

T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BISHOP ÇATISINA  
GÖRE SABİT EĞRİLİKLİ NULL OLMAYAN REGLE  
YÜZEYLER

Yüksek Lisans Tezi

Nevcihan Cansu TEKİN

Danışman

Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

SAMSUN  
2021

## TEZ KABUL VE ONAYI

Nevcihan Cansu TEKİN tarafından, Prof. Dr. İsmail AYDEMİR danışmanlığında hazırlanan “Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Sabit Eğrilikli Null Olmayan Regle Yüzeyler” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 10.2.2020 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. XXXXXXXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye (Danışman)	Dr. Öğr. Üyesi XXXX XXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. XXXX XXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY  
... / ... / ...  
Prof. Dr. Ali BOLAT  
Enstitü Müdürü

## **BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI**

Hazırladığım Dönem Projesi tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

03 / 03 / 2021  
Nevcihan Cansu TEKİN

## **TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI**

**Tez Başlığı : Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Sabit Eğrilikli Null Olmayan Regle Yüzeyler**

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 24.12.2020 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 12

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

03 / 03 / 2021  
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

## ÖZET

### ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BISHOP ÇATISINA GÖRE SABİT EĞRİLİKLİ NULL OLMAYAN REGLE YÜZEYLER

Nevcihan Cansu TEKİN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Ocak/2021

Danışman: Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre null olmayan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve regle yüzeylerin sabit Gauss ve ortalama eğriliğe sahip olmaları için gerekli koşullar elde edilmiştir. Ayrıca regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olması için denklemlerinin hangi formda olması gerektiği gösterilmiştir. Buna ilaveten teğet vektör alanı tarafından üretilen sabit ortalama eğrilikli null olmayan regle yüzeylerin dayanak eğrisinin Bishop slant helis olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Bishop çatısının tarihçesi, literatür özeti ve tezin amacından bahsedildi. İkinci bölümde eğriler ve yüzeyler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde Ahmed Tawfik Ali'nin 'Non-lightlike ruled surfaces with constant curvatures in Minkowski 3-space' adlı makalesi ve bu makalede yapılan çalışmalar hakkında bilgi verildi. Dördüncü bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre non-lightlike bir eğri tarafından üretilen null olmayan regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olma durumları iki ayrı bölümde incelendi. Beşinci bölümde konu ile ilgili örneklere yer verildi. Son bölümde ise bu çalışmada elde edilen bulgular tartışıldı ve sonraki çalışmalar için önerilere yer verildi.

**Anahtar Sözcükler:** Bishop Çatısı, Regle Yüzey, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğrilik.

## ABSTRACT

### NON-NULL RULED SURFACES WITH CONSTANT CURVATURES ACCORDING TO BISHOP FRAME IN MINKOWSKI 3-SPACE

Nevcihan Cansu TEKİN

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Master, January/2021

Supervisor: Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

In this study, the Gaussian and mean curvatures of non-null ruled surfaces according to Bishop frame in 3-dimensional Minkowski space are calculated and obtained the necessary conditions for their curvatures to be constant. Moreover, in case the ruled surfaces to be developable and minimal, we find parametric forms. In addition, the base curve of non-null surfaces with constant mean curvatures is specified to be Bishop slant helix.

This study consists of six parts. In the first part, the story of the Bishop frame, the summary of the literature and the purpose of the thesis were mentioned. In the second chapter, definitions and theorems about curves and surfaces are given. In the third part, information was given about Ahmet Tawfik Ali's article named 'Non-lightlike ruled surfaces with constant curvatures in Minkowski 3-space' and the studies in this article. In the fourth chapter, the developable and minimal states of non-lightlike ruled surfaces produced by a non-lightlike curve in the 3-dimensional Minkowski space with respect to the Bishop framework are examined into separate sections. In the fifth chapter, examples related to the subject were given. In the last section, the findings of this study were discussed and recommendations for future studies were given.

**Keywords:** Bishop Frame, Ruled Surfaces, Gaussian Curvature, Mean Curvature.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Tarihçe .....	1
1.2. Literatür Özeti .....	2
1.3. Tezin Amacı.....	4
2. GENEL BİLGİLER .....	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA .....	23
4.1. Üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre timelike bir eğri tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler .....	23
4.1.1. Timelike teğet vektörü tarafından üretilen regle yüzeyler.....	23
4.1.2. Spacelike $\xi_1$ vektörü tarafından üretilen regle yüzeyler .....	39
4.1.3. Spacelike $\xi_2$ vektörü tarafından üretilen regle yüzeyler .....	46
4.2. Üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre spacelike bir eğri tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler .....	53
4.2.1. Spacelike teğet vektörü tarafından üretilen regle yüzeyler .....	53
4.2.2. Timelike $\xi_1$ vektörü tarafından üretilen regle yüzeyler.....	61
4.2.3. Spacelike $\xi_2$ vektörü tarafından üretilen regle yüzeyler .....	69
5. ÖRNEKLER .....	77
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	80
KAYNAKLAR .....	81
ÖZGEÇMİŞ .....	83

## SİMGELER

$\mathbf{R}_1^3$	3-Boyutlu Minkowski Uzayı
$\varphi$	Eğri
$t$	Teğet Vektör Alanı
$\kappa$	Eğrilik
$\tau$	Burulma
$k_1$	Birinci Bishop Eğriliği
$k_2$	İkinci Bishop Eğriliği



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Regle Yüzey.....	19
Şekil 2.2.	Teğet Düzlemi.....	19
Şekil 5.1.	Teğet Vektörü Tarafından Üretilen Regle Yüzeyin Grafiği.....	77
Şekil 5.2.	$\xi_1(s)$ Vektörü Tarafından Üretilen Regle Yüzeyin Grafiği.....	78
Şekil 5.3.	$\xi_2(s)$ Vektörü Tarafından Üretilen Regle Yüzeyin Grafiği.....	79



# 1. GİRİŞ

## 1.1. Tarihçe

Diferansiyel geometride yüzeyler, fizik, mühendislik, bilgisayar grafikleri gibi birçok disiplinde başlıca yere ve kavramlara sahiptir. Bu yüzeylerin en önemlilerinden biri olan regle yüzey, Fransız matematikçi Gaspard Monge tarafından 1795 yılında keşfedilmiştir. Herhangi bir eğri boyunca, bir doğrunun sürekli hareketiyle meydana gelen yüzeye regle yüzey denir. Buradaki eğriye dayanak eğrisi, doğruya ise doğrultman denir.

Uyarlanmış hareketli çatının en bilinen örneklerinden birisi Öklid uzayı ve Lorentz-Minkowski uzayı gibi 3-boyutlu gömülü uzaylardaki bir uzay eğrisini formüle eden Serret-Frenet çatısıdır. Frenet denklemleri ilk olarak, uzay eğrilerinin teorisine basitlik ve kullanışlılık kazandırması için 1831'de Karl Eduard Senff (1810-1849) ve Johann Martin Bartels (1769-1836) tarafından tanıtılmıştır. 1847'de, Frenet denklemleri Jean Frederic Frenet' nin 1852' de yayımlanan doktora tezinde yeniden araştırılmıştır. Ayrıca 1851'de, bu denklemler bağımsız bir şekilde Joseph Alfred Serret tarafından da bulunmuştur ve bu yüzden genellikle literatürde Frenet-Serret denklemleri olarak karşımıza çıkmaktadır.

Asli normalleri paralel olan eğriler Bertrand tarafından Bertrand eğrileri olarak tanımlanmıştır. Son yıllarda Bertrand eğrileri bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda (CAD) ve bilgisayar destekli üretimlerde (CAM) önemli rol oynamaktadır. Bu öneminden ötürü Bertrand eğrileri geometriciler tarafından farklı uzaylarda çalışılmıştır. Diğer yandan paralel vektör alanlarına bağlı olarak 1975 yılında eğrilerin alternatif veya paralel çatısı olarak adlandırılan Bishop çatısı, Bishop tarafından tanımlanmış böylece geometriciler tarafından bu çatı sayesinde Frenet çatısının tanımlanamadığı durumlar için (özellikle eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda) alternatif bir çatı olarak Bishop çatısı kullanılmaya başlamıştır. Son yıllarda, bu çatı minimum bükülmeye sahip olma özelliğinden dolayı Minimum Bükülmeli Çatı olarak adlandırılmaktadır.

## 1.2. Literatür Özeti

$\mathbf{R}_1^3$  de standart bir regle yüzeyin denklemi,

$$\varphi(s, v) = c(s) + vX(s) \quad (1.2.1)$$

şeklindedir, burada  $c(s)$  dayanak eğrisi,  $X(s)$  doğrultman vektörüdür. Bu alanda yapılan çalışmalarda; standart regle yüzey denklemindeki dayanak eğrisi genellikle kullanılan çatının elemanları olarak alınmıştır ve bu regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliği incelenmiştir. Bu alanda yapılan çalışmalar kronolojik olarak incelendiğinde aşağıdaki şekilde verilebilir;

- Hacısalıhoğlu (1983), çıkardığı diferansiyel geometri kitabında eğriler ve yüzeyler üzerine önemli çalışmalar yapmıştır. Bu alanda yapılan araştırmalara temel seviyeden itibaren yol gösterici olmuştur.

- Walrave (1995), eğriler ve yüzeyler üzerine yaptığı çalışmasında özellikle yüzeylerin minimal olması konusunda önemli sonuçlara ulaşmıştır.

- Kuhnel (1999), eğriler, yüzeyler ve manifoldlar üzerine kitap çıkarmış, özellikle regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliği üzerine çalışmalar yapmıştır.

- Sodsiri (2003), çalışmasında 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyin Gauss eğriliği, ikinci Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğinin lineer kombinasyonlarının bir doğru boyunca sabit olduğunu tespit etmiştir.

- Orbay ve Aydemir (2010), çalışmalarında 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman vektörlü spacelike yüzey ile bu yüzeyin dayanak eğrisinin Frenet vektörleri ile oluşturulan regle yüzeylerin dağılma parametreleri ve Gauss eğriliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada, bu regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olma koşulları ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.

- Ali ve d. (2013), bu çalışmalarında 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre bazı özel eğriler tarafından üretilen regle yüzeyleri incelemişlerdir.

(1.2.1) denkleminde  $c(s)$  dayanak eğrisini standarttan farklı olarak kullanan çalışmalarda mevcuttur. Bunlardan biri, Ali'nin 2017 yılında yaptığı çalışmadır.

- Ali (2017), çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatısı kullanarak null olmayan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabit olma durumunu incelemiştir. Bu regle yüzeylerin açılabilir veya minimal olma durumları için önemli sonuçlara ulaşmıştır.

3-boyutlu uzayda regle yüzeyleri incelemek için eğri alanında yapılan çalışmalarda incelenmelidir. Bu alanda yapılan çalışmalardan bazıları, kronolojik sıraya göre aşağıdaki gibi verilebilir.

- Bükçü ve Karacan (2008a), 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre slant helisler üzerine çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada slant helis için önemli terimler verilmiş, slant helisin eğriliklerinin oranının sabit olduğu ispatlanmıştır.

- Yerlikaya (2019), çalışmasında 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında bazı özel eğrilerin pozisyon vektörlerinin bulunmasında farklı bir metot ortaya koymuştur. Ayrıca bu çalışma 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında yapıldığından eğrilerin, vektörlerin ve açılarının Lorentzian karakterlerine göre birçok farklı sonuç elde edilmiştir. Özellikle bu çalışmada tespit edilen Bishop slant helis eğrisinin pozisyon vektörü bu yüksek lisans tezi çalışmasında da kullanılmıştır.

Ayrıca 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısı alanında yapılan çalışmalarda kronolojik olarak verilebilir.

- Bükçü ve Karacan (2008a), çalışmalarında 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir eğri için Bishop çatısı formülleri, türev formülleri ve Darboux vektörünü(matrisi) incelemişlerdir.

- Yüksel (2013), çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre bir spacelike eğri boyunca hareket eden doğru tarafından üretilen regle yüzeyleri incelemiştir. Ayrıca bu regle yüzeylerin açılabilir veya minimal olması durumu için önemli sonuçlar vermiştir.

### 1.3. Tezin Amacı

Bu yüksek lisans tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre null olmayan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabit olması durumunu incelemektir. Bu incelemede regle yüzeyin dayanak eğrisi standarttan farklı olarak  $t, \xi_1, \xi_2$  Bishop çatı elemanları,  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$ ,  $s$  değişkenine bağlı diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,  $c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds$  olarak alınacak ve bu regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabit olma durumu ve yüzeyin açılabilir ve minimal olma koşulları araştırılacaktır.

Benzer çalışma Ahmed Tawfik Ali (2017) tarafından Frenet çatısına göre yapılmış, dayanak eğrisi  $t, n, b$  Frenet çatı elemanları,  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$ ,  $s$  değişkenine bağlı diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,  $c(s) = \int (\alpha t + \beta n + \gamma b) ds$  olarak alınmış ve bu regle yüzeyin açılabilir ve minimal olma koşulları ile ilgili önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

Ayrıca bu tez çalışması ile 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre Gauss ve ortalama eğriliği sabit olan null olmayan regle yüzeylerin hangi formda olduğunun tespit edilmesi amaçlanmaktadır.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışması esnasında ihtiyaç duyulan tanım ve teoremler, afin uzayında Öklid uzayında ve son olarak Lorentz-Minkowski uzayında belli bir düzen içerisinde verilmiştir. Ayrıca, tez çalışmasında önemli bir yer oluşturan koordinat sistemleri arasındaki geçiş matrislerinin Öklid ve Minkowski uzaylarındaki izometri grupları ile ilgili temel kavramlardan da bahsedilmiştir.

Tanım 2.1.  $A$  boş olmayan bir cümle ve  $V$  de  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü  $P, Q \in A$  noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlar ise  $A$  cümlesine  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

- i.  $\forall P, Q, R \in A$  için  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ ,
- ii.  $\forall P \in A$  için,  $\forall \alpha \in V$  için  $\overrightarrow{PQ} = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$  vektöründe ;  $P$  noktasına başlangıç noktası,  $Q$  noktasına da uç noktası denir. Diğer taraftan  $A$  nın boyutu  $boyA = boyV$  olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2. Bir  $V$  vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay  $A$  olsun.  $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$  noktaları için  $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$  vektörlerinin oluşturduğu cümle  $V$  nin bir bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisine  $A$  afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada  $P_0$  noktasına çatının başlangıç noktası ve  $P_i, 1 \leq i \leq n$ , noktalarına da çatının birim noktaları denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3. Bir  $V$  vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay  $A$  olmak üzere bir  $P_0 \in A$  noktası seçildiğinde başlangıcı  $P_0 \in A$  noktası olan bir afin çatı daima vardır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.4.  $n$ -boyutlu bir  $V$  vektör uzayı ile birleştirilmiş  $A$  afin uzayının bir afin çatısı  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  olsun. Bu çatı  $A$  da bir afin koordinat sistemi belirtir.  $V$  nin bir bazı  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  olduğundan  $\forall P \in A$  için  $P_0P \in V$  vektörü bu baza göre

$$P_0P = \sum_{i=1}^n a_i P_0P_i, \quad a_i \in F$$

şeklinde tek türlü ifade edilebilir.

$A$  nın birleştiği  $V$  vektör uzayı  $F$  cismi üzerinde vektör uzayı olduğuna göre  $x_i : A \rightarrow F$  fonksiyonlarını  $1 \leq i \leq n$ ,  $\forall P \in A$  için

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i$$

biçiminde tanımlansın. Böylece  $P \in A$  noktasına  $F^n$  standart afin uzayının bir  $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$  elemanı karşılık gelmiş olur ki, bu sıralı  $n$ -liye  $P$  noktasının koordinatları denir.

Tersine  $n$  - tane  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$  noktası verildiğinde koordinatları  $a_1, a_2, \dots, a_n$  olan bir tek  $P = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$  noktası vardır. Böylece  $x_1, x_2, \dots, x_n : A \rightarrow F$  birebir fonksiyonlarının bir  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sistemi elde edilir. Bu fonksiyonlar sistemine  $A$  nın bir afin koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.5.  $\mathbf{R}^n$  standart reel afin uzay olmak üzere  $\mathbf{R}^n$  de bir

$$\langle, \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

iç çarpımı  $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  için

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma  $\mathbf{R}^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $\mathbf{R}^n$  vektör uzayı ile birleşen  $\mathbf{R}^n$  afin uzayına  $n$ -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.6.  $d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|XY\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(X, Y)$  reel sayısına ise  $X$  ve  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.7.  $V$   $n$ -boyutlu reel iç çarpım uzayı ve birleştiği Öklid uzayı  $E^n$  olsun.  $P_0, P_1, \dots, P_n \in E^n$  olmak üzere  $\{\overline{P_0 P_1}, \overline{P_0 P_2}, \dots, \overline{P_0 P_n}\}$  vektör sistemi  $V$  nin bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisine  $E^n$  de bir Öklid çatı veya dik çatı denir. Bu çatı yardımıyla tanımlanan  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  afin koordinat sistemine de Öklid koordinat sistemi veya dik koordinat sistemi denir. Bu sistemdeki

$$x_i : E^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonlarına da Öklid koordinat fonksiyonları adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.8.  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu simetrik ve bilinear ise bu fonksiyona  $V$  üzerinde bir simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.9.  $V$  bir reel vektör uzayı ve  $\langle, \rangle$  da  $V$  üzerinde simetrik bilinear form olsun. Bu takdirde

- i.  $\forall v \in V, v \neq 0$  için  $\langle v, v \rangle > 0$  ise  $\langle, \rangle$  simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- ii.  $\forall v \in V, v \neq 0$  için  $\langle v, v \rangle < 0$  ise  $\langle, \rangle$  simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,
- iii.  $\forall v \in V$  için  $\langle v, w \rangle = 0$  iken  $w = 0$  ise  $\langle, \rangle$  simetrik bilinear formuna dejenere olmayan denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.10.  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.  $V$  üzerinde  $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  şeklinde tanımlı dönüşüm simetrik, bilinear ve dejenere olmayan ise  $\langle, \rangle$  dönüşümüne  $V$  üzerinde skalar çarpım ve  $V$  vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.11.  $V$  bir skalar çarpım uzayı olsun.  $\langle, \rangle|_W: W \times W \rightarrow \mathbf{R}$  negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu  $W$  alt uzayının boyutuna  $\langle, \rangle$  skalar çarpımının indeksi denir.  $\langle, \rangle$ 'nin indeksi  $\nu$  olmak üzere  $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$  dir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.12.  $V$  n-boyutlu skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

$V$  skalar çarpım uzayının bir ortonormal bazı  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  olsun.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

yazılabilir. Burada,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

ve

$$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \begin{cases} 1 & ; e_i \text{ spacelike (uzaysı)} \\ -1 & ; e_i \text{ timelike (zamansı)} \end{cases}$$

dır.

Teorem 2.13.  $V$  n-boyutlu bir skalar çarpım uzayı ve  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $V$  nin ortonormal bazı olsun. Bu takdirde  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  işaretindeki negatif terimlerin sayısı  $V$  nin indeksine eşittir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.14.  $V$  bir skalar çarpım uzayı olsun.  $\text{boy}V \geq 2$  ve  $\nu = 1$  ise  $V$  ye Lorentz uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.15.  $\mathbf{R}^n$  üzerinde  $\langle, \rangle: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^n x_i y_i$$

skalar çarpımı göz önüne alınırsa, elde edilen uzay yarı- öklidyen uzay olarak adlandırılır ve  $\mathbf{R}_\nu^n$  ile gösterilir.  $n=3$  ve  $\nu=1$  özel halinde  $x=(x_1, x_2, x_3), y=(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$  vektörleri için

$$\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

skalar çarpımına Minkowski metrik adı verilir. Bu metrik ile birleşen  $\mathbf{R}^3$  uzayına 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve  $\mathbf{R}_1^3$  ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.16. Bir  $X \in \mathbf{R}_1^3$  vektörünün normu,

$$\|X\|_{\mathbf{R}_1^3} = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1983). Bu tez çalışmasında  $\|X\|_{\mathbf{R}_1^3}$  ifadesi yerine kısaca  $\|X\|$  ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.17.  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör  $X=(x_1, x_2, x_3)$  ve  $Y=(y_1, y_2, y_3)$  olsun.  $\mathbf{R}_1^3$  de bir

$$\begin{aligned} \times: \mathbf{R}_1^3 \times \mathbf{R}_1^3 &\rightarrow \mathbf{R}_1^3 \\ (X, Y) &\rightarrow X \times Y \end{aligned}$$

iç işlemi determinant fonksiyonu yardımıyla

$$X \times Y = -\det \begin{pmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan  $\times$  iç işlemine  $\mathbf{R}_1^3$  de vektörel çarpım işlemi (dış çarpım) adı verilir. Buna göre,

$$e_1 \times e_2 = -e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = -e_2$$

dır, burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak seçilmiştir (Ali ve Turgut, 2010).

**Teorem 2.18.**  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör  $u=(u_1, u_2, u_3), v=(v_1, v_2, v_3)$  ve  $w=(w_1, w_2, w_3)$  olsun. Bu durumda

- i.  $\langle u \times v, w \rangle = -\det(u, v, w)$
- ii.  $(u \times v) \times w = -\langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u$
- iii.  $\langle u \times v, u \rangle = 0$  ve  $\langle u \times v, v \rangle = 0$
- iv.  $\langle u \times v, u \times v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$

dır (Vanlı, 1995).

**Tanım 2.19.**  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı ve  $v \in \mathbf{R}_1^3$  olsun.

- i.  $\langle v, v \rangle > 0$  veya  $v=0$  ise  $v$  ye spacelike (uzaysı) vektör,

- ii.  $\langle v, v \rangle < 0$  ise  $v$  ye timelike (zamansı) vektör,
- iii.  $\langle v, v \rangle = 0$  ve  $v \neq 0$  ise  $v$  ye lightlike (ışıkı) vektör denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.20.  $\mathbf{R}_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayı ve  $W \subset \mathbf{R}_1^3$  alt vektör uzayı olsun.

- i.  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ , pozitif tanımlı ise  $W$  ye spacelike (uzaysı) altuzay,
- ii.  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ , dejenere olmayan ve indeksi 1 ise  $W$  ye timelike (zamansı) altuzay,
- iii.  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ , dejenere ise  $W$  ye lightlike (ışıkı) altuzay denir (Lopez, 2014).

Önerme 2.21.  $\mathbf{R}_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayı ve  $W \subset \mathbf{R}_1^3$  alt vektör uzayı olsun.

Bu takdirde,

- i.  $\text{boy}W^\perp = 3 - \text{boy}W$
- ii.  $(W^\perp)^\perp = W$
- iii. Eğer  $W$  dejenere olmayan ise,  $W^\perp$  de dejenere olmayan bir alt vektör uzayıdır.
- iv. Eğer  $v$  timelike veya spacelike bir vektör ise,  $\mathbf{R}_1^3 = \text{span}\{v\} \oplus \text{span}\{v\}^\perp$

dir (Lopez, 2014).

Önerme 2.22.  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı,  $P \subset \mathbf{R}_1^3$  bir düzlem ve  $\bar{n}_e$  Öklid metriğine göre  $P$  düzleminin bir normalı olsun. Bu takdirde,  $P$  timelike (veya spacelike) bir düzlemdir gerekli ve yeterli koşul  $\bar{n}_e$  spacelike (veya timelike) bir vektördür (Lopez, 2014).

Önerme 2.23.  $v$  ve  $w$  Lorentz vektör uzayında iki timelike vektör olsunlar. Bu takdirde,

- i.  $|\langle v, w \rangle| \geq \|v\| \|w\|$  dir ve eşitlik durumunun geçerli olması için gerekli ve yeterli koşul  $v$  ve  $w$  vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.
- ii. Eğer  $v$  ve  $w$  aynı timelike konide bulunuyorlarsa,  $\langle v, w \rangle = -\|v\| \|w\| \cosh \varphi$  olacak şekilde bir tek  $\varphi \geq 0$  sayısı vardır. Burada,  $\varphi$  sayısına  $v$  ve  $w$  vektörleri arasındaki hiperbolik açı adı verilir (Lopez, 2014).

*İspat:* (i) Kabul edelim  $v$  ve  $w$  lineer bağımsız ve  $w' \in v^\perp$  olsun. O zaman,  $w = av + w'$  olacak şekilde bir  $a \in \mathbf{R}$  reel sayısı vardır.  $w$ , timelike bir vektör olduğu için,

$$\langle w, w \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + \langle w', w' \rangle < 0$$

yazılır. Buradan  $v$  timelike bir vektör, yani  $\langle v, v \rangle < 0$  ve  $w' \in v^\perp$  olduğundan  $w'$  spacelike bir vektör, yani  $\langle w', w' \rangle \geq 0$  dir. Bunlar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle^2 &= a^2 \langle v, v \rangle = (\langle w, w \rangle - \langle w', w' \rangle) \langle v, v \rangle \\
&\geq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle \\
&= \|v\|^2 \|w\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik durumu için ispat açıktır.

(ii)  $v$  ve  $w$  aynı time konide bulunan iki timelike vektör ve (i) den

$$\frac{-\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \geq 1$$

yazılır. Hiperbolik kosinüs fonksiyonu  $[0, \infty)$  kümesinden  $[1, \infty)$  kümesine tanımlı ve birebir bir fonksiyon olduğu için bir tek  $\varphi \in [0, \infty)$  sayısı

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

olacak şekilde vardır. Bu ise istenilen sonucu verir.

**Tanım 2.24.**  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı olsun.  $I$ ,  $\mathbf{R}$  de bir açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned}
r: I &\rightarrow \mathbf{R}_1^3 \\
t &\rightarrow r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))
\end{aligned}$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna  $\mathbf{R}_1^3$  de bir eğri denir.  $I \subset \mathbf{R}$  aralığına  $r$  eğrisinin parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkeninde  $r$  eğrisinin parametresi denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.25.**  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı ve  $r: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  bir eğri olsun.  $r$  eğrisinin teğet vektör alanı  $T$  olmak üzere;

- i.  $\langle T, T \rangle > 0$  ise  $r$  eğrisine spacelike (uzaysı) eğri
- ii.  $\langle T, T \rangle < 0$  ise  $r$  eğrisine timelike (zamansı) eğri
- iii.  $\langle T, T \rangle = 0$  ise  $r$  eğrisine null veya lightlike (ışığı) eğri denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.26.**  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir  $r$  eğrisinin  $\kappa$  eğriliği

$$\kappa = \sqrt{|\langle r'', r'' \rangle|}$$

ile tanımlıdır (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.27.**  $r: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ ,  $r'' \neq 0$  olacak şekilde birim hızlı spacelike veya timelike bir eğri olsun. Bu durumda eğrinin her noktasında tanımlı olan Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$  olmak üzere bu vektörlerin türev formülleri aşağıdaki gibidir:

*i.  $r$  timelike eğri olsun.*

Bu durumda  $T$  timelike vektör alanı,  $N$  ve  $B$  spacelike vektör alanıdır. Burada  $B$  vektör alanı; eğer  $\{T, N, B\}$  ile  $\mathbf{R}_1^3$  in yönlendirmesi aynı olacak şekilde seçilirse

$B = -T \times N$  dir. Eğer  $\{T, N, B\}$  ile  $\mathbf{R}_1^3$  in yönlendirmesi farklı olacak şekilde seçilirse  $B = T \times N$  dir. Buna göre iki durum için de türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Burada,  $\kappa$  ve  $\tau$  diferansiyellenebilir fonksiyonları sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasıdır.

ii.  $r$  timelike normalli spacelike eğri olsun.

Bu durumda  $N$  timelike vektör alanı,  $T$  ve  $B$  spacelike vektör alanıdır. Burada  $B$  vektör alanı; eğer  $\{T, N, B\}$  ile  $\mathbf{R}_1^3$  in yönlendirmesi aynı olacak şekilde seçilirse  $B = -T \times N$  dir. Eğer  $\{T, N, B\}$  ile  $\mathbf{R}_1^3$  in yönlendirmesi farklı olacak şekilde seçilirse  $B = T \times N$  dir. Buna göre iki durum için de türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

şeklindedir.

iii.  $r$  spacelike normalli spacelike eğri olsun.

Bu durumda  $B$  timelike vektör alanı,  $T$  ve  $N$  spacelike vektör alanıdır. Burada  $B$  vektör alanı; eğer  $\{T, N, B\}$  ile  $\mathbf{R}_1^3$  in yönlendirmesi aynı olacak şekilde seçilirse  $B = T \times N$  dir. Eğer  $\{T, N, B\}$  ile  $\mathbf{R}_1^3$  in yönlendirmesi farklı olacak şekilde seçilirse  $B = -T \times N$  dir. Buna göre iki durum için de türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

şeklindedir (Walrave, 1995).

Tanım 2.28.  $\mathbf{R}_1^3$  3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı ve  $r: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  bir eğri olsun.  $r$  eğrisinin birim teğet vektör alanı  $T$  ve  $u$  da sabit bir birim vektör olmak üzere her  $s \in I$  için  $T$  ile  $u$  arasındaki açı sabit ise  $r$  eğrisine helis adı verilir (Ali ve Lopez, 2011).

3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayındaki eğrilerin ve vektörlerin lorentziyen karakterlerine göre  $T$  ve  $u$  arasındaki açının lorentziyen karakterleri belirlenebilir. Bu belirlemelere göre 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında toplam beş çeşit helis bulunmaktadır. Örneğin,  $T$  ve  $u$  vektörlerinin lorentziyen karakteri timelike olsun. Bu durumda iki birim timelike vektör arasındaki açı tanımına göre  $\langle T, u \rangle = \cosh \theta$  ve birim spacelike ve birim timelike vektör arasındaki açı tanıma göre  $\langle B, u \rangle = \sinh \theta$

olacak şekilde bir tek  $\theta$  lorentziyen timelike açısı vardır. Bu durumda sabit timelike doğru ve sabit lorentziyen timelike açısıya sahip bir timelike helis vardır.

**Teorem 2.29.**  $\mathbf{R}_1^3$  3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı ve  $r: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  birim hızlı bir eğri olsun.  $r$  eğrisinin  $r(s)$  noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla,  $\kappa$  ve  $\tau$  olmak üzere

$$r \text{ bir helistir} \Leftrightarrow \forall s \in I \text{ için } \frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

dır (Ali ve Lopez, 2011).

**Tanım 2.30.**  $\mathbf{R}_1^3$  3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı ve  $r: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  bir eğri olsun.  $r$  eğrisinin birim normal vektör alanı  $N$  ve  $u$  da sabit bir birim vektör olmak üzere her  $s \in I$  için  $N$  ile  $u$  arasındaki açı sabit ise  $r$  eğrisine slant helis adı verilir (Ali ve Lopez, 2011).

**Tanım 2.31.**  $r: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  birim hızlı spacelike veya timelike bir eğri ve eğrinin her noktasında tanımlı teğet vektörü  $t = r'$  olsun. Bu durumda  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  vektörleri her noktada  $t$  teğet vektörüne dik ve normal düzlemde bulunan herhangi iki vektör alanı olmak üzere  $r$  eğrisi üzerinde  $\{T, N, B\}$  hareketli çatısına alternatif olacak şekilde bir  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısı daima mevcuttur. Bu alternatif çatıya Bishop çatısı veya minimum dönmeli çatı adı verilir. Ayrıca Bishop çatısını oluşturan vektörlerin türev formülleri aşağıdaki gibidir:

i.  $r$  timelike eğri olsun.

Bu durumda  $t$  timelike vektör alanı,  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  spacelike vektör alanıdır. Buna göre türev formülleri

$$\begin{pmatrix} t' \\ \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

şeklindeBurada,  $k_1$  ve  $k_2$  diferansiyellenebilir fonksiyonları eğrinin Bishop eğrilikleridir (Karacan ve Bükcü, 2008).

ii.  $r$  spacelike eğri olsun.

Bu durumda  $\xi_1$  timelike vektör alanı,  $t$  ve  $\xi_2$  spacelike vektör alanıdır. Buna göre türev formülleri

$$\begin{pmatrix} t' \\ \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

şeklindeBurada (Bükcü ve Karacan, 2009).

iii.  $r$  spacelike eğri olsun.

Bu durumda  $\xi_2$  timelike vektör alanı,  $t$  ve  $\xi_1$  spacelike vektör alanıdır. Buna göre türev formülleri

$$\begin{pmatrix} t' \\ \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

şeklindedir (Bükcü ve Karacan, 2008a).

Tanım 2.34.  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı ve  $r : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  bir null olmayan eğri olsun.  $r$  eğrisinin Bishop vektör alanları  $\xi_1, \xi_2$  ve  $u$  da sabit bir birim vektör olmak üzere her  $s \in I$  için  $M_1$  (veya  $M_2$ ) ile  $u$  arasındaki açı sabit ise  $r$  eğrisine Bishop slant helis adı verilir (Bükcü ve Karacan, 2008b; Bükcü ve Karacan, 2009).

Teorem 2.35.  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı ve  $r : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  birim hızlı bir eğri olsun.  $r$  eğrisinin  $r(s)$  noktasındaki Bishop eğrilikleri, sırasıyla,  $k_1$  ve  $k_2$  olmak üzere

$$r \text{ bir Bishop slant helistir} \Leftrightarrow \forall s \in I \text{ için } \frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$$

dır (Bükcü ve Karacan, 2009).

Tanım 2.36.  $\mathbf{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı ve  $M \subset \mathbf{R}_1^3$  de  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilen diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri  $\{t, n, b\}$  olmak üzere Frenet vektörleri ile türev vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

i.  $\alpha$ ,  $\mathbf{R}_1^3$  Minkowski uzayında bir timelike eğri olsun. Bu durumda  $\alpha$  nın Frenet vektör alanları;  $t$  timelike vektör alanı,  $n$  ve  $b$  spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektör alanları için,

$$t \times n = b, n \times b = -t, b \times t = n$$

yazılabilir. Burada ‘ $\times$ ’ Lorentz anlamındaki vektörel çarpımdır. Buna göre Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

şeklindedir (Woestijne, 1990).

ii.  $\alpha$ ,  $\mathbf{R}_1^3$  Minkowski uzayında spacelike binormali bir spacelike eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektör alanları;  $t$  spacelike vektör alanı,  $n$  timelike vektör alanı ve  $b$  de spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektör alanları için,

$$t \times n = b, n \times b = t, b \times t = n$$

dir. Buna göre Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

şeklindedir (Woestijne, 1990).

iii.  $\alpha$ ,  $\mathbf{R}_1^3$  Minkowski uzayında timelike binormalli bir spacelike eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektör alanları;  $t$  ve  $n$  spacelike vektör alanı,  $b$  de timelike vektör alanlarıdır. Bu vektör alanları için,

$$t \times n = -b, n \times b = t, b \times t = n$$

olur ve bu durumda Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

şeklindedir (Woestijne, 1990).

Paralel vektör alanlarına bağlı olarak 1975 yılında eğrilerin alternatif veya paralel çatısı olarak adlandırılan Bishop çatısı, Bishop tarafından tanımlanmış, böylece geometriciler bu çatı sayesinde Frenet çatısının tanımlanamadığı durumlar için (özellikle eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda) alternatif bir çatı olarak Bishop çatısını kullanmaya başlamışlardır.

$E^3$  de  $s$  yay parametresi ile verilen regüler bir  $\Gamma$  eğrisinin Frenet ve Bishop bileşenleri  $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$  ve  $\{t, \xi_1, \xi_2, k_1, k_2\}$  olmak üzere  $\Gamma$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned}$$

şeklinde ve bishop formülleri,

$$\begin{aligned} t' &= k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 & (2.1.7) \\ \xi_1' &= -k_1 t \\ \xi_2' &= -k_2 t \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$\Gamma$  eğrisinin Frenet ve Bishop çatıları arasında,

$$\begin{aligned} t &= t \\ n &= \cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2 \\ b &= -\sin \theta \xi_1 + \cos \theta \xi_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \xi_2 &= t \wedge \xi_1 \\ \tau(s) &= \theta'(s) \end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

Buradan,

$$k_1(s) = \kappa(s) \cos \theta(s)$$

$$k_2(s) = \kappa(s) \sin \theta(s)$$

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}$$

dır.  $\Gamma$  eğrisinin Bishop bileşenleri  $\{t, \xi_1, \xi_2, k_1, k_2\}$ , Frenet ve Bishop denklemleri,

$$t = t$$

$$n = \cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2$$

$$b = -\sin \theta \xi_1 + \cos \theta \xi_2$$

olur (Masal ve Azak, 2017).

Buradan,

1.)  $k_1(s) = 0$  ise :  $k_1(s) = \kappa(s) \cos \theta(s)$  denkleminin sıfıra eşit olması için,  $\kappa(s) \neq 0$  olduğundan  $\cos \theta(s) = 0$  olmalıdır. Bu durumda,  $\theta(s) = \pi/2$  olur. Bishop denklemlerinde,  $\cos \theta(s) = 0$  ve  $\sin \theta(s) = 1$  yerine yazılırsa,

$$t = t$$

$$n = \xi_2$$

$$b = -\xi_1$$

bulunur ve Frenet çatısı oluşur. Dolayısıyla  $k_1(s) = 0$  olamaz.

2.)  $k_2(s) = 0$  ise :  $k_2(s) = \kappa(s) \sin \theta(s)$  denkleminin sıfıra eşit olması için,  $\kappa(s) \neq 0$  olduğundan  $\sin \theta(s) = 0$  olmalıdır. Bu durumda,  $\theta(s) = 0$  olur. Bishop denklemlerinde,  $\cos \theta(s) = 1$  ve  $\sin \theta(s) = 0$  yerine yazılırsa,

$$t = t$$

$$n = \xi_1$$

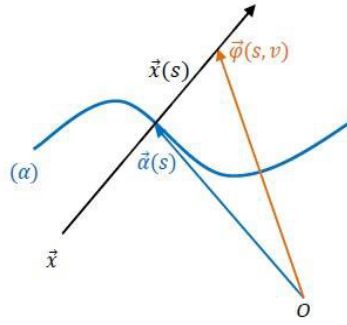
$$b = \xi_2$$

bulunur ve Frenet çatısı oluşur. Dolayısıyla  $k_2(s) = 0$  olamaz.

Tanım 2.37.  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  eğrisi boyunca, eğriye bağlı bir  $x(s)$  doğrusunun hareketiyle meydana gelen yüzeye regle yüzey denir. Burada  $\alpha$  eğrisine regle yüzeyinin dayanak eğrisi,  $x(s)$  doğrusuna da regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı) adı verilir. Bu tanıma göre bir regle yüzeyin parametrik denklemi:

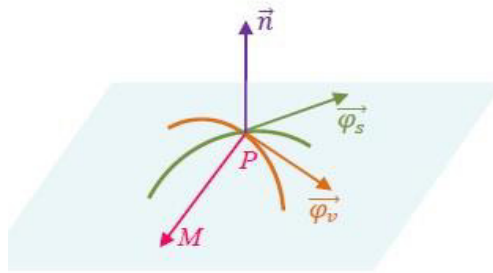
$$\begin{aligned} \varphi : I \times R &\rightarrow R^3 \\ (s, v) &\rightarrow \varphi(s, v) : \alpha(s) + vx(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.1.

Tanım 2.38.  $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vx(s)$  regle yüzeyinin bir  $M$  noktasından geçen ve yüzeyin normaline dik olan düzleme regle yüzeyin teğet düzlemi denir (Şenatalar, 1978).



Şekil 2.2.

Tanım 2.39.  $E^n$  de bir hiperyüzey  $M$  ve  $M$  nin birim normal vektör alanı  $N$  olsun.

$E^n$  de Riemann konneksiyonu  $D$  olmak üzere,  $\forall x \in \chi(M)$  için,

$$S(X) = D_x N$$

şeklinde tanımlı  $S$  dönüşümüne  $M$  üzerinde şekil operatörü veya  $M$  nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.40.  $E^n$  de bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere,

$$K : M \rightarrow R$$
$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona,  $M$  nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve  $K(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.41. Gauss eğriliği her yerde sıfır olan  $E^3$  deki yüzeylere açılabilir yüzey denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.42.  $E^n$  de bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere ,

$$H : M \rightarrow R$$
$$P \rightarrow H(P) = \text{iz}(S(P))$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona,  $M$  nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve  $H(P)$  değerine de  $M$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.43.  $E^3$  de ortalama eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere minimal yüzey denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.44.  $M$ ,  $E^n$  de bir hiperyüzey ve  $S$ ,  $M$ -nin şekil operatörü olmak üzere,

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlanan  $I^q$  fonksiyonuna  $M$  hiperyüzeyinin  $q$ . temel formu denir.

- $q=1$  için 1. temel form:  $I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$  olup, iç çarpım fonksiyonudur.
- $q=2$  için 2. temel form:  $II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$  dir.

- $q=3$  için 3. temel form:  $III(X, Y) = \langle S^2(X), Y \rangle = \langle S(X), S(Y) \rangle$  dir.

Tanım 2.45.  $E^3$  de  $M$  yüzeyinin pozisyon vektörü,

$$\varphi(s, v) = (x_1(s, v), x_2(s, v), x_3(s, v))$$

olarak verilsin. Yüzeyin standart birim normal vektör alanı;

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|}$$

şeklindedir. Burada  $\varphi_s = \frac{\partial \varphi(s, v)}{\partial s}$  ve  $\varphi_v = \frac{\partial \varphi(s, v)}{\partial v}$  ile bulunur (Hacısalıhoğlu,

2000).

Tanım 2.46. Birim normal vektörü  $U$  olan bir  $M$  yüzeyi için,  $I$  . temel formun katsayıları  $E, F, G$  ve  $II$  . temel formun katsayıları  $e, f, g$  olmak üzere,

$$E = g_{11} = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle, \quad F = g_{12} = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle, \quad G = g_{22} = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,$$

$$e = h_{11} = \langle \varphi_{ss}, U \rangle, \quad f = h_{12} = \langle \varphi_{sv}, U \rangle, \quad g = h_{22} = \langle \varphi_{vv}, U \rangle$$

eşitlikleri ile belli olan

$$I = Eds^2 + 2Fdsdv + Gdv^2$$

$$II = eds^2 + 2fdsdv + gdv^2$$

denklemleri yüzeyin  $I$  . ve  $II$  . temel formu verir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.47. 3-boyutlu Minkowski uzayında, Tanım 2.46. da belirtilen denklemler yardımıyla; Gauss eğriliği;

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|}$$

şeklinde bulunur (Sodsiri, 2003).

Ayrıca Ortalama eğrilik,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|}$$

dır. Burada  $g^{ij}$  matrisi,  $g_{ij}$  matrisinin ters matrisidir (Sodsiri, 2003).

Tanım 2.48.  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  bir timelike eğri ve  $\xi_1$  spacelike birim vektör alanı olsun.

Eğer  $\xi_1$  vektör alanı uzayda sabit bir  $d$  doğrultusuyla sabit  $\theta$  açısı yapıyorsa  $\alpha$ 'ya

bir timelike Bishop slant helis adı verilir (Bükcü and Karacan, 2008a).



### 3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Üç boyutlu uzayda bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle oluşan özel yüzeylere regle yüzey denilmektedir. Hareket ettirilen doğruya regle yüzeyin doğrultman doğrusu ve bu doğrunun üzerinde hareket ettiği eğriye dayanak eğrisi adı verilmektedir. Dayanak eğrisi  $\Gamma(s)$  ve doğrultman vektörü  $X(s)$  olan standart bir regle yüzey  $\varphi(s, v) = \Gamma(s) + vX(s)$  şeklinde ifade edilir. Farklı uzaylardaki çeşitli çatılara göre bu forma sahip regle yüzeylerin Gauss ve Ortalama eğrilikleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır (Abdel-All ve ark., 2004; Ali ve ark., 2003; Orbay ve Aydemir, 2010; Önder ve Uğurlu, 2013; Yüksel, 2013).

Ahmad Tawfik Ali (2017), 3-boyutlu Minkowski uzayında bir  $\Gamma(s)$  eğrisinin Frenet vektörleri  $t, n, b$  olmak üzere regle yüzeyin dayanak eğrisini  $c(s) = \int (\alpha t + \beta n + \gamma b) ds$  seçerek elde ettiği yüzeyin Gauss ve Ortalama eğriliklerinin sabit olma koşullarını incelemiştir. Ayrıca Ali; çalışmasında, sabit eğrilikli regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin bazı durumlarda düzlem eğrisi, bazı durumlarda da genel helisler olması gerektiğini karakterize etmiştir. Bir başka deyişle sabit eğrilikli regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin bazı özel eğriler olduğunu tespit etmiştir.

Bu çalışmada ise, 3-boyutlu Minkowski uzayında  $\Gamma(s)$  eğrisinin Bishop vektörleri  $t, \xi_1, \xi_2$  olmak üzere regle yüzeyin dayanak eğrisi  $c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds$  seçilerek sırasıyla  $t, \xi_1$  ve  $\xi_2$  vektörleri tarafından üretilen yüzeyler bulunmuş ve elde edilen yüzeylerin Gauss ve Ortalama eğriliklerinin sabit olma durumu araştırılmıştır. Ayrıca yüzeylerin açılabilir ve minmal olması için gerekli koşullar elde edilmiştir.

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre timelike bir eğri tarafından üretilen null olmayan sabit eğrilikli regle yüzeyler ve bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri incelenecektir.

### 4.1. Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Timelike Bir Eğrinin Bishop Vektörlerinin Ürettiği Null Olmayan Sabit Eğrilikli Regle Yüzeyler

Bu bölümde, üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre timelike bir eğrinin, vektör alanları;  $t, \xi_1, \xi_2$  olmak üzere, bu vektör alanları tarafından üretilen null olmayan sabit eğrilikli regle yüzeyler ile bu regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri incelenmiştir.

#### 4.1.1. Timelike Teğet vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler

$\Gamma, E_1^3$  de bir timelike eğri ve teğet vektör alanı  $t$  olmak üzere,  $\Gamma$  eğrisi üzerine kurulu  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısını göz önüne alalım.  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma, s$  parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds \quad (4.1.1)$$

eğrisini dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeyin denklemi,

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vx(s) \quad (4.1.2)$$

şeklindedir. Burada,  $x(s), E_1^3$  de herhangi bir vektör alanıdır. (4.1.2) denkleminde

$x(s) = t(s)$  kabul edilirse, teğet vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi;

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s) \quad (4.1.3)$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliğinin incelenmesi için Tanım 2.45 deki birinci ve ikinci temel formun katsayıları bulunmalıdır. (4.1.3) denklemindeki regle yüzeyin  $s$  ye göre türevi,

$$\varphi_s = c'(s) + vt'(s) \quad (4.1.4)$$

dir. (4.1.4) denklemi,  $c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$  ve  $t'(s) = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$  eşitlikleri göz önüne alınarak düzenlenirse,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\varphi_s = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 + v(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2)$$

veya,

$$\varphi_s = \alpha t + (\beta + vk_1) \xi_1 + (\gamma + vk_2) \xi_2 \quad (4.1.5)$$

olur.

(4.1.3) denklemindeki regle yüzeyin  $v$  parametresine göre türevi alınırsa,

$$\varphi_v = t \quad (4.1.6)$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha' t + \alpha t' + (\beta + vk_1)' \xi_1 + (\beta + vk_1) \xi_1' \\ + (\gamma + vk_2)' \xi_2 + (\gamma + vk_2) \xi_2' \end{array} \right\} \quad (4.1.7)$$

veya, bu eşitlik  $t' = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$ ,  $\xi_1' = k_1 t$ ,  $\xi_2' = k_2 t$  türev denklemleri kullanılarak düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \left\{ \begin{array}{l} (\alpha' + \beta k_1 + vk_1^2 + \gamma k_2 + vk_2^2) t \\ + (\alpha k_1 + \beta' + vk_1') \xi_1 + (\alpha k_2 + \gamma' + vk_2') \xi_2 \end{array} \right\} \quad (4.1.8)$$

bulunur. Benzer şekilde,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $v$  'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \varphi_{vv} = 0 \quad (4.1.9)$$

bulunur. Son olarak,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial s} = \varphi_{sv} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 \quad (4.1.10)$$

şeklindedir. (4.1.5) ve (4.1.6) denklemleri kullanılarak yüzeyin normal vektör alanı;

$$\varphi_s \times \varphi_v = (\beta + vk_1) \xi_2 - (\gamma + vk_2) \xi_1 \quad (4.1.11)$$

şeklinde hesaplanır.

(4.1.11) eşitliği kullanılarak, birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{(\beta + vk_1) \xi_2 - (\gamma + vk_2) \xi_1}{\|(\beta + vk_1) \xi_2 - (\gamma + vk_2) \xi_1\|}$$

biçiminde bulunur. Gerekli işlemler yapırsa,

$$U = \frac{(\beta + vk_1) \xi_2 - (\gamma + vk_2) \xi_1}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}} \quad (4.1.12)$$

elde edilir. U nun Lorentzian karakterini belirleyelim.

$$\langle U, U \rangle = \left\langle \frac{(\beta + vk_1) \xi_2 - (\gamma + vk_2) \xi_1}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}}, \frac{(\beta + vk_1) \xi_2 - (\gamma + vk_2) \xi_1}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}} \right\rangle$$

veya

$$\langle U, U \rangle = \frac{[(\beta + vk_1)^2 \langle \xi_2, \xi_2 \rangle - 2(\beta + vk_1)(\gamma + vk_2) \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + (\gamma + vk_2)^2 \langle \xi_1, \xi_1 \rangle]}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}^2}$$

dır. Burada,  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  sistemi ortonormal bir çatı oluşturduğundan  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$  dır.

$\xi_2$  vektör alanı spacelike olduğundan  $\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = +1$  ve  $\xi_1$  vektör alanı spacelike

oldüğünden  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = +1$  dir. Dolayısıyla,

$$\langle U, U \rangle = \frac{[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}^2} > 0$$

olur ki  $U$  birim normal vektör alanının karakteri spacelike olup, regle yüzey timelike bulunur.

### Timelike Teğet Vektörü Tarafından Üretilen Timelike Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği hesabı için, bu yüzeyin *I.* ve *II.* temel formunun katsayılarını hesaplamak gerekir. *I.* temel formun katsayıları olan  $E$ ,  $F$  ve  $G$  fonksiyonlarını bulmak için (4.1.5) eşitliği kullanılarak, skalar çarpım fonksiyonu yardımıyla,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \left\langle \begin{matrix} \alpha t + (\beta + vk_1)\xi_1 + (\gamma + vk_2)\xi_2, \\ \alpha t + (\beta + vk_1)\xi_1 + (\gamma + vk_2)\xi_2 \end{matrix} \right\rangle \quad (4.1.13)$$

bulunur. (4.1.13) denklemi düzenlenirse,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = -\alpha^2 + (\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2 \quad (4.1.14)$$

elde edilir. (4.1.6) eşitliğinden;

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle t, t \rangle = -1 \quad (4.1.15)$$

dır. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitlikleri kullanılarak;

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle \alpha t + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 + v(k_1\xi_1 + k_2\xi_2), t \rangle = -\alpha \quad (4.1.16)$$

bulunur. *II.* temel formun katsayılarını hesaplamak için, (4.1.8) ve (4.1.12) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \left\langle \begin{matrix} (\alpha' + \beta k_1 + vk_1^2 + \gamma k_2 + vk_2^2)t + (\alpha k_1 + \beta' + vk_1')\xi_1 \\ + (\alpha k_2 + \gamma' + vk_2')\xi_2, \frac{(\beta + vk_1)\xi_2 - (\gamma + vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}} \end{matrix} \right\rangle \quad (4.1.17)$$

bulunur. (4.1.17) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -\alpha\gamma k_1 - \beta'\gamma + \alpha\beta k_2 + \gamma'\beta \\ + (-\beta'k_2 - \gamma k_1' + \gamma'k_1 + \beta k_2')v + (-k_1'k_2 + k_1k_2')v^2 \end{array} \right\}}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta\gamma k_1 + \gamma^2 + 2\gamma\beta k_2 + \beta^2 k_2^2}} \quad (4.1.18)$$

elde edilir. (4.1.9) ve (4.1.12) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \langle 0, \frac{(\beta + \gamma k_1)\xi_2 - (\gamma + \beta k_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta\gamma k_1 + \gamma^2 + 2\gamma\beta k_2 + \beta^2 k_2^2}} \rangle = 0 \quad (4.1.19)$$

bulunur. (4.1.10) ve (4.1.12) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \frac{\{-(\gamma + \beta k_2)k_1 + (\beta + \gamma k_1)k_2\}}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta\gamma k_1 + \gamma^2 + 2\gamma\beta k_2 + \beta^2 k_2^2}}$$

veya

$$f = \frac{-\gamma k_1 + \beta k_2}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta\gamma k_1 + \gamma^2 + 2\gamma\beta k_2 + \beta^2 k_2^2}} \quad (4.1.20)$$

bulunur. Teorem 2.47 de belirtilen Gauss eğriliği fonksiyonu yardımıyla; (4.1.14), (4.1.15), (4.1.16), (4.1.18), (4.1.19) ve (4.1.20) denklemleri kullanılarak, teğet vektör tarafından üretilen timelike regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{(\beta k_2 - \gamma k_1)^2}{[(\beta + \gamma k_1)^2 + (\gamma + \beta k_2)^2]^2}$$

veya

$$K = \left[ \frac{\beta k_2 - \gamma k_1}{\beta^2 + \gamma^2 + 2(\beta k_1 + \gamma k_2)v + (k_1^2 + k_2^2)v^2} \right]^2 \quad (4.1.21)$$

şeklinde bulunur. Burada teğet vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliğini araştıralım. Eğer (4.1.21) ifadesinde,  $\beta k_2 - \gamma k_1 = 0$  ise  $K = 0$  olduğu açıktır. Buradan,

$$\beta k_2 = \gamma k_1$$

veya

$$\beta = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \gamma \quad (4.1.22)$$

dır. (4.1.22) denkleminde  $\gamma = k_2 \varepsilon$  olarak seçilirse,  $\beta = k_1 \varepsilon$  bulunur. (4.1.1)

denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.1.23)$$

dır. Ayrıca yukarıda tespit edilen  $\gamma$  ve  $\beta$  diferansiyellenebilir fonksiyonlarının yanında diğer diferansiyellebilir fonksiyonu

$$\alpha = \varepsilon' + \eta$$

olacak şekilde seçersek, (4.1.23) denklemi,

$$c'(s) = (\varepsilon' + \eta)t + k_1 \varepsilon \xi_1 + k_2 \varepsilon \xi_2$$

şeklinde bulunur.  $t' = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$  olduğundan,

$$c'(s) = \varepsilon' t + \eta t + t' \varepsilon$$

bulunur, burada  $\varepsilon' t + t' \varepsilon = (\varepsilon t)'$  şeklinde düzenlenirse,

$$c'(s) = (\varepsilon t)' + \eta t \quad (4.1.24)$$

elde edilir. (4.1.24) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa, teğet vektör tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \varepsilon t + \int \eta t ds \quad (4.1.25)$$

elde edilir. (4.1.3) denkleminde, (4.1.25) deki dayanak eğrisi yerine yazılırsa, timelike regle yüzeyin

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds \quad (4.1.26)$$

formu elde edilir. Diğer yandan, (4.1.21) denkleminde  $K=0$  olması için  $v^2$  değişkeninin katsayısı olan  $k_1^2 + k_2^2$  ifadesinin sıfıra eşit olması gerekir. Bu durum,

Tanım 2.36. daki açıklama ile çelişir. Böylece teğet vektörü tarafından oluşturulan regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliği ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz:

**Teorem 4.1. :** (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$  regle yüzeyi açılabilir.  $\Leftrightarrow G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds$$

formundadır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$  regle yüzeyinin gauss eğriliği  $K$  sabit ise  $K = 0$  dır.

### Timelike Teğet Vektörü Tarafından Üretilen Timelike Regle Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Bir yüzeyin ortalama eğriliğinin hesabı, Teorem 2.47. yardımıyla yapılabilir.

Ortalama eğriliğin matris formu,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} \quad (4.1.27)$$

şeklindedir. Buradan,

$$Eg = [-\alpha^2 + (\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2].0 = 0 \quad (4.1.28)$$

$$Ge = (-1) \frac{\begin{pmatrix} -\alpha\gamma k_1 - \beta'\gamma + \alpha\beta k_2 + \gamma'\beta \\ + (-\beta'k_2 - \gamma k_1' + \gamma'k_1 + \beta k_2')v + (-k_1'k_2 + k_1 k_2')v^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2}} = -e \quad (4.1.29)$$

ve

$$2Ff = 2(-\alpha) \left( \frac{-(\gamma + vk_2)k_1 + (\beta + vk_1)k_2}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}} \right)$$

veya

$$2Ff = \left( \frac{2\alpha(-\gamma k_1 + \beta k_2)}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2}} \right) \quad (4.1.30)$$

şeklinde bulunur. (4.1.28) , (4.1.29) ve (4.1.30) eşitlikleri (4.1.27) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \alpha\gamma k_1 + \gamma\beta' - \alpha\beta k_2 - \beta\gamma' \\ + v(\gamma k_1' - k_2' \beta - \beta' k_2 - k_1 \gamma') \\ + v^2(-k_1 k_2' + k_1' k_2) \end{array} \right\}}{2[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]^2} \quad (4.1.31)$$

bulunur.

Yüzeyin ortalama eğriliği,  $v$  parametresinin kuvvetleri şeklinde yazılırsa,

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]^{3/2}} \quad (4.1.32)$$

olur. Burada,

$$A_0 = -\beta\gamma' + \gamma k_1' + \alpha(-k_1 \gamma + k_2 \beta)$$

$$A_1 = +\gamma k_1' - k_2' \beta - \beta' k_2 - k_1 \gamma'$$

ve

$$A_2 = -k_1 k_2' + k_1' k_2$$

dır. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapılabilmesi için  $A_0, A_1$  ve  $A_2$  katsayıları incelenmelidir. Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, bulunan tüm  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

**1.hal:**  $A_2 = 0$  olsun. Burada,

$$\begin{aligned} A_2 &= -k_1 k_2' + k_1' k_2 \\ &= \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \cdot k_2^2 \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse,

$$k_1 = m k_2 \quad (4.1.33)$$

olacak şekilde bir  $m \in \mathbf{R}$  reel sayısı vardır. Burada  $m$  integrasyon sabitidir. (4.1.33) eşitliği ile Teorem 2.35 göz önüne alınırsa  $\Gamma$  eğrisinin, Bishop Slant Helis olduğu görülür.

**2.hal:**  $A_1 = 0$  olsun. Burada,

$$A_1 = -\gamma'k_1 + \gamma k_1' - k_2' \beta + \beta' k_2 = 0$$

veya

$$A_1 = k_2'(-\beta + m\gamma) + k_2(-m\gamma' + \beta')$$

bulunur.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$A_1 = \left( \frac{-\gamma m + \beta}{k_2} \right)' k_2^2 = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\beta = c_1 k_2 + m\gamma \quad (4.1.34)$$

olacak şekilde bir  $c_1 \in \mathbf{R}$  reel sayısı vardır.

**3.hal:**  $A_0 = 0$  olsun. Burada

$$A_0 = -\beta\gamma' + \gamma\beta' + \alpha(k_1\gamma - k_2\beta) = 0$$

veya (4.1.33) ve (4.1.34) denklemleri kullanılarak,

$$A_0 = -c_1 k_2 \gamma' - m\gamma\gamma' c_1 k_2' \gamma + m\gamma'\gamma - \alpha(-k_1\gamma + c_1 k_2^2 + m\gamma k_2)$$

veya

$$A_0 = c_1(k_2\gamma' - k_2'\gamma - \alpha k_2^2) \quad (4.1.35)$$

bulunur. (4.1.35) denkleminin incelenmesinde iki durum oluşmaktadır:

**Durum 1.**  $c_1 = 0$  olsun.  $c_1 = 0$  ve  $\frac{k_1}{k_2} = m$  eşitlikleri (4.1.34) denklemine yazılırsa,

$\beta = m\gamma$  elde edilir. Ayrıca,  $\gamma = k_2\varepsilon$ ,  $\alpha = \varepsilon' + \eta$  ve  $\beta = k_1\varepsilon$  eşitlikleri (4.1.23)

denkleminde yerine yazılırsa,

$$c'(s) = (\varepsilon' + \eta)t + k_1\varepsilon\xi_1 + k_2\varepsilon\xi_2$$

bulunur. Diğer taraftan,  $t' = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$  olduğundan,

$$c'(s) = \varepsilon't + \eta t + t'\varepsilon$$

dır, burada  $\varepsilon't + t'\varepsilon = (\varepsilon t)'$  çarpımın türevi şeklinde düzenlenirse,

$$c'(s) = (\varepsilon t)' + \eta t \quad (4.1.36)$$

elde edilir. (4.1.36) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,

$$c(s) = \varepsilon t + \int \eta t ds \quad (4.1.37)$$

bulunur. (4.1.3) denkleminde, (4.1.37) denkleminde bulunan dayanak eğrisi yerine yazılırsa,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds \quad (4.1.38)$$

formu elde edilir.

Standart formda, Bishop slant helis eğrisinin pozisyon vektörü,

(a) Eğer eksen  $\text{Sp}\{e_2\}$  tarafından gerilirse;

$$\Gamma(s) = \left( \int \cosh[\sigma] ds + c_1, c_2, \int \sinh[\sigma] ds + c_3 \right) \quad (4.1.39)$$

olur. Burada  $\sigma = d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds$  dır.

(b) Eğer eksen  $\text{Sp}\{e_1, e_3\}$  tarafından gerilirse;

$$\Gamma(s) = \left( \cosh n \int \cosh[\sigma] ds + c_1, \int \sinh[\sigma] ds + c_2, \sinh n \int \cosh[\sigma] ds + c_3 \right) \quad (4.1.40)$$

şeklinde olur. Burada  $\sigma = d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds$  dır.

Her iki durum içinde, verilen Bishopslant eğrisinin teğet vektör alanları ile  $G_t$  regle yüzeyinin standart formu bulunmalıdır.

i.(a) durumu için:

(4.1.39) denkleminde türev alınırsa;

$$t(s) = (\cosh[\sigma], 0, \sinh[\sigma]) \quad (4.1.41)$$

bulunur. (4.1.36) denkleminde  $t(s)$  eşitliği yerine yazılırsa,

$$c'(s) = (\eta(s) \cosh[\sigma] + (\varepsilon(s) \cosh[\sigma])', 0, \eta(s) \sinh[\sigma] + (\varepsilon(s) \sinh[\sigma])') \quad (4.1.42)$$

elde edilir. Kabul edelim ki,  $c(s) = (\chi(s), 0, \delta(s))$  olsun. Burada  $\chi$  ve  $\delta$  fonksiyonları,  $s$  nin keyfi fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla  $c'(s) = (\chi'(s), 0, \delta'(s))$  olur.

Eğer  $c'(s)$  fonksiyonundaki bileşenler (4.1.42) denklemindeki bileşenler ile taraf tarafa eşitlenirse,

$$\eta(s) \cosh[\sigma] + (\varepsilon(s) \cosh[\sigma])' = \chi'(s) \quad (4.1.43)$$

ve

$$\eta(s) \sinh[\sigma] + (\varepsilon(s) \sinh[\sigma])' = \delta'(s) \quad (4.1.44)$$

bulunur. (4.1.43) denklemini  $-\sinh[\sigma]$  ile, (4.1.44) denklemini de  $\cosh[\sigma]$  ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\sigma' \varepsilon(s) = \delta'(s) \cosh[\sigma] - \chi'(s) \sinh[\sigma]$$

veya,

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2 k_1(s)}} \{ \delta'(s) \cosh[\sigma] - \chi'(s) \sinh[\sigma] \} \quad (4.1.45)$$

bulunur. (4.1.43) denklemini  $\cosh[\sigma]$  ile (4.1.44) denklemini de  $-\sinh[\sigma]$  ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\eta(s) + \varepsilon'(s) = \cosh[\sigma] \chi'(s) - \sinh[\sigma] \delta'(s) \quad (4.1.46)$$

elde edilir. (4.1.45) eşitliğinde türev alınırsa,

$$\varepsilon'(s) = \frac{1}{1+m^2} \left[ \cosh[\sigma] \left( \frac{\delta(s)'}{k_1(s)} \right) - \sinh[\sigma] \left( \frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right) + \delta'(s) \sinh[\sigma] - \chi'(s) \cosh[\sigma] \right] \quad (4.1.47)$$

bulunur.

(4.1.47) denklemi (4.1.46) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\eta(s) = \cosh[\sigma] \left\{ 2\chi'(s) - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left( \frac{\delta'(s)}{k_1(s)} \right)' \right\} - \sinh[\sigma] \left\{ 2\delta'(s) + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left( \frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right)' \right\} \quad (4.1.48)$$

elde edilir. Bu durumda, (4.1.45) ve (4.1.48) denklemleri, (4.1.42) denkleminde yerine yazılırsa, dayanak eğrisi,

$$c(s) = (\chi(s), 0, \delta(s)) \quad (4.1.49)$$

formunu alır. Burada  $\chi(s)$  ve  $\delta(s)$  s değişkeninin keyfi fonksiyonlarıdır. Eğer

(4.1.3) denkleminde, (4.1.49) ve (4.1.41) eşitlikleri yerine yazılırsa,  $G_t$  regle yüzeyinin standart formu,

$$\varphi(s, v) = \left( \chi(s) + v \cosh \left[ d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right], 0, \delta(s) + v \sinh \left[ d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right] \right)$$

elde edilir.

ii.(b) durumu için:

(4.1.40) denkleminde türev alınır;

$$t(s) = (\cosh n \cdot \cosh[\sigma], \sinh[\sigma], \sinh n \cdot \cosh[\sigma]) \quad (4.1.50)$$

şeklinde olur. Burada  $\sigma = d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds$  dır. (4.1.36) denkleminde  $t(s)$

eşitliği yerine yazılırsa,

$$c'(s) = (\eta \cosh n \cosh [\sigma] + (\varepsilon \cosh n \cosh [\sigma])', \quad (4.1.51)$$

$$\eta \sinh [\sigma] + (\varepsilon \sinh [\sigma])', \eta \sinh n \sinh [\sigma] + (\varepsilon \sinh n \cosh [\sigma])$$

elde edilir. Kabul edelim ki,

$$c(s) = (\chi(s), \mu(s), \delta(s)) \quad (4.1.52)$$

olsun. Burada  $\chi$ ,  $\mu$  ve  $\delta$  fonksiyonları,  $s$  değişkeninin keyfi fonksiyonlarıdır.

(4.1.52) denkleminin her iki taraftan türevi alınıp, (4.1.51) denkleminine eşitlenirse;

$$(\varepsilon \cosh n \cosh [\sigma])' + \eta \cosh n \cosh [\sigma] = \chi'(s) \quad (4.1.53)$$

$$(\varepsilon \sinh [\sigma])' + \eta \sinh [\sigma] = \mu'(s) \quad (4.1.54)$$

$$(\varepsilon \sinh n \cosh [\sigma])' + \eta \sinh n \cosh [\sigma] = \delta'(s) \quad (4.1.55)$$

bulunur. (4.1.53) denkleminde;

$$\eta(s) \cos [\theta] + \varepsilon'(s) \cos [\theta] + \frac{1}{\sin \theta_0} \varepsilon(s) \kappa(s) \sin [\theta] = \chi'(s) \quad (4.1.56)$$

(4.1.54) denkleminde;

$$\eta(s) \sin [\theta] + \varepsilon'(s) \sin [\theta] - \frac{1}{\sin \theta_0} \varepsilon(s) \kappa(s) \cos [\theta] = \mu'(s) \quad (4.1.57)$$

olduğu açıktır. (4.1.56) denklemini  $-\sinh n \sinh [\sigma]$  ile, (4.1.57) denklemini

$\cosh n \cosh [\sigma]$  ile çarpılıp taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{1}{\sin \theta_0} \varepsilon(s) \kappa(s) = \sin [\theta] \chi'(s) + \cos [\theta] \mu'(s)$$

bulunur. Dolayısıyla  $\varepsilon(s)$  keyfi fonksiyonu,

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\sigma'} \{ (\sinh n \delta'(s) - \cosh n \chi'(s)) \sinh [\sigma] + \mu'(s) \cos [\sigma] \} \quad (4.1.58)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.56) denklemi  $\cosh[\theta]$  ile (4.1.57) denklemi de  $-\sinh[\theta]$  ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\eta + \varepsilon' + 2 \left( \frac{1}{\sin \theta_0} \right) \varepsilon(s) k(s) \sinh[\theta] \cosh[\theta] = \cosh[\theta] \chi'(s) - \sinh[\theta] \mu'(s) \quad (4.1.59)$$

bulunur. (4.1.58) denklemi, (4.1.59) denklemine yerine yazılırsa,

$$\eta + \varepsilon' + 2 \sinh[\theta] \cosh[\theta] = \cosh[\theta] \chi'(s) - \sinh[\theta] \mu'(s) \quad (4.1.60)$$

elde edilir. (4.1.58) denkleminin türevi alınırsa,

$$\varepsilon'(s) = \frac{1}{1+m^2} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \right)' \cosh[\sigma] + \sigma' \frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \sinh[\sigma] \\ & + \sinh n \left( \left( \frac{\delta'(s)}{k_1(s)} \right)' \sinh[\sigma] + \sigma' \cosh[\sigma] \frac{\delta'(s)}{k_1(s)} \right) \\ & - \cosh n \left( \left( \frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right)' \sinh[\sigma] + \sigma' \cosh[\sigma] \frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.61)$$

elde edilir. (4.1.60) denklemine (4.1.61) denklemi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \eta(s) = & 2 \{ \cosh n \cosh[\sigma] \chi'(s) - \sinh n \cosh[\sigma] \delta'(s) - \sinh[\sigma] \mu'(s) \} \\ & - \frac{1}{1+m^2} \left\{ \left( \frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \right)' \cosh[\sigma] + \sinh n \left( \frac{\delta'(s)}{k_1(s)} \right)' \sinh[\sigma] - \cosh n \left( \frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right)' \sinh[\sigma] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, (4.1.58) ve (4.1.61) denklemleri ve (4.1.51) denklemine yerine yazılırsa, dayanak eğrisi,

$$c(s) = (\chi(s), \mu(s), \delta(s)) \quad (4.1.62)$$

formunu alır. Burada  $\chi(s)$ ,  $\mu(s)$  ve  $\delta(s)$  s değişkeninin keyfi fonksiyonlarıdır.

(4.1.3) denklemine, (4.1.62) ve (4.1.50) eşitlikleri yerine yazılırsa,  $G_i$  regle yüzeyinin standart formu,

$$\begin{aligned}\varphi(s, v) = & \left( \chi(s) + v \cosh \cosh \left[ d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right], \right. \\ & \mu(s) + v \sinh \left[ d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right], \\ & \left. \delta(s) + v \sinh \cosh \left[ d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right] \right)\end{aligned}$$

elde edilir.

**Durum 2.**  $k_2 \gamma' - k_2' \gamma - \alpha k_2^2 = 0$  olsun. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{k_2 \gamma' - k_2' \gamma}{k_2^2} = \alpha$$

$$\alpha = \left( \frac{\gamma}{k_2} \right)' \quad (4.1.63)$$

elde edilir.

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$$

denkleminde (4.1.34) ve (4.1.63) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$c'(s) = \left( \frac{\gamma}{k_2} \right)' t + (c_1 k_2 + m \gamma) \xi_1 + \gamma \xi_2$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar ile,

$$c'(s) = \left( \frac{\gamma}{k_2} \right)' t + c_1 k_2 \xi_1 + \frac{k_1 \gamma \xi_1 + \gamma \xi_2}{k_2}$$

$$c'(s) = \left( \frac{\gamma}{k_2} \right)' t + c_1 k_2 \xi_1 + \frac{\gamma}{k_2} t'$$

$$c'(s) = \left( \frac{\gamma}{k_2} t \right)' + c_1 k_2 \xi_1 \quad (4.1.64)$$

olur.

(4.1.64) denkleminin her iki taraftan integrali alınır,

$$c(s) = \frac{\gamma}{k_2} t + c_1 \int k_2 \xi_1 ds$$

bulunur. Genelliği kaybetmeden  $\gamma = k_2\varepsilon$  eşitliği (4.1.38) denkleminde yerine yazılırsa  $G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + c_1 \left( \int k_2 ds \right) \xi_1$$

formunu alır. Ayrıca,

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1v + A_2v^2}{2[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]^{3/2}}$$

ortalama eğrilik fonksiyonunun aşağıdaki gibi ifade edilebileceği açıktır:

$$Q = A^2 - H^2B^2 = \sum_{i=0}^6 \theta_i v^i = 0. \quad (4.1.65)$$

(4.1.65) denklemini daha açık yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q = A^2 - H^2B^2 &= (A_0 + A_1v + A_2v^2)^2 - H^2 4 [((\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2)^{3/2}]^2 \\ &= \dots - 4H^2 [\beta^2 + 2\beta vk_1 + v^2 k_1^2 + \gamma^2 + 2\gamma vk_2 + v^2 k_2^2]^3 \\ &= \dots - 4H^2 [v^2(k_1^2 + k_2^2) + 2v(\beta k_1 + \gamma k_2) + \beta^2 + \gamma^2]^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak,  $Q_6 = 4H^2(k_1^2 + k_2^2)^3 = 0$  ise  $k_1 = 0$  ve  $k_2 = 0$  olur. Fakat Tanım 3.47. den  $k_1 \neq 0$  ve  $k_2 \neq 0$  dır. O halde  $H = 0$  bulunur. Bu durumda teğet vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeylerin ortalama eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 4.2. :** (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$  regle yüzeyi minimaldir.  $\Leftrightarrow \Gamma$  Bishop slant helistir ve

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds$$

veya

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + c_1 \int (k_2 ds) \xi_1$$

formunu alır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$  regle yüzeyinin ortalama eğriliği  $H$  sabit

ise  $H = 0$  dır.

#### 4.1.2. Spacelike $\xi_1$ vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler

$\Gamma, E_1^3$  de bir timelike eğri ve teğet vektör alanı  $t$  olmak üzere,  $\Gamma$  eğrisi üzerine kurulu  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısını göz önüne alalım.  $\alpha, \beta,$  ve  $\gamma, s$  parametresine diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds \quad (4.1.66)$$

eğrisini dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeyin denklemi,

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vx(s) \quad (4.1.67)$$

şeklindedir. Burada,  $x(s), E_1^3$  de herhangi bir vektör alanıdır. (4.1.67) denkleminde

$x(s) = \xi_1$  kabul edilirse,  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi;

$$\varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s) \quad (4.1.68)$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliğinin incelenmesi için Tanım 2.46. deki birinci ve ikinci temel formun katsayıları bulunmalıdır. (4.1.68) denklemindeki regle yüzeyin  $s$  ye göre türevi,

$$\varphi_s = c'(s) + v\xi_1'(s) \quad (4.1.69)$$

dir. (4.1.69) denklemini,  $c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$  ve  $\xi_1'(s) = k_1 t$  eşitlikleri göz önüne alınarak düzenlenirse,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\varphi_s = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 + v(k_1 t)$$

veya

$$\varphi_s = t(\alpha + vk_1) + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.1.70)$$

olur.

(4.1.68) denklemindeki regle yüzeyin  $v$  parametresine göre türevi alınır,

$$\varphi_v = \xi_1 \quad (4.1.71)$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$  ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \{t'(\alpha + vk_1) + t(\alpha + vk_1) + \beta' \xi_1 + \beta \xi_1' + \gamma' \xi_2 + \gamma \xi_2'\} \quad (4.1.72)$$

bulunur. (4.1.72) eşitliği düzenlenirse,

$$\varphi_{ss} = t(\alpha' + vk_1' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(\alpha k_1 + vk_1^2 + \beta') + \xi_2(\alpha k_2 + vk_1 k_2 + \gamma') \quad (4.1.73)$$

olur. Benzer şekilde,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $v$  'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \varphi_{vv} = 0 \quad (4.1.74)$$

bulunur. Son olarak,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial s} = \varphi_{sv} = k_1 t \quad (4.1.75)$$

şeklindedir. (4.1.70) ve (4.1.71) denklemleri kullanılarak yüzeyin normal vektör alanı;

$$\varphi_s \times \varphi_v = -\gamma t - (\alpha + vk_1) \xi_2 \quad (4.1.76)$$

şeklinde hesaplanır.

(4.1.76) eşitliği kullanılarak, birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{-\gamma t - (\alpha + vk_1) \xi_2}{\|-\gamma t - (\alpha + vk_1) \xi_2\|} \quad (4.1.77)$$

biçiminde bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$U = \frac{-\gamma t - (\alpha + vk_1) \xi_1}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \quad (4.1.78)$$

elde edilir. Şimdi,  $U$  nun Lorentzian karakterini belirleyelim:

$$\langle U, U \rangle = \frac{\gamma^2 \langle t, t \rangle - 2\gamma(\alpha + vk_1) \langle t, \xi_2 \rangle + (\alpha + vk_1)^2 \langle \xi_2, \xi_2 \rangle}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}}$$

ve,  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  sistemi ortonormal bir çatı oluşturduğundan  $\langle t, \xi_2 \rangle = 0$  dır.  $t$  vektör alanı timelike olduğundan  $\langle t, t \rangle = -1$  ve  $\xi_2$  vektör alanı spacelike olduğundan  $\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = +1$  dir. Dolayısıyla,

$$\langle U, U \rangle = \frac{-\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}}$$

elde edilir. Eğer,

- i.  $\gamma^2 > (\alpha + vk_1)^2$  ise yüzeyin normali timelike, dolayısıyla regle yüzey spacelike,
- ii.  $\gamma^2 < (\alpha + vk_1)^2$  ise yüzeyin normali spacelike, dolayısıyla regle yüzey timelike olur.

### **Spacelike $\xi_1$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği**

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği hesabı için, bu yüzeyin  $I.$  ve  $II.$  temel formunun katsayılarını hesaplamak gerektiğini biliyoruz. Burada,  $I.$  temel formun katsayıları  $E$ ,  $F$  ve  $G$  fonksiyonlarını bulmak için (4.1.70) eşitliği kullanılarak, skalar çarpım fonksiyonu yardımıyla,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \{ \langle t(\alpha + vk_1) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, t(\alpha + vk_1) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 \rangle \} \quad (4.1.79)$$

bulunur. (4.1.79) denklemini düzenlirse,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = -(\alpha + vk_1)^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad (4.1.80)$$

elde edilir. (4.1.71) eşitliğinden,

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = +1 \quad (4.1.81)$$

dir. (4.1.70) ve (4.1.71) eşitlikleri kullanılarak;

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle t(\alpha - vk_1) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, \xi_1 \rangle = \beta \quad (4.1.82)$$

bulunur. II. temel formun katsayılarını hesaplamak için, (4.1.73) ve (4.1.78) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle t(\alpha' + vk_1' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(k_1\alpha + vk_1^2 + \beta') + \\ \xi_2(k_2\alpha + vk_1k_2 + \gamma'), \frac{-\gamma t - (\alpha - vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)\xi_2}} \rangle \end{array} \right\} \quad (4.1.83)$$

bulunur. (4.1.83) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e = \left\{ \frac{v^2(-k_1^2k_2) + v(+\gamma k_1' - 2k_1k_2v - \gamma'k_1) + \gamma\alpha' + \beta k_1\gamma + \gamma^2k_2 - k_2\alpha^2 - \alpha\gamma'}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\} \quad (4.1.84)$$

elde edilir. (4.1.74) ve (4.1.78) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \left\langle 0, \frac{-\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\rangle = 0 \quad (4.1.85)$$

bulunur. (4.1.75) ve (4.1.78) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \left\langle +k_1t, \frac{-\gamma t - (\alpha + vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha - vk_1)^2}} \right\rangle = \frac{k_1\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \quad (4.1.86)$$

bulunur. Teorem 2.47. de belirtilen Gauss eğriliği fonksiyonu yardımıyla; (4.1.80), (4.1.81), (4.1.82), (4.1.84) (4.1.85) ve (4.1.86) denklemleri kullanılarak,  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen non-lightlike regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-\left[\frac{k_1\gamma}{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}\right]^2}{\left[\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2\right]^2}$$

veya

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-k_1^2\gamma^2}{\left[\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2\right]^3} \quad (4.1.87)$$

şeklinde bulunur. Burada  $\xi_1$  vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliğini araştıralım. Eğer (4.1.87) ifadesinde,  $-k_1^2 \gamma^2 = 0$  ise  $K=0$  olduğu açıktır. Bu durumda  $k_1=0$  veya  $\gamma=0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. den,  $k_1 \neq 0$  olduğundan,  $\gamma=0$  olmalıdır.

(4.1.1) denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.1.88)$$

olur. Eğer (4.1.88) denkleminde  $\gamma=0$  eşitliği yerine yazılırsa; (4.1.88) denklemi,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 \quad (4.1.89)$$

şeklinde bulunur. (4.1.89) denklemindeki  $\alpha$  ve  $\beta$  diferansiyellenebilir fonksiyonları

$\alpha = -k_1 \varepsilon$  ve  $\beta = \varepsilon' + \eta$  şeklinde seçilirse ve (4.1.89) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c'(s) = k_1 \varepsilon t + (\varepsilon' + \eta) \xi_1$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$c'(s) = k_1 \varepsilon t + \varepsilon' \xi_1 + \eta \xi_1 \quad (4.1.90)$$

denklemi elde edilir.  $k_1 t = \xi_1'$  olduğundan, (4.1.90) denklemi,

$$c'(s) = \xi_1' \varepsilon + \varepsilon' \xi_1 + \eta \xi_1 \quad (4.1.91)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda (4.2.25) denklemi,

$$c'(s) = (\xi_1 \varepsilon)' + \eta \xi_1 \quad (4.1.92)$$

şeklinde bulunur. (4.1.92) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa,  $\xi_1$

vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \xi_1 \varepsilon + \int \eta \xi_1 ds \quad (4.1.93)$$

elde edilir. (4.1.93) deki dayanak eğrisi (4.1.3) denkleminde yerine yazılırsa, regle yüzeyin

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_1 + \int \eta \xi_1 ds$$

formu elde edilir.

**Teorem 4.3.** : (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s)$  regle yüzeyi açılabilir.  $\Leftrightarrow G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_1 + \int \eta \xi_1 ds$$

formundadır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s)$  regle yüzeyinin gauss eğriliği  $K$  sabit ise  $K = 0$  dır.

### Spacelike $\xi_1$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Bir yüzeyin ortalama eğriliğinin hesabı, Teorem 2.47. yardımıyla yapılabilir.

Ortalama eğriliğin matris formu,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} \quad (4.1.94)$$

şeklindedir. Buradan,

$$Eg = [-(\alpha + vk_1)^2 + \beta^2 + \gamma^2]0 = 0 \quad (4.1.95)$$

$$Ge = 1e = 1 \left\{ \frac{\begin{matrix} v^2(-k_1^2 k_2) + v(-\gamma k_1' - k_1 k_2 v - \gamma' k_1) \\ -\gamma \alpha' - \beta k_1 \gamma - \gamma^2 k_2 - k_2 \alpha^2 - \alpha \gamma' \end{matrix}}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\} = e \quad (4.1.96)$$

ve

$$2Ff = 2\beta \frac{k_1 \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}}$$

veya

$$2Ff = \frac{2\beta k_1 \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \quad (4.1.97)$$

şeklinde bulunur.

(4.1.95), (4.1.96) ve (4.1.97) eşitlikleri (4.1.94) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$Eg + Ge - 2Ff = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \left[ \begin{array}{l} \gamma\alpha' + \gamma vk_1' - \beta k_1 \gamma + \gamma^2 k_2 - k_2 \alpha^2 \\ + \alpha vk_1 k_2 - v^2 k_1^2 k_2 - \gamma' \alpha - \gamma' vk_1 \end{array} \right]$$

bulunur. (4.1.94) denklemine göre  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen non-lightlike regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{\gamma\alpha' + \gamma vk_1' - \beta k_1 \gamma + \gamma^2 k_2 - k_2 \alpha^2 - 2k_1 k_2 v \alpha - v^2 k_1^2 k_2 - \gamma' \alpha - \gamma' vk_1}{2[\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2]^{3/2}} \quad (4.1.98)$$

şeklinde bulunur. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapılabilmesi için, (4.1.98) ifadesi  $v$  parametresinin kuvvetleri şeklinde yazılmalıdır.

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[\gamma^2 + (\alpha + vk_2)^2]^{3/2}} \quad (4.1.99)$$

olur. Burada,

$$A_0 = \gamma\alpha' - \beta k_1 \gamma + \gamma^2 k_2 - k_2 \alpha^2 - \gamma' \alpha$$

$$A_1 = \gamma k_1' - 2k_1 k_2 \alpha - \gamma' k_1$$

$$A_2 = -k_1^2 k_2$$

dir. Ortalama eğriliğin sabitliğini yorumlamak için  $A_0, A_1$  ve  $A_2$  katsayıları incelenmelidir. Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, bulunan tüm  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

**1.hal:**  $A_2 = 0$  olsun. Burada  $-k_1^2 k_2 = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. göz önüne alınırsa,  $k_1 = 0$  veya  $k_2 = 0$  olamayacağı görülür. Yani,  $A_2$  katsayısı sıfır olamaz. Bu durumda ortalama eğriliğin sabitliğinden bahsedilemez. Dolayısıyla  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen non-lightlike regle yüzeyler minimal olamaz.

#### 4.1.3. Spacelike $\xi_2$ Vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler

$\Gamma$ ,  $E_1^3$  de bir timelike eğri ve teğet vektör alanı  $t$  olmak üzere,  $\Gamma$  eğrisi üzerine kurulu  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısını göz önüne alalım.  $\alpha$ ,  $\beta$ , ve  $\gamma$ ,  $s$  parametresine diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds \quad (4.1.100)$$

eğrisini dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeyin denklemi,

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vx(s) \quad (4.1.101)$$

şeklindedir. Burada,  $x(s)$ ,  $E_1^3$  de herhangi bir vektör alanıdır. (4.1.101) denkleminde

$x(s) = \xi_2$  alınır,  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi;

$$\varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s) \quad (4.1.102)$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliğinin incelenmesi için Tanım 2.46. yardımıyla birinci ve ikinci temel formun katsayıları bulunmalıdır.

(4.1.102) denklemindeki regle yüzeyin  $s$  ye göre türevi,

$$\varphi_s = c'(s) + v\xi_2'(s) \quad (4.1.103)$$

dir. (4.1.103) denklemi,  $c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$  ve  $\xi_2'(s) = k_2 t$  eşitlikleri göz önüne

alınarak düzenlenirse,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\varphi_s = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 + v(k_2 t)$$

veya

$$\varphi_s = (\alpha + vk_2)t + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 \quad (4.1.104)$$

olur.

(4.102) denklemindeki regle yüzeyin  $v$  parametresine göre türevi alınırsa,

$$\varphi_v = \xi_2 \quad (4.1.105)$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \{t'(\alpha + vk_2) + t(\alpha + vk_2)' + \beta'\xi_1 + \beta\xi_1' + \gamma'\xi_2 + \gamma\xi_2'\} \quad (4.1.106)$$

bulunur. (4.1.106) eşitliği düzenlenirse,

$$\varphi_{ss} = t(\alpha' + vk_2' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(k_1\alpha + vk_1k_2 + \beta') + \xi_2(k_2\alpha + vk_2^2 + \gamma') \quad (4.1.107)$$

olur. Benzer şekilde,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $v$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \varphi_{vv} = 0 \quad (4.1.108)$$

bulunur. Son olarak,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial s} = \varphi_{sv} = k_2 t \quad (4.1.109)$$

şeklindedir. (4.1.104) ve (4.1.105) denklemleri kullanılarak yüzeyin normal vektör alanı;

$$\varphi_s \times \varphi_v = \beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1 \quad (4.1.110)$$

şeklinde hesaplanır.

(4.1.110) eşitliği kullanılarak, birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1}{\|\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1\|} \quad (4.1.111)$$

biçiminde bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$U = \frac{\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha vk_2 + v^2 k_2^2}} \quad (4.1.112)$$

elde edilir. Şimdi U nun Lorentzian karakterini belirleyelim:

$$\langle U, U \rangle = \frac{\beta^2 \langle t, t \rangle + 2\beta(\alpha + vk_2) \langle t, \xi_1 \rangle + (\alpha + vk_2)^2 \langle \xi_1, \xi_1 \rangle}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}^2}$$

ve  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  sistemi ortonormal bir çatı oluşturduğundan  $\langle t, \xi_1 \rangle = 0$  dir.  $t$  vektör alanı timelike olduğundan  $\langle t, t \rangle = -1$  ve  $\xi_1$  vektör alanı spacelike olduğundan  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = +1$  dir. Dolayısıyla,

$$\langle U, U \rangle = \frac{-\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}^2}$$

elde edilir ve bu işlemde iki durum ortaya çıkar:

- i. Eğer  $\beta > (\alpha - vk_2)$  ise regle yüzeyin birim normal vektörü timelike dolayısıyla regle yüzey spacelike,
- ii. Eğer  $\beta < (\alpha - vk_2)$  ise regle yüzeyin birim normal vektörü spacelike dolayısıyla regle yüzey timelike olur.

### **Spacelike $\xi_2$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği**

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği hesabı için, bu yüzeyin  $I.$  ve  $II.$  temel formunun katsayılarını hesaplamak gerektiğini biliyoruz. Buradan,  $I.$  temel formun katsayıları E, F ve G fonksiyonlarını bulmak için (4.1.104) eşitliği kullanılarak, skalar çarpım fonksiyonu yardımıyla,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \langle t(\alpha + vk_2) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, t(\alpha + vk_2) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 \rangle \quad (4.1.113)$$

bulunur. (4.1.113) denklemini düzenlerse,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = (\alpha + vk_2)^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad (4.1.114)$$

elde edilir. (4.1.105) eşitliğinden

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = +1 \quad (4.1.115)$$

dir. (4.1.104) ve (4.1.105) eşitlikleri kullanılarak;

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle t(\alpha + vk_2) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, \xi_2 \rangle = \gamma \quad (4.1.116)$$

bulunur. II. temel formun katsayılarını hesaplamak için, (4.1.106) ve (4.1.112)

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle t(\alpha' - vk_2' - \beta k_1 - \gamma k_2) + \xi_1(k_1\alpha - vk_1k_2 + \beta') + \\ \xi_2(k_2\alpha - vk_2^2 + \gamma'), \frac{-\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \rangle \end{array} \right\} \quad (4.1.117)$$

bulunur. (4.1.117) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e = \left\{ \frac{-\beta\alpha' - v\beta k_2' - k_1\beta^2 - \gamma k_2\beta + k_1\alpha^2 + 3k_1k_2\alpha v + v^2k_1k_2^2 + \beta'\alpha + \beta vk_2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \right\} \quad (4.1.118)$$

elde edilir. (4.1.108) ve (4.1.112) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \left\langle 0, \frac{-\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \right\rangle = 0 \quad (4.1.119)$$

bulunur. (4.1.109) ve (4.1.112) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \left\langle -k_2t, \frac{-\beta t + (\alpha - vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}} \right\rangle = \frac{-k_2\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \quad (4.1.120)$$

bulunur. Teorem 2.47. da belirtilen Gauss eğriliği fonksiyonu yardımıyla; (4.1.114),

(4.1.115), (4.1.116), (4.1.118) (4.1.119) ve (4.1.120) denklemleri kullanılarak,  $\xi_2$

vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-\left[ \frac{+k_2\beta}{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2} \right]^2}{[\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2]^{1/2}}$$

veya

$$K = \frac{-k_2^2 \beta^2}{[(\alpha + vk_2)^2 + \beta^2]^3} \quad (4.1.121)$$

şeklinde bulunur. Burada  $\xi_2$  vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliğini araştıralım. Eğer (4.1.121) ifadesinde,  $-k_2^2 \beta^2 = 0$  ise  $K = 0$  olduğu açıktır. Bu durumda  $k_2 = 0$  veya  $\beta = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. den,  $k_2 \neq 0$  olduğundan,  $\beta = 0$  olmalıdır.

(4.1.100) denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınır,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.1.122)$$

olur. Eğer (4.1.122) denkleminde  $\beta = 0$  eşitliği yerine yazılırsa; (4.1.122) denklemi,

$$c'(s) = \alpha t + \gamma \xi_2 \quad (4.1.123)$$

bulunur. (4.1.123) denklemindeki  $\alpha$  ve  $\gamma$  diferansiyellenebilir fonksiyonları

$\alpha = -k_2 \varepsilon$  ve  $\gamma = \varepsilon' + \eta$  şeklinde seçilirse ve (4.1.123) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c'(s) = -k_2 \varepsilon t + (\varepsilon' + \eta) \xi_2$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler ile,

$$c'(s) = -k_2 \varepsilon t + \varepsilon' \xi_2 + \eta \xi_2 \quad (4.1.124)$$

denklemi elde edilir.  $-k_2 t = \xi_2'$  olduğundan, (4.1.124) denklemi,

$$c'(s) = \xi_2' \varepsilon + \varepsilon' \xi_2 + \eta \xi_2 \quad (4.1.125)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda (4.1.125) denklemi,

$$c'(s) = (\xi_2 \varepsilon)' + \eta \xi_2 \quad (4.1.126)$$

şeklinde bulunur. (4.1.126) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,

$\xi_2$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \xi_2 \varepsilon + \int \eta \xi_2 ds \quad (4.1.127)$$

elde edilir. (4.1.127) deki dayanak eğrisi (4.1.102) denkleminde yerine yazılırsa, regle yüzeyin

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_2 + \int \eta \xi_2 ds$$

formu elde edilir.

**Teorem 4.4. :** (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$  regle yüzeyi açılabilir.  $\Leftrightarrow G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_2 + \int \eta \xi_2 ds$$

formundadır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$  regle yüzeyinin gauss eğriliği  $K$  sabit ise  $K = 0$  dir.

### Spacelike $\xi_2$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Bir yüzeyin ortalama eğriliğinin hesabı, Teorem 2.47. yardımıyla yapılabilir.

Ortalama eğriliğin matris formu,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} \quad (4.1.128)$$

şeklindedir. Buradan,

$$Eg = [+(\alpha + vk_2)^2 - \beta^2 + \gamma^2]0 = 0 \quad (4.1.129)$$

$$Ge = 1e = \frac{\begin{pmatrix} -\beta\alpha' - v\beta k_2' - k_1\beta^2 - \gamma k_2\beta \\ + k_1\alpha^2 + 3k_1k_2\alpha v + v^2k_1k_2^2 + \beta'\alpha + \beta vk_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} = e \quad (4.1.130)$$

ve

$$2Ff = 2\gamma \frac{-k_2\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}}$$

veya

$$2Ff = \frac{-2\beta k_2\gamma}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}} \quad (4.1.131)$$

şeklinde bulunur.

(4.1.129), (4.1.130) ve (4.1.131) eşitlikleri (4.1.128) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$Eg + Ge - 2Ff = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \left[ \begin{array}{l} -\beta\alpha' - v\beta k_2' - k_1\beta^2 - 3\gamma k_2\beta + k_1\alpha^2 \\ +3k_1k_2\alpha v + v^2k_1k_2^2 + \beta'\alpha + \beta vk_2 \end{array} \right]$$

bulunur. (4.1.127) denkleminde göre  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{[-\beta\alpha' + \beta vk_2' + \beta^2 k_1 + 3\gamma\beta k_2 - k_1\alpha^2 + 2k_1k_2v\alpha - v^2k_1k_2^2 - \beta'\alpha + \beta'vk_2]}{2[(\alpha - vk_2)^2 + \beta^2]^{3/2}} \quad (4.1.132)$$

şeklinde bulunur. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapabilmek için, (4.1.132) ifadesi  $v$  parametresinin kuvvetleri şeklinde yazılmalıdır. Bu durumda

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1v + A_2v^2}{2[(\alpha - vk_2)^2 + \beta^2]^{3/2}}$$

olur. Burada,

$$A_0 = -\beta\alpha' - \beta^2 k_1 - 3\gamma\beta k_2 + k_1\alpha^2 + \beta'\alpha$$

$$A_1 = -\beta k_2' + 3k_1k_2\alpha - \beta'k_2$$

$$A_2 = k_1k_2^2$$

dir. Ortalama eğriliğin sabitliği yorumunda  $A_0, A_1$  ve  $A_2$  katsayıları incelenmelidir.

Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, bulunan tüm  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ )

katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

**1.hal:**  $A_2 = 0$  olsun. Bu durumda  $k_1 k_2^2 = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. göz önüne alınırsa,  $k_1 = 0$  veya  $k_2 = 0$  olamayacağı görülür. Yani,  $A_2$  katsayısı sıfır olamaz. Bu durumda ortalama eğriliğin sabitliğinden bahsedilemez. Dolayısıyla  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler minimal olamaz.

## 4.2. Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike Eğri Tarafından Üretilen Null Olmayan Sabit Eğrilikli Regle Yüzeyler

Bu bölümde, üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre spacelike bir eğrinin vektör alanları;  $t, \xi_1, \xi_2$  olmak üzere, bu vektör alanları tarafından üretilen null olmayan sabit eğrilikli regle yüzeyler ile bu regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri incelenmiştir.

### 4.2.1. Spacelike Teğet vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler

$\Gamma, E_1^3$  de bir spacelike eğri ve teğet vektör alanı  $t$  olmak üzere, spacelike  $\Gamma$  eğrisi üzerine kurulu  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısını göz önüne alalım.  $\Gamma$  eğrisi spacelike eğri olduğundan, teğet vektör alanının Lorentzian karakteri iki durumda incelenecektir. Buna göre;

**Durum 1:**  $t$  vektör alanı spacelike,  $\xi_1$  vektörü alanı timelike,  $\xi_2$  vektör alanı spacelike olsun.  $\alpha, \beta,$  ve  $\gamma, s$  parametresine diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds \quad (4.2.1)$$

eğrisini dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeyin denklemi,

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vx(s) \quad (4.2.2)$$

şeklindedir. Burada,  $x(s)$ ,  $E_1^3$  de herhangi bir vektör alanıdır. (4.2.2) denkleminde  $x(s) = t(s)$  kabul edilirse,  $t$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi;

$$\varphi(s, v) = c(s) + vt(s) \quad (4.2.3)$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliğinin incelenmesi için Taanım 3.46. de belirtilen birinci ve ikinci temel formun katsayıları bulunmalıdır. (4.2.3) denklemindeki regle yüzeyin  $s$  ye göre türevi,

$$\varphi_s = c'(s) + vt'(s) \quad (4.2.4)$$

dir. (4.2.4) denklemini,  $c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$  ve  $t'(s) = k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2$  eşitlikleri göz önüne alınarak düzenlenirse,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\varphi_s = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 + v(k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2)$$

veya

$$\varphi_s = \alpha t + (\beta + vk_1) \xi_1 + (\gamma - vk_2) \xi_2 \quad (4.2.5)$$

(4.2.3) denklemindeki regle yüzeyin  $v$  parametresine göre türevi alınırsa,

$$\varphi_v = t(s) \quad (4.2.6)$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha' t + \alpha t' + (\beta + vk_1)' \xi_1 \\ + (\beta + vk_1) \xi_1' + (\gamma - vk_2)' \xi_2 + (\gamma - vk_2) \xi_2' \end{array} \right\} \quad (4.2.7)$$

bulunur. (4.2.7) eşitliği düzenlenirse,

$$\xi_{ss} = t(\alpha' + vk_1^2 + \beta k_1 - vk_2^2) + \xi_1(\alpha k_1 + vk_1' + \beta') + \xi_2(-\alpha k_2 + vk_2' + \gamma') \quad (4.2.8)$$

olur. Benzer şekilde,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $v$  'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \varphi_{vv} = 0 \quad (4.2.9)$$

bulunur. Son olarak,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial s} = \varphi_{sv} = k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 \quad (4.2.10)$$

şeklindedir. (4.2.5) ve (4.2.6) denklemleri kullanılarak yüzeyin normal vektör alanı;

$$\varphi_s \times \varphi_v = (-\gamma + vk_2)\xi_1 + (\beta + vk_1)\xi_2 \quad (4.2.11)$$

şeklinde hesaplanır.

(4.2.11) eşitliği kullanılarak, birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{(-\gamma + vk_2)\xi_1 + (\beta + vk_1)\xi_2}{\|(-\gamma + vk_2)\xi_1 + (\beta + vk_1)\xi_2\|} \quad (4.2.12)$$

biçiminde bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{(-\gamma + vk_2)\xi_1 + (\beta + vk_1)\xi_2}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}} \quad (4.2.13)$$

elde edilir.  $U$  nun Lorentzian karakterini belirleyelim:

$$\langle U, U \rangle = \frac{\{(-\gamma + vk_2)^2 \langle \xi_1, \xi_1 \rangle + 2(-\gamma + vk_2)(\beta + vk_1) \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + (\beta + vk_1)^2 \langle \xi_2, \xi_2 \rangle\}}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}^2}$$

ve  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  sistemi ortonormal bir çatı oluşturduğundan  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$  dır.  $t$  vektör

alanı spacelike olduğundan  $\langle t, t \rangle = +1$  ve  $\xi_1$  vektör alanı timelike olduğundan

$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -1$  dir. Dolayısıyla,

$$\langle U, U \rangle = \frac{-(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}^2}$$

elde edilir ve bu işlemde iki durum ortaya çıkar:

i. Eğer  $(-\gamma + vk_2) > (\beta + vk_1)$  ise regle yüzeyin birim normal vektörü timelike

dolayısıyla regle yüzey spacelike,

ii. Eğer  $(-\gamma + vk_2) < (\beta + vk_1)$  ise regle yüzeyin birim normal vektörü spacelike dolayısıyla regle yüzey timelike olur.

### Spacelike Teğet Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği hesabı için, bu yüzeyin *I.* ve *II.* temel formunun katsayılarına ihtiyaç vardır. *I.* temel formun katsayıları E, F ve G fonksiyonlarını bulmak için (4.2.5) eşitliği kullanılarak, skalar çarpım fonksiyonu yardımıyla,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \langle \alpha t + (\beta + vk_1)\xi_1 + (\gamma - vk_2)\xi_2, \alpha t + (\beta + vk_1)\xi_1 + (\gamma - vk_2)\xi_2 \rangle \quad (4.2.14)$$

bulunur. (4.2.14) denklemini düzenlerse,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \alpha^2 + (\beta + vk_1)^2 + (\gamma - vk_2)^2 \quad (4.2.15)$$

elde edilir. (4.2.6) eşitliğinden

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle t, t \rangle = +1 \quad (4.2.16)$$

dir. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitlikleri kullanılarak;

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle \alpha t + (\beta + vk_1)\xi_1 + (\gamma - vk_2)\xi_2, t \rangle = \alpha \quad (4.2.17)$$

bulunur. *II.* temel formun katsayılarını hesaplamak için, (4.2.7) ve (4.2.13) eşitlikleri göz önüne alınır,

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle t(\alpha' + vk_1^2 + \beta k_1 - vk_2^2) \\ + \xi_1(\alpha k_1 + vk_1' + \beta') \\ + \xi_2(-\alpha k_2 + vk_2' + \gamma'), \\ \frac{(-\gamma + vk_2)\xi_1 + (\beta + vk_1)\xi_2}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}} \rangle \end{array} \right\} \quad (4.2.18)$$

bulunur. (4.2.18) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \alpha\gamma k_1 + \gamma\beta' + \nu\gamma k_1' - \nu\alpha k_1 k_2 - \beta' \nu k_2 - \nu^2 k_1' k_2 \\ -\beta\alpha k_2 + \beta\gamma' - \beta\nu k_2' + \nu\gamma' k_1 - \nu^2 k_1 k_2' \end{array} \right\}}{\sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2}} \quad (4.2.19)$$

elde edilir. (4.2.9) ve (4.2.13) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$g = \langle \varphi_{\nu}, U \rangle = \left\langle 0, \frac{(-\gamma + \nu k_2)\xi_1 + (\beta + \nu k_1)\xi_2}{\sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2}} \right\rangle = 0 \quad (4.2.20)$$

bulunur. (4.2.10) ve (4.2.13) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$f = \langle k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2, \frac{(-\gamma + \nu k_2)\xi_1 + (\beta + \nu k_1)\xi_2}{\sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2}} \rangle = \frac{\gamma k_1 - \beta k_2}{\sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2}} \quad (4.2.21)$$

bulunur. Teorem 2.47. de belirtilen Gauss eğriliği fonksiyonu yardımıyla; (4.2.15), (4.2.16), (4.2.17), (4.2.19) (4.2.20) ve (4.2.21) denklemleri kullanılarak,  $t$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-\left[ \frac{\gamma k_1 + \beta k_2}{\sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2}} \right]^2}{\left[ \sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2} \right]^{1/2}}$$

veya

$$K = \frac{-(\gamma k_1 + \beta k_2)^2}{\left[ \sqrt{(-\gamma + \nu k_2)^2 + (\beta + \nu k_1)^2} \right]^3} \quad (4.2.22)$$

şeklinde bulunur. Burada  $t$  vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliğini araştıralım. Eğer (4.2.22) ifadesinde,  $\gamma k_1 + \beta k_2 = 0$  ise  $K = 0$  olduğu açıktır. Buradan,

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

bulunur.

(4.2.1) denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.2.23)$$

olur. Eğer ,  $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{\beta}{\gamma}$  denkleminde  $\beta = k_1 \varepsilon$  seçilirse,  $\gamma = -k_2 \varepsilon$  bulunur. Bulunan bu

değerler (4.2.23) denkleminde yazıldığında,

$$c'(s) = \alpha t + k_1 \varepsilon \xi_1 - k_2 \varepsilon \xi_2 \quad (4.2.24)$$

elde edilir. (4.2.24) denklemindeki  $\alpha$  diferansiyellenebilir fonksiyonu  $\alpha = \varepsilon' + \eta$

şeklinde seçilirse ve (4.2.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c'(s) = (\varepsilon' + \eta)t + k_1 \varepsilon \xi_1 - k_2 \varepsilon \xi_2$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler ile,

$$c'(s) = \varepsilon' t + \eta t + k_1 \varepsilon \xi_1 - k_2 \varepsilon \xi_2 \quad (4.2.25)$$

denklemini elde edilir.  $k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 = t'$  olduğundan, (4.2.25) denklemini,

$$c'(s) = \varepsilon' t + \eta t + t' \varepsilon \quad (4.2.26)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda (4.2.26) denklemini,

$$c'(s) = (\varepsilon t)' + \eta t \quad (4.2.27)$$

şeklinde bulunur. (4.2.27) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,  $t$

vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \varepsilon t + \int \eta t ds \quad (4.2.28)$$

elde edilir. (4.2.28) deki dayanak eğrisi (4.2.3) denkleminde yerine yazılırsa, regle

yüzeyin

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds$$

formu elde edilir. Diğer yandan, (4.2.22) denkleminde  $K = 0$  olması için  $k_1^2 + k_2^2 = 0$

olması gerekir. Bu durum, Tanım 3.47. deki açıklama ile çelişir. Böylece teğet

vektörü tarafından oluşturulan regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliği ile ilgili

aşağıdaki teoremi verebiliriz:

**Teorem 4.5. :** (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$  regle yüzeyi açılabilir.  $\Leftrightarrow G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds$$

formundadır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$  regle yüzeyinin gauss eğriliği  $K$  sabit ise  $K = 0$  dir.

### Spacelike Teğet Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Teorem 2.47. den, ortalama eğrilik,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2 |EG - F^2|} \quad (4.2.29)$$

dır. Buradan,

$$Eg = (\alpha^2 + (\beta + vk_1)^2 + (\gamma - vk_2)^2) 0 = 0 \quad (4.2.30)$$

$$Ge = 1e = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \alpha\gamma k_1 + \gamma\beta' + v\gamma k_1' - v\alpha k_1 k_2 - \\ \beta' v k_2 - v^2 k_1' k_2 - \beta\alpha k_2 \\ + \beta\gamma' - \beta v k_2' + v\gamma' k_1 - v^2 k_1 k_2' \end{array} \right\}}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}} = e \quad (4.2.31)$$

ve

$$2Ff = 2\alpha \frac{\gamma k_1 - \beta k_2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}}$$

veya

$$2Ff = \frac{-2\beta k_2 \gamma}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}} \quad (4.2.32)$$

şeklinde bulunur.

(4.2.30), (4.2.31) ve (4.2.32) eşitlikleri (4.2.29) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$Eg + Ge - 2Ff = \frac{\begin{pmatrix} -\alpha\gamma k_1 + \gamma\beta' + v\gamma k_1' - 2v\alpha k_1 k_2 - \beta' v k_2 \\ -v^2 k_1' k_2 - 3\beta\alpha k_2 + \beta\gamma' - v\beta k_2' + v\gamma' k_1 - v^2 k_1 k_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2}}$$

bulunur. O halde, (4.2.29) denklemi göz önüne alınırsa,  $t$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{\begin{pmatrix} -\alpha\gamma k_1 + \gamma\beta' + v\gamma k_1' - 2v\alpha k_1 k_2 - \beta' v k_2 \\ -v^2 k_1' k_2 - 3\beta\alpha k_2 + \beta\gamma' - v\beta k_2' + v\gamma' k_1 - v^2 k_1 k_2' \end{pmatrix}}{2[(-\gamma + vk_2)^2 + (\beta + vk_1)^2]^{3/2}} \quad (4.2.33)$$

şeklinde bulunur. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapılabilmesi için, (4.2.34) ifadesi  $v$  parametresinin kuvvetleri şeklinde yazılmalıdır.

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[(\alpha - vk_2)^2 + \beta^2]^{3/2}} \quad (4.2.34)$$

olur. Burada,

$$A_0 = -\beta\alpha' - \beta^2 k_1 - 3\gamma\beta k_2 + k_1 \alpha^2 + \beta' \alpha$$

$$A_1 = -\beta k_2' - 2\alpha k_1 k_2 - \beta' k_2 + \gamma k_1' + \gamma' k_1$$

$$A_2 = k_1' k_2 + k_1 k_2'$$

dir. Ortalama eğriliğin sabitliğini yorumlamak için  $A_0, A_1$  ve  $A_2$  katsayıları incelenmelidir. Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, bulunan tüm  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

**1.hal:**  $A_2 = 0$  olsun. Burada  $k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0$  olmalıdır. Buradan,

$$k_1' k_2 + k_1 k_2' = (k_1 k_2)' = 0$$

$$k_1 k_2 = c$$

bulunur.

**Durum 2:**  $t$  vektör alanı spacelike,  $\xi_1$  vektörü alanı spacelike,  $\xi_2$  vektör alanı timelike olduğuna ve gerekli işlemler yapıldığında benzer sonuçlar elde edilir.

#### 4.2.2. Timelike $\xi_1$ vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler

$\Gamma$ ,  $E_1^3$  de bir spacelike eğri ve teğet vektör alanı  $t$  olmak üzere,  $\Gamma$  eğrisi üzerine kurulu  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısını göz önüne alalım.

**Durum 1:**  $t$  vektör alanı spacelike,  $\xi_1$  vektörü alanı timelike,  $\xi_2$  vektör alanı spacelike olsun.  $\alpha$ ,  $\beta$ , ve  $\gamma$ ,  $s$  parametresine diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds \quad (4.2.35)$$

eğrisini dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeyin denklemi,

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vx(s) \quad (4.2.36)$$

şeklindedir. Burada,  $x(s)$ ,  $E_1^3$  de herhangi bir vektör alanıdır. (4.2.36) denkleminde

$x(s) = \xi_1$  kabul edilirse,  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi;

$$\varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s) \quad (4.2.37)$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliğinin incelenmesi için

Tanım 2.46. daki birinci ve ikinci temel formun katsayıları bulunmalıdır. (4.2.37)

denklemindeki regle yüzeyin  $s$  ye göre türevi,

$$\varphi_s = c'(s) + v\xi_1'(s) \quad (4.2.38)$$

dir. (4.2.38) denklemi,  $c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$  ve  $\xi_1'(s) = k_1 t$  eşitlikleri göz önüne

alınarak düzenlenirse,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\varphi_s = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 + v(k_1 t)$$

veya

$$\varphi_s = t(\alpha + vk_1) + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.2.39)$$

olur.

(4.2.37) denklemindeki regle yüzeyin  $v$  parametresine göre türevi alınırsa,

$$\varphi_v = \xi_1 \quad (4.2.40)$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \{t'(\alpha + vk_1) + t(\alpha + vk_1)' + \beta' \xi_1 + \beta \xi_1' + \gamma' \xi_2 + \gamma \xi_2'\} \quad (4.2.41)$$

bulunur. (4.2.41) eşitliği düzenlenirse,

$$\varphi_{ss} = t(\alpha' + vk_1' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(\alpha k_1 + vk_1^2 + \beta') + \xi_2(-\alpha k_2 - vk_1 k_2 + \gamma') \quad (4.2.42)$$

olur. Benzer şekilde,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $v$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \varphi_{vv} = 0 \quad (4.2.43)$$

bulunur. Son olarak,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial s} = \varphi_{sv} = k_1 t \quad (4.2.44)$$

şeklindedir. (4.2.39) ve (4.2.40) denklemleri kullanılarak yüzeyin normal vektör alanı;

$$\varphi_s \times \varphi_v = -\gamma t - (\alpha + vk_1) \xi_2 \quad (4.2.45)$$

şeklinde hesaplanır.

(4.2.45) eşitliği kullanılarak, birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{-\gamma t - (\alpha + vk_1)\xi_2}{\|-\gamma t - (\alpha + vk_1)\xi_2\|} \quad (4.2.46)$$

biçiminde bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$U = \frac{-\gamma t - (\alpha + vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \quad (4.2.47)$$

elde edilir. Şimdi U nun Lorentzian karakterini belirleyelim:

$$\langle U, U \rangle = \frac{\gamma^2 \langle t, t \rangle + 2\gamma(\alpha + vk_1) \langle t, \xi_2 \rangle + (\alpha + vk_1)^2 \langle \xi_2, \xi_2 \rangle}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}^2}$$

ve  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  sistemi ortonormal bir çatı oluşturduğundan  $\langle t, \xi_2 \rangle = 0$  dır.  $t$  vektör alanı spacelike olduğundan  $\langle t, t \rangle = +1$  ve  $\xi_2$  vektör alanı spacelike olduğundan  $\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = +1$  dir.

Dolayısıyla,

$$\langle U, U \rangle = \frac{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}^2}$$

elde edilir.  $\langle U, U \rangle > 0$  olduğundan yüzeyin birim normal vektör alanı spacelike dolayısıyla regle yüzey timelike olur.

### **Timelike $\xi_1$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği**

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği hesabı için, bu yüzeyin  $I.$  ve  $II.$  temel formunun katsayılarını bulmak gerekir.  $I.$  temel formun katsayıları E, F ve G fonksiyonlarını bulmak için (4.70) eşitliği kullanılarak, skalar çarpım fonksiyonu yardımıyla,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \{ \langle t(\alpha + vk_1) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, t(\alpha + vk_1) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 \rangle \} \quad (4.2.48)$$

bulunur. (4.2.39) denklemini düzenlerse,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = (\alpha + vk_1)^2 - \beta^2 + \gamma^2 \quad (4.2.49)$$

elde edilir. (4.2.40) eşitliğinden,

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -1 \quad (4.2.50)$$

dir. (4.2.39) ve (4.2.40) eşitlikleri kullanılarak;

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle t(\alpha - vk_1) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, \xi_1 \rangle = -\beta \quad (4.2.51)$$

bulunur. II. temel formun katsayılarını hesaplamak için, (4.2.42) ve (4.2.47)

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle t(\alpha' + vk_1' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(k_1\alpha + vk_1^2 + \beta') + \\ \xi_2(-k_2\alpha - vk_1k_2 + \gamma'), \frac{-\gamma t - (\alpha - vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)\xi_2}} \rangle \end{array} \right\} \quad (4.2.52)$$

bulunur. (4.83) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e = \left\{ \frac{v^2(k_1^2k_2) + v(-\gamma k_1' + 2k_1k_2v - \gamma'k_1) - \gamma\alpha' - \beta k_1\gamma - \gamma^2k_2 + k_2\alpha^2 - \alpha\gamma'}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\} \quad (4.2.53)$$

elde edilir. (4.2.43) ve (4.2.47) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \left\langle 0, \frac{-\gamma^2 - (\alpha + vk_1)^2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\rangle = 0 \quad (4.2.54)$$

bulunur. (4.2.44) ve (4.2.47) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \left\langle k_1t, \frac{-\gamma t - (\alpha + vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha - vk_1)^2}} \right\rangle = \frac{-\gamma k_1}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \quad (4.2.55)$$

bulunur. Teorem 2.47. da belirtilen Gauss eğriliği fonksiyonu yardımıyla; (4.2.49),

(4.2.50), (4.2.51), (4.2.53) (4.2.54) ve (4.2.55) denklemleri kullanılarak,  $\xi_1$  vektörü

tarafından üretilen non-lightlike regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-\left[\frac{-\gamma k_1}{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}\right]^2}{\left[\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2\right]^2}$$

veya

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-\gamma^2 k_1^2}{[\gamma^2 + (\alpha + \nu k_1)^2]^3} \quad (4.2.56)$$

şeklinde bulunur. Burada  $\xi_1$  vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliğini araştıralım. Eğer (4.2.56) ifadesinde,  $-\gamma^2 k_1^2 = 0$  ise  $K = 0$  olduğu açıktır. Bu durumda  $k_1 = 0$  veya  $\gamma = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. den  $k_1 \neq 0$  olduğundan  $\gamma = 0$  olmalıdır.

(4.2.35) denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.2.57)$$

olur. Eğer (4.2.57) denkleminde  $\gamma = 0$  eşitliği yerine yazılırsa; (4.2.57) denklemi,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 \quad (4.2.58)$$

şeklinde bulunur. (4.2.58) denklemindeki  $\alpha$  ve  $\beta$  diferansiyellenebilir fonksiyonları  $\alpha = k_1 \varepsilon$  ve  $\beta = \varepsilon' + \eta$  şeklinde seçilirse ve (4.2.58) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c'(s) = k_1 \varepsilon t + (\varepsilon' + \eta) \xi_1$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler ile,

$$c'(s) = k_1 \varepsilon t + \varepsilon' \xi_1 + \eta \xi_1 \quad (4.2.59)$$

denklemi elde edilir.  $k_1 t = \xi_1'$  olduğundan, (4.2.59) denklemi,

$$c'(s) = \xi_1' \varepsilon + \varepsilon' \xi_1 + \eta \xi_1 \quad (4.2.60)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda (4.2.25) denklemi,

$$c'(s) = (\xi_1 \varepsilon)' + \eta \xi_1 \quad (4.2.61)$$

şeklinde bulunur. (4.2.61) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa,  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \xi_1 \varepsilon + \int \eta \xi_1 ds \quad (4.2.62)$$

elde edilir. (4.2.62) deki dayanak eğrisi (4.2.37) denkleminde yerine yazılırsa, regle yüzeyin

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_1 + \int \eta \xi_1 ds$$

formu elde edilir.

**Teorem 4.6. :** (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s)$  regle yüzeyi açılabilir.  $\Leftrightarrow G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_1 + \int \eta \xi_1 ds$$

formundadır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s)$  regle yüzeyinin gauss eğriliği  $K$  sabit ise  $K = 0$  dır.

### Timelike $\xi_1$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Bir yüzeyin ortalama eğriliğinin hesabı, Teorem 2.47 yardımıyla yapılabilir.

Ortalama eğriliğin matris formu,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} \quad (4.2.63)$$

şeklindedir. Buradan,

$$Eg = ((\alpha + vk_1)^2 - \beta^2 + \gamma^2)0 = 0 \quad (4.2.64)$$

$$Ge = 1e = 1 \left\{ \frac{\begin{matrix} v^2(k_1^2 k_2) + v(-\gamma k_1' + 2k_1 k_2 v - \gamma' k_1) \\ -\gamma \alpha' - \beta k_1 \gamma - \gamma^2 k_2 + k_2 \alpha^2 - \alpha \gamma' \end{matrix}}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\} = e \quad (4.2.65)$$

ve

$$2Ff = 2(-\beta) \frac{-\gamma k_1}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}}$$

veya

$$2Ff = \frac{2\beta\gamma k_1}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \quad (4.2.66)$$

şeklinde bulunur.

(4.2.64), (4.2.65) ve (4.2.66) eşitlikleri (4.2.63) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$Eg + Ge - 2Ff = \left\{ \frac{v^2(k_1^2 k_2) + v(-\gamma k_1' + 2k_1 k_2 v - \gamma' k_1) - \gamma\alpha' - 3\beta k_1 \gamma - \gamma^2 k_2 + k_2 \alpha^2 - \alpha\gamma'}{\sqrt{\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\}$$

bulunur. (4.94) denkleminde göre  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen non-lightlike regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{v^2(k_1^2 k_2) + v(-\gamma k_1' + 2k_1 k_2 v - \gamma' k_1) - \gamma\alpha' - 3\beta k_1 \gamma - \gamma^2 k_2 + k_2 \alpha^2 - \alpha\gamma'}{2[\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2]^{3/2}} \quad (4.2.67)$$

şeklinde bulunur. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapılabilmesi için, (4.2.67) ifadesi  $v$  parametresinin kuvvetleri şeklinde yazılmalıdır.

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[\gamma^2 + (\alpha + vk_2)^2]^{3/2}} \quad (4.2.68)$$

olur. Burada,

$$A_0 = -\gamma\alpha' - 3\beta k_1 \gamma - \gamma^2 k_2 + k_2 \alpha^2 - \gamma' \alpha$$

$$A_1 = -\gamma k_1' + 2k_1 k_2 \alpha - \gamma' k_1$$

$$A_2 = k_1^2 k_2$$

dir. Ortalama eğriliğin sabitliğini araşırmak için  $A_0, A_1$  ve  $A_2$  katsayıları incelenmelidir. Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, bulunan tüm  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

**1.hal:**  $A_2 = 0$  olsun. Burada  $k_1^2 k_2 = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. göz önüne alınırsa,  $k_1 = 0$  veya  $k_2 = 0$  olamayacağı görülür. Yani,  $A_2$  katsayısı sıfır olamaz. Bu durumda ortalama eğriliğin sabitliğinden ve sıfır olmasından bahsedilemez. Dolayısıyla  $\xi_1$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyler minimal olamaz.

**Durum 2:**  $t$  vektör alanı spacelike,  $\xi_1$  vektörü alanı spacelike,  $\xi_2$  vektör alanı timelike olduğunda ve gerekli işlemler yapıldığında benzer sonuçlar elde edilir.

#### 4.2.3. Spacelike $\xi_2$ vektörü tarafından üretilen null olmayan regle yüzeyler

$\Gamma$ ,  $E_1^3$  de bir spacelike eğri ve teğet vektör alanı  $t$  olmak üzere,  $\Gamma$  eğrisi üzerine kurulu  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  çatısını göz önüne alalım.

**Durum 1:**  $t$  vektör alanı spacelike,  $\xi_1$  vektörü alanı timelike,  $\xi_2$  vektör alanı spacelike olsun.  $\alpha$ ,  $\beta$ , ve  $\gamma$ ,  $s$  parametresine diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds \quad (4.2.69)$$

eğrisini dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeyin denklemi,

$$G_t : \varphi(s, v) = c(s) + vx(s) \quad (4.2.70)$$

şeklindedir. Burada,  $x(s)$ ,  $E_1^3$  de herhangi bir vektör alanıdır. (4.101) denkleminde

$x(s) = \xi_2$  kabul edilirse,  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi;

$$\varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s) \quad (4.2.71)$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliğinin incelenmesi için Tanım 3.46. daki birinci ve ikinci temel formun katsayıları bulunmalıdır. (4.2.71)

denklemindeki regle yüzeyin  $s$  ye göre türevi,

$$\varphi_s = c'(s) + v\xi_2'(s) \quad (4.2.72)$$

dir. (4.2.72) denklemi,  $c'(s) = \alpha t + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2$  ve  $\xi_2'(s) = k_2 t$  eşitlikleri göz önüne

alınarak düzenlenirse,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\varphi_s = \alpha t + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 + v(k_2 t)$$

veya

$$\varphi_s = (\alpha + vk_2)t + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 \quad (4.2.79)$$

olur.

(4.2.71) denklemindeki regle yüzeyin  $v$  parametresine göre türevi alınır,

$$\varphi_v = \xi_2 \quad (4.2.80)$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $s$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \varphi_{ss} = \{t'(\alpha + vk_2) + t(\alpha + vk_2) + \beta'\xi_1 + \beta\xi_1' + \gamma'\xi_2 + \gamma\xi_2'\} \quad (4.2.81)$$

bulunur. (4.2.81) eşitliği düzenlenirse,

$$\varphi_{ss} = t(\alpha' + vk_2' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(k_1\alpha + vk_1 k_2 + \beta') + \xi_2(-k_2\alpha - vk_2^2 + \gamma') \quad (4.2.82)$$

olur. Benzer şekilde,  $\varphi$  parametrelendirilmesinin  $v$ 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevi,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \varphi_{vv} = 0 \quad (4.2.83)$$

bulunur. Son olarak,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial s} = \varphi_{,sv} = k_2 t \quad (4.2.84)$$

şeklindedir. (4.2.79) ve (4.2.80) denklemleri kullanılarak yüzeyin normal vektör alanı;

$$\varphi_s \times \varphi_v = \beta t + (\alpha + vk_2) \xi_1 \quad (4.2.85)$$

şeklinde hesaplanır.

(4.2.85) eşitliği kullanılarak, birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{\beta t + (\alpha + vk_2) \xi_1}{\|\beta t + (\alpha + vk_2) \xi_1\|} \quad (4.2.86)$$

biçiminde bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$U = \frac{\beta t + (\alpha + vk_2) \xi_1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha vk_2 + v^2 k_2^2}} \quad (4.2.87)$$

elde edilir. U nun Lorentzian karakterini bulalım:

$$\langle U, U \rangle = \frac{\beta^2 \langle t, t \rangle + 2\beta(\alpha + vk_2) \langle t, \xi_1 \rangle + (\alpha + vk_2)^2 \langle \xi_1, \xi_1 \rangle}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}^2}$$

ve  $\{t, \xi_1, \xi_2\}$  sistemi ortonormal bir çatı oluşturduğundan  $\langle t, \xi_1 \rangle = 0$  dir.  $t$  vektör alanı spacelike olduğundan  $\langle t, t \rangle = +1$  ve  $\xi_1$  vektör alanı timelike olduğundan  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -1$  dir. Dolayısıyla,

$$\langle U, U \rangle = \frac{\beta^2 - (\alpha + vk_2)^2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}^2}$$

elde edilir ve bu işlemde iki durum ortaya çıkar:

- i. Eğer  $\beta > (\alpha + vk_2)$  ise regle yüzeyin birim normal vektörü spacelike dolayısıyla regle yüzey timelike,

- ii. Eğer  $\beta < (\alpha + vk_2)$  ise regle yüzeyin birim normal vektörü timelike dolayısıyla regle yüzey spacelike

olur.

### Spacelike $\xi_2$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği

Bir regle yüzeyin Gauss eğriliği hesabı için, bu yüzeyin *I.* ve *II.* temel formunun katsayılarını bulmamız gerekir. *I.* temel formun katsayıları E,F ve G fonksiyonlarını bulmak için (4.2.79) eşitliği kullanılarak, skalar çarpım fonksiyonu yardımıyla,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \{ \langle t(\alpha + vk_2) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, t(\alpha + vk_2) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 \rangle \} \quad (4.2.88)$$

bulunur. (4.2.88) denklemini düzenlirse,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = (\alpha + vk_2)^2 - \beta^2 + \gamma^2 \quad (4.2.89)$$

elde edilir. (4.2.80) eşitliğinden

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = +1 \quad (4.2.90)$$

dir. (4.2.79) ve (4.2.80) eşitlikleri kullanılarak;

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle t(\alpha + vk_2) + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, \xi_2 \rangle = \gamma \quad (4.2.91)$$

bulunur. *II.* temel formun katsayılarını hesaplamak için, (4.2.82) ve (4.2.87)

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle t(\alpha' + vk_2' + \beta k_1 + \gamma k_2) + \xi_1(\alpha k_1 + vk_1 k_2 + \beta') + \\ \xi_2(-\alpha k_2 - vk_2^2 + \gamma'), \frac{\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \rangle \end{array} \right\} \quad (4.2.92)$$

bulunur. (4.2.92) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e = \left\{ \frac{v^2(-k_1 k_2^2) + v(\beta k_2' - 2k_1 k_2 \alpha - \beta k_2) + \beta \alpha' + k_1 \beta^2 + \gamma k_2 \beta - k_1 \alpha^2 - \beta' \alpha}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \right\} \quad (4.2.93)$$

elde edilir. (4.2.83) ve (4.2.87) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \left\langle 0, \frac{\beta t + (\alpha + vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \right\rangle = 0 \quad (4.2.94)$$

bulunur. (4.109) ve (4.112) eşitliklerinin skalar çarpımı hesaplanırsa,

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \left\langle -k_2 t, \frac{-\beta t + (\alpha - vk_2)\xi_1}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}} \right\rangle = \frac{-k_2 \beta}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} \quad (4.2.95)$$

bulunur. Teorem 2.47. de belirtilen Gauss eğriliği fonksiyonu yardımıyla; (4.2.89), (4.2.90), (4.2.91), (4.2.93) (4.2.94) ve (4.2.95) denklemleri kullanılarak,  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-\left[\frac{+k_2 \beta}{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}\right]^2}{\left[\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2\right]^{1/2}}$$

veya

$$K = \frac{-k_2^2 \beta^2}{\left[\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2\right]^3} \quad (4.2.96)$$

şeklinde bulunur. Şimdi  $\xi_2$  vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin gauss eğriliğinin sabitliğini araştıralım. Eğer (4.2.96) ifadesinde,  $-k_2^2 \beta^2 = 0$  ise  $K = 0$  olduğu açıktır. Bu durumda  $k_2 = 0$  veya  $\beta = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. den  $k_2 \neq 0$  olduğundan  $\beta = 0$  olmalıdır.

(4.2.69) denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınır,

$$c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 \quad (4.2.97)$$

olur. Eğer (4.2.97) denkleminde  $\beta = 0$  eşitliği yerine yazılırsa; (4.2.97) denklemi,

$$c'(s) = \alpha t + \gamma \xi_2 \quad (4.2.98)$$

bulunur. (4.2.98) denklemindeki  $\alpha$  ve  $\gamma$  diferansiyellenebilir fonksiyonları  $\alpha = k_2\varepsilon$  ve  $\gamma = \varepsilon' + \eta$  şeklinde seçilirse ve (4.2.98) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c'(s) = k_2\varepsilon t + (\varepsilon' + \eta)\xi_2$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler ile,

$$c'(s) = k_2\varepsilon t + \varepsilon'\xi_2 + \eta\xi_2 \quad (4.2.99)$$

denklemini elde edilir.  $k_2t = \xi_2'$  olduğundan, (4.2.99) denklemini,

$$c'(s) = \xi_2'\varepsilon + \varepsilon'\xi_2 + \eta\xi_2 \quad (4.2.100)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda (4.2.100) denklemini,

$$c'(s) = (\varepsilon\xi_2)' + \eta\xi_2 \quad (4.2.101)$$

şeklinde bulunur. (4.2.101) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \varepsilon\xi_2 + \int \eta\xi_2 ds \quad (4.2.102)$$

elde edilir. (4.2.102) deki dayanak eğrisi (4.2.71) denkleminde yerine yazılırsa, regle yüzeyin

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_2 + \int \eta\xi_2 ds$$

formu elde edilir.

**Teorem 4.7. :** (1)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$  regle yüzeyi açılabilir.  $\Leftrightarrow G_t$  regle yüzeyi,

$$\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_2 + \int \eta\xi_2 ds$$

formundadır.

(2)  $G_t : \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$  regle yüzeyinin gauss eğriliği  $K$  sabit ise  $K = 0$  dir.

## Spacelike $\xi_2$ Vektörü Tarafından Üretilen Non-lightlike Regle Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Bir yüzeyin ortalama eğriliğinin hesabı, Teorem 3.47. yardımıyla yapılabilir.

Ortalama eğriliğin matris formu,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} \quad (4.2.103)$$

şeklindedir. Buradan,

$$Eg = ((\alpha + vk_2)^2 - \beta^2 + \gamma^2).0 = 0 \quad (4.2.104)$$

$$Ge = 1e = \frac{\left\{ \begin{array}{l} v^2(-k_1 k_2^2) + v(\beta k_2' - 2k_1 k_2 \alpha - \beta k_2) \\ + \beta \alpha' + k_1 \beta^2 + \gamma k_2 \beta - k_1 \alpha^2 - \beta' \alpha \end{array} \right\}}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}} = e \quad (4.2.105)$$

ve

$$2Ff = 2\gamma \frac{-k_2 \beta}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}}$$

veya

$$2Ff = 2\beta \frac{k_2 \gamma}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - vk_2)^2}} \quad (4.2.106)$$

şeklinde bulunur.

(4.2.104), (4.2.105) ve (4.2.106) eşitlikleri (4.2.103) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$Eg + Ge - 2Ff = \frac{\left\{ \begin{array}{l} v^2(-k_1 k_2^2) + v(\beta k_2' - 2k_1 k_2 \alpha - \beta k_2) \\ + \beta \alpha' + k_1 \beta^2 - \gamma k_2 \beta - k_1 \alpha^2 - \beta' \alpha \end{array} \right\}}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_2)^2}}$$

bulunur. (4.2.103) denkleminde göre  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{\left. \begin{aligned} &v^2(-k_1 k_2^2) + v(\beta k_2' - 2k_1 k_2 \alpha - \beta' k_2) \\ &+ \beta \alpha' + k_1 \beta^2 - \gamma k_2 \beta - k_1 \alpha^2 - \beta' \alpha \end{aligned} \right\}}{2[\beta^2 + (\alpha + v k_2)^2]^{3/2}} \quad (4.2.107)$$

şeklinde bulunur. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapılabilmesi için, (4.2.107) ifadesi  $v$  parametresinin kuvvetleri şeklinde yazılmalıdır.

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[\beta^2 + (\alpha + v k_2)^2]^{3/2}} \quad (4.2.108)$$

olur. Burada,

$$A_0 = \beta \alpha' + k_1 \beta^2 - \gamma k_2 \beta - k_1 \alpha^2 - \beta' \alpha$$

$$A_1 = \beta k_2' - 2k_1 k_2 \alpha - \beta' k_2$$

$$A_2 = -k_1 k_2^2$$

dir. Ortalama eğriliğin sabitliği yorumunda  $A_0, A_1$  ve  $A_2$  katsayıları incelenmelidir. Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, bulunan tüm  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

**1.hal:**  $A_2 = 0$  olsun. Burada  $k_1 k_2^2 = 0$  olmalıdır. Fakat Tanım 2.47. göz önüne alınırsa,  $k_1 = 0$  veya  $k_2 = 0$  olamayacağı görülür. Yani,  $A_2$  katsayısı sıfır olamaz. Bu durumda ortalama eğriliğin sabitliğinden ve sıfır olmasından bahsedilemez. Böylece  $\xi_2$  vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyler minimal olamaz.

**Durum 2:**  $t$  vektör alanı spacelike,  $\xi_1$  vektörü alanı spacelike,  $\xi_2$  vektör alanı timelike olduğunda ve gerekli işlemler yapıldığında benzer sonuçlar elde edilir.

## 5. ÖRNEKLER

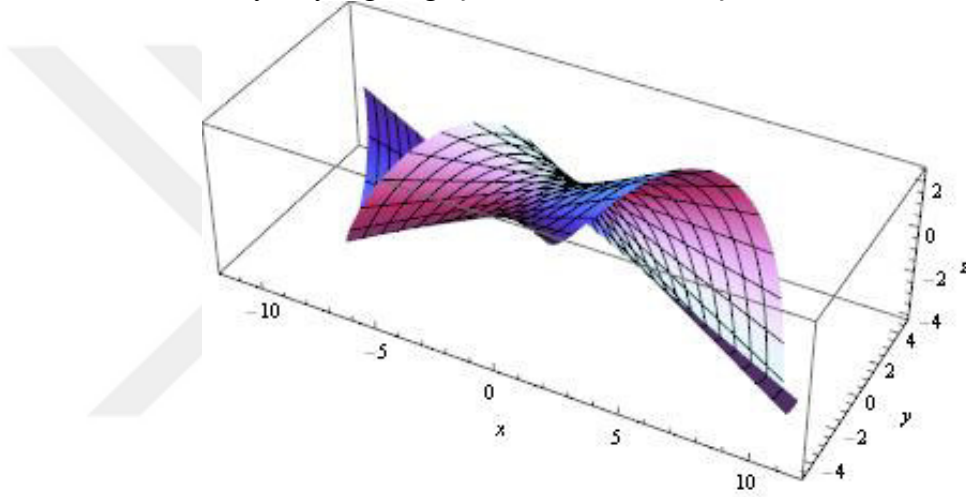
**Örnek 1:** Üç boyutlu Minkowski uzayında timelike bir  $\Gamma(s) = (2s, \cos(s), -\sin(s))$  olsun. Bu eğrinin teğet vektörü,

$$t(s) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\cos(s)}{\sqrt{3}}, \frac{-\sin(s)}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklindedir. Eğer  $\varepsilon = s$  ve  $\eta = \sqrt{3}$  seçilirse,  $G_t$  timelike regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\varphi(s, v) = \left( \frac{s}{\sqrt{3}} (2\sqrt{3} + s + \cos(s)) + \frac{2v}{\sqrt{3}}, \sin(s) + \frac{v \cos(s)}{\sqrt{3}}, -\frac{(s+v) \sin(s)}{\sqrt{3}} + \cos(s) \right)$$

elde edilir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 5.1. de verilmiştir.



Şekil 5.1.  $K = 0$ ,  $H = \frac{1}{|\varepsilon + v|}$

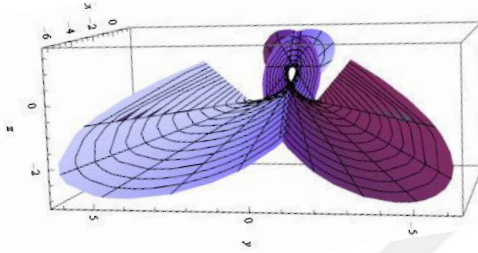
**Örnek 2:** 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir eğri  $\Gamma(s) = (\sinh \sqrt{5}s, \cosh \sqrt{5}s, 2s)$  olsun. Bu eğrinin  $\xi_1(s)$  vektörü,

$$\xi_1(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s) - 2 \sin(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s), \\ \cos(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s) - 2 \sin(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s), \\ -\sqrt{5} \sin(2\sqrt{5}s) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Eğer  $\varepsilon = s$  ve  $\eta = 1$  seçilirse,  $\xi_1(s)$  vektörü tarafından üretilen,  $G_{\xi_1}$  timelike regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} (s+v) \left( -\sin(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s) + 2 \cos(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s) \right) + \frac{\cos(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v) \left( -\sin(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s) + 2 \cos(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s) \right) + \frac{\cos(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v) \left( \sqrt{5} \cos(2\sqrt{5}s) - \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{5}s) \right) \end{pmatrix}$$

elde edilir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 5.2. de verilmiştir.



Şekil 5.2.

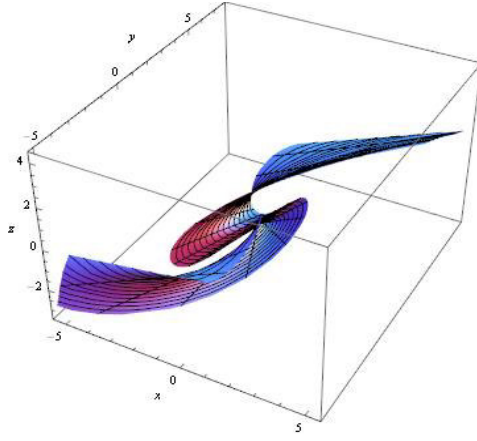
Ayrıca  $\Gamma$  eğrisinin  $\xi_2(s)$  vektörü,

$$\xi_2(s) = \begin{pmatrix} -\sin(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s) - 2 \cos(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s), \\ -\sin(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s) + 2 \cos(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s), \\ -\sqrt{5} \cos(2\sqrt{5}s) \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve  $\varepsilon = s$  ve  $\eta = 1$  seçilirse,  $\xi_2(s)$  tarafından üretilen,  $G_{\xi_2}$  timelike regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} (s+v) \left( -\sin(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s) + 2 \cos(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s) \right) + \frac{-\sin(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v) \left( \sin(2\sqrt{5}s) \cosh(\sqrt{5}s) + 2 \cos(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s) \right) + \frac{-\sin(2\sqrt{5}s) \sinh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v) \left( \sqrt{5} \cos(2\sqrt{5}s) + \frac{1}{2} \sin(-2\sqrt{5}s) \right) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 5.3. de verilmiştir.



Şekil 5.3.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre null olmayan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabitliği incelendi. Teğet vektör alanı tarafından üretilen sabit eğrilikli regle yüzeylerin  $\varphi(s, \nu) = (\varepsilon + \nu)t + \int \eta t ds$  formuna sahip olduğu belirlendi. Ayrıca, bu regle yüzeylerin Gauss eğriliğinin sabit olmasının sadece Gauss eğriliğinin sıfır olması ile mümkün olduğu yani yüzeylerin açılabilir olduğu ispatlandı. Yine bu regle yüzeylerin minimal olması için  $\Gamma$  eğrisinin Bishop slant helis ve regle yüzeyin denkleminin  $\varphi(s, \nu) = (\varepsilon + \nu)t + \int \eta t ds$  formunda olması gerektiği görüldü.

Diğer taraftan  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  vektörleri tarafından üretilen sabit eğrilikli regle yüzeylerin denkleminin  $\varphi(s, \nu) = (\varepsilon + \nu)\xi_i + \int \eta \xi_i ds$  formuna sahip olduğu ve bu regle yüzeylerin Gauss eğriliğinin sabit olmasının sadece Gauss eğriliğinin sıfır olması ile mümkün olduğu bir başka deyişle bu yüzeylerin açılabilir olduğu ispatlandı. Ayrıca  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  vektörleri tarafından üretilen null olmayan regle yüzeylerin minimal olamayacağı görüldü. Ayrıca üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop vektör alanları  $t, \xi_1, \xi_2$  olan spacelike  $\Gamma$  eğrisi için benzer sonuçlar elde edildi.

Bishop slant helislerin pozisyon vektörleri 3-boyutlu Öklid uzayında da elde edilmiştir (Yerlikaya ve Aydemir, 2020). Dolayısıyla bu çalışmanın bir benzeri Öklid uzayında yapılabilir.

## 7. KAYNAKLAR

- Ali, A.T. (2017). Non-lightlike Ruled Surfaces with Constant Curvatures in Minkowski 3-Space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15 (4): 1850068.
- Ali, A. T. ve Lopez, R. (2011). Slant helices in Minkowski space  $E_1^3$ . *Journal of the Korean Mathematical Society*, 48:1, 159-167.
- Ali, A. T. ve Turgut, M. (2010). Position vector of a timelike slant helix in Minkowski 3-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 365: 2, 559–569. doi: 10.1016/j.jmaa.2009.11.026
- Abdel-All, N.H. ve Abdel-Baky, R.A. (2004). Ruled Surfaces with Timelike Rulings. *Applied Mathematics and Computation*, 147: 241-253.
- Ali A.T.ve Aziz H.S.A. (2013). Ruled Surfaces Generated by Some Special Curves in Euclidean 3-Space, 21: 285-294.
- Bükçü, B. ve Karacan, M. K. (2008a). "Bishop Frame Of The Timelike Curve İn Minkowski 3-Space", S.D.U. Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi (E-Dergi), 3(1), 80-90.
- Bükçü, B. ve Karacan M. K. (2008b). On the Slant Helices According to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space. *Tamkang Journal of Mathematics*, 39 (3): 255-262.
- Bükçü, B. ve Karacan, M. K. (2009). The slant helices according to Bishop frame of the spacelike curve in Lorentzian space. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 12:5, 255-262.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1983). *Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edeb. Fak. Yayınları, Malatya-Türkiye.*
- Lopez, R. 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7:1, 44-107.
- Karacan, M. K. ve Bükçü, B. (2008). Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space. *Suleyman Demirel University Journal of Science*, 3:1, 80-90.
- Kuhnel, W. (1999). Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *Mathematisches Institut B, Universität Stuttgart, D-70550 Stuttgart.*
- Masal, M. ve Azak, A.Z. (2017). 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bertnard Eğriler ve Bishop Çatısı. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, , 21 (6): 1140-1145.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic press.
- Orbay, K. ve Aydemir, İ. (2010). The Ruled Surfaces Generated by Frenet Vectors of a Curve in  $\mathbf{R}_1^3$ . *Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 6 (2): 155-160.
- Önder, M. Uğurlu, H.H. (2013). Frenet Frames and İnvariants of Timelike Ruled Surfaces. *Ain Shams Engineering Journal*, 4: 507-513.
- Sodsiri, W. (2003). Ruled linear Weingarten surfaces in Minkowski 3-space, *Soochow J. Math*, 29(4): 435-443.
- Şenatalar, M. (1978). *Diferansiyel Geomeri:eğriler ve yüzeyler teorisi, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi yayınları.*
- Vanlı, A. A. (1995). 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle

Yüzeyleyler.Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 104, Ankara.

Walrave, J. (1995). Curves and surfaces in Minkowski space. Doctoral Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven Faculteit der Wetenschappen, 147, Belgium.

Woestijne, V.D.I. (1990). Minimal Surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Proc. Congres “Geometrie differentielle et applications”, World Scientific Publishing, Singapore. 344-369.

Yerlikaya, F. (2019). *Minkowski Uzayında Eğrilerin Elde Edilmesi*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi (Basılmış).

Yerlikaya, F. ve Aydemir, İ. (2020). Integrability for the Derivative Formulas of Rotation Minimizing Frame in Euclidean 3-Space and its Applications. International Electronic Journal of Geometry, 13:116-128.

Yüksel, N. (2013). The Ruled Surfaces According to Bishop Frame in Minkowski 3-Space, Abstract and Applied Analysis : 1-5.

