T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Gökhan TÜRK

Danışman
Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN
2021

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Gökhan TÜRK

Danışman
Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Gökhan TÜRK tarafından, **Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK** danışmanlığında hazırlanan **''Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine''** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 20.5.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**İmza**	**Sonuç**
Başkan	Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye **(Danışman)**	Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Hatice MUTİ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Havacılık Yönetimi Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
… / … / …
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklarda gösterilenlerden oluştuğunu, enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

İmza
20 /05/2021
Gökhan TÜRK

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 19/01/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 21

Tek kaynak oranı : % 5 çıkmıştır.

İmza
19 /01/ 2021
Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Gökhan TÜRK
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans**,** Mayıs/2021
Danışman: Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

Bu tez lineer olan ve lineer olmayıp fakat basit dönüşümlerle lineerleştirilebilen fark denklemleri çözümlerinin, yaygın olarak kullanılan çeşitli yöntemlerle nasıl elde edileceğiyle birlikte; ilkel fonksiyondan fark denkleminin elde edilmesi ve birinci mertebeden lineer olmayan bazı fark denklemlerinin çözümlerini içermektedir.

Birinci bölümü olan giriş kısmında geçmişten bugüne fark denklemleri ve bu konuda yapılan çalışmalar ele alınmıştır.

İkinci bölümde fark denklemlerine temel oluşturacak tanım, teorem, bilgi ve fark denklemlerinin sınıflandırılması üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin bazı çözüm yöntemlerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin bazı çözüm yöntemlerinden bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde lineer olmayan skaler fark denklemlerinin bazı çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur.

Altıncı bölümde ilkel fonksiyondan fark denkleminin elde edilmesi ve birinci mertebeden lineer olmayan bazı fark denklemlerinin çözümleri üzerinde durulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Fark Operatörü, Başlangıç Değer Problemi, Lineer Fark Denklemleri, Lineer Olmayan Fark Denklemleri, Fark Denklemlerinin Çözüm Yöntemleri, Otonom ve Otonom Olmayan Denklem, Ayrık Noktalar, İlkel Fonksiyon.

ABSTRACT

ON THE SOLUTIONS OF FIRST ORDER NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Gökhan TÜRK
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, May 2021
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nihat ALTINIŞIK

This thesis contains how to obtain solutions to difference equations which are linear and nonlinear, but can be linearized by simple transformations, via various widely used methods; derivation of difference equations from primitive function and solutions to some first order nonlinear difference equations.

In the introduction which is the first part of the thesis, the difference equations from the past to present, and studies conducted in this area are discussed.

In the second part; the definition, theorem, and knowledge to build a foundation for difference equations, and the classification of these equations are elaborated.

In the third section, some solution methods of linear difference equations with constant coefficients are discussed.

In the fourth section, some solution methods of linear difference equations with variable coefficients are mentioned.

In the fifth section, the some solutions of nonlinear scalar difference equations are discussed.

The sixth section is focused on obtaining difference equations from primitive function by solving some nonlinear difference equations of first order.

Keywords: Difference Operator, Initial Value Problem, Linear Differene Equations, Non-Linear Difference Equations, Solution Methods for Difference Equations, Autonomous and Non-autonomous Equation, Discrete Points, Primitive Function.

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın yürütülmesi sırasında desteğini hiç esirgemeyip karşılaştığım zorluklarda bana daima destek olan, tezimi sabır ve titizlikle yöneten saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Nihat ALTINIŞIK'a teşekkürlerimi sunarım. Sürecin her saniyesinde yanımda olan biricik eşim Büşra TÜRK'e, hayatının birçok noktasında beni örnek aldığını söyleyerek beni onurlandıran ve candan öte bildiğim kardeşim Atakan TÜRK'e de çok teşekkür ederim. Son olarak tezimi bu süre zarfında beni daima cesaretlendiren, bana inanan ve hakkını asla ödeyemeyeceğim annem Semiye TÜRK ve babam Mustafa TÜRK'e ithaf ediyorum.

Gökhan TÜRK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar

$\mathbb{Z}$: Tam Sayılar

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar

Δ: İleri Fark Operatörü

∇: Geri Fark Operatörü

Δ^{-1}: Ters Fark Operatörü

I: Birim Operatör

E: Kaydırma (Öteleme) Operatörü

Γ: Gama Fonksiyonu

$w(x)$: Casoratyan

Σ: Toplam Sembolü

Π: Çarpım Sembolü

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sürekli gelişen ve ilerleyen teknolojiyle beraber matematiksel modellere olan ihtiyaç da devamlı artmaktadır. Bu modellemelerde çözüme ulaşmak adına fark denklemleri fazlasıyla kullanılmakta ve kolaylık sağlamaktadır. Böylelikle fark denklemleri; tıp, mühendislik, kimya, fizik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok bilim alanında ortaya çıkan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alır. Fark denklemlerinin incelenmesi, diferansiyel denklemlere kıyasla daha yeni bir kavramdır. Fark denklemlerinin yapısı, diferansiyel denklemlerin yapısına çok büyük benzerlik göstermektedir. Bununla birlikte fark denklemleri teorisi, karşılık gelen diferansiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Son zamanlarda evrende meydana gelen bazı gelişmeler, süreklilik ifadeleri dışında başka ifadelere ihtiyaç duyulduğunu göstermiştir. Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumları, fark denklemleri ile kaldırılmak istenmektedir (Çatal, 2004).

Bir önceki adımda bulunan değerin bir sonraki adımda kullanılarak yeni bir değer elde edilmesine ardışık tekrar işlemi denir. Fark denklemlerinde ise ardışık tekrar işlemleri kullanılarak istediğimiz bir terimin değerini bulabiliriz. Ekonomide örümcek ağı modeli ve Samuelson'un çoğaltan hızlandıran modellerinin çözümünde fark denklemleri kullanılır (Ersel, 1981).

Fark denklemlerinin kullanımı ilk olarak M.Ö. 2000 yıllarda görülmektedir. Bu kavram ilk defa bir denklemin kökünü bulma çalışması olarak Babillerde görülmüştür (Kelly, 2003).

1202 yılında Fibonacci ismiyle bilinen Leonardo di Pisa isimli ünlü İtalyan matematikçi biyolojideki ilk matematiksel modeli oluşturmuştur. Fibonacci'nin ünlü tavşan problemi, Fibonacci dizisinin oluşmasına zemin hazırlamıştır. Tavşan problemi olarak bilinen bu problemde; bir tavşan ailesi ele alınsın. Bir çift tavşanın, doğduktan iki ay sonra ancak yeni yavru yapabilecek olgunluğa eriştiği ve her olgun tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru yapabildiği kabul edilsin. Olgun bir çift tavşan ile başlandığında, bir yıl sonra kaç çift tavşan elde edilir?

Tablo 1.1. Tavşan sayıları (Elaydi, 2000)

Ay	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Çift sayısı	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

İlk 12 ayın sonunda oluşan tavşan sayılarını gösteren tablo yukarıdaki gibidir. n ayın sonundaki tavşan çifti sayısını veren matematiksel eşitlik, ikinci mertebeden fark denklemi yoluyla modellenmiştir.

Fibonacci bu çalışmasında

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

fark denklemini oluşturmuştur (Elaydi, 2005).

1600-1700 yıllarında Newton hala kullanmakta olduğumuz "Newton Metodu" olarak bilinen kök bulma formülünü (nümerik analizde yer alan)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki fark denklemiyle ifade etmiştir (Kulenovic ve diğ., 2000).

Daha sonrasında Riccati yaptığı çalışmalarla günümüzde de kullandığımız

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

şeklinde ifade edilen ve adıyla özdeşleştiği Ricatti fark denklemini ortaya çıkarmıştır.

1755 yılında Euler ilk defa Δ fark operatörünü kullanmıştır. 1801-1825 yılları arasında bu konuda Babagge'in çalışmalarını görüyoruz. Bu yıllardaki önemli buluşlardan biri ise 1755 yılında bulunan Δ fark sembolünün artık Babagge tarafından

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1), \qquad x_1 \neq x_2$$

şeklindeki bir özel halinin oluşturulmasıdır.

1826-1850 arasında popülasyon çalışmaları matematiksel modellemelerle zenginleştirilmiştir. Bu model bir popülasyonun kendinden önceki popülasyon büyüklüğü ile orantılı olmasına bağlıdır. Matematiksel model şu şekildedir:

$$p_{t+1} = rp_t$$

Burada t; zaman, p_t; t zamandaki popülasyon büyüklüğü, p_{t+1} ; bir sonraki zaman dilimindeki popülasyon büyüklüğü ve r büyüme oranı anlamına gelmektedir. Verhulst, 1846 yılında popülasyon büyümesinin sadece nüfusun hacmine bağlı olmadığını, aynı zamanda bu hacmin popülasyonun üst limitinden ne kadar uzak olduğunun da önemli olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca Verhulst önceki nüfus ve sonraki nüfusun büyüklüğünü orantılı yapmak için

$$p_{t+1} = rp_t^{(k-p_t)/_K}$$

lojistik fark denklemini öne sürmüştür (Kulenovic vd., 2000).

1900'lerde ardışık denklemler bazı matematiksel mucizeler oluşturmaya başlamıştır. Bunlar düzlem doldurma eğrileri ya da fraktallarla başlar. Bu eğriler hiçbir boşluk bırakmadan düzlem dolduran eğrilerdir. Bunun gibi eğriler ilk 1890 yılında Peano tarafından keşfedilmiştir. Fark denklemlerini düzlem doldurma eğrileri ile kullanan diğer matematikçiler Hilbert ve Van Koch olmuştur. Düzlem doldurma eğrilerinin ve fraktalların birçok uygulaması vardır. Bunlardan biri de adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için kapalı ve açık yinelemeli yöntemler ailesinin önemli bir türü olan Runge-Kutta yöntemleridir. Böylece artık fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemlerine geçilmiştir.

Lineer olmayan fark denklemlerinin önemli bir ailesi aritmetik ve geometrik düşünceyi içeren denklem ikililerinden oluşur. Örneğin, Lagrange; eliptik integrallerin indirgenmesi ve hesaplanması için bir algoritma olarak,

$$x_n = \left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}\right), \qquad y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$$

denklemlerini elde etmiştir. Daha sonra Gauss ve Borhardt ilgili algoritmaları oluşturmuş ve Gauss da araştırmalarıyla birlikte eliptik fonksiyonların ortaya çıkmasını sağlamıştır.

1950'den bu zamana kadar yapılan araştırmalardaki bilgiler, lineer olmayan sabit katsayılı ve değişken katsayılı fark denklemleri için bir zemin oluşturmuştur. Yine bu yıllarda lineer fark denklemleri Bessel fonksiyonunun hesaplanmasında Miller'in algoritması aracılığıyla kullanılmıştır. 1950'li yıllarda ekolojistler; lojistik denklem içeren basit lineer olmayan fark denklemini; yıldan yıla, mevsimden mevsime popülasyon değişimi hesaplamak için kullanmışlardır. Sonrasında ise elde edilen sonuçlar ekonomiden tıpa birçok alanda uygulama alanı bulmaya başlamıştır (Lakshmikhantham ve Trigiante, 2002).

1977 yılında Mackey, Glass, ve Lasota kan hücreleri popülasyonlarıyla ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Kan hücreleri (lenfositler hariç), kemik iliğindeki kök hücrelerde üretilirler. Kan hücreleri yaşlanmadan, enfeksiyondan veya bir hastalıktan dolayı ölürler. Hücrelerin üretilmesi ve yok edilmesi, döngüsel bir süreçtir. Kan hücresi popülasyonu için ayrık model

$$c_{n+1} = f(c_n) = c_n + \theta + p(c_n) - d(c_n)$$

şeklindedir. Burada θ, pozitif bir sabit; cn, n anındaki kan hücresi sayısı (mikrolitre başına ya da vücut ağırlığına göre kilogram başına); p fonksiyonu, bir zaman aralığında üretilen hücrelerin sayısını ve d fonksiyonu ise bir zaman aralığında yok edilen hücrelerin sayısını ölçer. Her bir zaman aralığında öldürülen hücre sayısının sabit olduğu varsayılır ise,

$$d(c_n) = ac_n, \qquad 0 < a \leq 1.$$

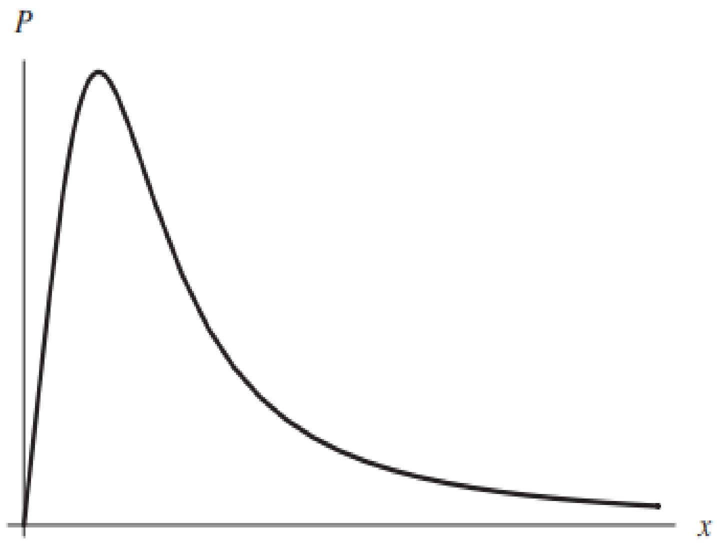
Burada a, yok edilme katsayısı olarak adlandırılır. Üretim fonksiyonu hücre tipine göre belirlenir. Her bir hücrenin farklı bir hücresel ve biyokimyasal süreçleri vardır. Bununla birlikte ortak bir forma sahip oldukları düşünülmektedir. Mackey, Glass ve Lasota tarafından bulunan üretim fonksiyonu, b, c, r ve s pozitif sabitler olmak üzere

$$p(c_n) = b{c_n}^r e^{-sc_n}$$

şeklindedir. O halde bu model

$$c_{n+1} = (1-a)c_n + \theta + b{c_n}^r e^{-sc_n}, \qquad 0 < a \leq 1, \qquad b, c, r, s > 0$$

şeklindeki fark denklemi olur (Lasota, 1977).



Şekil 1.1. x üretilen kan hücresi sayısı, P toplam kan hücresi sayısı

Daha sonra 1999-2004 yılları arasında Kulenoviç ve diğ. (2001), Yan ve diğ. (2002), Fan ve diğ. (2004) fark denklemleri üzerine çalıştığı görülmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda fark denklemlerinin çözümünde bize yardımcı olan operatörler ve özellikleri, fark denklemlerinin sınıflandırılması ve çözümleriyle ilgili bilgiler sunulmuştur. Tezimizde ayrık küme olarak

$$D^+_{x_i,h} = \{x_i, x_i + h, x_i + 2h, \dots, x_i + nh, \dots\}$$

alınmıştır. Burada

$$x_i + nh = x_{i+n}$$

dir. $x_i \in \mathbb{R}$ ve h adım uzunluğudur.

2.1. Bazı Operatörler ve Özellikleri

Bu bölümde yer alan operatörler ve özellikleri Agarwal (1997), Akyol (2011), Bayar (2012), Elaydi (2005), Goldberg (1960), Karagöz (2019), Kelly ve Peterson (2001), Levy ve Lessman (1961) kaynaklarından alınarak sunulmuştur.

Tanım 2.1.1. f reel ya da kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere, Δ ileri fark operatörü

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada h herhangi bir sabit, x ise bağımsız bir değişkendir.
x ayrık küme üzerinde tanımlı ise Δ operatörü, $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

ya da kısaca

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

şeklinde de yazılabilir. Burada f fonksiyonu $D^+_{x_i,h}$ kümesinde tanımlıdır. Ayrıca

$$f(x_i + h) = f(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

dir. Benzer şekilde

$$f(x_i + nh) = f(x_{i+n}) = f_{i+n}$$

yazılır.

Yüksek mertebeden ileri farklar her birinin bir öncekine Δ operatörünün uygulanmasıyla elde edilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$
$$\Delta^2 f_i = \Delta[\Delta f_i] = \Delta[f_{i+1} - f_i] = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

burada Δ^2 ikinci mertebeden fark operatörü olarak adlandırılır. Bu şekilde devam edilerek genel olarak f'in $(n-1)$. farkının farkına f'in $n.$ *farkı* denir ve

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$$

olarak gösterilir.

Sonuç 2.1.2. $f(x)$ fonksiyonunun r. mertebeden ileri farkı

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x + (r-k)h)$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.3.

Δ operatörü için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. Dağılma Özelliği:

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$
$$\Delta(f_i + g_i) = \Delta(f_i) + \Delta(g_i)$$

2. k bir sabit olmak üzere

   a) $\Delta[kf(x)] = k\Delta f(x) \quad \Delta(kf_i) = k\Delta f_i$

   b) $\Delta k^x = (k-1)k^x$

   c) $\Delta \log kx = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

3.

$$\Delta[f(x)g(x)] = \Delta[f(x)]g(x+h) + f(x)\Delta[g(x)]$$
$$\Delta(f_i g_i) = \Delta(f_i)g_{i+1} + f_i\Delta(g_i)$$

4.

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\Delta[f(x)]g(x) - f(x)\Delta[g(x)]}{g(x+h)g(x)}$$
$$\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right) = \frac{\Delta(f_i)g_i - f_i\Delta(g_i)}{g_{i+1}g_i}$$

Tanım 2.1.4. x sürekli değişken ve $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$Ef(x) = f(x+h), \qquad Ef_i = f_{i+1}$$

şeklinde tanımlanan E operatörüne *kaydırma (öteleme) operatörü* denir. İkinci mertebeden E operatörü

$$E^2 f(x) = E[Ef(x)] = E[f(x+h)] = f(x+2h)$$

şeklinde bulunur. Bu şekilde devam edilirse k. mertebeden E operatörü

$$E^k f(x) = f(x+kh), \qquad E^k f_i = f_{i+k}$$

şeklinde yazılır.

E operatörünün özellikleri: $a, b \in \mathbb{N}$ ve k sabit olmak üzere

1. $E[f(x) + g(x)] = Ef(x) + Eg(x)$
2. $E[kf(x)] = kEf(x)$
3. $E^a(E^b f(x)) = E^{a+b} f(x)$
4. $E^0 f(x) = f(x)$

olarak ifade edilir.

Sonuç 2.1.5. I birim operatör olmak üzere

$$\Delta = E - I \text{ veya } E = \Delta + I$$

dır. Buna göre

$$\Delta^r f(x) = (E - I)^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} E^{r-k} f(x)$$

eşitliği vardır. Buradan

$$E^r = (I + \Delta)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \Delta^{r-k}$$

yazılabilir.

Tanım 2.1.6. Geri fark operatörü ∇,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h), \qquad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\nabla f(x) = \Delta E^{-1}[f(x)] = (1 - E^{-1}) f(x)$$

şeklinde gösterilebilir. Diğer taraftan

$$\Delta^n f_i = \nabla^n f_{i+n}$$

dir.

Tanım 2.1.7. $\Delta F_i = f_i$ olsun. Bu durumda c keyfi sabit ve $i \geq i_0$ için

$$\Delta^{-1} f_i = F_i + c$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne *ters fark operatörü (antidifference operator*) ve F_i fonksiyonuna f_i'nin *ters farkı* denir.

Özel olarak a sabit olmak üzere $\Delta^{-1}(a) = ai + c$ dir.

Δ ve Δ^{-1} operatörleri arasında

$$\Delta\Delta^{-1} = I \text{ iken } \Delta^{-1}\Delta \neq I$$

ilişkisi vardır. Yani f_i için c keyfi sabit olmak üzere

$$\Delta^{-1}\Delta f_i = f_i + c \text{ ve } \Delta\Delta^{-1} f_i = f_i$$

dir.

Uyarı: Δ^{-1} operatörü

$$\Delta^{-1} f_i = \sum_{n=i_0}^{i-1} f_n + c$$

şeklinde gösterilebilir. Bu yüzden f_i'nin $i \geq i_0$ için ters farkı aynı zamanda bir belirli toplam olarak da ifade edilebilir.

Δ^{-1} Operatörünün Özellikleri

1. $\Delta^{-2} f_i = \sum_{m=i_0}^{i-1} \sum_{n=i_0}^{m-1} f_n + c_1 i + c_2$
2. $\Delta^{-1}(f_i g_i) = f_{i-1}\Delta^{-1} g_i - \Delta^{-1}(\Delta f_{i-1} \Delta^{-1} g_i)$
3. $\Delta^{-1}(af_i + bg_i) = a\Delta^{-1} f_i + b\Delta^{-1} g_i$
4. $\Delta^{-m}(0) = c_1 i^{m-1} + c_2 i^{m-2} + \cdots + c_m$
5. $\Delta^{-1}(1) = \frac{i^m}{m!} + c_1 i^{m-1} + c_2 i^{m-2} + \cdots + c_m$

Tanım 2.1.8. $g(x)$ fonksiyonunun belirsiz toplamı

$$\sum g(x)$$

olarak ifade edilir. g'nin tanım kümesinde aldığımız tüm x'ler için

$$\Delta\left(\sum g(x)\right) = f(x)$$

olarak ifade edilir. Δ^{-1} operatörü yardımıyla

$$\Delta^{-1} f(x) = \sum g(x) + C(x)$$

yazabiliriz. Burada $\Delta C(x) = 0$

Örnek 2.1.9. 3^x'in belirsiz toplamını bulalım.

$\Delta 3^x = 2.3^x$ olduğundan, $\Delta\left(3^x/_2\right) = 3^x$ yazılabilir. Bu $3^x/_2$, 3^x'in bir belirsiz toplamıdır.

$C(x)$, tanımlı olduğu küme 3^x ile aynı olan $\Delta C(x) = 0$ şartını sağlayan fonksiyon olmak üzere

$$\Delta\left(\frac{3^x}{2} + C(x)\right) = \Delta\left(\frac{3^x}{2}\right) = 3^x$$

olur. Buradan $3^x/_2 + C(x)$, 3^x'in genel belirsiz toplamı olur. Böylece 3^x'in genel belirsiz toplamı

$$\sum 3^x = \frac{3^x}{2} + C(x)$$

şeklinde yazılır.

Belirsiz toplam özellikleri: k sabit sayı olmak üzere

1. $\sum (f(x) + g(x)) = \sum f(x) + \sum g(x)$
2. $\sum kf(x) = k \sum f(x)$
3. $\sum \left(f(x)\Delta g(x)\right) = f(x)g(x) - \sum Eg(x)\,\Delta f(x)$
4. $\sum \left(Ef(x)\Delta g(x)\right) = f(x)g(x) - \sum g(x)\,\Delta f(x)$

Tanım 2.1.10. Gama fonksiyonu Γ şeklinde gösterilir ve

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} dt$$

has olmayan integral şeklinde tanımlanır. $x > 0$ için bu integral yakınsaktır.

Γ fonksiyonunun özellikleri

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
3. $x \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(x+1) = x!$
4. $x \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(-x) \to \infty$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1.3.5 \ldots (2x-1)}{2^x}\sqrt{\pi}$
6. $\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{2^x(-1)^x}{1.3.5 \ldots (2x-1)}\sqrt{\pi}$
7. $\Gamma(nx) = (2\pi)^{(1-n)/2}\, n^{nx-1/2} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{j}{n}\right)$
8. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}$

2.2. Fark Denklemleri

Tanım 2.2.1. x sürekli bir değişken olmak üzere genel olarak fark denklemi

$$f\left(x, \Delta y(x), \ldots, \Delta^{n-1} y(x), \Delta^n y(x)\right) = 0 \qquad (2.2.1)$$

olarak tanımlanmakla birlikte $k = 1,2,3, \dots, n$ için $\Delta^k y(x)$ değerleri yerine yazılırsa

$$f\big(x, y(x), y(x+1), \dots, y(x+n)\big) = 0 \qquad (2.2.2)$$

şeklinde de tanımlanır ve buna *fonksiyonel fark denklemi* denir. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_i ayrık noktaları üzerinde tanımlı fark denklemi ise

$$g(i, \Delta y_i, \Delta^2 y_i, \dots, \Delta^{n-1} y_i, \Delta^n y_i) = 0$$

veya $k = 1,2,3, \dots, n$ için $\Delta^k y_i$ değerleri yerine yazılırsa

$$g(i, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}) = 0 \qquad (2.2.3)$$

olarak da tanımlanır ve bu denkleme *skaler fark denklemi* denir.

Tanım 2.2.2. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük indislerinin farkına o denklemin *mertebesi* denir.

Tanım 2.2.3. x sürekli değişken ve $k = 0,1,2, \dots, n$ için $p_k(x)$ ve $b(x)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $p_0(x) \neq 0$ ve $p_n(x) \neq 0$ olması şartıyla;

$$p_0(x)y(x+n) + p_1(x)y(x+n-1) + \cdots + p_n(x)y(x) = b(x) \qquad (2.2.4)$$

fark denklemine *n. mertebeden lineer fonksiyonel fark denklemi* denir.

x_i ayrık noktalar kümesi ve $p_k(i)$ ve $b(i)$, $i \geq i_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar; $[i_0, \infty)$ kümesi üzerinde $p_0(i) \neq 0$ ve $p_n(i) \neq 0$ olmak üzere

$$p_0(i)y_{i+n} + p_1(i)y_{i+n-1} + \cdots + p_n(i)y_i = b(i) \qquad (2.2.5)$$

biçimindeki fark denklemine de *n. mertebeden lineer skaler fark denklemi* denir. (2.2.4) ve (2.2.5) denklemlerinde $b(x) = 0$ ve $b(i) = 0$ ise bu denklemlere *homojen fark denklemi*, $b(x) \neq 0$ ve $b(i) \neq 0$ ise *homojen olmayan fark denklemi* denir. $p_k(x)$ ve $p_k(i)$ katsayı fonksiyonları sabit fonksiyonlar ise bu durumda (2.2.4) ve (2.2.5) denklemlerine *n. mertebeden sabit katsayılı fark denklemi*, sabit fonksiyon değilse *n. mertebeden değişken katsayılı fark denklemi* denir.

2.3. Fark Denkleminin Özellikleri

Akyol (2011), Bayar (2012), Bereketoğlu ve Kutay (2011), Elaydi (2005), Kelly ve Peterson (2001) çalışmalarında fark denklemlerinin çözümleri hakkında bilgiler vermiş ve bu bölümde bu bilgilerden yararlanılmıştır.

Tanım 2.3.1. Bir fark denklemini tanımlı olduğu bütün noktalarda özdeş olarak sağlayan fonksiyona *fark denkleminin çözümü* denir.

Tanım 2.3.2. n. mertebeden (2.2.2) ve (2.2.3) fark denklemlerinin sırasıyla

$$F\big(x, C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)\big) = 0, \quad F(i, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

şeklinde n tane $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ birim periyodik fonksiyon ve n tane $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabit içeren çözümüne *genel çözüm*, genel çözümdeki $C_n(x)$ ve c_n'lere özel değerler verilerek elde edilen çözümlere ise *özel çözüm* denir. $C_n(x)$ ve c_n'lere özel değerler verilerek elde edilemeyen çözümlere ise aykırı çözüm diyebiliriz.

Tanım 2.3.3. $f_{1,i}, f_{2,i}, \dots, f_{m,i}$ fonksiyonları $i \geq i_0$ için tanımlı olsunlar. $\forall i \geq i_0$ için

$$\alpha_1 f_{1,i} + \alpha_2 f_{2,i} + \cdots + \alpha_m f_{m,i} = 0$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sabitleri var ise, bu durumda $\{f_{1,i}, f_{2,i}, \dots, f_{m,i}\}$ fonksiyonlarına $[i_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımlıdır;* bu eşitlik $\forall i \geq i_0$ için ancak ve ancak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ durumunda sağlanıyorsa *lineer bağımsızdır* denir. Burada

$$f_{m,i} = (f_m)_i = f_m(x_i)$$

dir.

Tanım 2.3.4. (2.2.4) ve (2.2.5) denklemlerinin n tane lineer bağımsız çözümünün kümesine, bir *temel çözüm kümesi* denir.

Teorem 2.3.5. $\forall i \geq i_0$ için $p_0(i) \neq 0$ ve $p_n(i) \neq 0$ ise, bu durumda (2.2.5) lineer homojen fark denklemi $i \geq i_0$ üzerinde tanımlı olan bir temel çözüm kümesine sahiptir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 2.3.6. (2.2.4) denkleminde $b(x) = 0$ alınarak oluşturulan homojen denklemin n tane lineer bağımsız çözümü $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ olmak üzere bu homojen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

olup; burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerdir.

Teorem 2.3.7. (2.2.4) değişken katsayılı n. mertebeden lineer homojen olmayan fark denkleminin çözümü; homojen denklemin genel çözümü ile homojen olmayan denklemi sağlayan bir özel çözümün toplamından oluşur. Yani $y_h(x)$ homojen denklemin genel çözümü, $y_p(x)$ homojen olmayan denklemin özel çözümü olmak üzere

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.3.8. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ verilen fonksiyonlar olmak üzere, Casorati matrisi sürekli fonksiyonlar kümesinde

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \cdots & f_m(x+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & \cdots & f_m(x+m-1) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu matrisin determinantı

$$w(x) = detW(x)$$

şeklinde gösterilir ve bu determinant *Casoratyan* olarak adlandırılır.

Benzer şekilde $f_{1,i}, f_{2,i}, \dots, f_{m,i}$ fonksiyonları için de

$$W(i) = \begin{bmatrix} f_{1,i} & f_{2,i} & \cdots & f_{m,i} \\ f_{1,i+1} & f_{2,i+1} & \cdots & f_{m,i+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{1,i+m-1} & f_{2,i+m-1} & \cdots & f_{m,i+m-1} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu matrisin determinantı

$$w(i) = detW(i)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.3.9. $f_{1,i}, f_{2,i}, \dots, f_{m,i}$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\forall i \geq i_0$ için

$$detW(i) \neq 0$$

olmasıdır.

Lemma 2.3.10. $\{y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}\}$ fonksiyonları (2.2.5) lineer fark denkleminin homojen kısmının çözümleri ve $w(i)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda $i \geq i_0$ için

$$w(i) = (-1)^{n(i-i_0)} \left(\prod_{m=i_0}^{i-1} p_n(m) \right) w_{i_0}$$

eşitliği yazılır.

Sonuç 2.3.11.

a) $\{y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}\}$ (2.2.5) denkleminin çözümleri ve $\forall i \geq i_0$ için $p_0(i) \neq 0$ $p_n(i) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\forall i = i_0$ sayısına karşılık $detW(i_0) \neq 0$ ise $\forall i \geq i_0$ için $detW(i) \neq 0$'dır.

b) $\{y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}\}$ fonksiyonlarının temel çözüm sistemi oluşturması için $\forall i \geq i_0$ için $detW(i) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 2.3.12. k pozitif bir tam sayı olmak üzere;

$$[k(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = k^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

bağıntısı vardır.

3. SABİT KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümünde sürekli değişkenler kümesinde ve ayrık noktalar kümesinde tanımlı olan n. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri, n. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemleri ve bu denklemlerin çözüm yöntemlerinden; Amirali ve Duru (2002), Bayar (2012), Elaydi (2005), Goldberg (1960), Kelly ve Peterson (2001), Levy ve Lessman (1961) kaynakları yardımıyla bahsedilecektir.

3.1. n. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri

Bu kesimde n. mertebeden sabit katsayılı homojen lineer fark denklemlerinin çözümlerini inceleyeceğiz.

$$\alpha_0 \Delta^n y_i + \alpha_1 \Delta^{n-1} y_i + \cdots + \alpha_{n-1} \Delta y_i + \alpha_n y_i = 0 \tag{3.1.1}$$

şeklinde ya da

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ katsayıları reel sayılar olup, $\alpha_0 \neq 0$ olmak üzere $n = 1,2,3,\ldots$ için $\Delta^n y_i$ değerleri yerine yazılırsa ve düzenlenirse n. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi

$$a_0 y_{i+n} + a_1 y_{i+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{i+1} + a_n y_i = 0 \tag{3.1.2}$$

şeklindedir. Burada $a_0 \neq 0$ ve $a_n \neq 0$'dır. (3.1.2) denklemin

$$y_i = q^i, \; q \neq 0 \tag{3.1.3}$$

şeklinde çözümü aranır. (3.1.3) ifadesi (3.1.2) denkleminin çözümü olduğuna göre yerine yazılırsa

$$a_0 q^{i+n} + a_1 q^{i+n-1} + \cdots + a_{n-1} q^{i+1} + a_n q^i = 0$$

olur. Buradan

$$q^i (a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

yazılır. $q^i \neq 0$ olduğu için

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3.1.4}$$

bulunur. (3.1.4) denklemine (3.1.2) fark denkleminin *karakteristik denklemi* denir. (3.1.2) denklemi n. mertebeden bir denklem olduğu için $k = 1,2,\ldots,n$ için q_k şeklindeki köklerine *karakteristik kökler* denir. Cebirin temel esas teorime göre n. dereceden denklemin en fazla n tane kökü vardır. Bu kökler ya hepsi birbirinden farklı reel, ya bazıları birbirine eşit katlı ve reel ya da bazıları kompleks olabilir.

a) $q_1, q_2, \ldots, q_n$; (3.1.4) denkleminin birbirinden farklı n tane reel kökü olsun. Bu durumda $\{q_1{}^i, q_2{}^i, \ldots, q_n{}^i\}$ fonksiyonları (3.1.2) denkleminin n tane lineer bağımsız çözümüdür. Buradan (3.1.2) denkleminin genel çözümü

$$y_i = c_1 q_1{}^i + c_2 q_2{}^i + \cdots + c_n q_n{}^i \tag{3.1.5}$$

şeklinde olur. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_n$; n tane keyfi sabitlerdir.

b) $r < n$ olmak üzere (3.1.4) denkleminin birbirinden farklı $q_1, q_2, \ldots, q_r$ kökleri reel ve katları sırasıyla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ olsun. Buradan açıktır ki $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$ dır. O halde genel çözüm

$$y_i = \left(c_{11} + c_{12} i + \cdots + c_{1m_1} i^{m_1 - 1}\right) q_1{}^i + \left(c_{21} + c_{22} i + \cdots + c_{2m_2} i^{m_2 - 1}\right) q_2{}^i + \cdots + \left(c_{r1} + c_{r2} i + \cdots + c_{rm_r} i^{m_r - 1}\right) q_r{}^i \tag{3.1.6}$$

olur.

Teorem 3.1.1. $y_k = u_k + i v_k$ kompleks fonksiyonu $\left(i = \sqrt{-1}\right)$, (3.1.2) homojen lineer fark denkleminin bir çözümü ise u_k ve v_k da bu fark denkleminin lineer bağımsız bir çözümü olur.

c) (3.1.4) denkleminin bir $q_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ kompleks kökü olsun. Kompleks kökün eşleniği de kök olduğundan diğer kök $q_2 = \alpha - i\beta$ olur. Geriye kalan kökler birbirinden farklı reel ve $q_3, q_4, \ldots, q_n$ olsun.

$$q_1{}^k = (\alpha + i\beta)^k = r^k[\cos k\theta + i \sin k\theta]$$

olup Teorem 3.1.1. gereği genel çözüm

$$y_k = c_1 r^k \cos k\theta + c_2 r^k \sin k\theta + c_3 q_3{}^k + \cdots + c_n q_n{}^k$$

şeklindedir. Burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

dır.

Not: Yukarıda verilen c) durumunda genel çözüm ifadesi q^i değil de q^k şeklinde aranmıştır. Sebebi ise sanal birim olan $(i^2 = -1)$ i sayısı ile indis olarak kullanılan i ifadelerinin karışmasını engellemektir.

Örnek 3.1.2. $y_{i+3} - 3y_{i+2} + 4y_i = 0$ fark denkleminin çözümünü bulalım**.**

Soruda verilen ifadenin karakteristik denklemi

$$q^3 - 3q^2 + 4 = 0$$

olur. Düzenleyecek olursak

$$(q + 1)(q - 2)^2 = 0$$

olarak bulunur. Bu denklemin kökleri $q_1 = -1,\ q_2 = 2,\ q_3 = 2$ olup bir tane farklı, iki tane katlı gerçel kökü bulunmaktadır. O zaman genel çözüm

$$y_i = c_1(-1)^i + c_2 2^i + c_3 i 2^i$$

olur. Burada c_1, c_2, c_3' ler keyfi sabitlerdir.

Örnek 3.1.3. $y_{k+2} + 9y_k = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklemin karakteristik denklemi

$$q^2 + 9 = 0 \Longrightarrow q^2 = -9$$

olur. Karakteristik kökleri $q_1 = 3i, q_2 = -3i$ olarak bulunur. O halde $\alpha = 0, \beta = 3$ olup $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ formülünden $r = 3$ bulunur. Biliyoruz ki $\tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$ olduğu için $\theta = \frac{\pi}{2}$ bulunur. Böylece genel çözüm

$$y_k = c_1 3^k \cos\frac{k\pi}{2} + c_2\, 3^k \sin\frac{k\pi}{2}$$

olur.

3.2. *n*. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemleri

n. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemi

$$a_0 y_{i+n} + a_1 y_{i+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{i+1} + a_n y_i = b_i \qquad (3.2.1)$$

şeklinde yazılır. Burada $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları reel sabitler, $a_0 \neq 0$ ve $a_n \neq 0$'dır. (3.2.1) denklemine ait (3.1.2) homojen denklemin $y_{h,i}$ genel çözümü bulunur. Sonra homojen olmayan denklemin bir $y_{p,i}$ özel çözümü oluşturulur. Böylece Teorem 2.3.7.'ye göre denkleminin genel çözümü

$$y_i = y_{h,i} + y_{p,i}$$

olur.

3.3. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Homojen olmayan (3.2.1) denkleminin bir $y_{p,i}$ çözümü aranırken b_i gözönünde bulundurulur. Buna göre $a, b, k, A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_k$'ler sabit sayılar olmak üzere b_i'nin verilişine göre bir $y_{p,i}$ özel çözümü

Tablo 3.1. Özel çözüm belirleme

$b_i = a^i$ ise	$y_{p,i} = Aa^i$ şeklinde
$b_i = i^k$ ise	$y_{p,i} = A_0 + A_1 i + \cdots + A_k i^k$ şeklinde
$b_i = i^k a^i$ ise	$y_{p,i} = (A_0 + A_1 i + \cdots + A_k i^k)a^i$ şeklinde
$b_i = \sin bi$ veya $\cos bi$ ise	$y_{p,i} = A\sin bi + B\cos bi$ şeklinde
$b_i = a^i \sin bi$ veya $a^i \cos bi$ ise	$y_{p,i} = (A\sin bi + B\cos bi)a^i$ şeklinde
$b_i = i^k a^i \sin bi$ veya $i^k a^i \cos bi$ ise	$y_{p,i} = (A_0 + A_1 i + \cdots + A_k i^k)a^i \sin bi + (B_0 + B_1 i + \cdots + B_k i^k)a^i \cos bi$ şeklinde

şeklinde aranabilir. Eğer aranan özel çözüm homojen denklemin genel çözümü ile lineer bağımlı ise lineer bağımsız olana kadar i ile çarpılır.

Örnek 3.3.1. $y_{i+2} - 5y_{i+1} + 6y_i = 1 + 2i$ fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Verilen denklemin homojen kısmı

$$y_{i+2} - 5y_{i+1} + 6y_i = 0$$

olup, bu kısmın karakteristik denklemini yazarsak

$$q^2 - 5q + 6 = 0$$

olur. Karakteristik denklemin kökleri $q_1 = 2$ ve $q_2 = 3$ olup homojen kısmın genel çözümü

$$y_{h,i} = c_1 2^i + c_2 3^i$$

dir. $b_i = 1 + 2i$ fonksiyonu birinci dereceden bir polinom olduğu için

$$y_{p,i} = A_0 + A_1 i$$

şeklinde bir özel çözüm aranır. Bu ifadeyi soruda verilen denklemde yerine yazarsak

$$A_0 + A_1(i+2) - 5\big(A_0 + A_1(i+1)\big) + 6(A_0 + A_1 i) = 1 + 2i$$

olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$2A_0 - 3A_1 + 2A_1 i = 1 + 2i$$

elde edilir. Eşitliğin sağlanabilmesi için

$$2A_1 = 2, \qquad 2A_0 - 3A_1 = 1$$

$$A_1 = 1, \qquad A_0 = 2$$

olur. Buradan özel çözüm

$$y_{p,i} = 2 + i$$

bulunur. O halde genel çözüm

$$y_i = y_{h,i} + y_{p,i}$$

$$y_i = c_1 2^i + c_2 3^i + 2 + i$$

dir.

3.4. Operatör Yöntemi

(3.2.1) sabit katsayılı homojen olmayan lineer fark denklemi E operatörü cinsinden

$$P(E) y_i = b_i \tag{3.4.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$P(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \cdots + a_n \tag{3.4.2}$$

dir. Buna göre (3.4.1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_{p,i} = \frac{1}{P(E)} b_i \tag{3.4.3}$$

dir.

Teorem 3.4.1.

$$P(E) b^i = P(b) b^i$$

dir (Mickens 1990).

Sonuç 3.4.2. $P(b) \neq 0$ ise,

$$\frac{1}{P(E)} b^i = \frac{b^i}{P(b)} \tag{3.4.4}$$

dir.

Teorem 3.4.3. F_i, i'ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$P(E) b^i F_i = b^i P(bE) F_i \tag{3.4.5}$$

ve

$$\frac{1}{P(E)} b^i F_i = b^i \frac{1}{P(bE)} F_i$$

dir.

Teorem 3.4.4. $P(b) = 0$ ve

$$P(E) = (E - b)^m h(E), \quad h(b) \neq 0$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{P(E)} b^i = \frac{b^{i-m} i^m}{h(b) m!} \tag{3.4.6}$$

dir.

Örnek 3.4.5. $y_{i+2} - 4y_{i+1} + 3y_i = 3^i$ fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Bu denklem E operatörü cinsinden

$$P(E)y_i = (E-1)(E-3)y_i = 3^i \tag{3.4.7}$$

şeklinde ifade edilebilir. $P(3) = 0$ olduğundan, Teorem 3.4.4. uygulanır. (3.4.7) denkleminin bir özel çözümü için önce

$$P(E) = (E-3)h(E), \;\; h(E) = E - 1$$

şeklinde yazılr. Buradan $b = 3, m = 1, h(b) = 2$ olup

$$\begin{aligned} y_{p,i} &= \frac{1}{P(E)}3^i \\ &= \frac{3^{i-1}.\, i^1}{2.1!} \\ &= \frac{i.\,3^i}{6} \end{aligned}$$

olur. Homojen kısmın çözümü için

$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

karakteristik denklemi yazılır. Bu ifadenin kökleri $q_1 = 3$ ve $q_2 = 1$ olup verilen fark denkleminin homojen kısmının çözümü

$$y_{h,i} = c_1 + c_2 3^i$$

olur. O halde genel çözüm

$$y_i = y_{h,i} + y_{p,i}$$

eşitliğinden

$$y_i = c_1 + c_2 3^i + \frac{i.\,3^i}{6}$$

olur.

Örnek 3.4.6. $(E-2)(E-3)y_i = (2 + i + i^2)4^i$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Verilen denkleme göre

$$P(E) = (E-2)(E-3)$$

dür. Özel çözüm için önce

$$y_{p,i} = \frac{1}{(E-2)(E-3)}(2 + i + i^2)4^i$$

yazılır. Teorem 3.4.3. uygulanırsa

$$y_{p,i} = 4^i \frac{1}{(4E-2)(4E-3)}(2 + i + i^2)$$

veya

$$y_{p,i} = \frac{1}{2} 4^i (1 + 6\Delta + 8\Delta^2)^{-1}(2 + i + i^2)$$

bulunur. Buradan sonra $(1 + 6\Delta + 8\Delta^2)^{-1}$ ifadesi seriye açılır ve aranan özel çözüm

$$y_{p,i} = \frac{1}{2} 4^i (i^2 - 11i + 46) = 2^{2i-1}(i^2 - 11i + 46)$$

elde edilir. Soruda verilen fark denkleminin

$$(E-2)(E-3)y_i = 0$$

formundaki homojen kısmının çözümü ise

$$y_{h,i} = c_1 2^i + c_2 3^i$$

olur. Buradan genel çözüm ifadesi

$$y_i = y_{h,i} + y_{p,i}$$

eşitliğinden

$$y_i = c_1 2^i + c_2 3^i + 2^{2i-1}(i^2 - 11i + 46)$$

olur.

4. DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde x sürekli değişken olmak üzere

$$y(x+n)+p_1(x)y(x+n-1)+\cdots+p_n(x)y(x)=b(x) \tag{4.1}$$

fonksiyonel fark denklemi ve ayrık kümedeki

$$y_{i+n}+p_{1,i}y_{i+n-1}+\cdots+p_{n,i}y_i=b_i \tag{4.2}$$

değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin çözümleri Amirali ve Duru (2002), Bayar (2012), Bereketoğlu ve Kutay (2011), Jagerman (2000), Kelly ve Peterson (2001), Levy ve Lessman (1961), Yıldız (2018) kaynakları yardımıyla verilecektir.

4.1. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri

a. Ayrık Noktalar Kümesinde

Birinci mertebeden lineer homojen olmayan değişken katsayılı

$$y_{i+1}-a_iy_i=b_i \tag{4.1.1}$$

fark denklemi ve

$$y_{i_0}=\mu_0 \tag{4.1.2}$$

başlangıç koşulundan oluşan başlangıç değer problemi verilsin. Burada a_i ve b_i, $i\geq i_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlardır.

(4.1.1) denkleminin homojen hali

$$y_{i+1}-a_iy_i=0, \quad i\geq i_0\geq 0 \tag{4.1.3}$$

dir.

Teorem 4.1.1. (4.1.3) homojen fark denklemi ve (4.1.2) başlangıç koşulundan oluşan başlangıç değer probleminin çözümü

$$y_i=\left(\prod_{m=i_0}^{i-1}a_m\right)\mu_0 \tag{4.1.4}$$

olup (4.1.1) - (4.1.2) başlangıç değer probleminin çözümü

$$y_i=\left(\prod_{m=i_0}^{i-1}a_m\right)\mu_0+\sum_{r=i_0}^{i-1}\left(\prod_{m=r+1}^{i-1}a_m\right)b_r \tag{4.1.5}$$

dir.

Buna göre birinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan

$$y_{i+1}-ay_i=b_i \tag{4.1.6}$$

fark denklemi ve

$$y_{i_0} = \mu_0 \tag{4.1.7}$$

şartı için (4.1.5) çözüm formülü

$$y_i = a^i y_{i_0} + \sum_{r=0}^{i-1} a^{i-r-1} b_r \tag{4.1.8}$$

halini alır. Ayrıca c sabit olmak üzere $b_i = c$ olduğu zaman (4.1.8)'den,

$$y_i = \begin{cases} a^i y_{i_0} + \left(\dfrac{a^i - 1}{a - 1}\right) c\,, & a \neq 1 \\ y_{i_0} + ci\,, & a = 1 \end{cases} \tag{4.1.9}$$

bulunur.

Örnek 4.1.2. $y_{i+1} = (i+2)y_i + 2^i(i+2)!$, $y_0 = 1$ şartını sağlayan başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

(4.1.5) denkleminden

$$y_i = \left(\prod_{m=0}^{i-1}(m+2)\right) y_0 + \sum_{r=0}^{i-1}\left(\prod_{m=r+1}^{i-1}(m+2)\right) 2^r (r+2)!$$

$$= (i+1)! + \sum_{r=0}^{i-1}(i+1)!\, 2^r$$

$$= (i+1)!\, 2^i$$

dir.

Örnek 4.1.3. Yıllık % 5 oranında faiz uygulanan bir bankanın bireysel emeklilik hesabına bir kişi her yılın başında 3000 TL yatırılıyor. i. yılın sonunda bireysel emeklilik hesabında ne kadar olacağını bulunuz.

i. yılın sonunda bireysel emeklilik hesabındaki paranın miktarı y_i olsun. Çözümü

$$y_{i+1} = a_i y_i + b_i$$

formatında düşünürsek

$$y_{i+1} = y_i + [y_i + 3000]0{,}05 + 3000 = 1{,}05 y_i + 3150$$

birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemine dönüşür. (4.1.9) formülüne göre

$$y_i = (1{,}05)^i.0 + 3150\left(\frac{(1{,}05)^i - 1}{1{,}05 - 1}\right) = \frac{3150}{0{,}05}\left[(1{,}05)^i - 1\right]$$

$$y_i = 63000\left[(1{,}05)^i - 1\right]$$

sonucuna ulaşılır. Örneğin 20 yıl sonunda hesaptaki para miktarını hesaplamak istersek

$$y_{20} = 63000[(1{,}05)^{20} - 1] = 104.157{,}75 \text{ TL}$$

olur.

b. Sürekli Değişkenler Kümesinde

$$y(x+1) - p(x)y(x) = g(x) \qquad (4.1.10)$$

birinci mertebeden fonksiyonel fark denklemini ele alalım. Bu denkleme

$$y(x) = r(x)s(x) \qquad (4.1.11)$$

dönüşümü uygulanırsa denklem

$$r(x+1)s(x+1) - p(x)r(x)s(x) = g(x) \qquad (4.1.12)$$

denklemine dönüşür. Burada

$$r(x+1) = p(x)r(x)$$

olacak şekilde bir $r(x)$ fonksiyonu seçilirse (4.1.12) denklemi

$$r(x+1)[\Delta s(x)] = g(x)$$

olur. Buradan

$$p(x)r(x)\Delta s(x) = g(x)$$

ve genel çözüm

$$s(x) = \sum \frac{g(x)}{p(x)r(x)} + C(x), \qquad (\Delta C(x) = 0)$$

elde edilir. Bu ifade (4.1.11)'de yerine yazılırsa (4.1.10) birinci mertebeden fonksiyonel fark denkleminin genel çözümü

$$y(x) = r(x)\left[\sum \frac{g(x)}{p(x)r(x)} + C(x)\right] \qquad (4.1.13)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Eğer (4.1.12)'de $g(x) = 0$ ise genel çözüm

$$y(x) = r(x)C(x)$$

olur. Burada $\Delta C(x) = 0$ ve $r(x)$

$$r(x+1) = p(x)r(x)$$

denkleminin çözümüdür.

Örnek 4.1.4. $y(x+1) - xy(x) = x$ denklemi verilsin.

$$y(x) = r(x)s(x)$$

alınırsa denklem

$$r(x+1)s(x+1) - xr(x)s(x) = x$$

olur. Burada

$$r(x+1) = xr(x)$$

eşitliğini sağlayan $r(x)$ için denklem

$$r(x+1)[s(x+1) - s(x)] = x$$

ve burada

$$r(x+1)\Delta s(x) = x$$

olur. Diğer taraftan

$$r(x+1) = xr(x)$$

ifadesinden

$$r(x) = \Gamma(x)$$

olur. Bu ifade yerine yazılırsa

$$\Gamma(x+1)\Delta s(x) = x \Longrightarrow x\Gamma(x)\Delta s(x) = x$$

$$\Delta s(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$$

$$s(x) = \sum \frac{1}{\Gamma(x)} + C(x)$$

bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa

$$y(x) = \Gamma(x)\left(\sum \frac{1}{\Gamma(x)} + C(x)\right)$$

bulunur. Özel olarak denklem

$$y(x+1) - xy(x) = 0$$

ise bu durumda $g(x) = 0$ olduğu için

$$y(x) = C(x)\Gamma(x)$$

olur. Benzer mantıkla

$$y_{i+1} - iy_i = 0$$

için genel çözüm

$$y_i = c\Gamma(i)$$

bulunur.

Örnek 4.1.5. $xy(x+1) - (x-1)y(x) = x$ birinci mertebeden fark denklemini çözelim.

Bu denklem Δ operatörüne göre

$$\Delta[(x-1)y(x)] = x$$

tam fark şeklinde yazılabilir. Δ^{-1} operatörünün tanımından yararlanılırsa buradan

$$(x-1)y(x) = \sum x + C(x)$$

elde edilir. O halde denklemin genel çözümü

$$(x-1)y(x)=\frac{x(x-1)}{2}+C(x)\Rightarrow y(x)=x/2+C(x)/(x-1)$$

olur. $(\Delta C(x)=0)$

Sonuç 4.1.6.

a) Özel olarak (4.1.10) denkleminde $p(x)=x-k,\, g(x)=0$ alınırsa denklem

$$y(x+1)=(x-k)y(x)$$

olur. Burada $t=x-k$ değişken değiştirmesi uygulanırsa denklem

$$y(t+k+1)=ty(t+k)$$

denklemine dönüşür. Burada

$$u(t)=y(t+k)$$

alınırsa denklem

$$u(t+1)=tu(t)$$

olur. Bu denklemin genel çözümü ise

$$u(t)=C(t)\Gamma(t)$$

dir. Böylece

$$y(x+1)=(x-k)y(x)$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x)=C(x)\Gamma(x-k)$$

şeklinde elde edilir.

b) Özel olarak (4.1.10) denklemi

$$y(x+1)=\left(a\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)\Big/ b\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)\right)y(x)$$

şeklinde ise genel çözümü

$$y(x)=C(x)\left(\frac{a}{b}\right)^x\prod_{i=1}^{m}\Gamma(x-\alpha_i)\Big/\prod_{j=1}^{m}\Gamma(x-\beta_j)$$

olur. $(\Delta C(x)=0)$

Örnek 4.1.7. $y(x+1)=(x^3+3x^2+2x)y(x)$ denklemini verilsin.

Denklem düzenlenirse

$$y(x+1)=\ x(x+1)(x+2)\,y(x)$$

olur. Genel çözüm

$$y(x)=C(x)\Gamma(x)\,\Gamma(x\ +\ 1)\,\Gamma(x+2)=\ C(x)x^2(x+1)\Gamma^3(x)$$

şeklinde bulunur. ($\Delta C(x) = 0$)

Örnek 4.1.8. $xy(x+1) - (x+1)y(x) = 0$ denklemi verilsin.

Denklem

$$y(x+1) = \frac{x+1}{x} y(x)$$

biçiminde yazılırsa genel çözüm

$$y(x) = C(x)\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = C(x)x$$

olarak bulunur. ($\Delta C(x) = 0$)

4.2. İkinci Mertebeden Fark Denklemleri

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$; x'in fonksiyonları olmak üzere ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen fark denklemi

$$y(x+2) + p_1(x)y(x+1) + p_2(x)y(x) = 0 \qquad (4.2.1)$$

yazılabilir. (4.2.1) denkleminin homojen kısmının genel çözümü; $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsız çözümler olmak üzere

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \qquad (4.2.2)$$

şeklindedir. Bizi bu genel çözüm formatına götürecek olan bir çözüm yolu yoktur. Bu yüzden bu homojen denklemin bir çözümünün bilinmesi durumunda genel çözüme nasıl ulaşılacağını göstereceğiz.

a. Sürekli Değişkenler Kümesinde

$$y(x+2) + p_1(x)y(x+1) + p_2(x)y(x) = 0 \qquad (4.2.3)$$

denkleminin bir çözümü $u(x)$ ise

$$y(x) = u(x)g(x) \qquad (4.2.4)$$

dönüşümü yardımıyla denklemin mertebesi bir düşürülür. Bu dönüşüm (4.2.3) denklemine uygulanırsa

$$u(x+2)g(x+2) + p_1(x)u(x+1)g(x+1) + p_2(x)u(x)g(x) = 0 \qquad (4.2.5)$$

halini alır. (4.2.5) denklemine $u(x+2)g(x+1)$ bir eklenip bir çıkarılırsa

$$u(x+2)\Delta g(x+1) - p_2(x)u(x)\Delta g(x) = 0 \qquad (4.2.6)$$

bulunur. Bu $\Delta g(x)$ bilinmeyenli birinci mertebeden bir fark denklemidir. Bu denklem çözülerek $\Delta g(x)$ ve ardından $\Delta g(x)$ çözülerek $g(x)$ bulunur. Böylece (4.2.3) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = u(x)g(x)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Örnek 4.2.1. $(x-1)y(x+2)+(2-3x)y(x+1)+2xy(x)=0$ denkleminin $x\geq 0$ için verilen bir çözümü $u(x)=x$ ise denklemin genel çözümünü bulunuz.
Bu denkleme

$$y(x)=xg(x)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$(x-1)(x+2)g(x+2)+(2-3x)(x+1)g(x+1)+2x.x.g(x)=0$$

olur. Burada $(x-1)(x+2)g(x+1)$ bir eklenip bir çıkarılırsa

$$(x-1)(x+2)\Delta g(x+1)-2x^2\Delta g(x)=0$$

$$\Delta g(x+1)=\frac{2x^2}{(x-1)(x+2)}\Delta g(x)$$

bulunur. Bu denklemin çözümünü Γ fonksiyonu yardımıyla

$$\Delta g(x)=C(x)2^x\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x-1)\Gamma(x+2)}$$

$$\Delta\left[\frac{y(x)}{x}\right]=C(x)2^x\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x-1)\Gamma(x+2)}$$

$$\Delta\left[\frac{y(x)}{x}\right]=C(x)2^x\frac{(x-1)}{x(x+1)}$$

$$\Delta\left[\frac{y(x)}{x}\right]=C(x)2^x\left[\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right]$$

yazılır. Daha sonra gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\Delta\left[\frac{y(x)}{x}\right]=\Delta\left[\frac{C(x)2^x}{x}\right]$$

elde edilir. Bu durumda çözüm

$$y(x)=2^xC(x)+xD(x)$$

olarak bulunur. Burada $C(x)$ve $D(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyonlardır.

b. Ayrık Noktalar Kümesinde

Ayrık noktalarda

$$y_{i+2}+\,p_1(i)y_{i+1}+\,p_2(i)\,y_i=0 \tag{4.2.7}$$

denklemi verilsin. Burada $p_1(i)$ ve $p_2(i)$; $\forall i\geq i_0$ için $[i_0,\infty)$'da tanımlı ve $p_2(i)\neq 0$'dır. $y_{1,i}$ bu homojen denklemin çözümü olsun. a) kısmındakine benzer şekilde işlemler yapılarak genel çözüm bulunur.

Örnek 4.2.2.

$$y_{i+2}-\frac{i+4}{i+2}y_i=0$$

denkleminin bir özel çözümü $y_{1,i}=i+2$'dir. Bu denkleme

$$y_i=(i+2)g_i$$

dönüşümü uygulanırsa

$$(i+4)g_{i+2}-\frac{i+4}{i+2}(i+2)g_i=0$$

$$(i+4)g_{i+2}-(i+4)g_i=0 \Longrightarrow (i+4)(g_{i+2}-g_i)=0$$

olur. $(i+4)\neq 0$ olduğundan

$$g_{i+2}-g_i=0$$

olur. Buradan

$$g_i=c_1+c_2(-1)^i$$

bulunur. Böylece genel çözüm

$$y_i=(i+2)\left(c_1+c_2(-1)^i\right)$$

denkleminden

$$y_i=(i+2)c_1+c_2(-1)^i(i+2)$$

olur. O halde diğer çözüm

$$y_{2,i}=(-1)^i(i+2)$$

olur.

4.3. *E* Operatörü İle Çarpanlara Ayrılabilen Fark Denklemleri

$$y(x+n)+p_1(x)y(x+n-1)+\cdots+p_n(x)y(x)=g(x) \qquad (4.3.1)$$

lineer fonksiyonel fark denklemini ele alalım.

Bu denklem *E* operatörü yardımıyla

$$\big(a_1(x)E+b_1(x)\big)\big(a_2(x)E+b_2(x)\big)\ldots\big(a_n(x)E+b_n(x)\big)y(x)=g(x)$$

şeklinde çarpanlara ayrıldığını kabul edelim. Burada

$$\big(a_2(x)E+b_2(x)\big)\ldots\big(a_n(x)E+b_n(x)\big)y(x)=z(x)$$

alınırsa denklem

$$\big(a_1(x)E+b_1(x)\big)z(x)=g(x)$$

şeklinde dönüşür. Bu birinci mertebeden denklem çözülerek $z(x)$ bulunur. Bu defa

$$\big(a_3(x)E+b_3(x)\big)\ldots\big(a_n(x)E+b_n(x)\big)y(x)=v(x)$$

alınırsa

$$\big(a_2(x)E+b_2(x)\big)v(x)=z(x)$$

olur. Burada $v(x)$ çözümüne ulaşılır ve benzer şekilde devam edilerek $y(x)$ genel çözümüne ulaşılmış olur (Kelly ve Peterson, 2001).

Örnek 4.3.1. $\big(E^2 - xE - 2(x+2)\big)y(x) = 0$ denklemini E operatörü yardımıyla çözelim.

Bu denklem

$$(E+2)\big(E-(x+2)\big)y(x) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılmış olarak yazılır.

$$\big(E-(x+2)\big)y(x) = z(x)$$

alınırsa

$$(E+2)z(x) = 0$$

olur. Bu denklemin genel çözümü

$$z(x) = (-2)^x C(x)$$

olur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$\big(E-(x+2)\big)y(x) = (-2)^x C(x)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin homojen kısmının genel çözümü

$$D(x)\Gamma(x+2)$$

olmak üzere bu homojen olmayan denklemin genel çözümü (4.1.13) ifadesinden

$$y(x) = D(x)\Gamma(x+2) + C(x)\Gamma(x+2)\sum \frac{(-2)^x}{\Gamma(x+3)}$$

şeklinde bulunur. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ periyodik fonksiyonlardır.

5. LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde bazı lineer olmayan fark denklemleri üzerinde durularak çözümlerinin nasıl yapılacağı konusunda Bayar (2012), Değer (2008), Elaydi (2005), Karagöz (2019) ve Kutay (2010) kaynakları yardımıyla bilgi verilecektir. Burada ayrık noktalardaki i indisi yerine n alınmıştır.

5.1. Otonom Denklemler

$$x(n+1) = f\big(x(n)\big), \qquad n \geq n_0 \tag{5.1.1}$$

denklemini ele alalım. Bu türdeki denklemlere *otonom* ya da *zaman değişkensiz fark denklemi* adı verilir. (5.1.1) denkleminin

$$x(n_0) = x_0 \tag{5.1.2}$$

şartını sağlayan çözümü

$$x(n_0+1) = f\big(x(n_0)\big)$$

$$x(n_0+2) = f\big(x(n_0+1)\big) = f\Big(f\big(x(n_0)\big)\Big) = f^2(x_0)$$

$$\vdots$$

$$x(n_0+n-n_0) = f^{n-n_0}(x_0)$$

olup

$$x(n) = f^{n-n_0}(x_0), \qquad n \geq n_0$$

dır. Burada;

$$f^0(x_0) = x_{0,}\, f^1(x_0) = f(x_0), f^2(x_0) = f\big(f(x_0)\big), \dots$$

dır.

Örnek 5.1.1.

$$x(n+1) = \sqrt[3]{x(n)}, \qquad x(0) = x_0$$

şartını sağlayan denkleminin çözümünü bulalım.

Denklem otonom fark denklemidir. Burada sırasıyla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ alınırsa

$$x(1) = f\big(x(0)\big) = \sqrt[3]{x(0)} = \sqrt[3]{x_0} = x_0^{\frac{1}{3}}$$

$$x(2) = f\big(x(1)\big) = \sqrt[3]{x(1)} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x_0}} = x_0^{\frac{1}{3^2}}$$

$$x(3) = f\big(x(2)\big) = \sqrt[3]{x(2)} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x_0}}} = x_0^{\frac{1}{3^3}}$$

$$\vdots$$

$$x(n) = (x_0)^{\frac{1}{3^n}}$$

olup problemin çözümü bulunur.

5.2. Otonom Olmayan Denklemler

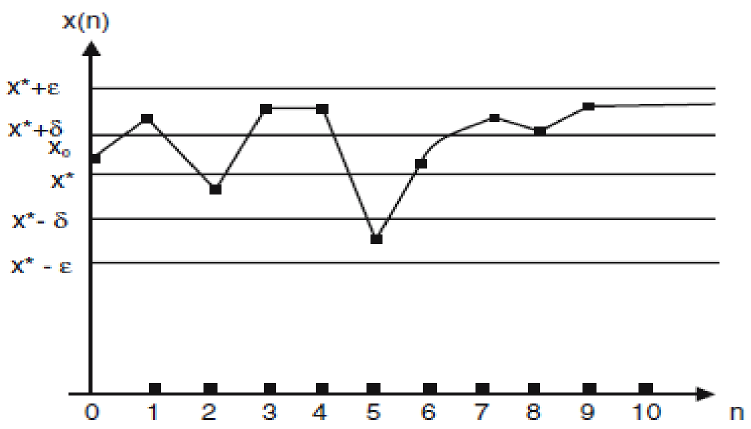
$$y(n+1) = g\big(n, y(n)\big)$$

biçimindeki denkleme *otonom olmayan* ya da *zaman değişkenli fark denklemi* denir.

Tanım 5.2.1. Eğer x^*, f'in sabit bir noktası ise yani $f(x^*) = x^*$ ise x^*'a (5.1.1) denkleminin f'in tanım bölgesi içinde bir *denge noktası* adı verilir (Elaydi, 2005).

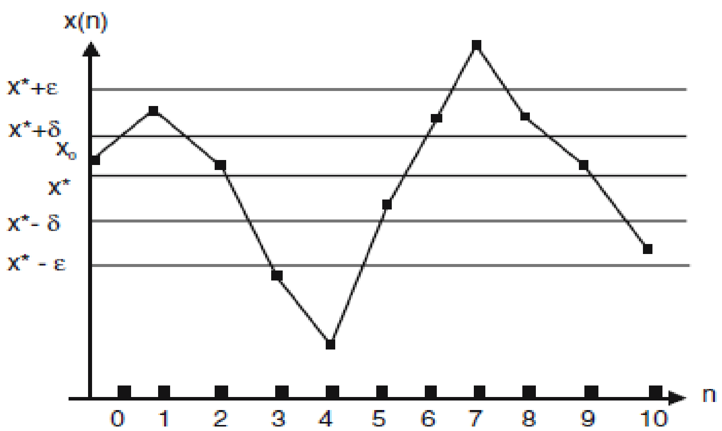
Tanım 5.2.2. x^*, (5.1.1) denkleminin denge noktası olsun.

a) Verilen her bir $\varepsilon > 0$ için $|x(0) - x^*| < \delta$ iken $|x(n) - x^*| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, x^* denge noktası *kararlıdır* denir (Şekil 5.1) (Elaydi, 2005).



Şekil 5.1. Kararlı x^* noktası

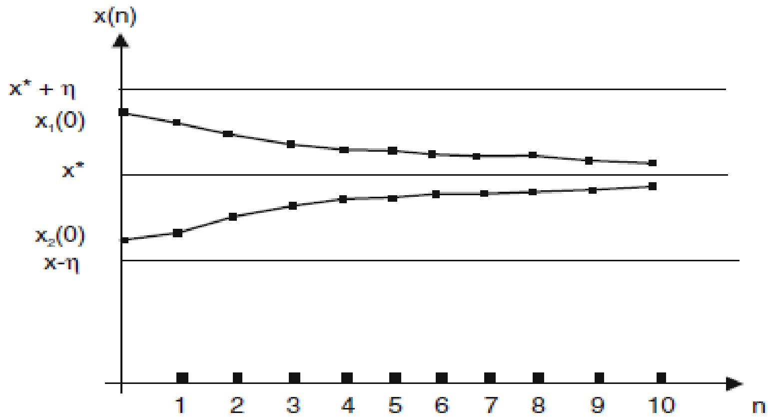
b) Eğer x^* kararlı değilse, kararsız olarak adlandırılır (Şekil 5.2) (Elaydi, 2005).



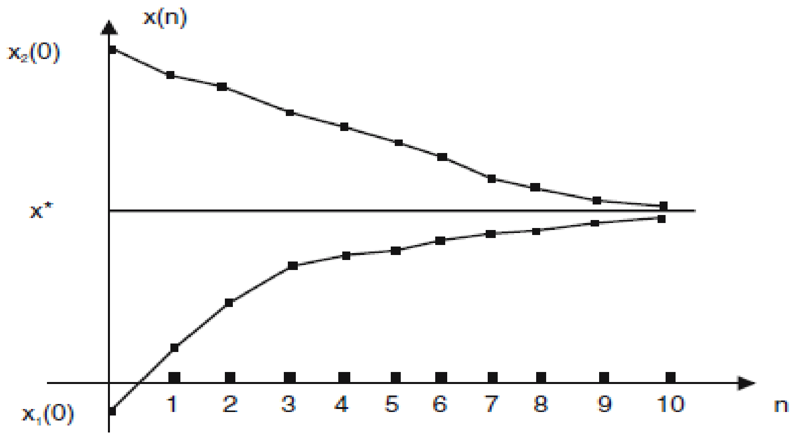
Şekil 5.2. Kararsız x^* noktası

c) Eğer $|x(0) - x^*| < \eta$ iken $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı var ise x^* noktası *çekici* olarak adlandırılır. Eğer $n = \infty$ ise x^* noktasına *global çekici* denir.

d) Eğer x^* noktası hem kararlı hem de çekici ise x^* denge noktasına *asimtotik kararlıdır* denir (Şekil 5.3) (Elaydi, 2005). Eğer $n = \infty$ ise, x^* noktasına *global asimtotik kararlıdır* denir (Şekil 5.4) (Elaydi, 2005).



Şekil 5.3. Asimtotik Kararlı x^* noktası



Şekil 5.4. Global Asimtotik Kararlı x^* noktası

Şimdi otonom olmayan denklemlerin bazı özel durumları göz önüne alınarak çözümleri incelenecektir.

5.2.1. Riccati Türü Denklemler

$$y\,(n+1)\,y\,(n) + p\,(n)\,y\,(n+1) + q\,(n)\,y\,(n) = 0 \tag{5.2.1}$$

denklemi *Riccati türü denklem* olarak bilinir.

Bu denklemi çözmek için

$$z(n)=\frac{1}{y(n)}$$

dönüşümü yapılır. Buradan

$$\frac{1}{z(n+1)}\frac{1}{z(n)}+p\ (n)\frac{1}{z(n+1)}+q\ (n)\frac{1}{z(n)}=0$$

veya

$$q(n)\ z(n+1)+p(n)\ z(n)+1=0$$

elde edilir. Bu ifade birinci basamaktan lineer bir denklemdir.

Ayrıca, homojen olmayan Riccati türü

$$y\ (n+1)\ y\ (n)+p\ (n)\ y\ (n+1)+q\ (n)\ y\ (n)=g(n) \qquad (5.2.2)$$

denklemi için

$$y(n)=\frac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)$$

dönüşümü uygulanır. Bu durumda

$$\left(\frac{z(n+2)}{z(n+1)}-p(n+1)\right)\left(\frac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)\right)+p(n)\left(\frac{z(n+2)}{z(n+1)}-p(n+1)\right)$$
$$+q(n)\left(\frac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)\right)-g(n)=0$$

veya düzenleme yapılırsa

$$z(n+2)+[q(n)-p(n+1)]z(n+1)-[g(n)+q(n)p(n)]z(n)=0$$

doğrusal denklemi elde edilir.

Örnek 5.2.3.

$$y\ (n+1)\ y\ (n)-2y\ (n+1)+\ y\ (n)=0 \qquad (5.2.3)$$

denklemi verilsin.

Bu denkleme

$$y(n)=\frac{1}{z(n)}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$z\ (n+1)\ -2z\ (n)+1=0 \qquad (5.2.4)$$

lineer fark denklemi bulunur. Bu denklemin genel çözümü

$$z\ (n)=c_1 2^n+1$$

dir; burada c_1 keyfi sabittir. O halde burada verilen denklemin genel çözümü

$$y(n) = \frac{1}{z(n)} = \frac{1}{c_1 2^n + 1}$$

biçiminde bulunur.

Örnek 5.2.4.

Homojen olmayan

$$y(n+1)y(n) + 3y(n+1) + \ 5y(n) = -16 \tag{5.2.5}$$

Riccati türü denklemi ele alalım. Bu denkleme

$$y(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)} - 3$$

dönüşümü uygulanırsa

$$z\,(n+2) + 2z\,(n+1) + z(n) = 0 \tag{5.2.6}$$

elde edilir. (5.2.6) denkleminin genel çözümü

$$z(n) = \ (c_1 + c_2 n)(-1)^n$$

dir; burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. O halde bize (5.2.5) denkleminin genel çözümü

$$y(n) = -\frac{4c + 4n + 1}{c + n}$$

olur ve burada

$$c = \frac{c_1}{c_2}$$

dir.

5.2.2. Homojen Denklemler

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}\right) = 0 \tag{5.2.7}$$

şeklinde yazılabilen denkleme *homojen fark denklemi* denir. Bu denklemi lineer hale getirmek için

$$y(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$$

dönüşümü uygulanır.

Örnek 5.2.5.

$$x^2(n+1) + 6x(n+1)x(n) + 5x^2(n) = 0 \tag{5.2.8}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Bu denklem

$$\left[\frac{x(n+1)}{x(n)}\right]^2 + 6\frac{x(n+1)}{x(n)} + 5 = 0 \tag{5.2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$y(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)} \tag{5.2.10}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$y^2(n) + 6y(n) + 5 = 0$$

veya

$$(\,y(n) + 5\,).(\,y(n) + 1\,) = 0 \tag{5.2.11}$$

bulunur. (5.2.11) denkleminin

$$y(n) = -5 \text{ veya } y(n) = -1$$

şeklinde iki çözümü vardır. Bunlar için (5.2.10)'dan sırasıyla,

$$x(n+1) = -5x(n), \qquad x(n+1) = -x(n)$$

fark denklemleri ortaya çıkar. Bunların çözümleri de sırasıyla

$$x(n) = c_1(-5)^n \text{ ve } x(n) = c_2(-1)^n$$

olur.

5.2.3. Logaritmik Dönüşüm Gerektiren Denklemler

$\forall n \geq n_0$ için $g(n) > 0$ olmak üzere

$$\big(x(n+m)\big)^{a_1}.\big(x(n+m-1)\big)^{a_2}.\,\ldots.\big(x(n)\big)^{a_{m+1}} = g(n) \tag{5.2.12}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin her iki tarafının ln fonksiyonu altında görüntüsü alınırsa

$$a_1 \ln x(n+m) + a_2 \ln x(n+m-1) + \cdots + a_{m+1} \ln x(n) = \ln g(n)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme

$$y(n) = \ln x(n) \tag{5.2.13}$$

dönüşümü uygulanırsa, sabit katsayılı lineer homojen olmayan

$$a_1 y(n+m) + a_2 y(n+m-1) + \cdots + a_{m+1} y(n) = \ln g(n) \tag{5.2.14}$$

denklemi bulunur. Daha sonra bu ifade bilinen yöntemlerle çözülerek genel çözüme ulaşılır. Bu çözüm yolunu ayrık noktalar kümesi üzerinde tanımlı fark denklemleri için de uygulayabiliriz.

Örnek 5.2.6.

$$y_{m+2}.y_m - y_{m+1} = 0 \tag{5.2.15}$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

Yukarıda vermiş olduğumuz bilgileri kullanarak denklemimizin çözümüne ulaşabiliriz. İlk olarak denklemi düzenleyip

$$y_{m+2}.y_m = y_{m+1}$$

$$y_{m+2} = \frac{y_{m+1}}{y_m}$$

şeklinde yazdıktan sonra eşitliğin her iki tarafının ln fonksiyonu altında görüntüsü alınırsa

$$\ln(y_{m+2}) = \ln\left(\frac{y_{m+1}}{y_m}\right)$$

$$\ln(y_{m+2}) = \ln(y_{m+1}) - \ln(y_m) \tag{5.2.16}$$

yazılabilir. Burada (5.2.16) denklemine

$$z_m = \ln y_m$$

dönüşümü uygulanırsa

$$z_{m+2} - z_{m+1} + z_m = 0$$

lineer denklemi bulunur. Bu denklemin karakteristik kökleri

$$q_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2},\ q_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

olup genel çözüm

$$z_m = c_1 \cos m\frac{\pi}{3} + c_2 \sin m\frac{\pi}{3}$$

bulunur. Böylece lineer olmayan fark denkleminin genel çözümü

$$y_m = e^{c_1 \cos m\frac{\pi}{3} + c_2 \sin m\frac{\pi}{3}}$$

biçiminde bulunur.

6. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BAZI FARK DENKLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

6.1. İlkel Fonksiyondan Fark Denkleminin Elde Edilmesi

$$F(i, y_i, c) = 0 \tag{6.1.1}$$

şeklinde bir c parametresine bağlı ilkel fonksiyonu veya eğri ailesi verilsin. Bu denklemin i'ye göre farkı alınırsa veya i yerine $i+1$ yazılırsa

$$F(i+1, y_{i+1}, c) = 0 \tag{6.1.2}$$

olur. (6.1.1) ve (6.1.2) denklemleri arasında c sabiti yok edilirse (6.1.1) ilkel fonksiyonu veya eğri ailesini genel çözüm kabul eden birinci mertebeden fark denklemi

$$F(i, y_i, y_{i+1}) = 0 \tag{6.1.3}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$F(i, y_i, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \tag{6.1.4}$$

n tane $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitine bağlı ilkel fonksiyonu (eğri ailesi) verilsin. (6.1.4) ilkel fonksiyonunu genel çözüm kabul eden fark denklemi; (6.1.4) denkleminde i yerine sırasıyla $i+1, i+2, \dots, i+n$ yazılarak (bu işlem keyfi sabit sayısı kadar yapılır) elde edilen n tane denklem ve (6.1.4) denklemiyle birlikte toplam $n+1$ denklem arasında n tane keyfi sabit olan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerinin yok edilmesi ile elde edilir. Elde edilen fark denklemi n. mertebeden olup genel olarak

$$F(i, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{i+n}) = 0 \tag{6.1.5}$$

şeklinde yazılır. (6.1.4) ifadesinin n. kez farkında $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitleri yok ise aranan fark denklemi bu son ifadedir. Keyfi sabit sayısı elde edilen fark denkleminin mertebesini belirler.

Örnek 6.1.1.

$$y_i = ci \tag{6.1.6}$$

ilkel fonksiyonunu genel çözüm kabul eden fark denklemini bulalım.

Bu ifadede keyfi sabit bir tane olduğundan i yerine $i+1$ yazılırsa

$$y_i = c(i+1) \tag{6.1.7}$$

olur. (6.1.6) ile (6.1.7) arasında c sabitinin yok edilmesiyle (6.1.6) ifadesini genel çözüm kabul eden

$$iy_{i+1} - (i+1)y_i = 0 \tag{6.1.8}$$

şeklinde birinci mertebeden fark denklemi elde edilir. Ya da (6.1.6) ifadesinin bir kez farkı alınırsa

$$\Delta y_i = \Delta(ci)$$

$$\Delta y_i = c\Delta i \Longrightarrow \Delta y_i = c \qquad (6.1.9)$$

bulunur. (6.1.6) ve (6.1.9) ifadeleri arasında c sabiti yok edilirse

$$y_i = \Delta y_i i$$

denklemi elde edilir. Bu denklem açıkça yazılırsa

$$i\Delta y_i - y_i = 0$$

$$iy_{i+1} - (i+1)y_i = 0 \qquad (6.1.10)$$

olur.

Ancak burada denklemin Δ operatörüne bağlı olarak yazılmasına gayret edilecektir.

Örnek 6.1.2.

$$y_i = ci^2 \qquad (6.1.11)$$

ilkel fonksiyonunu genel çözüm kabul eden fark denklemini bulalım.

Bu ifadenin i' ye göre farkı alınırsa

$$\Delta y_i = c\Delta i^2 \Longrightarrow \Delta y_i = c(i+1)^2 - ci^2$$

$$\Delta y_i = c(i+1-i)(i+1+i)$$

$$\Delta y_i = c(2i+1) \qquad (6.1.12)$$

olur. (6.1.11) ve (6.1.12) ifadeleri arasında c sabiti yok edilirse fark denklemi

$$i^2\Delta y_i - (2i+1)y_i = 0$$

şeklinde bulunur. Bu denklemin genel çözümü $y_i = ci^2$'dir.

Örnek 6.1.3.

$$y_i = c(2i+1)^2 \qquad (6.1.13)$$

ifadesi verilsin.

Bu ifadenin i' ye göre farkı alınırsa

$$\Delta y_i = c[(2i+2)^2 - (2i+1)^2]$$

$$\Delta y_i = c(4i+3) \qquad (6.1.14)$$

olur. (6.1.13) ve (6.1.14) ifadeleri arasında c sabiti yok edilirse istenen fark denklemi

$$(2i+1)^2\Delta y_i - (4i+3)y_i = 0$$

şeklinde bulunur.

Örnek 6.1.4.

$$y_i = \frac{c}{i} \qquad (6.1.15)$$

ilkel fonksiyonunu genel çözüm kabul eden fark denklemini bulalım.

Bu ifadenin i' ye göre farkı alınırsa

$$\Delta y_i = c\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right)$$

$$\Delta y_i = c\left(\frac{-1}{i(i+1)}\right)$$

$$c = -i(i+1)\Delta y_i \tag{6.1.16}$$

olur. Bu değer (6.1.15)'de yerine yazılır düzenlenirse fark denklemi

$$(i+1)\Delta y_i + y_i = 0$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan (6.1.15) ifadesi

$$iy_i = c$$

şeklinde yazılsın.

$$\Delta(iy_i) = \Delta c \Longrightarrow \Delta(iy_i) = 0$$

olur. Çarpımın farkı uygulanırsa

$$(i+1)\Delta y_i + y_i \Delta i = 0$$

$$(i+1)\Delta y_i + y_i = 0$$

bulunur. Burada

$$\Delta(iy_i) = (\Delta i)y_{i+1} + i\Delta y_i$$

şeklinde de yazılabilir. Bu düzenlenirse aynı denklem elde edilir.

Örnek 6.1.5.

$$y_i^{\,2} = ci \tag{6.1.17}$$

ilkel fonksiyonunu verilsin.

(6.1.17) ifadesinin her iki tarafının farkı alınırsa

$$\Delta y_i^{\,2} = \Delta ci$$

$$\Delta y_i^{\,2} = c \tag{6.1.18}$$

olur. (6.1.17) ile (6.1.19) arasında c sabiti yok edilirse

$$i\Delta y_i^{\,2} - y_i^{\,2} = 0 \tag{6.1.19}$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\Delta y_i^{\,2} &= (y_{i+1})^2 - (y_i)^2 = (y_{i+1}+y_i)(y_{i+1}-y_i)\\ &= (y_{i+1}-y_i + 2y_i)(y_{i+1}-y_i)\\ &= (\Delta y_i + 2y_i)\Delta y_i\\ &= (\Delta y_i)^2 + 2y_i\Delta y_i\end{aligned}$$

olur.

Bu ifade (6.1.19) ifadesinde yerine yazılırsa fark denklemi

$$i(\Delta y_i)^2 + 2iy_i\Delta y_i - {y_i}^2 = 0$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 6.1.6.

$$y_i = ci + 2^i \tag{6.1.20}$$

ifadesi verilsin.

Bu ifadenin i' ye göre farkı alınırsa

$$\Delta y_i = \Delta\left(ci + 2^i\right) = c + 2^i \tag{6.1.21}$$

olur. (6.1.21)'den c sabiti çekilir, (6.1.20)'de yerine yazılırsa

$$i\Delta y_i - y_i = (i-1)2^i$$

fark denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi denklem homojen olmayan bir denklemdir. Çünkü (6.1.20) ifadesi Teorem 2.3.7. gereği $\left(y(x) = y_h(x) + y_p(x)\right)$

$$y_i = u_i + v_i$$

şeklinde verilmesinden kaynaklanmaktadır. Burada u_i homojen denklemin genel çözümü, v_i ise homojen olmayan denklemin bir özel çözümüdür. Buna göre

$$y_i = ci + 2^i$$

ifadesini genel çözüm kabul eden denklem; keyfi sabit bir tane olduğu için birinci mertebedendir. Keyfi sabit içermeyen

$$v_i = 2^i$$

ifadesi olduğundan dolayı da homojen değildir.

Örnek 6.1.7.

$$y_i = c_1 i + c_2(i^2 + 1) \tag{6.1.22}$$

ifadesi verilsin.

Genel çözümde iki tane keyfi sabit olduğundan bu ifadenin iki kez farkı alınır. (6.1.22) ve elde edilen denklemler arasında c_1 ve c_2 keyfi sabitlerinin yok edilmesi ile fark denklemi elde edilir.

(6.1.22) ifadesinin i' ye göre farkı alınırsa

$$\Delta y_i = \Delta\left(c_1 i + c_2(i^2 + 1)\right)$$

$$\Delta y_i = c_1 + c_2(2i + 1) \tag{6.1.23}$$

olur. Aynı şekilde (6.1.23) ifadesinin i' ye göre bir kez daha farkı alınırsa

$$\Delta^2 y_i = 2c_2 \tag{6.1.24}$$

olur. (6.1.22), (6.1.23) ve (6.1.24) ifadeleri arasında c_1 ve c_2 sabiti yok edilirse (6.1.22) ifadesini genel çözüm kabul eden fark denklemi

$$(-i^2 - i + 1)\Delta^2 y_i + 2i\Delta y_i - 2y_i = 0$$

şeklinde bulunur. (6.1.22) ifadesinde keyfi sabit iki tane olduğundan denklem ikinci mertebeden ve $v_i = 0$ olduğundan homojendir.

Örnek 6.1.8.

$$y_i = c_1 i + c_2 i^2 + c_3 2^i \tag{6.1.25}$$

ifadesi verilsin.

(6.1.25)'de üç tane keyfi sabit olduğundan üç kez farkı alınacaktır. (6.1.25) ifadesinin i' ye göre farkı alınırsa

$$\Delta y_i = \Delta\left(c_1 i + c_2 i^2 + c_3 2^i\right)$$

$$\Delta y_i = c_1 + c_2(2i+1) + c_3 2^i \tag{6.1.26}$$

olur. (6.1.26) ifadesinin i' ye göre bir kez daha farkı alınırsa

$$\Delta^2 y_i = 2c_2 + c_3 2^i \tag{6.1.27}$$

olur. Aynı şekilde (6.1.27) ifadesinin i' ye göre bir kez daha farkı alındığında

$$\Delta^3 y_i = c_3 2^i \tag{6.1.28}$$

olur. (6.1.25), (6.1.26), (6.1.27) ve (6.1.28) ifadeleri arasında c_1, c_2, c_3 keyfi sabitleri yok edildiğinde üçüncü mertebeden homojen fark denklemi

$$(i^2 - i + 2)\Delta^3 y_i - (i^2 + i)\Delta^2 y_i + 2i\Delta y_i - 2y_i = 0$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.1.9. $y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}$ şeklinde n tane fonksiyon verilsin.

$$w(i) = detW(i) \neq 0$$

olmak üzere bu fonksiyonları çözüm kabul eden bir tek n. mertebeden homojen lineer fark denklemi vardır.

İspat : y_i bulunacak denklemin çözümü olmak üzere

$$\begin{vmatrix} y_{1,i} & y_{2,i} & \cdots & y_{n,i} & y_i \\ y_{1,i+1} & y_{2,i+1} & \cdots & y_{n,i+1} & y_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{1,i+n} & y_{2,i+n} & \cdots & y_{n,i+n} & y_{i+n} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.1.29}$$

dır. Bu determinant son sütuna göre açılırsa

$$w(i)y_{i+n} - \begin{vmatrix} y_{1,i} & y_{2,i} & \cdots & y_{n,i} \\ y_{1,i+1} & y_{2,i+1} & \cdots & y_{n,i+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{1,i+n} & y_{2,i+n} & \cdots & y_{n,i+n} \end{vmatrix} y_{i+n-1} + \cdots$$

$$+(-1)^n w(i+1) y_i = 0$$

olur.

Burada

$$w(i)=\begin{vmatrix} y_{1,i} & y_{2,i} & \cdots & y_{n,i} \\ y_{1,i+1} & y_{2,i+1} & \cdots & y_{n,i+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{1,i+n-1} & y_{2,i+n-1} & \cdots & y_{n,i+n-1} \end{vmatrix}$$

olmak üzere $w(i)\neq 0$ ve $w(i+1)\neq 0$ olduğundan fark denklemi $n.$ mertebedendir. Katsayılar bir tek olduğundan dolayı da denklem tektir.

Sonuç 6.1.10.

$y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}$ için $w(i)\neq 0$ olmak üzere

$$y_i=c_1y_{1,i}+\cdots+c_ny_{n,i}$$

ifadesini genel çözüm kabul eden $n.$ mertebeden homojen lineer denklem (6.1.29) ifadesidir. Fark denkleminin Δ farkına göre yazılmış hali ise

$$\begin{vmatrix} y_{1,i} & y_{2,i} & \cdots & y_{n,i} & y_i \\ \Delta\, y_{1,i} & \Delta y_{2,i} & \cdots & \Delta y_{n,i} & \Delta y_i \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^n y_{1,i} & \Delta^n y_{2,i} & \cdots & \Delta^n y_{n,i} & \Delta^n y_i \end{vmatrix}=0 \quad (6.1.30)$$

dir. Burada (6.1.29) ve (6.1.30) ifadeleri özdeştirler.

Bu sonuca göre

$$y_i=ci$$

ifadesine karşılık gelen fark denklemi

$$\begin{vmatrix} i & y_i \\ \Delta i & \Delta y_i \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & y_i \\ 1 & y_i \end{vmatrix}=0$$

ifadesinden

$$i\Delta y_i-y_i=0$$

şeklinde bulunur.

Yine bu sonuca göre

$$y_i=c_1i+c_2(i^2+1)$$

ilkel fonksiyonu için $\{i,i^2+1\}$ lineer bağımsız olduğundan fark denklemi

$$\begin{vmatrix} i & i^2+1 & y_i \\ \Delta i & \Delta(i^2+1) & \Delta y_i \\ \Delta^2 i & \Delta^2(i^2+1) & \Delta^2 y_i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & i^2+1 & y_i \\ 1 & 2i+1 & \Delta y_i \\ 0 & 2 & \Delta^2 y_i \end{vmatrix}=0$$

olur. Düzenlenirse denklem

$$\begin{vmatrix} i & i^2+1 \\ 1 & 2i+1 \end{vmatrix}\Delta^2 y_i-\begin{vmatrix} i & i^2+1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\Delta y_i+\begin{vmatrix} 1 & 2i+1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}y_i=0$$

$$(i^2+i-1)\Delta^2 y_i-2i\Delta y_i+2y_i=0$$

şeklinde elde edilir. Bu yöntem yardımıyla Örnek 6.1.8.'de benzer şekilde çözülür.

6.2. Birinci Mertebeden ve Lineer Olmayan Fark Denklemleri

Birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemi

$$f(i, y_i, \Delta y_i) = 0 \tag{6.2.1}$$

şeklinde verilsin. Bu denklem

$$\big(\Delta y_i - a_1(i, y_i)\big).\big(\Delta y_i - a_2(i, y_i)\big) \dots \big(\Delta y_i - a_n(i, y_i)\big) = 0 \tag{6.2.2}$$

şeklinde n tane çarpanlara ayrılmış olsun. Burada

$$j \neq k \text{ için } a_j(i, y_i) \neq a_k(i, y_i)$$

olsun. (6.2.2) fark denkleminden

$$\Delta y_i - a_1(i, y_i) = 0, \Delta y_i - a_2(i, y_i) = 0, \dots, \Delta y_i - a_n(i, y_i) = 0$$

fark denklemleri elde edilir. Burada y_i çözümleri kompleks çözüm olmamak üzere bu denklemlerin sırasıyla

$$F_1(i, y_i, c) = 0, F_2(i, y_i, c) = 0, \dots, F_n(i, y_i, c) = 0$$

şeklinde çözümleri bulunsun. O halde genel çözüm

$$\big(F_1(i, y_i, c)\big).\big(F_2(i, y_i, c)\big)\dots\big(F_n(i, y_i, c)\big) = 0$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 6.2.1.

$$\frac{-i^2}{2i+1}(\Delta y_i)^2 + \left(y_i + \frac{i^4}{2i+1}\right)\Delta y_i - i^2 y_i = 0 \tag{6.2.3}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Verilen ifade

$$\left(y_i - \frac{i^2}{(2i+1)}\Delta y_i\right)(\Delta y_i - i^2) = 0$$

şeklinde çarpanlara ayırabilir. Buradan

$$y_i - \frac{i^2}{(2i+1)}\Delta y_i = 0, \qquad \Delta y_i - i^2 = 0$$

yazılır.

$$y_i - \frac{i^2}{(2i+1)}\Delta y_i = 0$$

ifadesi düzenlenirse

$$y_i = \frac{i^2}{(2i+1)}(y_{i+1} - y_i)$$

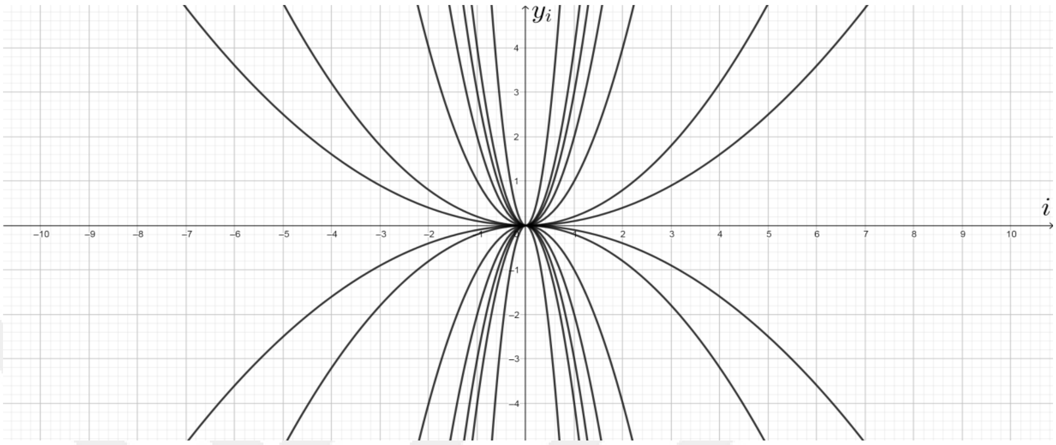
$$y_{i+1} = \frac{(i+1)^2}{i^2} y_i$$

olur. Γ fonksiyonu yardımıyla y_i genel çözümünü

$$y_i = c\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(i+1)}{\Gamma(i)\Gamma(i)}$$

$$y_i = ci^2$$

şeklinde buluruz.



Şekil 6.1. $y_i = ci^2$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

(Burada ve diğer örneklerdeki çözümlerin şekillerinin çiziminde şeklin belirgin olması için $i \in \mathbb{Z}$ tam sayısı reel sayı gibi düşünülmüştür.)

Diğer bir çarpan olan

$$\Delta y_i - i^2 = 0$$

denklemi homojen olmayan bir denklemdir. Bunun için homojen kısmı olan $\Delta y_i = 0$ denkleminin genel çözümü

$$u_i = c$$

dir.

Homojen olmayan kısmın bir özel çözümü

$$v_i = Ai^3 + Bi^2 + Ci$$

şeklinde aranır. Bu çözümü denklemde yerine yazarsak

$$A(i+1)^3 + B(i+1)^2 + C(i+1) - Ai^3 - Bi^2 - Ci = i^2$$

olur. Buradan

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{2}, \qquad C = \frac{1}{6}$$

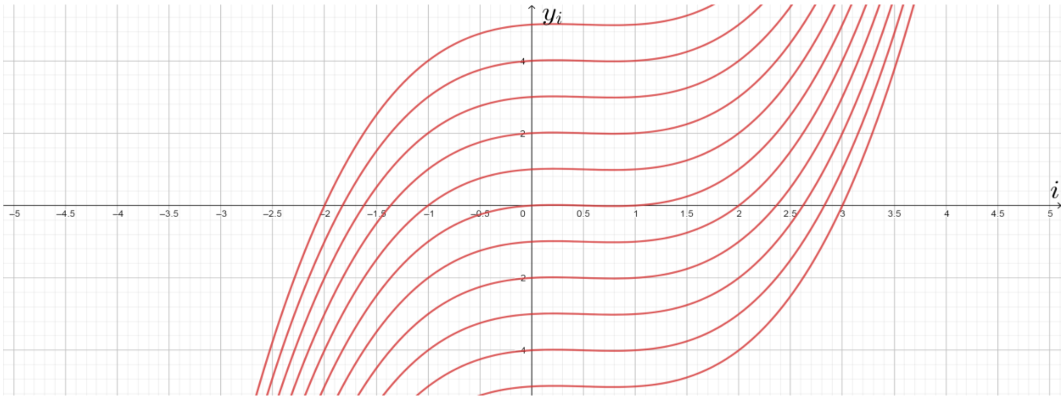
bulunur. O halde bir özel çözüm

$$v_i = \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{6}i$$

şeklinde bulunur. Böylece genel çözüm

$$y_i = u_i + v_i = c + \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{6}i$$

olur.

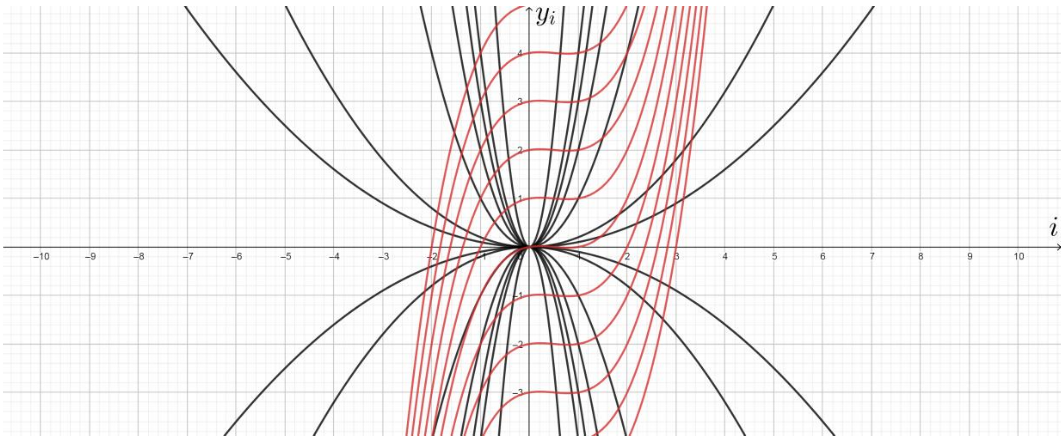


Şekil 6.2. $y_i = c + \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{6}i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

O halde (6.2.3) lineer olmayan fark denkleminin genel çözümü

$$(y_i - ci^2)\left(y_i - c - \frac{1}{3}i^3 + \frac{1}{2}i^2 - \frac{1}{6}i\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Bazı c değerleri için bu genel çözümün grafiği Şekil 6.3.'de verilmiştir.



Şekil 6.3. (6.2.3) denklemi genel çözüm grafiği

Örnek 6.2.2.

$$(\Delta y_i)^3 - \frac{1}{4}\Delta y_i = 0 \tag{6.2.4}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklem

$$(\Delta y_i)\left(\Delta y_i-\frac{1}{2}\right)\left(\Delta y_i+\frac{1}{2}\right)=0$$

şeklinde çarpanlara ayrılır. Buradan

$$\Delta y_i=0, \Delta y_i-\frac{1}{2}=0, \Delta y_i+\frac{1}{2}=0$$

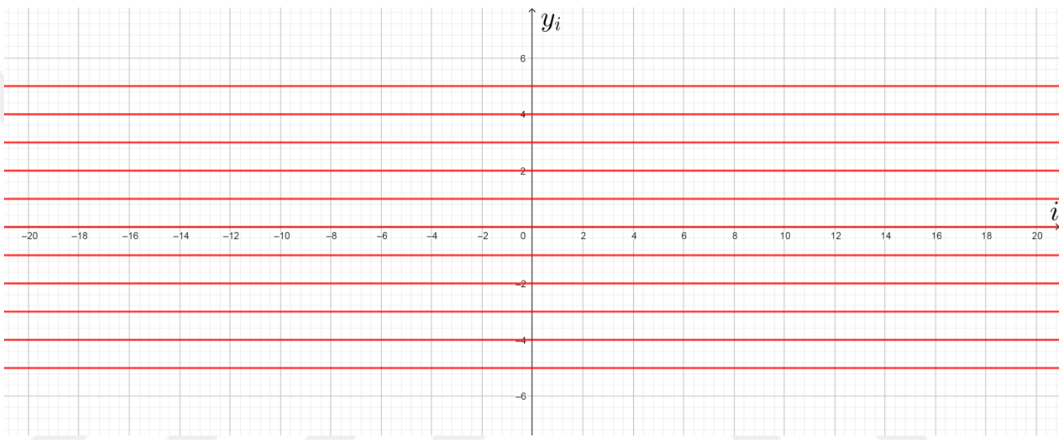
yazılır. Burada

$$\Delta y_i=0$$

denkleminin genel çözümü

$$y_i=c$$

olur.



Şekil 6.4. $y_i=c$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

$$\Delta y_i-\frac{1}{2}=0$$

denkleminin homojen kısmı olan

$$\Delta y_i=0$$

denkleminin genel çözümü

$$u_i=c$$

dir.

Homojen olmayan kısmın bir v_i özel çözümü

$$v_i=Ai+B$$

şeklinde aranır. Denklemde yerine yazılırsa

$$A(i+1)+B-Ai-B=\frac{1}{2}$$

$$A=\frac{1}{2}, B=0$$

olur. O halde

$$\Delta y_i = \frac{1}{2}$$

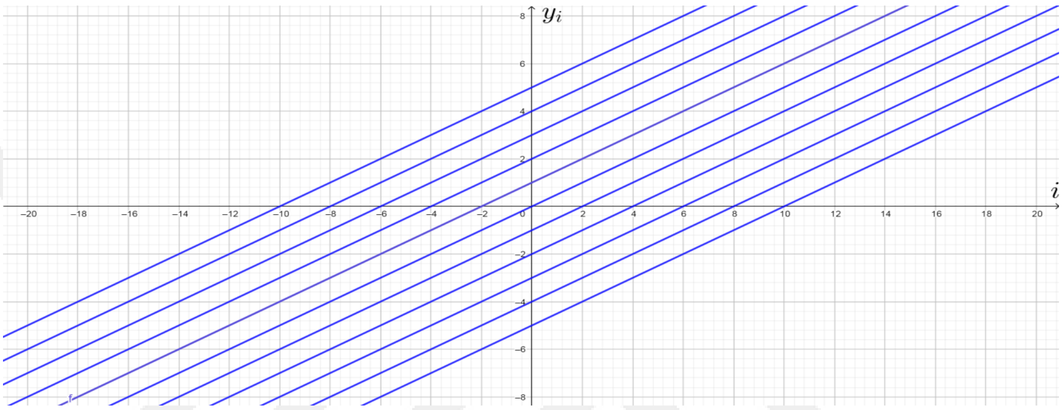
denkleminin bir özel çözümü

$$v_i = \frac{1}{2} i$$

şeklinde bulunur. Buradan genel çözüm

$$y_i = u_i + v_i = c + \frac{1}{2} i$$

olur.



Şekil 6.5. $y_i = c + \frac{1}{2} i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

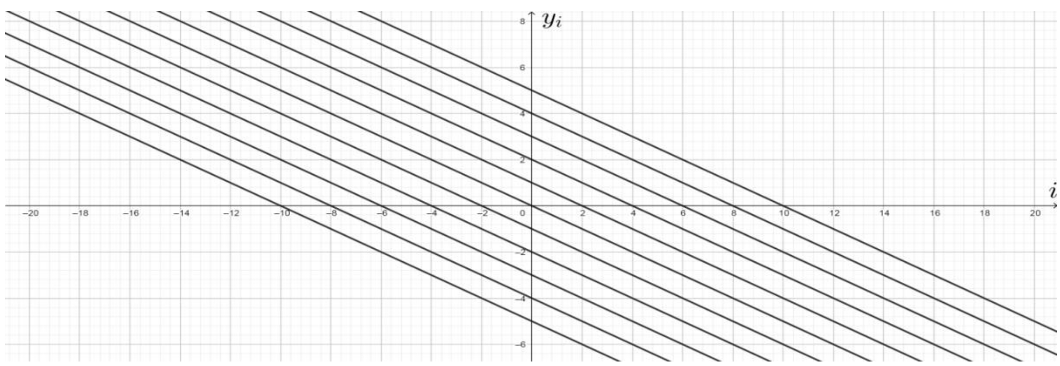
Benzer şekilde

$$\Delta y_i + \frac{1}{2} = 0$$

denkleminin de genel çözümü

$$y_i = u_i + v_i = c - \frac{1}{2} i$$

şeklinde elde edilir.

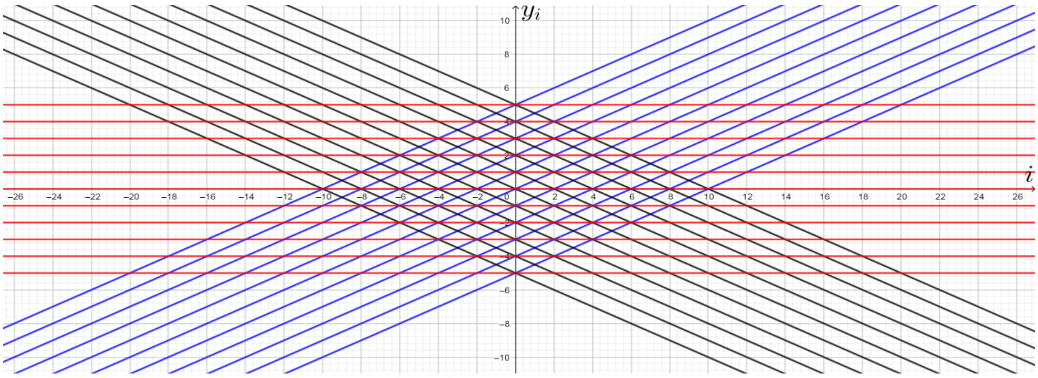


Şekil 6.6. $y_i = c - \frac{1}{2} i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

Dolayısıyla (6.2.4) fark denkleminin genel çözümü

$$(y_i - c)\left(y_i - \frac{1}{2}i - c\right)\left(y_i + \frac{1}{2}i - c\right) = 0$$

olur. Bazı c değerleri için bu genel çözümün grafiği Şekil 6.7.'de verilmiştir.



Şekil 6.7. (6.2.4) denklemi genel çözüm grafiği

Örnek 6.2.3.

$$(2\Delta y_i)^2 - (y_i)^2 = 0 \qquad (6.2.5)$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$(2\Delta y_i - y_i)(2\Delta y_i + y_i) = 0$$

şeklinde çarpanlara ayrılır. Buradan

$$2\Delta y_i - y_i = 0, 2\Delta y_i + y_i = 0$$

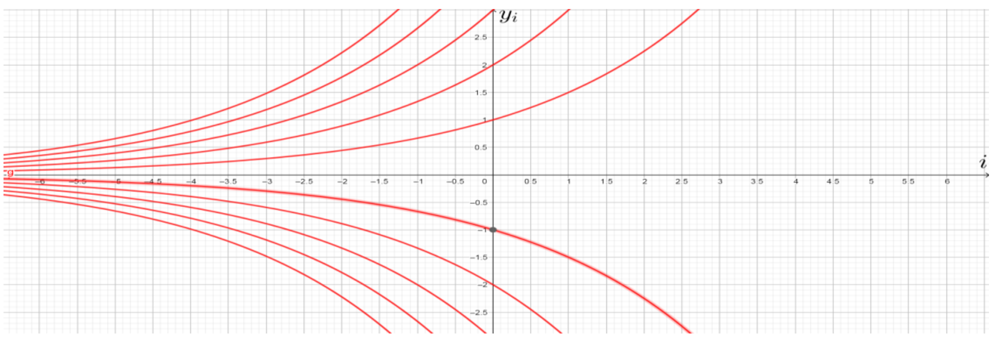
yazılır.

$$2\Delta y_i - y_i = 0$$

denkleminin karakteristik denklemi ve kökü

$$2q - 3 = 0 \Longrightarrow q = \frac{3}{2}$$

olur.



Şekil 6.8. $y_i = c\left(\frac{3}{2}\right)^i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

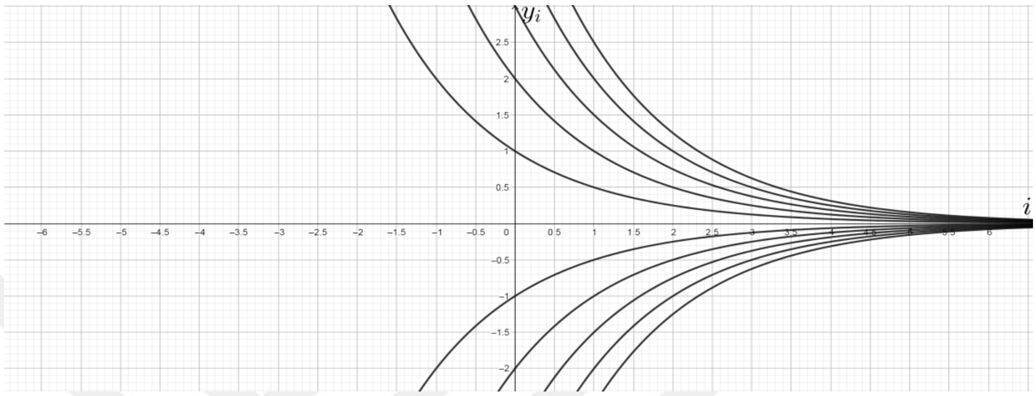
Benzer şekilde

$$2\Delta y_i + y_i = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y_i = c\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

olur.

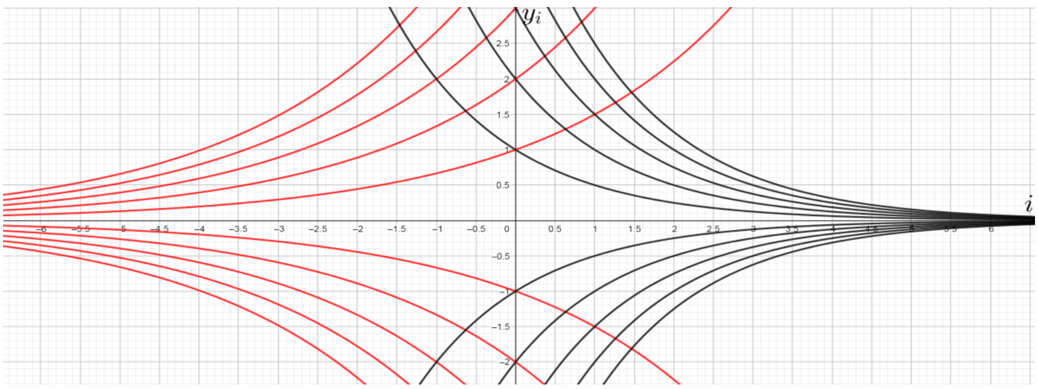


Şekil 6.9. $y_i = c\left(\frac{1}{2}\right)^i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

Böylece (6.2.5) fark denkleminin genel çözümü

$$\left(y_i - c\left(\frac{3}{2}\right)^i\right).\left(y_i - c\left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = 0$$

şeklinde olur. Bu genel çözümün bazı c değerleri için grafiği şekil 6.10.'da verilmiştir.



Şekil 6.10. (6.2.5) denklemi genel çözüm grafiği

Örnek 6.2.4.

$$(\Delta y_i)^2 - (4 + i)\Delta y_i + 4i = 0 \tag{6.2.6}$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklem

$$(\Delta y_i - 4).(\Delta y_i - i) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buradan

$$\Delta y_i - 4 = 0, \Delta y_i - i = 0$$

olur. Burada

$$\Delta y_i - 4 = 0$$

denkleminin homojen kısmının genel çözümü

$$u_i = c$$

olur. Homojen olmayan

$$\Delta y_i = i$$

denkleminin bir özel kısmın çözümü

$$v_i = Ai$$

şeklinde aransın. Denklemde yerine yazarsak bir özel çözüm

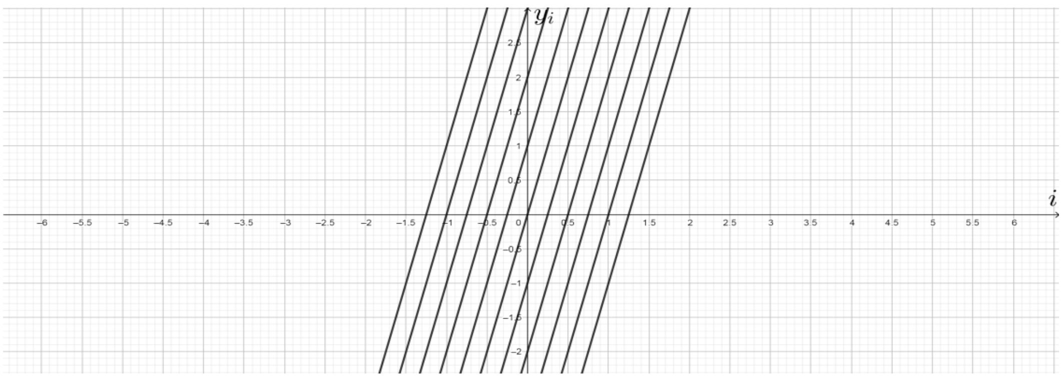
$$A(i+1) - Ai = 4$$

$$A = 4 \Longrightarrow v_i = 4i$$

şeklinde bulunur. O halde genel çözüm

$$y_i = u_i + v_i = c + 4i$$

olur.



Şekil 6.11. $y_i = c + 4i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

$$\Delta y_i - i = 0$$

denkleminin homojen kısmının genel çözümünün

$$u_i = c$$

olduğu açıktır. Homojen olmayan

$$\Delta y_i = i$$

denkleminin biz özel çözümü

$$v_i = Ai^2 + Bi$$

şeklinde aranır. Denklemde yerine yazarsak

$$A(i+1)^2 + B(i+1) - Ai^2 - Bi = i$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

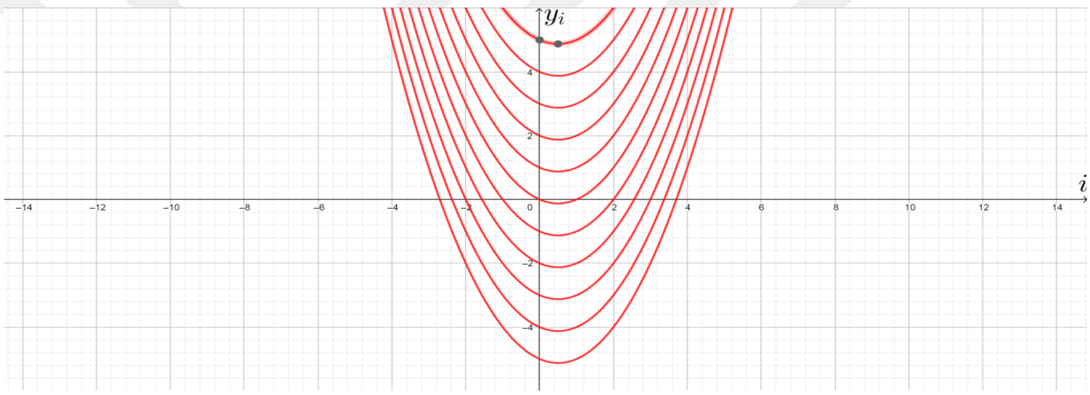
olur. O halde bir özel çözüm

$$v_i = \frac{i^2}{2} - \frac{i}{2}$$

şeklinde bulunmuş olur. Genel çözüm ise

$$y_i = u_i + v_i = c + \frac{1}{2}(i^2 - i)$$

olur.

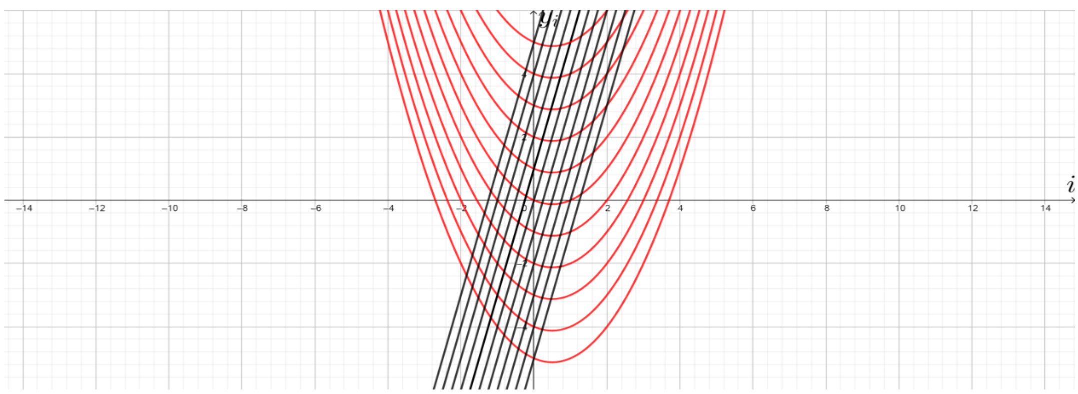


Şekil 6.12. $y_i = c + \frac{1}{2}(i^2 - i)$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

Böylece (6.2.6) fark denkleminin genel çözümü

$$(y_i - 3i - c)\left(y_i - \frac{1}{2}(i^2 - i) - c\right) = 0$$

olur. Bu genel çözümün bazı c değerleri için grafiği Şekil 6.13.'de verilmiştir.



Şekil 6.13. (6.2.6) denklemi genel çözüm grafiği

Örnek 6.2.5.

$$(\Delta y_i)^3 - 2i(\Delta y_i)^2 - \Delta y_i + 2i = 0 \quad (6.2.7)$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklem

$$(\Delta y_i - 1)(\Delta y_i + 1)(\Delta y_i - 2i) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buradan

$$\Delta y_i - 1 = 0, \Delta y_i + 1 = 0, \Delta y_i - 2i = 0$$

olur. İlk denklem için homojen kısmın genel çözümü

$$u_i = c$$

dir. Homojen olmayan denklemin bir v_i özel çözümü

$$v_i = Ai$$

şeklinde aranır. Denklemde yerine yazarsak

$$A(i+1) - Ai = 1 \Longrightarrow A = 1$$

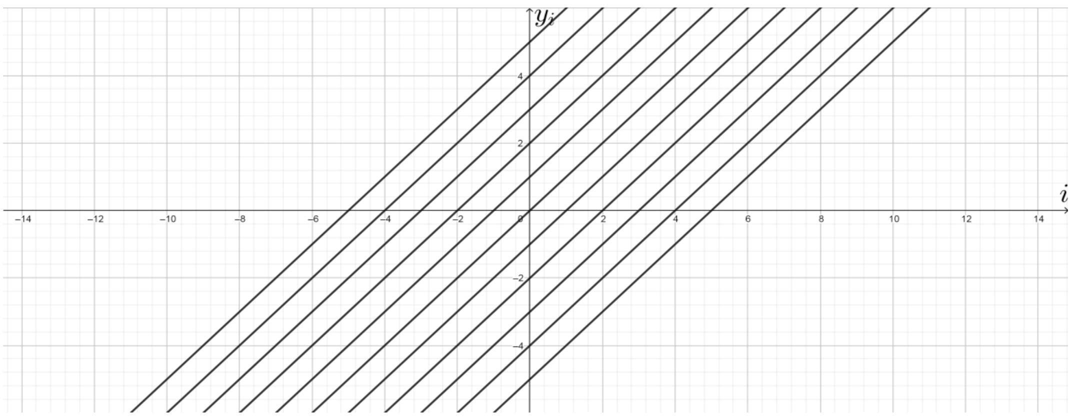
dir. Özel çözüm

$$v_i = i$$

olup, o halde genel çözüm

$$y_i = u_i + v_i = c + i$$

olur.



Tablo 6.14. $y_i = c + i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

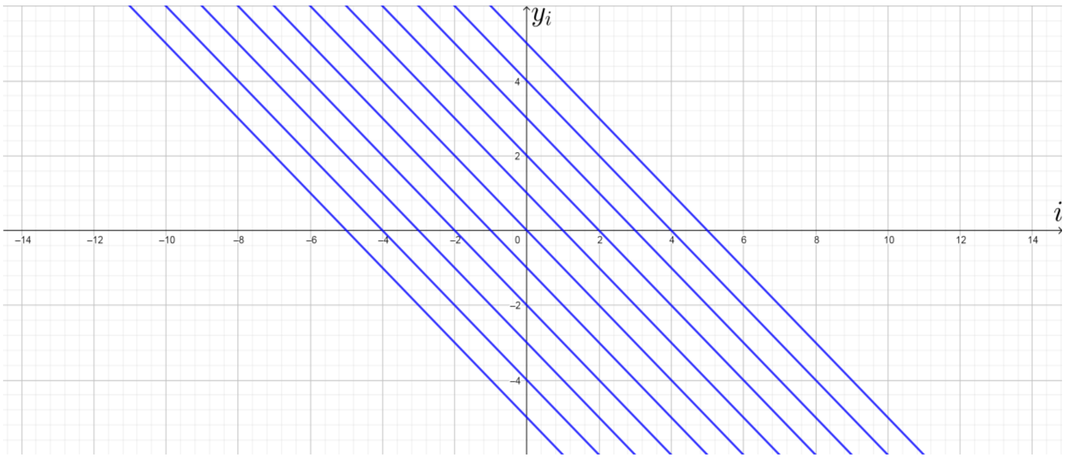
Benzer şekilde

$$\Delta y_i + 1 = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y_i = u_i + v_i = c - i$$

olur.



Şekil 6.15. $y_i = c - i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

Son denklem olan

$$\Delta y_i - 2i = 0$$

denkleminin homojen kısmının genel çözümü

$$u_i = c$$

ve homojen olmayan denklemin bir özel çözümü

$$v_i = Ai^2 + Bi$$

şeklinde aranırsa

$$A(i+1)^2 + B(i+1) - Ai^2 - Bi = 2i$$

$$A = 1 \implies B = -1$$

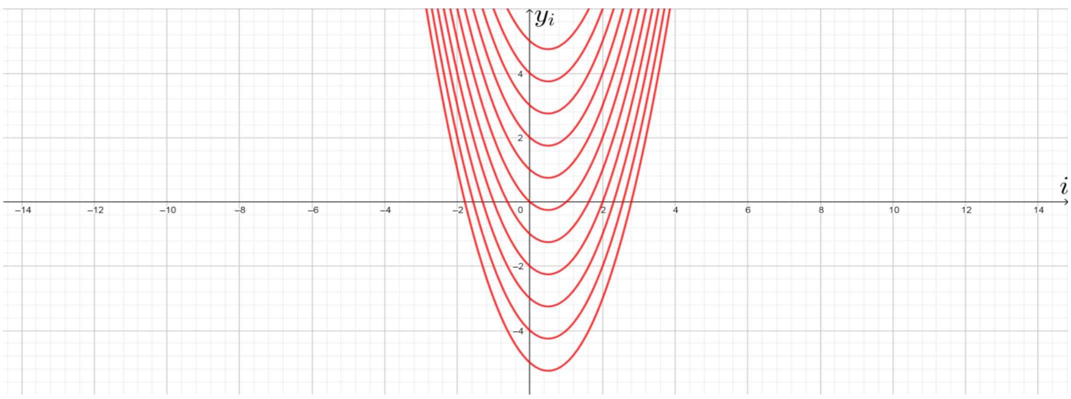
olduğundan bir özel çözüm

$$v_i = i^2 - i$$

şeklinde bulunur. Buradan genel çözüm

$$y_i = u_i + v_i = c + i^2 - i$$

olur.

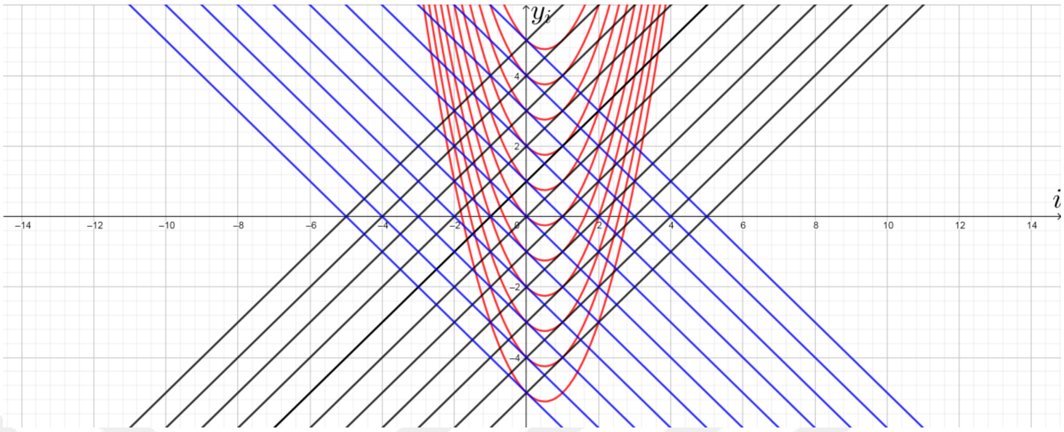


Şekil 6.16. $y_i = c + i^2 - i$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

Böylece (6.2.7) fark denkleminin genel çözümü

$$(y_i - i - c)(y_i + i - c)(y_i - (i^2 - i) - c) = 0$$

ve bazı c değerleri için grafiği Şekil 6.17.'de verilmiştir.



Şekil 6.17. (6.2.7) denklemi genel çözüm grafiği

Örnek 6.2.6.

$$(\Delta y_i)^2 - (2i + 1)^2 = 0 \tag{6.2.8}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Verilen ifade

$$\big(\Delta y_i - (2i + 1)\big)(\Delta y_i + 2i + 1) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buradan

$$\Delta y_i - (2i + 1) = 0$$

denkleminin homojen kısmının genel çözümü

$$u_i = c$$

dir. Homojen olmayan denklemin bir özel çözümü

$$v_i = Ai^2 + Bi$$

şeklinde aranır. Denklemde yerine yazarsak

$$A(i + 1)^2 + B(i + 1) - Ai^2 - Bi = 2i + 1$$

$$A = 1, \qquad B = 0$$

olmak üzere bir özel çözümü

$$v_i = i^2$$

şeklinde bulunur. Buradan genel çözüm

$$y_i = u_i + v_i = c + i^2$$

olur. Benzer şekilde

$$\Delta y_i + (2i+1) = 0$$

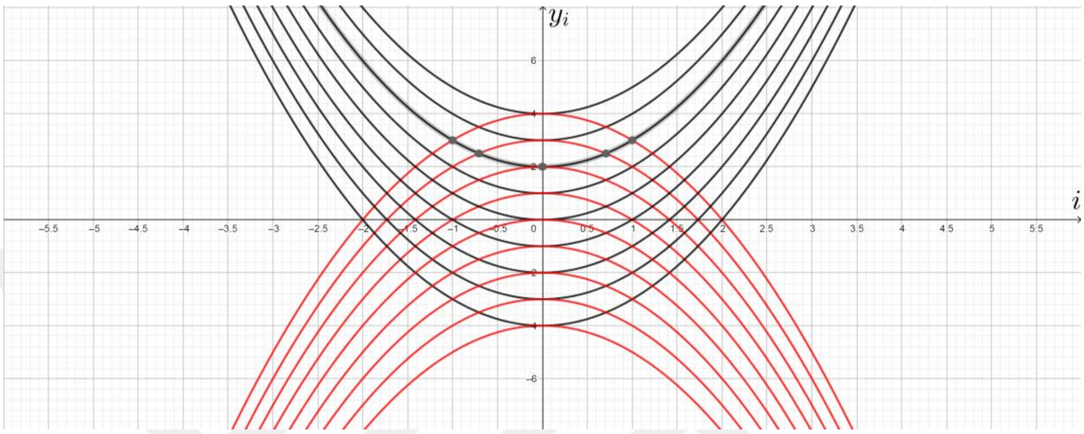
denkleminin genel çözümü

$$y_i = u_i + v_i = c - i^2$$

dir. Böylece (6.2.8) fark denkleminin genel çözümü

$$(y_i - i^2 - c)(y_i + i^2 - c) = 0$$

dır. Bu genel çözümün bazı c değerleri için grafiği şekil 6.18. de verilmiştir.



Şekil 6.18. (6.2.8) denklemi genel çözüm grafiği

Örnek 6.2.7. $y_i > 0$ olmak üzere

$$4y_i = (\Delta y_i - 1)^2 \tag{6.2.9}$$

denklemi

$$\left(2\sqrt{y_i} - \Delta y_i + 1\right)\left(2\sqrt{y_i} + \Delta y_i - 1\right) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buradan

$$2\sqrt{y_i} - \Delta y_i + 1 = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$\sqrt{y_i} = c + i\,,(c + i > 0)$$

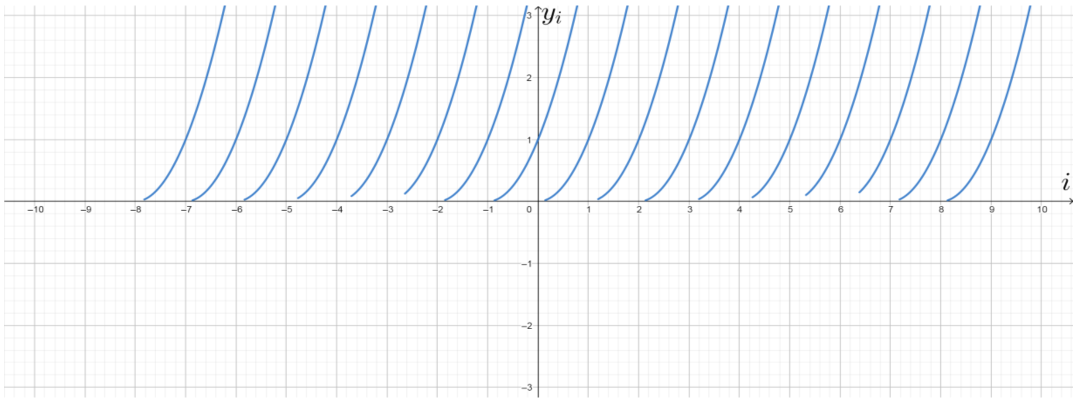
olur. Benzer şekilde

$$2\sqrt{y_i} + \Delta y_i - 1 = 0$$

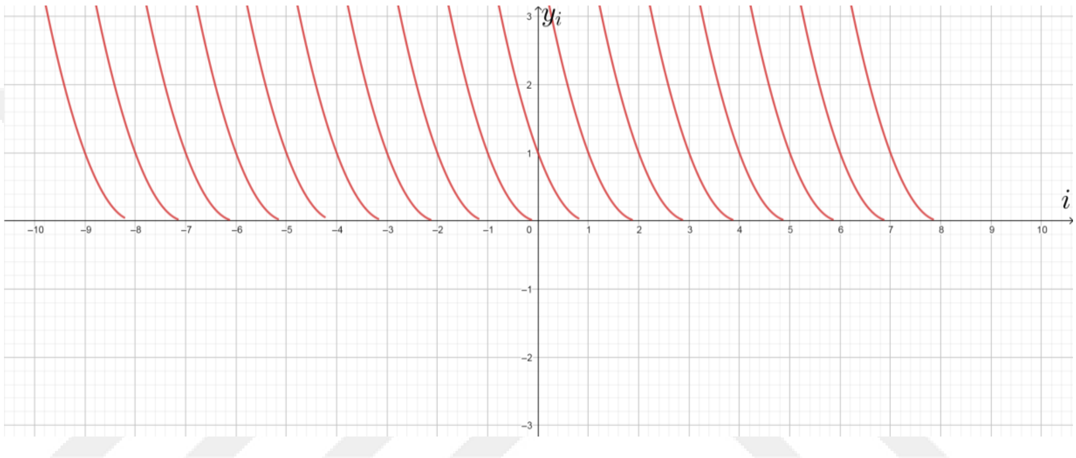
denkleminin genel çözümü

$$\sqrt{y_i} = -(c + i\,)\,,(c + i < 0)$$

bulunur. Bu çözümlerin bazı c değerleri için grafikleri Şekil 6.19. ve Şekil 6.20.’de verilmiştir.



Şekil 6.19. $\sqrt{y_i} = (c + i)$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

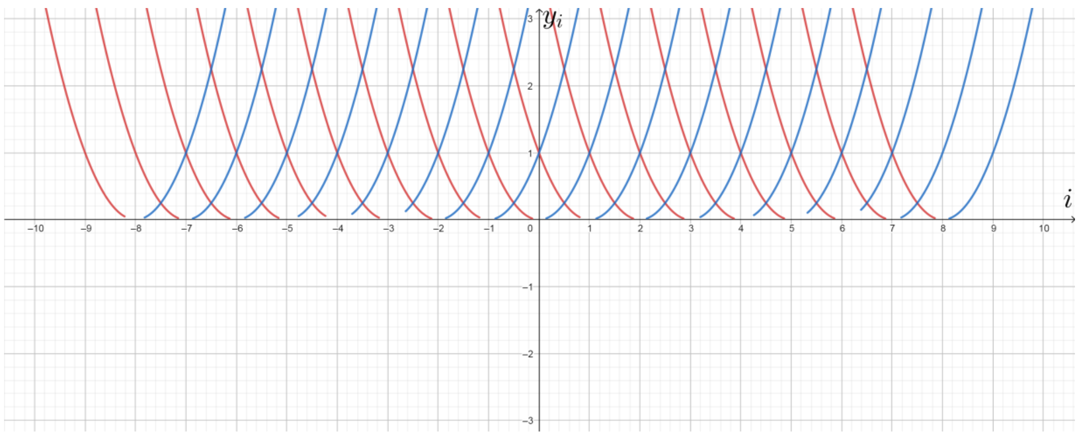


Şekil 6.20. $\sqrt{y_i} = -(c + i)$ çözümünün bazı c'ler için grafiği

Buna göre (6.2.9) denkleminin genel çözümü

$$\left(\sqrt{y_i} - (c + i)\right)\left(\sqrt{y_i} + (c + i)\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Bu genel çözümün c'nin bazı değerleri için grafiği Şekil 6.21.'de verilmiştir.



Şekil 6.21. (6.2.9) denklemi genel çözüm grafiği

Burada

$$y_i = \frac{1}{4}$$

$$4y_i = (\Delta y_i - 1)^2$$

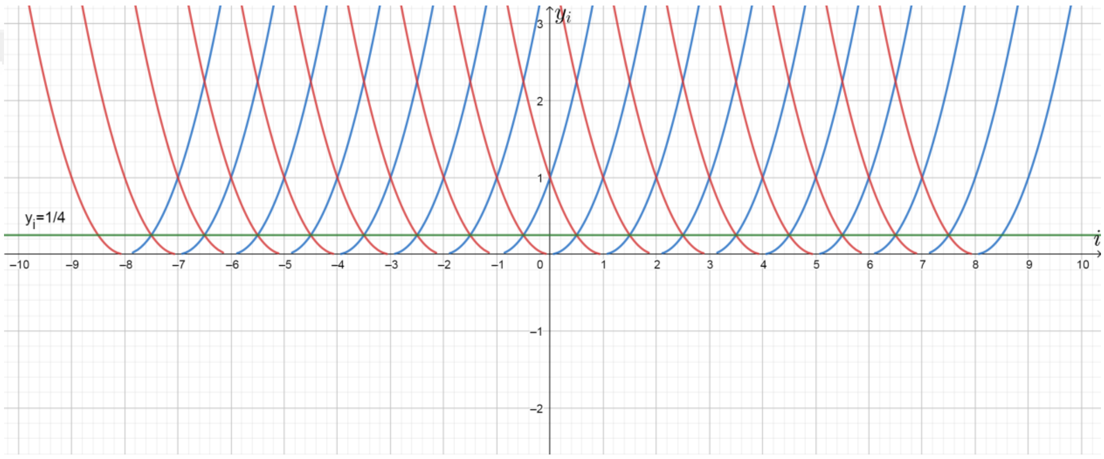
denkleminin çözümüdür. Ancak bu çözüm

$$\sqrt{y_i} = c + i \text{ veya } \sqrt{y_i} = -(c + i)$$

genel çözümünde c'ye keyfi değer vererek elde edilemediğinden bu çözüm tekil çözüm olarak nitelendirilebilir. Öyle ki bu tekil çözüm

$$\sqrt{y_i} = c + i \ \text{ ve } \sqrt{y_i} = -(c + i)$$

eğri ailesinin kesiştiği noktalardan geçtiği Şekil 6.22. de görülmektedir.



Şekil 6.22. (6.2.9) denklemi genel çözümü ve $y_i = \frac{1}{4}$ tekil çözümünün kesişim grafiği

Benzer şekilde $y_i > 0$ ve $k > 0$ olmak üzere

$$\frac{4}{k} y_i = \left(\frac{1}{k} \Delta y_i - 1\right)^2$$

fark denklemleri için de

$$\left(\sqrt{y_i} - \sqrt{k}(c + i)\right)\left(\sqrt{y_i} + \sqrt{k}(c + i)\right) = 0$$

genel çözüm,

$$y_i = \frac{k}{4}$$

tekil çözüm olduğu görülebilir.

Yukarıda yapılan işlemler x sürekli değişken olmak üzere

$$f\big(x, y(x), \Delta y(x)\big) = 0$$

birinci mertebeden lineer olmayan fonksiyonel fark denklemi için de benzer şekilde uygulanabilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fark denklemleri ile diferansiyel denklemler arasında benzerliklerin çok fazladır. Birçok diferansiyel denklem, fark denklemleri yardımıyla kolaylıkla çözülebilmektedir.

Tezin geneline bakacak olursak; sabit katsayılı, değişken katsayılı lineer ve lineer olmayan fark denklemlerinin bazı çözüm yöntemleri incelenmiştir.

İlk kısımlarda sabit katsayılı lineer fark denklemleri konusunda genel ve özel çözümü veren yöntemlerin bazıları verilmiştir. Genel çözümü bulabileceğimiz yöntemler arasında; kaynak fonksiyonu deneme fonksiyonu şeklinde yazılabiliyorsa belirsiz katsayılar yöntemi, kaynak fonksiyonunun ters dönüşümü alınabilirse mertebe düşürme yöntemi kullanılabilir.

Daha sonra değişken katsayılı lineer fark denklemlerinde ise daha çok denklemin yapısına göre özel çözüm yöntemleri, mertebesine göre ise genel çözüm yöntemleri verilmiştir. Birinci mertebeden fark denklemlerinde genel çözüm için denklemin sol tarafı tam fark şeklinde yazıp daha sonra ters fark alınarak çözüm yapılabilir. İkinci mertebeden değişken katsayılı denklemlerde ise genel çözüme direkt götürecek bir yöntem olmadığından denklemin yapısına göre fark denklemimizin genel çözümünü; mertebe düşürerek veya E operatörü yardımıyla bulunabildiği verildi.

Son kısmında; verilen ilkel fonksiyonlardan fark denkleminin nasıl elde edebileceği ve birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemlerinin çözümlerinin nasıl bulunabileceği üzerine örnekler verildi ve tekil çözüm bir örnek üzerinde gösterildi. Bu bölümde uyguladığımız yöntem lineer olmayan fonksiyonel fark denklemleri için de uygulanabileceği önerilmiştir.

Artık bundan sonraki çalışmalar çeşitli alanlarda ortaya çıkan problemlerin lineer fark denklemleri yardımıyla modellenerek çözülmesi şeklinde olabilir. Buna karşın; sosyal bilimler, davranış bilimleri, tıp veya ekonomi alanında karşılaşılan birçok problemin lineer olmayan fark denklemleri ile çözülmesi gerektiği bilinmektedir. Bu yüzden araştırmacıların lineer olmayan fark denklemleri üzerinde daha çok durması gerekmektedir. Bu formattaki problemler lineer fark denklemlerine göre daha karmaşık ve zor çözümler içerir. Yapmış olduğumuz bu çalışmanın devamı niteliğinde böyle problemler de ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. ve Wong, P.J.Y. (1997). *Advanced Topics in Difference Equations,* Kluwer Academic Publichers, Netherlands.

Akyol, S. (2011). *Lineer Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Metodları Üzerine*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Bozok Üniversitesi.

Amirali, G. ve H. Duru, (2002). *Nümerik Analiz*, Pegem A Yayınları, Ankara, 12-25.

Bayar, E. (2012). *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri İçin Çözüm Yöntemleri*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi.

Bereketoğlu, H. ve V. Kutay, (2011). *Fark Denklemleri*, Gazi Kitapevi, Ankara.

Çatal, S. (2004). Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü, *Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1), 129-138.

Değer, S. U. (2018). *Diferansiyel Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Asimtotik Kararlılığı, Kastamonu*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi.

Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations third edition,* Springer New York, USA.

Ersel, H. (1981). *İktisatçılar için Matematik*, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 434-459.

Fan, Y. vd. (2004). Global behavior of a higher order nonlinear difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 299(1), 113-126.

Goldberg, S. (1960). *Introduction to Difference Equations*, John Wiley&Sons, New York.

Karagöz, F. N. (2019). *Fark Denklemleri Üzerinde Bir Çalışma*, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi.

Kelly, W. (2003). Theory of diference equations numerical methods and applications, 2nd ed., by V. Lakshmikantham and Donato Trigiante, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002, *Bulletin (New Series) of the american mathematical society*, 40(2), 259-262.

Kelly, G. W. ve Peterson, C. A. (2001). *Difference Equations: An Introduction with Applications*, Academic Press, San Diego.

Kulenovic, M. R. S. ve Kalabusic, S. (2000). *Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations*, University of Rhode Island.

Kulenovic M. R. S. vd. (2001). A Rational Difference Equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 41, 671-678.

Kutay, V. (2010). *Fark Denklemleri*, Ankara, Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi.

Lakshmikantham, V. ve Trigiante, D. (2002). *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications second edition*, Marcel Dekker, New York.

Lasota, A. (1977). *Ergodic Problems in Biology,* Jagellonian Universty, France, 239-250.

Levy, H. ve Lessman, F. (1961). *Finite Difference Equations,* The Macmillan Company, New York.

Mickens, R.E. (1990). *Difference Equations*, Chapter 4, Van Nostrand Reinhold, New York.

Yan, X. X. vd. (2002). Global Attractivity in a Higher Order Nonlinear Difference Equation, *Applied Mathematics E-notes*, 2, 51-58.

Yıldız, F. (2018). *İkinci Mertebeden Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Yöntemleri*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi.

ÖZ GEÇMİŞ

Gökhan TÜRK, 2006 yılında kazandığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 9 yıldır Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.

ORCID ID: 0000-0001-6413-0144