T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAMA VE BETA FONKSİYONLARININ HAHN ANALİZİNDEKİ BENZERLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Müzeyyen Yüksel

Danışman

Doç. Dr. Fatma HIRA

SAMSUN
2022

TEZ KABUL VE ONAYI

Müzeyyen YÜKSEL tarafından, **Doç. Dr. Fatma HIRA** danışmanlığında hazırlanan **“GAMA VE BETA FONKSİYONLARININ HAHN ANALİZİNDEKİ BENZERLERİ”** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 30.6.2022 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarakYüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**İmza**	**Sonuç**
Başkan	Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik AnaBilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Fatma HIRA Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğrt. Üyesi Hatice MUTİ Samsun Üniversitesi Havacılık Yönetimi Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
… / … / …
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

İmza
06/06/2022
Müzeyyen YÜKSEL

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı :GAMA VE BETA FONKSİYONLARININ HAHN ANALİZİNDEKİ BENZERLERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 05.06.2022 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 20

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

İmza
05/06/2022
Doç. Dr. Fatma HIRA

ÖZET

GAMA VE BETA FONKSİYONLARININ HAHN ANALİZİNDEKİ BENZERLERİ

Müzeyyen YÜKSEL
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans,Haziran/2022
Danışman: Doç. Dr. Fatma HIRA

Klasik türev tanımının limit kullanılmadan tanımlanmasıyla oluşturulan kuantum analizin veya kısaca q-analizin bir türü de Hahn kuantum analizidir. 1949 yılında W. Hahn tarafından tanımlanan Hahn fark operatörü aslında q-fark operatörü ve ileri fark operatörünün birleşiminden oluşmaktadır. 2009 yılında bu türev operatörünün tersinin (integralinin) ve onunla ilgili analizsel teoremlerin oluşturulmasıyla bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır.

Klasikte var olan ifadelerin q-analizindeki karşılıklarına q-benzerleri, Hahn analizindeki karşılıklarına da q,ω-benzerleri denilmektedir. Bu tezde, Gama ve Beta fonksiyonlarının Hahn analizindeki benzerleri tanımlanarak, klasikteki temel özelliklerinin q,ω-benzerleri oluşturulmuştur.

Klasikteki üstel fonksiyonun benzeri q-analizinde dolayısıyla q,ω-analizinde birinci tür E ve ikinci tür e üstel fonksiyonları ile tanımlıdır. Bu nedenle Gama ve Beta fonksiyonları da her iki üstel fonksiyon için tanımlanarak birinci tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları ile ikinci tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları ayrı ayrı oluşturulmuştur.

Tezin birinci bölümünde, q-analizi ve q,ω-analizi ile ilgili literatür özetine yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, q-analizi ve özellikle q,ω-analiziyle ilgili temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümü iki alt bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, $E_{q,\omega}$ üstel fonksiyonu kullanılarak birinci tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları tanımlanmış, integrallerin yakınsaklıkları incelenerek klasikteki temel özelliklerin q,ω-benzerleri elde edilmiştir. İkinci bölümde, aynı fonksiyonların ikinci tür q,ω-benzerleri e üstel fonksiyonu kullanılarak oluşturulmuş ve her iki tür arasındaki geçiş bağıntıları verilmiştir.

Tezde sunulan bulgular özellikle q,ω-Laplace dönüşümünün incelenmesi ve kesirli Hahn analizi için temel kaynak oluşturmaktadır. Tezin son bölümünde diğer sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: q,ω-Gama fonksiyonu, q,ω-Beta fonksiyonu, q,ω-üstel fonksiyonları, q-analiz, Hahn analiz

ABSTRACT

ANALOGUES OF GAMMA AND BETA FUNCTIONS IN HAHN CALCULUS

Müzeyyen YÜKSEL
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master,June/2022
Supervisor:Assoc. Prof. Dr. Fatma HIRA

The Hahn quantum calculus is another type of quantum calculus, or q-calculus, which is created by defining the classical derivative definition without using limits. The Hahn difference operator, which W. Hahn defined in 1949, consists of combining the q-difference operator and the forward difference operator. In 2009, studies on this subject gained momentum by creating the inverse (integral) of this derivative operator and the analytical theorems related to it.

The equivalents of classically existing expressions in q-calculus are called q- analogs, and their equivalents in Hahn's calculus are called q,ω-analogs. In this thesis, the analogs of Gamma and Beta functions in Hahn's calculus are defined and q,ω-analogs of their basic properties in classical are created.

Similar to the classical exponential function, in the q-calculus, therefore, in the q,ω-calculus, the first type is defined by the E and the second type e exponential functions. Therefore, Gamma and Beta functions are defined for both, and the first type q,ω-Gamma and q,ω-Beta functions and the second type q,ω-Gamma and q,ω-Beta functions are formed separately.

In the first part of the thesis, a literature summary about q-calculus and q,ω-calculus is given. In the second part of the thesis, basic definitions, theorems and properties related to q-calculus and especially q,ω-calculus are given. The third part of the thesis consists of two sub-sections: In the first part, the first type of q,ω-Gamma and q,ω-Beta functions are defined by using the E exponential function, the convergence of the integrals is examined and the q,ω-analogs of the basic properties of the classical are obtained. In the second part, the second kind of q,ω-analogs functions of the same functions are constructed using the exponential function e and the transition relations between both types are given.

The findings presented in the thesis are the primary source for the analysis of the q,ω-Laplace transform and fractional Hahn calculus. In the last part of the thesis, other conclusions and suggestions are given.

Keywords: q,ω-Gamma function, q,ω-Beta function, q,ω-exponential functions, q-calculus, Hahn calculus

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Doç. Dr. Fatma HIRA'ya teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmamda desteğini ve bana olan güvenini benden esirgemeyen Eşim Tayfun YÜKSEL'e ve beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

Müzeyyen YÜKSEL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

A	: q-geometrik küme
I	: Reel sayıların ω_0 sayısını içeren kapalı bir alt aralığı
q	: $(0,1)$ arasında bir sayı
D_q	: q-türev operatörü
ω_0	: $\frac{\omega}{1-q}$, $\omega > 0$ ile tanımlı sabitleştirilmiş bir sayı
q,ω-analizi	: Hahn analizi
$D_{q,\omega}$	: q,ω-türev operatörü
$[\alpha]_q$	: α sayısının q-benzeri
$[\infty]_q$	: Sonsuzun (∞) q-benzeri
$[n]_q!$	: Faktöriyelin q-benzeri
$(a;q)_n = (1-a)_q^n$	: q-Pochhammer sembolü veya q-öteleme faktörü
$E_{q,\omega}(x)$	: 1.tür q,ω-üstel fonksiyonu
$e_{q,\omega}(x)$	: 2.tür q,ω-üstel fonksiyonu
$\Gamma_{q,\omega}$	: 1.tür q,ω-Gama fonksiyonu
$\gamma_{q,\omega}$	: 2.tür q,ω-Gama fonksiyonu
$B_{q,\omega}(t,s)$	: 1.tür q,ω-Beta fonksiyonu
$\beta_{q,\omega}(t,s)$	: 2.tür q,ω-Beta fonksiyonu

1. GİRİŞ

Kuantum analiz (q-analiz) limitsiz analiz olarak bilinmektedir. Klasik türevi bir kuantum fark operatörü ile değiştirerek diferansiyellenemeyen fonksiyonlar kümesi ile ilgilenmeye olanak sağlar. Klasikte var olan tanım ve özelliklerin q-analizdeki karşılıklarına q-benzerleri denilmektedir.

Literatürde q-analizi ile ilgili, farklı alanlarda, oldukça fazla çalışma bulunmaktadır. Tez konusuyla yakından ilgili olan Gama ve Beta fonksiyonlarının ve Laplace dönüşümünün q-benzerleri de farklı çalışmalarda incelenmiştir (Thomae 1869; Jackson, 1904; Abdi, 1961, 1962; Kac ve Cheung, 2002; De-Sole ve Kac, 2005; Kobachi, 2011; Chung, vd., 2014; Naik ve Haubold, 2016). Yazarlar başlangıçta bunların q-integral tanımlarını vermekten kaçınmış, tanımları sonsuz çarpımlar ile ifade etmişlerdir. Sonrasında, özellikle Gama fonksiyonu için, bir kaç farklı q-integral tanımlaması yapılmıştır. Tanımlanan integrallerin her biri $q \to 1$ için klasik Gama fonksiyonuna yakınsamakta ve temel özelliklerini sağlamaktadır. Bu integrallerin farklı olmasının sebeplerinden biri sınırsız aralıktaki q-integralin farklı tanımlarının olması ve q-benzerinde genel bir değişken değiştirme formülünün var olmayışıdır. Klasik integrallerde doğru olan sabitin ötelenmesi özdeşliğinin her durumda q-benzeri bulunmamaktadır. Yazarları doğru integral tanımlama konusunda yanılgıya düşüren durumlardan birisi de budur. Bir diğer durum da ∞ ifadesinin q-benzeri $[\infty]_q = \frac{1}{1-q}$, $q \in (0,1)$ olup sınırlarda ∞ yerine $[\infty]_q$ kullanılmamasıdır, aksi halde integrale bağlı olarak oluşan serilerin yakınsaklığının sağlanıp sağlanmadığı göz ardı edilmektedir (De Sole ve Kac, 2005).

Kuantum analizin bir türü de Hahn kuantum analizidir ve Hahn tarafından 1949 yılında tanımlanmıştır (Hahn, 1949). Türev operatörünün tanımlanmış olmasına rağmen integral operatörü tanımlanmadığı için bu konudaki çalışmalar kısıtlı kalmıştır. 2009 yılında Aldwoah doktora tezinde 60 yıllık açık bir problemi çözerek yani Hahn türevinin ters operatörünü (q,ω-integral operatörünü) ve bu operatör ile ilgili analizsel açılımları oluşturarak Hahn kuantum operatörü konusunun yeniden çalışılmasını sağlamıştır (Aldwoah, 2009; Annaby vd., 2012). Bu konuyla ilgili Hahn kuantum varyasyonlar hesabı (Malinowska ve Torres, 2010) çalışmasında, lineer

Hahn fark denklemleri ve bunların çözümlerinin varlık-tekliği sırasıyla (Hamza ve Ahmed, 2013a; 2013b) çalışmalarında incelenmiştir. Simetrik Hahn fark operatörü (Artur vd., 2013) çalışmasında tanımlandı ve bu operatör kullanılarak kesirli simetrik Hahn analizi (Patanarapeelert ve Sitthiwirattham, 2019) çalışmasında incelenmiştir. q,ω-Sturm-Liouville problemi (Annaby vd., 2018) çalışmasında tanıtılmış ve aynı problem için örnekleme teorisi (Annaby ve Hassan, 2018) çalışmasında ele alınmıştır. (Hıra, 2020a) çalışmasında q,ω-Dirac sistemi tanıtılarak çözümlerin varlık ve tekliği ispatlanmış; özdeğer ve özfonksiyonların bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Aynı sistemin örnekleme teorisi (Hıra, 2020b) çalışmasında verilmiştir. Minkowski eşitsizliğinin Hahn integral operatörü ile genelleştirilmesi ve Hahn integral eşitsizlikleri sırasıyla (Khan vd., 2018; Asawasamrit vd., 2019) çalışmalarında verilmiştir. Hahn operatörü kullanılarak oluşturulan Hahn-Appell polinomları ve d-ortogonallik durumu (Varma vd., 2019) çalışmasında ele alınmıştır. Kesirli q-analizi ile ilgili çalışmalar (Al-Salam, 1966; Agarwal, 1969, Rakovic vd., 2007; Annaby ve Mansour, 2012) olduğu gibi kesirli q,ω-analizi (kesirli Hahn analizi) ile ilgili de güncel çalışmalar bulunmaktadır (Atici ve Eloe, 2007; Brikshavana ve Sitthiwirattham, 2017; Wang vd., 2018; Tariboon vd., 2019).

Gama ve Beta fonksiyonlarının Hahn fark operatörlü karşılığı yani q,ω-benzerleri üzerine incelemeler henüz yapılmamıştır. Tez kapsamında bu incelemelerin yapılması planlanmaktadır. Literatürdeki Gama ve Beta fonksiyonlarının q-benzerleri için integral tanımları her iki q-üstel fonksiyonu için ayrı ayrı çalışmalar olarak incelenmiştir (Kac ve Cheung, 2002; Sole ve Kac, 2005; Albayrak, 2009). Bu tezde incelemeler her iki tür q,ω-üstel fonksiyonu için aynı anda yapılacak olup bu bağlamda tez kapsamlı ve teorik bir çalışma olacaktır. Öncelikle q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonlarının integral tanımları birinci tür $E_{q,\omega}(x)$ üstel fonksiyonu kullanılarak yapılacak, integrallerin yakınsaklıkları incelenecek ve klasikteki özelliklerin q,ω-benzerleri elde edilecektir. Bu fonksiyonlara birinci tür q,ω-Gama fonksiyonu $\left(\Gamma_{q,\omega}(t)\right)$ ve birinci tür q,ω-Beta fonksiyonu $\left(B(t,s)\right)$ denilecektir. Sonrasında benzer incelemeler ikinci tür $e_{q,\omega}(x)$-üstel fonksiyonu kullanılarak yapılacaktır. Bu fonksiyonlar da ikinci tür Gama fonksiyonu $\left(\gamma_{q,\omega}(t)\right)$ ve ikinci tür Beta fonksiyonu $\left(\beta(t,s)\right)$ olarak adlandırılacaktır.

$D_{q,\omega}$ ile gösterilen Hahn fark operatörü

$$D_{q,\omega}f\left(x\right)=\frac{f\left(qx+\omega\right)-f\left(x\right)}{qx+\omega-x}$$

oranı ile tanımlanmaktadır. Bu operatör aslında iki operatörün birleşiminden oluşmaktadır: birincisi D_q ile gösterilen Jackson fark operatörü, ikincisi Δ_ω ile gösterilen ileri fark operatörüdür. Bu üç operatör arasında

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to 1} D_{q,\omega}f(x)=\Delta_\omega f(x),\\
&\lim_{\omega\to 0} D_{q,\omega}f(x)=D_q f(x),\\
&\lim_{q\to 1,\omega\to 0} D_{q,\omega}f(x)=f'(x),
\end{aligned}$$

geçişleri bulunmaktadır. Bu sebeple her iki tür için de tanımlanan q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları için elde edilecek bulgu ve sonuçların $\omega\to 0$ için q-benzerleri ile (Kac ve Cheung, 2002; Sole ve Kac, 2005); $\omega\to 0, q\to 1$ için klasiktekilerle (Euler, 1748) uyumluluk gösterip göstermediği kontrol edilecektir.

Fizik, ekonomi, mekanik ve varyasyonlar hesabındaki birçok problemin integral fonksiyonları kullanılarak formülize edildiği ve özellikle gerçek yaşam olaylarının kesirli analizdeki kesirli integrallerle oluşturulup çözüldüğü iyi bilinmektedir (Rahman, 2007; Corduneanu, 2008) . Bu integraller de çoğunlukla klasik anlamda diferansiyellenemeyen fonksiyonlarla karakterize edilmektedir. Kuantum analizi klasik türevi bir kuantum fark operatörü ile değiştirerek diferansiyellenemeyen fonksiyonlar ile işlem yapmaya olanak sağlayıp bu tür integral fonksiyonlarının oluşturulmasını kolaylaştırmaktadır. Bu sebeple kuantum fark operatörleri: ortogonal polinomlar, temel hipergeometrik fonksiyonlar, kombinatorikler, varyasyonlar hesabı ve izafiyet teorisi gibi matematiksel ve fiziksel alanlarda çok sayıda uygulamaya sahiptir (Askey ve Wilson, 1985; Malinowska ve Torres, 2014). Hahn operatörü de ortogonal polinomların oluşturulmasında ve yaklaşım teorisinde kullanışlı bir araçtır (A'lvarez-Nordase, 2016; Koekoek vd., 2010). Özellikle kesirli analizde Laplace dönüşümleri kullanılmakta ve Laplace dönüşümünün bazı özellikleri Gama fonksiyonuna bağlı olarak elde edilmektedir. Yine farklı integral dönüşümlerinin bu alanlardaki incelemeleri de yapılmaktadır

(Aral vd., 2013). Özetle, klasik türevin ve integralin kullanıldığı farklı alanlardaki pek çok çalışma q-analizine ve q,ω-analizine aktarılmakta ve buradaki benzerleri incelenmektedir. Tezde elde edilen bulgular, bu alanlardaki Gama ve Beta fonksiyonlarıyla bağlantılı olan tüm çalışmaların incelenmesini kolaylaştıracaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonlarının tanımlanması için gerekli olan q-analizi ve q,ω-analizindeki temel tanımlar, teoremler ve özellikler verilecektir.

Tez boyunca bahsi geçen q sayısı 0 ile 1 arasında sabit bir sayıdır.

Tanım 2.1. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısının q-benzeri

$$[\alpha]_q = \frac{1-q^{\alpha}}{1-q} \tag{2.1}$$

şeklindedir. ∞ un q-benzeri

$$[\infty]_q = \frac{1}{1-q} \tag{2.2}$$

ve $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = q^{n-1} + \ldots\ldots + q^2 + q + 1 \tag{2.3}$$

olmaktadır.

Tanım 2.2. $n!$ ifadesinin q-benzeri

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \ldots [2]_q [1]_q, & n = 1,2,3,\ldots, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.3. $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere q-Pochhammer sembolü veya q-öteleme faktörü

$$(a;q)_n := (1-a)_q^n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1-aq^k\right), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Buna göre $n = \infty$ için

$$(a;q)_\infty := (1-a)_q^\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1-aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\ldots\left(1-aq^n\right)\ldots,$$

olmaktadır (Annaby vd., 2012).

Tanım 2.4. q-binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[j]_q![n-j]_q!} \tag{2.6}$$

olmak üzere binom formülünün

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(j-1)2} a^j x^{n-j} \quad \text{(Gauss binom formülü)}$$

ve

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]_q[n+1]_q[n+2]_q\ldots[n+j-1]_q}{[j]_q!} \quad \text{(Heine binom formülü)}$$

şeklinde iki tane q-benzeri vardır (Kac ve Cheung, 2002).

Tanım 2.5. q sayısı $0<q<1$ koşulunu sağlayan pozitif bir sayı olmak üzere her $x \in A$ için $qx \in A$ ise $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesine q-geometrik küme denir.

Tanım 2.6. A bir q-geometrik küme olmak üzere A da tanımlı reel yada kompleks değerli bir f fonksiyonunun q-fark operatörü D_q (veya Jackson q-fark operatörü)

$$D_q f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(qx)-f(x)}{qx-x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $D_q f$ ifadesine f fonksiyonunun q-türevi denir (Jackson, 1910).

(2.7) eşitliğinden $\lim_{q\to 1} D_q f(x) = f'(x)$ olduğu yani $q=1$ için limit alındığında klasik türevin elde edildiği görülmektedir. Buna göre q-fark operatörü için verilen tanım, teorem ve özellikler $q \to 1$ için klasikteki karşılıklarına indirgenmektedir.

Örnek 2.7. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonu için (2.7) eşitliğinden

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n-1)}{(q-1)} x^{n-1}$$

yazılır. Burada (2.3) eşitliği kullanılırsa

$$D_q x^n = [n]_q \, x^{n-1}$$

elde edilir. $q \to 1$ için $\left[n\right]_q \to n$ olduğundan, $q \to 1$ için $D_q x^n \to Dx^n = nx^{n-1}$ olduğu görülür.

Tanım 2.8. Bir f fonksiyonunun q-integrali

$$\int_0^x f(t)\, d_q t = x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(xq^n\right), \; x \in A, \tag{2.8}$$

ile tanımlıdır (Thomae, 1869; Jackson, 1910).

Bir f fonksiyonunun q-genelleştirilmiş integrali için yapılan tanımlardan biri

$$\int_0^{\infty/R} f(t)\, d_q t = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{R} f\left(\frac{q^n}{R}\right), \; R \in \mathbb{R},$$

şeklindedir (De Sole ve Kac, 2005).

Tanım 2.9. Klasik analizde üstel fonksiyonun seri açılımı $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şeklindedir. Bunun q-benzeri olarak iki tane q-üstel fonksiyonu tanımlanmıştır. Birinci tür q-üstel fonksiyonu $E_q(x)$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{[n]_q !} = (1+(1-q)x)_q^{\infty}, \quad x \in \mathbb{C}, \tag{2.9}$$

ile ikinci tür q-üstel fonksiyonu $e_q(x)$

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q !} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}, \quad |x| < \frac{1}{1-q}, \tag{2.10}$$

ile tanımlıdır (Kac ve Cheung, 2002). Bu fonksiyonlar için

$$e_q(x) E_q(-x) = 1, \; e_q(0) = E_q(0) = 1, \; \lim_{q \to 1} E_q(x) = e^x = \lim_{q \to 1} e_q(x), \; e_{q^{-1}}(x) = E_q(x)$$

ve

$$D_q e_q(x) = e_q(x), \quad D_q E_q(x) = E_q(qx)$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.10. $q \in (0,1)$, $\omega > 0$, $\omega_0 = \dfrac{\omega}{1-q}$ sabit bir sayı ve I, ω_o sayısını içeren $\mathbb{R}$ nin bir alt aralığı olsun. f fonksiyonunun ω_0 noktasında türevlenebilir olması koşuluyla, Hahn fark operatörü $D_{q,\omega}$

$$D_{q,\omega} f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(qx+\omega) - f(x)}{(qx+\omega) - x}, & x \neq \omega_0, \\ f'(\omega_0), & x = \omega_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $D_{q,\omega} f$ ifadesine f fonksiyonunun q,ω-türevi denir (Hahn, 1949).

Hahn fark operatörü iki önemli operatörün birleşiminden oluşur. Birincisi Tanım 2.6 ile verilen Jackson q-fark operatörüdür, ikincisi

$$\Delta_\omega f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

ile tanımlı Δ_ω ileri fark operatörüdür. Buna göre bu üç operatör arasında

$$\begin{aligned} &\lim_{q \to 1} D_{q,\omega} f(x) = \Delta_\omega f(x), \\ &\lim_{\omega \to 0} D_{q,\omega} f(x) = D_q f(x), \\ &\lim_{q \to 1, \omega \to 0} D_{q,\omega} f(x) = f'(x), \end{aligned} \tag{2.13}$$

bağıntısı vardır.

Örnek 2.11. $f(x) = (x - \omega_0)^n$ için (2.11) eşitliğinden q,ω-türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_{q,\omega}(x-\omega_0)^n &= \frac{(qx+\omega-\omega_0)^n - (x-\omega_0)^n}{qx+\omega-x} = \frac{q^n(x-\omega_0)^n - (x-\omega_0)^n}{qx+\omega-x} \\ &= \frac{(x-\omega_0)^n(q^n-1)}{(q-1)(x-\omega_0)} = [n]_q (x-\omega_0)^{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\omega \to 0$ için (dolayısıyla $\omega_0 \to 0$ için) limit alınırsa Örnek 2.7 deki q-karşılığı, $\omega \to 0$, $q \to 1$ için limit alınırsa klasik türev karşılığı elde edilir.

Özellik 2.12. f ve g fonksiyonları $x \in I$ da q,ω-türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere q,ω-türevi için aşağıdaki cebirsel özellikler geçerlidir (Annaby vd., 2012):

i. $D_{q,\omega}\left(f+g\right)(x) = D_{q,\omega}f\left(x\right) + D_{q,\omega}g\left(x\right)$, **(2.14)**

ii. $D_{q,\omega}\left(f.g\right)\left(x\right) = \left(D_{q,\omega}f\left(x\right)\right)g\left(x\right) + f\left(qx+\omega\right)D_{q,\omega}g\left(x\right)$, **(2.15)**

iii. $D_{q,\omega}\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(x\right) = \dfrac{\left(D_{q,\omega}f\left(x\right)\right)g\left(x\right) - f\left(x\right)D_{q,\omega}g(x)}{g\left(x\right)g\left(qx+\omega\right)}$, $g\left(x\right)g\left(qx+\omega\right) \neq 0$. **(2.16)**

$D_{q,\omega}$ türevinin ters operatörü yani q,ω-integrali ve buna bağlı olarak analizin temel teoremlerinin q,ω-benzerleri (Aldwoah, 2009; Annaby vd. 2012) çalışmalarında aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.13. $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a,b \in I$ olsun. Bu f fonksiyonunun q,ω-integrali,

$$\int_{\omega_0}^{x} f(t)d_{q,\omega}t = (x(1-q)-\omega)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k + \omega[k]_q), \;\; x \in I, \tag{2.17}$$

ve

$$\int_{a}^{b} f(x)d_{q,\omega}x = \int_{\omega_0}^{b} f(x)d_{q,\omega}x - \int_{\omega_0}^{a} f(x)d_{q,\omega}x, \tag{2.18}$$

ile tanımlanmıştır. Buradaki serinin $x=a$ ve $x=b$ noktalarında yakınsak olması koşuluyla f fonksiyonu, $\left[a,b\right]$ aralığında q,ω-integrallenebilirdir denir. (2.17) eşitliğinin sağ tarafındaki toplama Jackson-Nörlund toplamı denir. Ayrıca, eğer f fonksiyonu, $\left[a,b\right]$ aralığındaki her nokta için q,ω-integrallenebilir ise I üzerinde q,ω-integrallenebilirdir denir.

Teorem 2.14. $f: I \to \mathbb{R}$, ω_0 noktasında sürekli olan bir fonksiyon ve

$$F\left(x\right) = \int_{\omega_0}^{x} f\left(t\right)d_{q,\omega}t, \;\; x \in I, \tag{2.19}$$

olsun. O zaman F, ω_0 noktasında süreklidir. Ayrıca her $x \in I$ için $D_{q,\omega}F(x)$ vardır ve

$$D_{q,\omega}F(x) = f(x) \quad \textbf{(2.20)}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$\int_a^b D_{q,\omega}f(t)\,d_{q,\omega}t = f(b) - f(a), \text{ her } a,b \in I, \quad \textbf{(2.21)}$$

olur.

Tanım 2.15. $f, g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ω_0 noktasında sürekli ise q,ω-kısmi integrasyonu

$$\int_a^b f(t) D_{q,\omega} g(t) d_{q,\omega} t = f(t)g(t)\,|_a^b - \int_a^b D_{q,\omega}(f(t)) g(qt+\omega) d_{q,\omega} t, \; a,b \in I, \quad \textbf{(2.22)}$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.16. Birinci tür q,ω-üstel fonksiyonu $E_{q,\omega}(x)$

$$E_{q,\omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{(x-\omega_0)^n}{[n]_q!} = (1 + (x(1-q) - \omega))_q^{\infty}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad \textbf{(2.23)}$$

ile ikinci tür q,ω-üstel fonksiyonu $e_{q,\omega}(x)$

$$e_{q,\omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\omega_0)^n}{[n]_q!} = \frac{1}{(1-(x(1-q)-\omega))_q^{\infty}}, \quad |x-\omega_0| < \frac{1}{1-q}, \quad \textbf{(2.24)}$$

ile tanımlıdır.

Özellik 2.17. (2.23) ve (2.24) eşitliklerine göre $E_{q,\omega}(x)$ ve $e_{q,\omega}(x)$ fonksiyonları için

i. $e_{q,\omega}(x) E_{q,-\omega}(-x) = 1$,

ii. $e_{q,\omega}(\omega_0) = E_{q,\omega}(\omega_0) = 1$,

iii. $\lim\limits_{\omega \to 0} E_{q,\omega}(x) = E_q(x), \quad \lim\limits_{\omega \to 0} e_{q,\omega}(x) = e_q(x)$

eşitlikleri sağlanır.

Özellik 2.18. (2.24) eşitliği ve Örnek 2.11 kullanılırsa

$$D_{q,\omega}e_{q,\omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{q,\omega}(x-\omega_0)^n}{[n]_q!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_q(x-\omega_0)^{n-1}}{[n]_q!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\omega_0)^{n-1}}{[n-1]_q!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\omega_0)^{n}}{[n]_q!}$$

yani

$$D_{q,\omega}e_{q,\omega}(x) = e_{q,\omega}(x) \qquad \textbf{(2.25)}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (2.23) eşitliği ve Örnek 2.11 kullanılırsa

$$D_{q,\omega}E_{q,\omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{D_{q,\omega}(x-\omega_0)^n}{[n]_q!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{[n]_q(x-\omega_0)^{n-1}}{[n]_q!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)(n-2)/2} q^{(n-1)} \frac{(x-\omega_0)^{n-1}}{[n-1]_q!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} q^{n} \frac{(x-\omega_0)^{n}}{[n]_q!}$$

yani

$$D_{q,\omega}E_{q,\omega}(x) = E_{q,\omega}(qx+\omega) \qquad \textbf{(2.26)}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\omega_0 = \dfrac{\omega}{1-q}$ için

$$qx+\omega-\omega_0 = q\left(x-\omega_0\right) \qquad \textbf{(2.27)}$$

eşitliği kullanılmıştır.

Tanım 2.19. Euler'in (1748) tanımladığı klasik analizdeki Gama fonksiyonu $t>0$ için

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}dx \qquad \textbf{(2.28)}$$

şeklindedir.

Özellik 2.20. Gama fonksiyonun sağladığı bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

i. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$,

ii. $\Gamma(1) = 1$,

iii. $t = n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$.

Tanım 2.21. Euler'in (1748) tanımladığı klasik analizdeki Beta fonksiyonu $t, s > 0$ için

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}\,dx \tag{2.29}$$

şeklindedir.

Özellik 2.22. Beta fonksiyonunun sağladığı bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

i. $B(t,s) = B(s,t)$,

ii. $B(t,s) = \dfrac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$,

iii. $B(t,s) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{(1+x)^{t+s}}\,dx$.

Gama fonksiyonunun q-benzeri sonsuz çarpım ile önce Thomae (1869) sonra Jackson (1904) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.23. Gama fonksiyonunun q-benzeri

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}, \quad t > 0 \tag{2.30}$$

ile tanımlanmıştır (Thomae, 1869, Jackson, 1904, Kac ve Cheung, 2002).

Yapılan ilk çalışmalarda $\Gamma_q(t)$ fonksiyonunun q-integral gösterimden kaçınılmış, daha doğrusu tam tanımı yapılamamıştır. q-Gama fonksiyonunun ilk doğru integral gösterimi $E_q(x)$ üstel fonksiyonuna bağlı olarak herhangi bir $t > 0$ için

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]_q} x^{t-1} E_q(-qx)\,d_q x \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Koornwinder, 1994a; 1994b).

Özellik 2.24. (2.31) tanımına göre q-Gama fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $\Gamma_q(t+1)=[t]_q\Gamma_q(t)$,

ii. $\Gamma_q(1)=1$,

iii. $t=n\in\mathbb{N}$ için $\Gamma_q(n+1)=[n]_q!$.

Beta fonksiyonunun q-benzerinin integral gösterimi daha kolay yapıldı. Yine önce Thomae (1869) sonra Jackson (1904) tarafından q-Beta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.25. Beta fonksiyonun q-benzeri $t,s>0$ için

$$B_q(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-qx)^{s-1}d_qx \qquad \textbf{(2.32)}$$

ile tanımlanmıştır.

Özellik 2.26. (2.32) tanımına göre q-Beta fonkisyonu ile q-Gama fonksiyonu arasında

$$B_q(t,s)=\frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \qquad \textbf{(2.33)}$$

bağıntısı vardır (De Sole ve Kac, 2005).

Jackson (1910), Özellik 2.22 (iii) özelliğinin q-benzerini tanımlamıştır. Fakat bu tanımlamada integralin yakınsaklığının sağlanmadığı düşünülmektedir (De Sole ve Kac, 2005).

Yukarıda bahsi geçen tanımlamalar birinci tür q-üstel fonksiyonu $E_q(x)$ temel alınarak yapılmıştır. İkinci tür q-üstel fonksiyonu $e_q(x)$ kullanılarak q-Gama ve q-Beta fonksiyonu De Sole ve Kac (2005) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.27. İkinci tür q-Gama ve q-Beta fonksiyonu $R>0$ için, sırasıyla,

$$\gamma_q^{(R)}(t)=\int_0^{\infty/R(1-q)} x^{t-1}e_q(-x)d_qx \qquad \textbf{(2.34)}$$

ve

$$\beta_q^{(R)}(t,s) = \int_0^{\infty/R} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x \qquad \textbf{(2.35)}$$

ile tanımlanmıştır.

3. GAMA VE BETA FONKSİYONLARININ q,ω-BENZERLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Gama ve Beta fonksiyonlarının q,ω-benzerleri tanımlanarak; temel özellikleri incelenecektir. Tanımlamalar q,ω-üstel fonksiyonun her iki türü için de yapılacaktır. Bu sebeple bu bölüm iki alt bölüm halinde düzenlenecektir.

Hahn fark operatörü, q-fark operatörü ve ileri fark operatörünün birleşiminden oluştuğu için yani (2.13) eşitlikleri sağlandığı için, bu bölümde verilen tüm integral tanımları ve elde edilen tüm özelliklerin $\omega_0 \to 0$ için q-benzerlerine, $\omega_0 \to 0$, $q \to 1$ için klasikteki benzerlerine karşılık geldiği yapılan integral tanımlarından kolayca görülmektedir.

3.1. Birinci Tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta Fonksiyonları

Birinci tür q,ω-üstel fonksiyonu $E_{q,\omega}(x)$ kullanılarak oluşturulan integral tanımları Gama ve Beta fonksiyonları içinde birinci türü ifade etmektedir. $E_{q,\omega}(x)$ üstel fonksiyonu, q,ω-integrali ve bunların sağladığı özellikler kullanılarak Gama ve Beta fonksiyonlarının q,ω-integral gösterimleri tanımlanacaktır. Bu integrallerin yakınsaklık durumları oluşturulan seri toplamın yakınsaklığına göre D-Alembert oran testi kullanılarak incelenecektir. Verilen integral tanımlarina göre klasikteki özelliklerin q,ω-benzerleri oluşturulacaktır.

Tanım 3.1. Herhangi bir $t > 0$ için

$$\Gamma_{q,\omega}(t) = \int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} (x-\omega_0)^{t-1} E_{q,-\omega}(-(qx+\omega))d_{q,\omega}x \qquad \textbf{(3.1)}$$

ile tanımlı fonksiyona birinci tür q,ω-Gama fonksiyonu denir.

Teorem 3.2. (3.1) ile tanımlanan birinci tür q,ω-Gama fonksiyonu $t > 0$ için yakınsaktır.

İspat. Gerçekten (3.1) integralinin yakınsaklığı incelenirse: $\omega_0 + [\infty]_q = \dfrac{\omega+1}{1-q}$

eşitliği ve (2.17) integral tanımına göre

$$\Gamma_{q,\omega}(t)=\left(\left(1-q\right)\frac{\omega+1}{1-q}-\omega\right)\sum_{n=0}^{\infty}q^n f\left(q^n\frac{\omega+1}{1-q}+\omega\left[n\right]_q\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^n f\left(q^n\frac{\omega+1}{1-q}+\omega\left[n\right]_q\right) \tag{3.2}$$

olarak yazılır. Burada

$$f\left(x\right)=\left(x-\omega_0\right)^{t-1}E_{q,-\omega}\left(-\left(qx+\omega\right)\right) \tag{3.3}$$

ile gösterildi.

$$q^n\frac{\omega+1}{1-q}+\omega\left[n\right]_q=q^n\frac{\omega+1}{1-q}+\omega\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{q^n+\omega}{1-q} \tag{3.4}$$

olduğundan bu eşitlik (3.2) de yerine yazılırsa

$$f\left(q^n\frac{\omega+1}{1-q}+\omega\left[n\right]_q\right)=f\left(\frac{q^n+\omega}{1-q}\right)=\left(\frac{q^n+\omega}{1-q}-\omega_0\right)^{t-1}E_{q,-\omega}\left(-\left(q\frac{q^n+\omega}{1-q}+\omega\right)\right)$$
$$=\left(\frac{q^n}{1-q}\right)^{t-1}E_{q,-\omega}\left(-\left(\frac{q^{n+1}+\omega}{1-q}\right)\right) \tag{3.5}$$

elde edilir. (2.23) eşitliğinden

$$E_{q,-\omega}\left(-\left(\frac{q^{n+1}+\omega}{1-q}\right)\right)=\left(1+\left(-\left(1-q\right)\frac{q^{n+1}+\omega}{1-q}+\omega\right)\right)_q^{\infty}$$
$$=\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty}$$
$$=\left(q^{n+1};q\right)_{\infty} \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6), (3.5) eşitliğinde yerine yazılır ve çıkan sonuç (3.2) eşitliğinde kullanılırsa

$$\Gamma_{q,\omega}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\left(\frac{q^n}{1-q}\right)^{t-1}\left(q^{n+1};q\right)_{\infty}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q^n\right)^t}{\left(1-q\right)^{t-1}}\left(q^{n+1};q\right)_{\infty} \tag{3.7}$$

seri toplamı elde edilir. $a_n = \frac{\left(q^n\right)^t}{\left(1-q\right)^{t-1}}\left(q^{n+1};q\right)_\infty$ olarak alınırsa (3.7) ifadesinin sağ tarafı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi olup D'Alembert oran testine göre $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ise seri yakınsak olur. Buna göre

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{\left(q^{n+1}\right)^t}{\left(1-q\right)^{t-1}}\left(q^{n+2};q\right)_\infty}{\frac{\left(q^n\right)^t}{\left(1-q\right)^{t-1}}\left(q^{n+1};q\right)_\infty}\right| = \left|\frac{q^t}{1-q^{n+1}}\right| \tag{3.8}$$

ve $q \in \left(0,1\right)$ için $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olduğundan

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{q^t}{1-q^{n+1}}\right| = q^t \tag{3.9}$$

olacaktır. Bu durumda da $L<1$ olması ancak $t>0$ için mümkün olacaktır. O halde (3.7) serisi dolayısıyla (3.1) integrali $t>0$ için yakınsaktır.

Teorem 3.3. Herhangi bir $t>0$ için

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = [t]_q \Gamma_{q,\omega}(t) \tag{3.10}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.1) tanımı $t+1$ için yazılırsa

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = \int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} (x-\omega_0)^t E_{q,-\omega}(-(qx+\omega))d_{q,\omega}x \tag{3.11}$$

olur. Burada

$$D_{q,\omega}E_{q,-\omega}(-x) = -E_{q,-\omega}(-(qx+\omega)) \tag{3.12}$$

eşitliği kullanılırsa, (3.11) ifadesi

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = -\int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} (x-\omega_0)^t D_{q,\omega}E_{q,-\omega}(-x)d_{q,\omega}x \tag{3.13}$$

olarak yazılır. (2.22) ile verilen q,ω-kısmi integrasyon yönteminin uygulanmasıyla (3.13) eşitliği

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = -((x-\omega_0)^t E_{q,-\omega}(-x)) \Big|_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} + \int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} D_{q,\omega}(x-\omega_0)^t E_{q,-\omega}(-(qx+\omega)) d_{q,\omega}x \tag{3.14}$$

formunu alır. Üst sınır ve alt sınırın yazılmasıyla ve (2.23) tanımına göre

$$E_{q,-\omega}(-(\omega_0+[\infty]_q)) = E_{q,-\omega}(-(\frac{\omega+1}{1-q})) = (1;q)_\infty = (1-1)(1-q)(1-q^2)... = 0 \tag{3.15}$$

olup (3.14) eşitliği

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = \int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} D_{q,\omega}(x-\omega_0)^t E_{q,-\omega}(-(qx+\omega)) d_{q,\omega}x \tag{3.16}$$

olur. (3.16) da Örnek 2.11 kullanılırsa

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = [t]_q \int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} (x-\omega_0)^{t-1} E_{q,-\omega}(-(qx+\omega)) d_{q,\omega}x$$

elde edilir. Buradan (3.1) tanımına göre

$$\Gamma_{q,\omega}(t+1) = [t]_q \Gamma_{q,\omega}(t)$$

(3.10) eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.

$$\Gamma_{q,\omega}(1) = 1 \tag{3.17}$$

sağlanır.

İspat. (3.1) tanımı $t=1$ için yazılırsa

$$\Gamma_{q,\omega}(1) = \int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} E_{q,-\omega}(-(qx+\omega)) d_{q,\omega}x$$
$$= -\int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q} D_{q,\omega} E_{q,-\omega}(-x) d_{q,\omega}x$$

olur. (2.21) eşitliğinden

$$\Gamma_{q,\omega}(1) = -E_{q,-\omega}(-(\omega_0 + [\infty]_q)) + E_{q,-\omega}(-\omega_0)$$

olup Özellik 2.17 ve (3.15) eşitliklerinden

$$\Gamma_{q,\omega}(1) = 1$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.5. $t = n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma_{q,\omega}(n+1) = [n]_q! \tag{3.18}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.10) eşitliğinde $t = n \in \mathbb{N}$ değerleri yazılırsa ve (3.17) kullanılırsa

$$\Gamma_{q,\omega}(2) = \Gamma_{q,\omega}(1+1) = [1]_q \Gamma_{q,\omega}(1) = [1]_q,$$

$$\Gamma_{q,\omega}(3) = \Gamma_{q,\omega}(2+1) = [2]_q \Gamma_{q,\omega}(2) = [2]_q [1]_q = [2]_q!,$$

$$\Gamma_{q,\omega}(4) = \Gamma_{q,\omega}(3+1) = [3]_q \Gamma_{q,\omega}(3) = [3]_q [2]_q! = [3]_q!,$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_{q,\omega}(n+1) = [n]_q \Gamma_{q,\omega}(n) = [n]_q [n-1]_q! = [n]_q!$$

olduğu görülür.

Tanım 3.6. Herhangi bir $t, s > 0$ için

$$B_{q,\omega}(t,s) = \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} (x-\omega_0)^{t-1} (1-q(x-\omega_0))_q^{s-1} d_{q,\omega}x \tag{3.19}$$

ile tanımlı fonksiyona birinci tür q,ω-Beta fonksiyonu denir.

Teorem 3.7. (3.19) ile tanımlanan birinci tür q,ω-Beta fonksiyonu $t, s > 0$ için yakınsaktır.

İspat. Gerçekten (3.19) integralinin yakınsaklığı incelenirse (2.17) integral tanımına göre

$$\begin{aligned} B_{q,\omega}(t,s) &= \left((1-q)(\omega_0+1)-\omega\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n g\left(q^n(\omega_0+1)+\omega[n]_q\right) \\ &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n g\left(q^n + \omega_0\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak yazılır. Burada

$$g\left(x\right)=\left(x-\omega_0\right)^{t-1}(1-q(x-\omega_0))_q^{s-1} \tag{3.21}$$

ile gösterildi.

$$\begin{aligned} g\left(q^n+\omega_0\right) &= \left(q^n+\omega_0-\omega_0\right)^{t-1}(1-q(q^n+\omega_0-\omega_0))_q^{s-1} \\ &= \left(q^n\right)^{t-1}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1} \\ &= \left(q^n\right)^{t-1}\left(q^{n+1};q\right)_{s-1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

olup (3.22), (3.20) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} B_{q,\omega}(t,s) &= \left(1-q\right)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\left(q^n\right)^{t-1}\left(q^{n+1};q\right)_{s-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-q\right)\left(q^n\right)^t\left(q^{n+1};q\right)_{s-1} \end{aligned} \tag{3.23}$$

seri toplamı elde edilir. $b_n=\left(1-q\right)\left(q^n\right)^t\left(q^{n+1};q\right)_{s-1}$ olarak alınırsa (3.23) ifadesinin sağ tarafı $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serisi olup D'Alembert oran testine göre $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|<1$ ise seri yakınsak olur. Buna göre

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\frac{\left(1-q\right)\left(q^{n+1}\right)^t\left(q^{n+2};q\right)_{s-1}}{\left(1-q\right)\left(q^n\right)^t\left(q^{n+1};q\right)_{s-1}}\right|=\left|q^t\,\frac{1-q^{n+s}}{1-q^{n+1}}\right| \tag{3.24}$$

olup, $q\in\left(0,1\right)$ için $\lim_{n\to\infty} q^n=0$ olduğundan $L<1$ olması $t>0$ ve $s\in\mathbb{R}$ için mümkündür. Fakat (2.5) ten $s>0$ olmalıdır. O halde (3.23) serisi dolayısıyla (3.19) integrali $t,s>0$ için yakınsaktır.

Teorem 3.8. Herhangi bir $t>0$ için q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$B_{q,\omega}(t,\infty)=(1-q)^t\,\Gamma_{q,\omega}(t) \tag{3.25}$$

İspat. (3.19) tanımı $s=\infty$ için yazılırsa

$$B_{q,\omega}(t,\infty)=\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t-1}(1-q(x-\omega_0))_q^{\infty}\,d_{q,\omega}x \tag{3.26}$$

olur. $E_{q,-\omega}\left(-(qx+\omega)\right)=(1-(q(x(1-q)-\omega))_q^{\infty}$ olduğundan

$$(1-q(x-\omega_0))_q^{\infty}=E_{q,-\omega}\left(-q\left(\frac{x-\omega_0+\omega}{1-q}\right)\right)$$

yazılır. Bu eşitlik (3.26) da yerine yazılırsa

$$B_{q,\omega}(t,\infty)=\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t-1}E_{q,-\omega}\left(-q\left(\frac{x-\omega_0+\omega}{1-q}\right)\right)d_{q,\omega}x \qquad \textbf{(3.27)}$$

elde edilir. (3.27) de $x-\omega_0=u(1-q)-\omega$ değişken değişimi yapılırsa $d_{q,\omega}x=(1-q)d_{q,\omega}u$ olup, integral sınırları $x=\omega_0$ için $u=\omega_0$, $x=\omega_0+1$ için $u=\omega_0+[\infty]_q$ olacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned}B_{q,\omega}(t,\infty)&=\int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q}(1-q)^{t-1}(u-\omega_0)^{t-1}E_{q,-\omega}\left(-(qu+\omega)\right)(1-q)d_{q,\omega}u\\&=(1-q)^t\int_{\omega_0}^{\omega_0+[\infty]_q}(u-\omega_0)^{t-1}E_{q,-\omega}\left(-(qu+\omega)\right)d_{q,\omega}u\end{aligned} \qquad \textbf{(3.28)}$$

yazılır. (3.1) tanımına göre (3.28) eşitliği

$$B_{q,\omega}(t,\infty)=(1-q)^t\Gamma_{q,\omega}(t)$$

formundadır. Sonuç olarak, (3.25) bağıntısı sağlanmış olur.

Özellik 3.9.

$$D_{q,\omega}(1-(x-\omega_0))_q^n=-[n]_q(1-q(x-\omega_0))_q^{n-1} \qquad \textbf{(3.29)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.11) tanımından

$$
\begin{aligned}
D_{q,\omega}(1-(x-\omega_0))_q^n &= \frac{(1-(qx+\omega-\omega_0))_q^n-(1-(x-\omega_0))_q^n}{(qx+\omega)-x} \\
&= \frac{(1-q(x-\omega_0))_q^n-(1-(x-\omega_0))_q^n}{(qx+\omega)-x} \\
&= \frac{(1-q(x-\omega_0))_q^{n-1}((1-q^n(x-\omega_0)-(1-(x-\omega_0))}{qx+\omega-x} \\
&= -\frac{(1-q^n)}{(1-q)}(1-q(x-\omega_0))_q^{n-1} \\
&= -\left[n\right]_q(1-q(x-\omega_0))_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Teorem 3.10. (3.19) ile tanımlı q,ω-Beta fonksiyonları arasında

$$
B_{q,\omega}(t+1,s)=\frac{[t]_q}{[s]_q}B_{q,\omega}(t,s+1) \tag{3.30}
$$

yineleme bağıntısı vardır.

İspat. (3.19) tanımı $t+1$ için yazılırsa

$$
B_{q,\omega}(t+1,s)=\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^t(1-q(x-\omega_0))_q^{s-1}d_{q,\omega}x
$$

olur. Burada (3.29) eşitliği kullanılırsa

$$
B_{q,\omega}(t+1,s)=-\frac{1}{[s]_q}\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^tD_{q,\omega}(1-(x-\omega_0))_q^s d_{q,\omega}x
$$

yazılır. (2.22) ile verilen q,ω-kısmi integrali uygulanırsa ve Örnek 2.11 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
B_{q,\omega}(t+1,s) &= -\frac{1}{[s]_q}\left((x-\omega_0)^t(1-(x-\omega_0))_q^s\right)\Big|_{\omega_0}^{\omega_0+1} \\
&\quad+\frac{1}{[s]_q}\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(1-(qx+\omega-\omega_0))_q^{s-1}D_{q,\omega}(x-\omega_0)^t d_{q,\omega}x \\
&= \frac{[t]_q}{[s]_q}\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t-1}(1-(q(x-\omega_0))_q^{s-1}d_{q,\omega}x
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.19) tanımından

$$
B_{q,\omega}(t+1,s)=\frac{[t]_q}{[s]_q}B_{q,\omega}(t,s+1)
$$

olduğu elde edilir.

Teorem 3.11. (3.19) ile tanımlı q,ω-Beta fonksiyonları

$$B_{q,\omega}(t,s+1)=B_{q,\omega}(t,s)-q^{s}B_{q,\omega}(t+1,s) \qquad \textbf{(3.31)}$$

yineleme bağıntısını da sağlar.

İspat. (3.19) tanımı $s+1$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}B_{q,\omega}(t,s+1)&=\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t-1}(1-q(x-\omega_0))_q^{s}d_{q,\omega}x\\&=\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t-1}(1-(q(x-\omega_0))_q^{s-1}(1-q^{s}(x-\omega_0))d_{q,\omega}x\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}B_{q,\omega}(t,s+1)=&\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t-1}(1-q(x-\omega_0))_q^{s-1}d_{q,\omega}x\\&-q^{s}\int_{\omega_0}^{\omega_0+1}(x-\omega_0)^{t}(1-q(x-\omega_0))_q^{s-1}d_{q,\omega}x\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.19) tanımına göre

$$B_{q,\omega}(t,s+1)=B_{q,\omega}(t,s)-q^{s}B_{q,\omega}(t+1,s)$$

elde edilir.

Özellik 3.12. q-sayıları arasında

$$[n]_q+q^{n}[k]_q=[n+k]_q \qquad \textbf{(3.32)}$$

eşitliği vardır.

İspat. (2.3) eşitliğine göre

$$[n]_q+q^{n}[k]_q=\frac{1-q^{n}}{1-q}+q^{n}\frac{1-q^{k}}{1-q}=\frac{1-q^{n+k}}{1-q}=[n+k]_q$$

elde edilir.

Sonuç 3.13. (3.31) eşitliği (3.30) da yerine yazılırsa ve (3.32) kullanılırsa q,ω-Beta fonksiyonları arasında

$$B_{q,\omega}(t+1,s)=\frac{[t]_q}{[t+s]_q}B_{q,\omega}(t,s) \tag{3.33}$$

yineleme bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.14. Birinci tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları

$$B_{q,\omega}(t,s)=\frac{\Gamma_{q,\omega}(t)\Gamma_{q,\omega}(s)}{\Gamma_{q,\omega}(t+s)} \tag{3.34}$$

geçiş bağıntısını sağlar.

İspat. (3.33) ile (3.10) karşılaştırılırsa (3.34) eşitliğinin sağlandığı görülür.

3.2. İkinci Tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta Fonksiyonları

İkinci tür q,ω-üstel fonksiyonu $e_{q,\omega}(x)$ kullanılarak oluşturulan integral tanımları Gama ve Beta fonksiyonları içinde ikinci türü ifade etmektedir. Bu bölümde önceki bölüme benzer incelemeler yapılacaktır.

Tanım 3.15. Herhangi bir $t>0$ ve $R>0$ için

$$\gamma_{q,\omega}(t)=\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}}(x-\omega_o)^{t-1}e_{q,-\omega}(-x)d_{q,\omega}x \tag{3.35}$$

ile tanımlı fonksiyona ikinci tür q,ω-Gama fonksiyonu denir.

Teorem 3.16. (3.35) ile tanımlanan ikinci tür q,ω-Gama fonksiyonu $t>0$ için yakınsaktır.

İspat. Gerçekten (3.35) integralinin yakınsaklığı incelenirse (2.17) integral tanımına göre

$$\begin{aligned}\gamma_{q,\omega}(t)&=\left((1-q)\left(\omega_0+\frac{\infty}{(1-q)R}\right)-\omega\right)\sum_{n=0}^{\infty}q^n h\left(q^n\left(\omega_0+\frac{\infty}{(1-q)R}\right)+\omega[n]_q\right)\\&=\frac{\infty}{R}\sum_{n=0}^{\infty}q^n h\left(\frac{q^n\infty}{(1-q)R}+\omega_0\right)\end{aligned} \tag{3.36}$$

olarak yazılır.

$$h(x)=(x-\omega_0)^{t-1}e_{q,-\omega}(-x) \tag{3.37}$$

olmak üzere

$$h\left(\frac{q^n\infty}{(1-q)R}+\omega_0\right)=\left(\frac{q^n\infty}{(1-q)R}\right)^{t-1}\frac{1}{\left(-\frac{q^n\infty}{R};q\right)_{\infty\ s-1}} \tag{3.38}$$

olup (3.38), (3.36) da yerine yazılırsa

$$\gamma_{q,\omega}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\infty}{R}q^n\left(\frac{q^n\infty}{(1-q)R}\right)^{t-1}\frac{1}{\left(-\frac{q^n\infty}{R};q\right)_{\infty}} \tag{3.39}$$

seri toplamı elde edilir. $c_n=\frac{\infty}{R}q^n\left(\frac{q^n\infty}{(1-q)R}\right)^{t-1}\frac{1}{\left(-\frac{q^n\infty}{R};q\right)_{\infty}}$ olarak alınırsa (3.39) ifadesinin sağ tarafı $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ serisi olup D'Alembert oran testine göre $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1$ ise seri yakınsak olur. Buna göre

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left|q^t\left(1+q^n\frac{\infty}{R}\right)\right| \tag{3.40}$$

olup, $q\in(0,1)$ için $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ olduğundan $L<1$ olması $t>0$ için sağlanır. O halde (3.39) serisi dolayısıyla (3.35) integrali $t>0$ için yakınsaktır. Buradaki $R>0$ koşulu genelleştirilmiş integral tanımından gelmektedir. (De Sole ve Kac, 2005).

Teorem 3.17. Herhangi bir $t>0$ için

$$\gamma_{q,\omega}(t+1)=q^{-t}[t]_q\gamma_{q,\omega}(t) \tag{3.41}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. (3.35) tanımı $t+1$ için yazılırsa

$$\gamma_{q,\omega}(t+1)=\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}}(x-\omega_o)^t e_{q,-\omega}(-x)d_{q,\omega}x$$

olur. Burada $D_{q,\omega}e_{q,-\omega}(-x)=-e_{q,\omega}(-x)$ eşitliği kullanılırsa

$$\gamma_{q,\omega}(t+1)=-\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}}(x-\omega_o)^t D_{q,\omega}e_{q,-\omega}(-x)d_{q,\omega}x$$

yazılır. (2.22) eşitliğinden

$$\gamma_{q,\omega}(t+1) = -\left((x-\omega_o)^t e_{q,-\omega}(-x)\right)\Big|_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}} + \int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}} e_{q,-\omega}(-(qx+\omega))D_{q,\omega}(x-\omega_o)^t d_{q,\omega}x$$

olur. Burada $e_{q,-\omega}\left(-\left(\omega_o+\dfrac{\infty}{(1-q)R}\right)\right)=0$ eşitliği ve Örnek 2.11 kullanılırsa

$$\gamma_{q,\omega}(t+1) = [t]_q \int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}} (x-\omega_o)^{t-1} e_{q,-\omega}(-(qx+\omega))d_{q,\omega}x \qquad \textbf{(3.42)}$$

elde edilir. (3.42) de $qx+\omega=u$ değişken değişimi yapılırsa, $d_{q,\omega}x = q^{-1}d_{q,\omega}u$ ve sınırlar $x=\omega_0$ için $u=\omega_0$ ve $x=\omega_o+\dfrac{\infty}{(1-q)R}$ için $u=\omega_o+\dfrac{\infty}{(1-q)R}$ olacağından, bunlar yerlerine yazılırsa

$$\gamma_{q.\omega}(t+1) = q^{-t}[t]_q \int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}} (u-\omega_o)^{t-1} e_{q,-\omega}(-u)d_{q,\omega}u \qquad \textbf{(3.43)}$$

elde edilir. (3.35) tanımından

$$\gamma_{q,\omega}(t+1) = q^{-t}[t]_q \gamma_{q,\omega}(t)$$

elde edilir.

Teorem 3.18.

$$\gamma_{q,\omega}(1) = 1 \qquad \textbf{(3.44)}$$

sağlanır.

İspat. (3.35) tanımı $t=1$ için yazılıp, (2.21) uygulanırsa

$$\gamma_{q,\omega}(1)=\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}} e_{q,-\omega}(-x)d_{q,\omega}x$$

$$=-\int_{\omega_0}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}} D_{q,\omega}e_{q,-\omega}(-x)d_{q,\omega}x$$

$$=-e_{q,-\omega}\left(-\left(\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}\right)\right)+e_{q,-\omega}(-(\omega_o))$$

$$=0+1=1$$

elde edilir.

Teorem 3.19. $t=n\in\mathbb{N}$ için

$$\gamma_{q,\omega}(n+1)=q^{-\frac{n(n+1)}{2}}[n]_q! \qquad \textbf{(3.45)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.41) eşitliğinde $t=n\in\mathbb{N}$ değerleri yazılırsa ve (3.44) kullanılırsa

$$\gamma_{q,\omega}(2)=q^{-1}[1]_q\gamma_{q,\omega}(1)=q^{-1}[1]_q$$

$$\gamma_{q,\omega}(3)=q^{-2}[2]_q\gamma_{q,\omega}(2)=q^{-2}[2]_q q^{-1}[1]_q=q^{-(1+2)}[2]_q!,$$

$$\gamma_{q,\omega}(4)=q^{-3}[3]_q\gamma_{q,\omega}(3)=q^{-3}[3]_q q^{-(1+2)}[2]_q!=q^{-(1+2+3)}[3]_q!,$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{q,\omega}(n+1)=q^{-n}[n]_q\gamma_{q,\omega}(n)=q^{-n}[n]_q q^{-(1+2+...+n-1)}[n-1]_q!$$

$$=q^{-(1+2+3+...+n-1+n)}[n]_q!=q^{-\frac{n(n+1)}{2}}[n]_q!$$

olduğu görülür.

Tanım 3.20. Herhangi $t,s>0$ ve $R>0$ için

$$\beta_{q,\omega}(t,s)=\int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R}\frac{(x-\omega_0)^{t-1}}{(1+(x-\omega_o))_q^{t+s}}d_{q,\omega}x \qquad \textbf{(3.46)}$$

ile tanımlı fonksiyona ikinci tür q,ω-Beta fonksiyonu denir.

Teorem 3.21. (3.46) ile tanımlanan ikinci tür q,ω-Beta fonksiyonu $t,s>0$ için yakınsaktır.

İspat. Gerçekten (3.46) integralinin yakınsaklığı incelenirse (2.17) integral tanımına göre

$$\beta_{q,\omega}(t,s)=\left(\left(1-q\right)\left(\omega_o+\frac{\infty}{R}\right)-\omega\right)\sum_{n=0}^{\infty}q^n y\left(q^n\left(\omega_o+\frac{\infty}{R}\right)+\omega\left[n\right]_q\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-q\right)\frac{\infty}{R}q^n\frac{\left(q^n\frac{\infty}{R}\right)^{t-1}}{\left(-\frac{q^n\infty}{R};q\right)_{t+s}}$$

serisi elde edilir. Bu seri de oran testine ve (2.5) tanımına göre $t,s>0$ için yakınsak olacağından (3.46) integrali de $t,s>0$ için yakınsaktır. Yine buradaki $R>0$ koşulu genelleştirilmiş integral tanımından gelmektedir.

Teorem 3.22. Herhangi $t,s>0$ için ikinci tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları arasında

$$\beta_{q,\omega}(t,\infty)=(1-q)^t\gamma_{q,\omega}(t) \quad \textbf{(3.47)}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.46) tanımı $s=\infty$ için yazılırsa

$$\beta_{q,\omega}(t,\infty)=\int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R}\frac{\left(x-\omega_0\right)^{t-1}}{(1+(x-\omega_o))_q^{\infty}}d_{q,\omega}x \quad \textbf{(3.48)}$$

olur. Burada $x-\omega_0=(1-q)\left(u-\omega_0\right)$ değişken değişimi yapılırsa

$$\beta_{q,\omega}(t,\infty)=\left(1-q\right)^t\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}}\frac{\left(u-\omega_0\right)^{t-1}}{(1+\left(1-q\right)(u-\omega_o))_q^{\infty}}d_{q,\omega}u \quad \textbf{(3.49)}$$

elde edilir. (2.24) tanımı göz önüne alınırsa, (3.49) eşitliği

$$\beta_{q,\omega}(t,\infty)=\left(1-q\right)^t\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{(1-q)R}}\left(u-\omega_0\right)^{t-1}e_{q,-\omega}\left(-u\right)d_{q,\omega}u$$

olup (3.35) tanımından

$$\beta_{q,\omega}(t,\infty)=\left(1-q\right)^t\gamma_{q,\omega}\left(t\right)$$

elde edilir.

Özellik 3.23.

$$D_{q,\omega}\left(\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)_q^{n+k}}\right)=-\left[n+k\right]_q\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)_q^{n+k+1}} \qquad \textbf{(3.50)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.11) tanımına göre

$$D_{q,\omega}\left(\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)_q^{n+k}}\right)=D_{q,\omega}\left(\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)\left(1+q\left(x-\omega_0\right)\right)...\left(1+q^{n+k-1}\left(x-\omega_0\right)\right)}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{\left(1+\left(qx+\omega-\omega_0\right)\right)...\left(1+q^{n+k-1}\left(qx+\omega-\omega_0\right)\right)}-\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)...\left(1+q^{n+k-1}\left(x-\omega_0\right)\right)}}{qx+\omega-x}$$

$$=\frac{\frac{1}{\left(1+q\left(x-\omega_0\right)\right)...\left(1+q^{n+k}\left(x-\omega_0\right)\right)}-\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)...\left(1+q^{n+k-1}\left(x-\omega_0\right)\right)}}{\left(q-1\right)\left(x-\omega_0\right)}$$

$$=\frac{\left(x-\omega_0\right)\left(1-q^{n+k}\right)}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)_q^{n+k+1}\left(q-1\right)\left(x-\omega_0\right)}$$

$$=-\left[n+k\right]_q\frac{1}{\left(1+\left(x-\omega_0\right)\right)_q^{n+k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.24. İkinci tür q,ω-Beta fonksiyonları arasında

$$\beta_{q,\omega}(t+1,s)=q^{-t}\frac{[t]_q}{[t+s]_q}\beta_{q,\omega}(t,s) \qquad \textbf{(3.51)}$$

yineleme bağıntısı vardır.

İspat. (3.46) tanımını $t+1$ için yazılırsa

$$\beta_{q,\omega}(t+1,s)=\int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R}\frac{(x-\omega_o)^t}{(1+(x-\omega_o))_q^{s+t+1}}d_{q,\omega}x$$

olur. (3.50) eşitliğinden

$$\beta_{q,\omega}(t+1,s)=\frac{-1}{[t+s]_q}\int_{\omega_o}^{\omega_o+\frac{\infty}{R}}(x-\omega_o)^t D_{q,\omega}\left(\frac{1}{(1+(x-\omega_o))_q^{t+s}}\right)d_{q,\omega}x \qquad \textbf{(3.52)}$$

yazılabilir. Burada (2.22) q,ω-kısmi integrasyonu uygulanırsa

$$\beta_{q,\omega}(t+1,s) = -\frac{1}{[t+s]_q}\left(\frac{(x-\omega_o)^t}{(1+(x-\omega_o))_q^{t+s}} \Bigg|_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \right)$$

$$+\frac{1}{[t+s]_q} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \frac{1}{(1+(qx+\omega-\omega_o))_q^{t+s}} D_{q,\omega}(x-\omega_o)^t d_{q,\omega}x \qquad \textbf{(3.53)}$$

$$= \frac{[t]_q}{[t+s]_q} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \frac{(x-\omega_0)^{t-1}}{(1+(qx+\omega-\omega_o))_q^{t+s}} d_{q,\omega}x$$

elde edilir. (3.53) te $qx+\omega=u$ değişken değişimi yapılırsa

$$\beta_{q,\omega}(t+1,s) = \frac{[t]_q}{[t+s]_q} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \frac{q^{-t+1}(u-\omega_0)^{t-1}}{(1+(u-\omega_o))_q^{t+s}} q^{-1} d_{q,\omega}u$$

$$= q^{-t} \frac{[t]_q}{[t+s]_q} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \frac{(u-\omega_0)^{t-1}}{(1+(u-\omega_o))_q^{t+s}} d_{q,\omega}u$$

$$= q^{-t} \frac{[t]_q}{[t+s]_q} \beta_{q,\omega}(t,s)$$

elde edilir.

Özellik 3.25. Herhangi bir $s>0$ için

$$\beta_{q,\omega}(1,s) = \frac{1}{[s]_q} \qquad \textbf{(3.54)}$$

olmaktadır.

İspat. (3.46) tanımı $t=1$ için yazılırsa

$$\beta_{q,\omega}(1,s) = \int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \frac{1}{(1+(x-\omega_o))_q^{s+1}} d_{q,\omega}x$$

$$= -\frac{1}{[s]_q} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} D_{q,\omega}\left(\frac{1}{(1+(x-\omega_o))^s} \right) d_{q,\omega}x$$

$$= -\frac{1}{[s]_q} \left(\frac{1}{(1+(x-\omega_o))^s} \Bigg|_{\omega_o}^{\omega_o+\infty/R} \right)$$

$$= -\frac{1}{[s]_q}(0-1)$$

$$= \frac{1}{[s]_q}$$

elde edilir.

Sonuç 3.26. (3.51) eşitliği $t=n\in\mathbb{N}$ için yazılırsa

$$\beta_{q,\omega}(n+1,s)=q^{-\frac{n(n+1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[s+n]_q[s+n-1]_q...[s+1]_q[s]_q} \tag{3.55}$$
$$=q^{-\frac{n(n+1)}{2}}\frac{[n]_q![s-1]_q!}{[n+s]_q!}$$

elde edilir.

Sonuç 3.27. $t,s\in\mathbb{N}$ için (3.18), (3.44) ve (3.55) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}}\beta_{q,\omega}(n,s)=B_{q,\omega}(n,s) \tag{3.56}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik birinci ve ikinci tür q,ω-Beta fonksiyonları arasındaki bağıntıyı ifade eder.

Sonuç 3.28. (3.45) ve (3.55) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\beta_{q,\omega}(n,s)=q^{-\frac{n(n+2s+1)}{2}}\frac{\gamma_{q,\omega}(n)\gamma_{q,\omega}(s)}{\gamma_{q,\omega}(n+s)} \tag{3.57}$$

elde edilir. Bu eşitlik ikinci tür q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları arasındaki geçiş bağıntısını ifade eder.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Gama ve Beta fonksiyonlarının Hahn analizindeki benzerleri oluşturuldu. Yani q,ω-Gama ve q,ω-Beta fonksiyonları tanımlanarak, temel özellikleri incelendi. Üstel fonksiyonun q-analizinde (dolayısıyla q,ω-analizinde) birinci tür ve ikinci tür şeklinde iki tane karşılığı olduğu için, bu q,ω-fonksiyonları her iki tür q,ω-üstel fonksiyonu için ayrı ayrı tanımlandı. Yine bu tanımlara göre Gama ve Beta fonksiyonlarının klasikteki ve q-analizindeki özelliklerinin q,ω-benzerleri oluşturuldu.

Bilindiği üzere Laplace dönüşümünün bazı özellikleri Gama fonksiyonuna bağlı olarak ifade edilmektedir. Literatürde Laplace dönüşümünün q-benzeri üzerine oldukça fazla çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalara benzer olarak Laplace dönüşümünün q,ω-benzeri incelenmek istenirse, bu tezde verilen tanımlar ve bulgular bu incelemeleri oldukça kolaylaştıracaktır.

Analizdeki ve uygulamalı matematikteki çeşitli integral dönüşümlerinin q ve q,ω-benzerleri de yakın zamanlarda incelenmektedir. Yine günümüzün popüler çalışma konularından olan kesirli analizin Hahn analizindeki incelemeleri de yapılmaya başlandı. Tüm bu çalışmalarda q,ω-Laplace dönüşümü ve dolayısıyla q,ω-Gama fonksiyonuna ihtiyaç duyulacaktır. Tezde verilen bulgular bu konuda yapılacak çalışmalara da öncülük edecektir.

KAYNAKLAR

Abdi, W.H. (1961). On q-Laplace transforms. *Proceeding of the National Academy Sciences India.* 29, 389-408.

Abdi, W.H. (1962). On certain q-difference equations and q-Laplace transform. *Proceeding National Academy Sciences India A.* 1-15.

Agarwal, R.P. (1969). Certain fractional q-integrals and q-derivatives. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 66, 365-370.

Aldwoah, K.A. (2009). *Generalized time scales and associated difference equations*, Unpublished Ph.D. thesis, Cairo University, Egypt.

Albayrak, D. (2009). *Özel fonksiyonların q-benzerleri*, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 94, İstanbul.

Al-Salam, W.A. (1966). Some fractional q-integral and q-derivatives. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 15, 135-140.

A´lvarez-Nordase, R. (2016). On characterizations of classical polinomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 196, 320-337.

Annaby, M.H., Hamza, A.E. and Aldwoah, K.A. (2012). Hahn difference operator and associated Jackson-Nörlund integrals. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 154, 133-153.

Annaby, M.H. and Hassan, H.A. (2018). Sampling theorems for Jackson-Nörlund transforms associated with Hahn difference operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 464:1, 493-506.

Annaby, M.H., et al. (2018). A Sturm-Liouville theory for Hahn difference operator. M. Zuhair Nashed and Xin Li (eds.). *Contemporary Mathematics and Its Applications: Monographs, Expositions and Lecture Notes Frontiers in Orthogonal Polynomials and q-Series* (s.35-83). Singapore: World Scientific.

Annaby, M.H. and Mansour, Z.S. (2012). *q-fractional calculus and equations*. Berlin: Springer.

Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R.P. (2013). *Applications of q-calculus in operator theory*. New York: Springer Sience and Business Media LLC.

Artur, M.C., Cruz, B.D., Martins, N. and Torres, D.F.M. (2013). Hahn's symmetric quantum variational calculus. *Numer. Algebra Control Optim.* 3:1, 77-94.

Asawasamrit, S., Sudprasert, C., Ntouyas, S.K. and Tariboon, S. (2019). Some results on quantum Hahn integral inequalities. *Journal of Inequalities and Applications.* 2019:154.

Askey, R. and Wilson, J. (1985). Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize the Jacobi polynomials. *Memoirs of the American Mathematical Society.* 54, 1-55.

Atici, F.M. and Eloe, P.W. (2007). Fractional q-calculus on time scale. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* 14, 341-352.

Brikshavana, T. and Sitthiwirattham, T. (2017). On fractional Hahn calculus. *Advances in Difference Equations.* 2017:354.

Chung, W.S., Kim, T. and In Kwon, H. (2014). On the q-analog of the Laplace transform. *Russian Journal of Mathematical Physics.* 21:2, 156-168.

Corduneanu, C. (2008). *Integral Equations and Applications*, England: Cambridge University Press.

De Sole, A. and Kac, V. (2005). On integral representations of q-gamma and q-beta functions. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni.* 16:9, 11-29.

Euler, L. (1748). *Introduction in analysis infiniterum*. Lausanne: M-M Bousguet.

Hahn, W. (1949). Über orthogonalpolynome, die q-differenzenlgleichungen genügen. *Math. Nachr.* 2, 4-34.

Hamza, A.E. and Ahmed, S.M. (2013a). Theory of linear Hahn difference equations. *Journal of Advances in Mathematics*. 4:2, 441-461.

Hamza, A.E. and Ahmed, S.M. (2013b). Existence and uniqueness of solutions of Hahn difference equations. *Advances in Difference Equations.* 2013:316.

Hıra, F. (2020a). Dirac system associated with Hahn difference operator. *Bulletion of the Malaysian Mathematical Sciences Society.* 43, 3481–3497.

Hıra, F. (2020b). Sampling theorem associated with Dirac system of the Hahn difference operator, *Applied Mathemtics E-Notes*, 20, 115-123.

Jackson, F.H. (1904). A generalization of functions $\Gamma(n)$ and x^n. *Proceedings of the Royal Society of London.* 74, 64-72.

Jackson, F.H. (1910). On q-definite integrals, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.* 41, 193-203.

Kac, V. and Cheung, P. (2002). *Quantum calculus*, Universitext, New York: Springer.

Khan, H., Tunç, C., Alkhazan, A., Ameen, B. and Khan, A. (2018). A generalization of Minkowski's inequality by Hahn integral operator. *Journal of Taibah University for Science*. 12:5, 506-513.

Kobachi, N. (2011). On q-Laplace transformation. *Research Reports of Kumamoto-NCT.* 3, 69-76.

Koekoek, R., Lesky, P.A. and Swarttouw, R.F. (2010). *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*. Springer Monographs in Mathematics, Berlin: Springer.

Koornwinder, T.H. (1994a). q-special functions, a tutorial. *Preprint math.* CA/9403216.

Koornwinder, T.H. (1994b). Compact quantum groups and q-special functions. *V. Baldoni and M.A.Picardello (eds.). Representations of Lie groups and quantum groups. Pitman Research Notes in Mathematics Series* (s. 46-128). Amsterdam: Longman Scientific & Technical.

Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M. (2010). The Hahn quantum variational calculus. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 147:3, 419–442.

Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M. (2014). *Quantum variational calculus.* Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering:Control, Automation and Robotics. New York: Springer.

Naik, S.R. and Haoubold, H.J. (2016). On the q-Laplace transform and related special functions. *Axioms*. 5:24, 1-16.

Patanarapeelert, N. and Sitthiwirattham, T. (2019). On fractional symmetric Hahn calculus. *Mathematics.* 7:873, 1-18

Rahman, M. (2007). *Integral equations and their applications*, Boston: WIT Press.

Rakovic, P.M., MArinkovic, S.D. and Stankovic, M.S. (2007). Fractional integrals and derivatives in q-calculus. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*. 1:1, 311-323.

Tariboon, J., Ntouyas, S.K. and Sutthasin, B. (2019). Impulsive fractional quantum Hahn difference boundary value problems. *Advances in Difference Equations.* 2019:220.

Thomae, J. (1869). Beitrage zur theorie der durch die heinesche reihe. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. 70, 258-281.

Varma, S., Yılmaz Yaşar, B. and Özarslan, M.A. (2019). Hahn-Appell polynomials and their d-orthogonality. *RACSAM.* 113, 2127-2143.

Wang, Y., Liu, Y. and Hou, C. (2018). New concepts of fractional Hahn's q,ω-derivative of Riemann-Liouville type and Caputo type and applications. *Advances in Difference Equations*. 2018:292.

ÖZ GEÇMİŞ

Müzeyyen YÜKSEL, 2015 yılında Vezirköprü Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra 2019 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2020 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : *0000-0002-1791-7208*

Yayınlar:

1. Yüksel, M ve F. Hıra (2021, Aralık). On integral representations of q,ω-Gamma and q,ω-Beta funtions. *International Congress on Multidisciplinary Natural Sciences.* Ankara.