.165) ifadeleri kullanılarak her  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$\begin{aligned}
\langle f\Theta Tg, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \langle T_y M_\gamma Tg, \varphi \rangle dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \langle TT_y M_\gamma g, \varphi \rangle dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \langle T_y M_\gamma g, \psi \rangle dy \\
&= \langle f\Theta g, \psi \rangle \\
&= \langle T(f\Theta g), \varphi \rangle
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlik her  $\varphi \in (S_w^\alpha(\mathbb{R}^d))'$  için sağlandığından Hahn Banach Teoreminden her  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$T(f\Theta g) = f\Theta Tg$$

bulunur. Ayrıca  $\Theta$  işlemi değişmeli olduğundan her  $f, g \in S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  için

$$T(f \Theta g) = T(g \Theta f) = g \Theta Tf = Tf \Theta g$$

olup (4.162) eğitliği elde edilir.



## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, amaçlandığı gibi (Gürkanlı, 2008) çalışmasındaki  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayının tıkHz ve tıkHz olmayan gömülmeleri için elde edilen bulgulara benzer bulgular bu uzayın bir  $\alpha$  parametresiyle genelleştirmesi olan  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayı için elde edildi. İlave olarak tek yönlü ifade edilen bazı teoremlerin ters yönlerinin doğru olmadığına örnekler verildi. Ayrıca (Toksoy and Sandıkçı, 2015) çalışmasında  $\omega = 1$  için verilen  $A_{\alpha,p}^{w,\omega}(\mathbb{R}^d)$  uzayının bazı kapsama özellikleri  $\omega$  ağırlığına bir kısıtlama getirilmeden yeniden ifade edildi.

Yine (Doğan and Gürkanlı, 2000) çalışmasındaki  $S_{w,\omega}(G)$  uzayı için elde edilen bulgulara benzer bulgular  $S_{w,w}(\mathbb{R}^d)$  uzayının bir  $\alpha$  parametresiyle genelleştirmesi olan  $S_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$  uzayı için elde edildi.

Bu çalışmada kullanılan  $\Theta$  girişim işlemi yerine kesirli Fourier dönüşümüyle uyumlu olan başka girişim işlemleri alınarak da bu araştırma yapılabilir. Kesirli Fourier dönüşümü Fourier dönüşümünün bir  $\alpha$  parametresiyle genelleştirmesi olduğundan Fourier dönüşümünü kullanılarak tanımlanan tüm fonksiyon uzaylarında kesirli Fourier dönüşümü kullanılarak genelleştirmeler yapılabilir. Bu çalışmada kesirli Fourier dönüşümü ve bu dönüşüme uygun  $\Theta$  girişim işlemiyle yapılan ispat yaklaşımları literatürde var olan diğer integral operatörlerinin kesirli kuvvetleri için yapılacak araştırmalarda yol gösterebilir.

## KAYNAKLAR

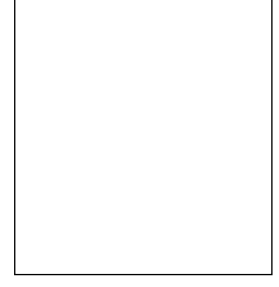
- Alieva, T., Lopez, V., Agullo-Lopez, F. and Almeida, L. B. (1994). “The fractional Fourier transform in optical propagation problems”. *Journal of Modern Optics*. 41(5). 1037-1044.
- Almeida, L.B. (1994). “The fractional Fourier transform and time-frequency representations”. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 42(11). 3084-3091.
- Almeida, L.B. (1997). “Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform”. *IEEE Signal Processing Letters*. 4(1). 15-17.
- Bachmann, G., et al. (2000). *Fourier and wavelet analysis*. New York: Springer-Verlag.
- Bourouhiya, A. (2006). *Beurling weighted spaces, product-convolution operators, and the tensor product of frames*. Unpublished Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, Maryland.
- Burnham, J.T. (1972). “Closed ideals in subalgebras of Banach algebras. I”. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 32(2). 551-555.
- Bultheel, A. and Martinez, H. (2002). “A shattered survey of the fractional Fourier transform”. *Report TW*. 337.
- Cigler, J. (1969). “Normed ideals in  $L^1(G)$ ”. *Indagationes Mathematicae*. 72(3). 273-282.
- Condon, E.U. (1937). “Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations”. *Proceedings of the National academy of Sciences of the United States of America*. 23. 158–164.
- Doğan, M. and Gürkanlı, A.T. (2000). “On functions with Fourier transforms in  $S_\omega$ ”. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*. 92(2). 111-120.
- Doran, R.S. and Wichman, J. (1979). *Approximate identities and factorization in Banach modules*. 768. New York: Springer-Verlag.
- Feichtinger, H.G. (1977). “On a class of convolution algebras of functions”. *Annales de l’institu Fourier*. 27(3). 135-162.
- Feichtinger, H.G., Graham, C. and Lakić, E. (1979). “Nonfactorization in commutative, weakly selfadjoint Banach algebras”. *Pacific Journal of Mathematics*. 80(1). 117-125.
- Feichtinger, H.G. and Gürkanlı A.T. (1990). “On a family of weighted convolution algebras”. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 13(3). 517-525.
- Fischer, R.H., Gürkanlı, A.T. and Liu, T.S. (1996). “On a family of weighted spaces”. *Mathematica Slovaca*. 46(1). 71-82.
- Gürkanlı, A.T. (2008). “Compact embeddings of spaces  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$ ”. *Taiwanese Journal of Mathematics*. 1757-1767.
- Hartmann, W.M. (1998). *Signals, sound, and sensation*. Springer Science and Business Media.
- Kamalakkannan, R. and Roopkumar, R. (2020). “Multidimensional fractional Fourier transform and generalized fractional convolution”. *Integral Transforms and Special Functions*. 31(2). 152-165.
- Karasik, Y.B. (1994). “Expression of the kernel of a fractional Fourier transform in elementary functions”. *Optics Letters*. 19(11). 769-770.

- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Lai, H. (1969). "On some properties of  $A_p(G)$  algebras". *Proceedings of the Japan Academy*. 45. 577-581.
- Larsen, R., Lui, T. and Wang, J. (1964). "On functions with Fourier transform in  $L_p$ ". *Michigan Mathematical Journal*. 11. 369-378.
- Larsen, R. (1971). *An introduction to the theory of multipliers*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Larsen, R. (1973). *Banach algebras an introduction*. New York: Marcel Dekker Incorporated.
- McBride, A.C. and Kerr, F.H. (1987). "On Namias's fractional Fourier transforms". *IMA Journal of Applied Mathematics*. 39. 159-175.
- Namias, V. (1980). "The fractional order of Fourier transform and its application in quantum mechanics". *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*. 25. 241-265.
- Ozaktas, H.M., et al. (2001). *The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing*. New York: John Wiley and Sons.
- Prasad, A., Manna, S., Mahato, A. and Singh, V.K. (2013). "The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform". *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 259(B). 660-671.
- Raisinghania, M.D. (2007). *Integral equation and boundary value problems*. New Delhi: SChand Publishing.
- Reiter, H. (1965). "Subalgebras of  $L^1(G)$ ". *Nerdl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*. 68. 691-696.
- Reiter, H. (1971).  *$L^1$ -algebras and Segal algebras*. New York: Springer-Verlag.
- Reiter, H. and Stegeman, J.D. (2000). *Classical harmonic analysis and locally compact group*. Oxford: Clarendon Press.
- Royden, H.L. (1968). *Real analysis*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Rudin, W. (1960). *Fourier analysis on groups*. New York: Interscience Publishers.
- Rudin, W. (1966). *Real and complex analysis*. New York: McGraw-Hill.
- Rudin, W. (1973). *Functional analysis*. New York: Mc Graw-Hill.
- Rynne, B.P. and Youngson, M.A. (2000). *Linear functional analysis*. London: Springer Science and Business Media.
- Segal, I. (1947). "The group algebra of a locally compact group". *Transactions American Mathematical Society*. 61. 69-105.
- Siddiqi, A.H. (2003). *Applied functional analysis; numerical methods, wavelets, image processing*. CRC Press.
- Singh, A.K. and Saxena, R. (2012). "On convolution and product theorems for FRFT". *Wireless Personal Communications*. 65(1). 189-201.
- Toksoy, E. and Sandıkçı, A. (2015). "On function spaces with fractional Fourier transform in weighted Lebesgue spaces". *Journal of Inequalities and Applications*. 2015(1). 87.
- Wang, H.C. (1977). *Homogeneous Banach algebras*. New York: Marcel Dekker Inc.

- Wiener, N. (1929). "Hermitian polynomials and Fourier analysis". *Journal of Mathematical Physics*. 8. 70-73.
- Wiener, N. (1932). "Tauberian theorems". *Annals of Mathematics*. 33(1). 1-100.
- Zayed, A.I. (1996). "On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms". *IEEE Signal Processing Letters*. 3(12). 310-311.
- Zayed, A.I. (1998). "A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform". *IEEE Signal Processing Letters*. 5(4). 101-103.



## ÖZ GEÇMİŞ



Erdem Toksoy, ... tarihinde ...'da doğdu. İzmir Anadolu Öğretmen Lisesi'ni bitirdikten sonra Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2010 yılında mezun oldu. 2015 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programını bitirdi. 2011 yılından bu yana Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapan Erdem Toksoy orta derecede İngilizce bilmektedir. Temel ilgi alanları Harmonik Analiz, Fonksiyonel Analiz ve Ölçüm Teorisidir (21.06.2021).

### İletişim Bilgileri

Email : ...

Telefon : ...

ORCID ID: 0000-0003-3597-6161

### Yayımlanmış Çalışmalar:

1. Toksoy, E. and Sandıkçı, A. (2015). "On function spaces with fractional Fourier transform in weighted Lebesgue spaces". *Journal of Inequalities and Applications*. 2015(1). 87.
2. Zaman, T. and Toksoy, E. (2019). "Improvement in estimating the population mean in simple random sampling using information on two auxiliary attributes and numerical application in agricultural engineering". *Fresenius Environmental Bulletin*. 28(6). 4584-4590.
3. Toksoy, E. and Sandıkçı, A. (2020). "On some properties of space  $S_w^\alpha$ ". *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. 13(2). 923-934.
4. Toksoy, E. and Sandıkçı, A. (2021). "Some compact and non-compact embedding theorems for the function spaces defined by fractional Fourier transform". *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. (kabul edildi).
5. Sandıkçı, A. and Toksoy, E. (2021). "On an abstract Segal algebra under fractional convolution". *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*. (kabul edildi).