

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



ÖZEL EĞRİLİK ÇİZGİLİ YÜZEY AİLELERİ ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Hasret MURAT

Danışman

Doç. Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Hasret MURAT tarafından, **Doç. Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY** danışmanlığında hazırlanan **Özel Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri Üzerine** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 8.3.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Keziban ORBAY		<input type="checkbox"/>
	Amasya Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi		Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye (Danışman)	Doç.Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY		<input type="checkbox"/>
	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi		Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Prof. Dr. Emin KASAP		<input type="checkbox"/>
	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		Kabul <input type="checkbox"/> Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

08 /03 / 2021
Hasret MURAT

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : Özel Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri Üzerine

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 18/01/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 17

Tek kaynak oranı : % 5 çıkmıştır.

08 /03/ 2021
Gülnur ŞAFFAK ATALAY

ÖZET

ÖZEL EĞRİLİK ÇİZGİLİ YÜZEY AİLELERİ ÜZERİNE

Hasret MURAT

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Mart/2021

Danışman: Doç. Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve daha önce yapılan çalışmalar anlatıldı. İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında temel tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölüm, tezin materyal ve yöntem kısmı olup bu bölümde, E^3 Öklid uzayında Frenet çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin parametrik yüzey üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartlar ifade edildi.

Dördüncü bölüm, tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümün birinci kısmında, E^3 Öklid uzayında Bishop çatısı ile verilen birim hızlı bir eğriden geçen ve bu eğriyi hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olarak kabul eden yüzeyler için gerekli ve yeterli koşullar incelendi. İkinci kısmında E^3 Öklid uzayında parametrik denklem ile verilmiş bir yüzey üzerinde Frenet çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin Mannheim eğri çiftinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartlar verildi. Üçüncü kısmında E^3 Öklid uzayında Bishop çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin Mannheim-B eğri çiftinin parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartlar ifade edildi. Dördüncü, beşinci ve altıncı kısmında ise yüzeyin özel bir çeşidi olan regle yüzey olması durumunda bahsi geçen eğrilerin eğrilik çizgisi olma şartı incelenerek bu regle yüzeyler içerisinde de açılabilir olanları incelendi. Ayrıca elde edilen bulgular kullanılarak çalışmayı destekleyen ve bilinen birkaç özel yüzey çeşitlerini de içeren çeşitli örnekler Mapple 12 programı kullanılarak verildi.

Beşinci ve son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar tartışılarak yapılabilecek çalışmalar üzerinde duruldu.

Anahtar Sözcükler: Açılabilir Regle yüzey, Bishop çatısı, Eğrilik çizgisi, Mannheim eğri, Mannheim-B eğri çifti, Öklid uzayı, Regle yüzey.

ABSTRACT

ON SURFACES FAMILIES WITH SPECIAL CURVATURE

Hasret MURAT

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, March/2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY

This study consists of five chapters. In the first chapter, the aim of the thesis and the previous studies are presented. In the second chapter, the basic definitions and theorems in 3-dimensional Euclidean Space are given.

The third chapter is the material and the method section of the thesis and in this chapter, necessary and sufficient conditions that are necessary for the unit speed curve given with the Frenet frame in E^3 Euclidean space to be both parametric and line of curvature on a parametric surface is explained.

The fourth chapter constitutes the original part of the thesis. In the first section of this chapter, the necessary and sufficient conditions for surfaces that pass through a unit speed curve given with Bishop frame in the E^3 Euclidean space and that accept this curve as both a parameter curve and a line of curvature were examined. In the second part, necessary and sufficient conditions are given for the unit speed curve given with the Frenet frame on a surface given with the parametric equation in E^3 Euclidean space to be the line of curvature of the Mannheim curve pair. In the third part, the necessary and sufficient conditions for unit speed curve given with Bishop frame in the E^3 Euclidean space to be both parameter curve and line of curvature on the surface that is given with parametric equation of Mannheim-B pair are explained.

In the fourth and fifth part, in the event of surface of being a ruled surface which is a special type of surface, the conditions of mentioned surfaces of being line of curvature were examined and the developable ones among these ruled surfaces are examined. In addition, using the obtained findings, various examples including a few known specific surface types supporting the study were given using the Mapple 12 program.

In the fifth and last chapter, results that are obtained from the study are discussed and studies that can be done was emphasized.

Keywords: Bishop frame, Developable ruled surface, Euclidean Space, Line of curvature, Mannheim curve, Mannheim- B Curve Pair, Ruled Surface.

TEŐEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin boyunca bana gerekli imkan ve kaynakları sağlayan, yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, öğrencisi olmaktan onur duyduğum, göstermiş olduğu hoşgörü ve sabır sayesinde bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY' a en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, bu tez çalışmasında da bana destek olan canım anneme emeklerinden dolayı müteşekkirim.

Bütün öğrenim hayatımda bana olan güvenini hiçbir zaman eksiltmeyen, çalışmalarımıda her zaman bana yardımcı olan canım eşime sonsuz teşekkürler.

Hasret MURAT

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı	1
1.2. Literatür Özeti	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM	14
4. BULGULAR	16
4.1. Ortak Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri	16
4.2. Ortak Mannheim Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri	25
4.3. Ortak Mannheim-B Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri	28
4.4. Ortak Eğrilik Çizgili Regle Yüzeyler	33
4.5. Ortak Mannheim Eğrilik Çizgili Regle Yüzeyler	36
4.6. Ortak Mannheim-B Eğrilik Çizgili Regle Yüzeyler	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Yüzey üstüne sarılı DNA kesiti.....	2
Şekil 2.2. Eğrilik çizgileriyle Michelangelo'nun David adlı eseri.....	3
Şekil 2.3. Eğrilik çizgileriyle kubbe benzeri şekil ağı.....	3
Şekil 2.4. Kumaşların bilgisayarla oluşturulmuş bazı 3 boyutlu katı örnekleri.....	4
Şekil 2.5. Çevre eğrisi ile bir ayakkabı yüzey modeli.....	5
Şekil 2.6. Parametreleri ile birlikte nominal isogeodezik yüzey.....	5
Şekil 3.1. Ortak Mannheim eğrileri.....	9
Şekil 3.2. Ortak Mannheim-B eğrileri.....	10
Şekil 4.1. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_1(s, v)$ yüzeyi.....	18
Şekil 4.2. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_2(s, v)$ yüzeyi	19
Şekil 4.3. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_3(s, v)$ yüzeyi	20
Şekil 4.4. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_4(s, v)$ yüzeyi	21
Şekil 4.5. Ortak eğrilik çizgili tor ve $P_5(s, v)$ yüzeyi.....	22
Şekil 4.6. Ortak eğrilik çizgili tor ve $P_6(s, v)$ yüzeyi.....	22
Şekil 4.7. Ortak eğrilik çizgili bir kanatlı helikoid ve möbiüs yüzeyi	23
Şekil 4.8. Ortak eğrilik çizgili helikoid ve $P_8(s, v)$ yüzeyi.....	24
Şekil 4.9. Ortak eğrilik çizgili helikoid ve $P_9(s, v)$ yüzeyi.....	25
Şekil 4.10. Ortak Mannheim eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi.....	28
Şekil 4.11. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi.....	32
Şekil 4.12. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir başka üyesi.....	33
Şekil 4.13. Ortak eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi.....	35
Şekil 4.14. Ortak eğrilik çizgili açılabilir olmayan regle yüzey ailesinin bir üyesi.....	36
Şekil 4.15. Ortak Mannheim eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi	38
Şekil 4.16. Ortak Mannheim eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi.....	38
Şekil 4.17. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi	40
Şekil 4.18. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi.....	41

1. GİRİŞ

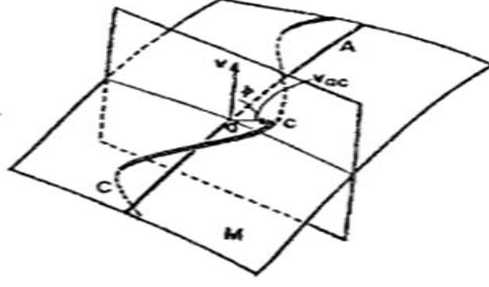
1.1. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin, Frenet çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin Mannheim eğri çiftinin ve Bishop çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin Mannheim-B eğri çiftinin bir yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşulların elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Bu amaç doğrultusunda ilk olarak, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilecektir. Daha sonra Frenet çatına göre verilen eğrinin Mannheim eğri çiftinin ve Bishop çatısına göre verilen eğrinin Mannheim-B eğri çiftinin hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olma koşulu araştırılacaktır. Ayrıca yüzeyin özel bir çeşidi olan regle yüzey olması durumunda da bahsi geçen eğriler için eğrilik çizgisi olma şartları incelenerek bu yüzeyler içerisinde de açılabilir olma koşulu verilecektir.

1.2. Literatür Özeti

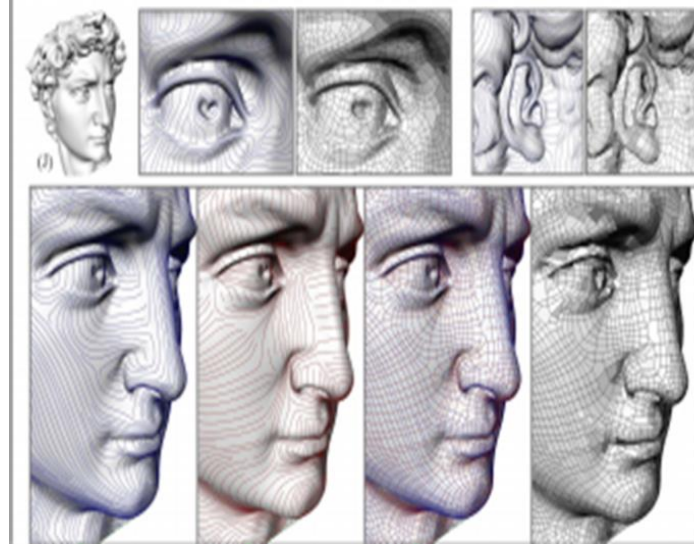
Üç boyutlu Öklid uzayında C^3 sınıftan bir eğri verildiğinde bu eğrinin her noktasında Frenet çatısı adı verilen bir ortonormal vektör sistemi kurulabilir. Frenet çatısı eğriyi karakterize eden eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarını tanımlamaktadır. Fakat eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu noktalarda Frenet çatısının kurulamaması bu çatının dezavantajıdır. Bunun üzerine Bishop 1975 yılında alternatif paralel çatı olarak adlandırdığımız Bishop çatısını tanımlamıştır. Bishop'un çalışmasına göre bu çatının kurulabilmesi için eğrinin C^2 sınıftan olması yeterlidir (Bishop,1975). Bu ise eğrinin Frenet çatısının kurulamadığı noktalarda da eğri boyunca Bishop çatısının kurulabileceğini göstermektedir. Bu çatı ile tanımlanan bir eğri yardımıyla DNA sarmalı hakkında hesaplamalar yapmak bile mümkün hale gelmiştir (Clauvelin vd, 2012). Ayrıca bilgisayar animasyonlarında sanal kameraların kontrolü için yeni bir kontrol yolu sağlanmıştır (Han, 2008).



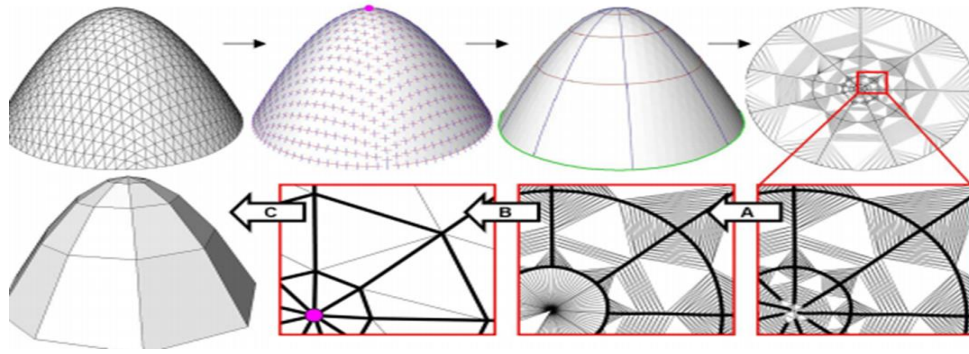
Şekil 2.1. Yüzey üstüne sarılı DNA kesiti (Yılmaz vd,2005).

Eğriler kavramı diferensiyel geometrinin temel konularından biridir. İki uzay eğrisinin Frenet çatılarının vektörleri arasındaki lineer bağımlılık göz önüne alınarak yapılan çalışmalar diferensiyel geometride dikkat çeken konulardan biridir. Bu özellikteki eğri çiftlerinden iyi bilinen iki örneği evolüt-involüt eğriler ve Bertrand eğrileridir. Daha sonra yeni bir bağlantılı eğri çifti olan Mannheim eğrileri tanıtılmıştır. Bu eğri ile ilgili ilk çalışmalar 1878 yılında yapılmaya başlansa da teorik olarak Mannheim eğrileri 1966 yılında Blum tarafından ortaya konulmuştur (Blum, 1966). Daha sonra bir eğrinin Öklid uzayında Mannheim eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşullar 2008 yılında Liu ve Wang tarafından verilmiştir (Liu ve Wang, 2008). Mannheim eğriler ile ilgili Öklid ve Minkowski uzayında bu güne kadar birçok çalışma yapılmıştır (Matsuda ve Yorozu, 2009; Orbay ve Kasap, 2009). 2017 yılında da Masal ve Azak E^3 üç boyutlu Öklid uzayında yeni bir eğri çifti olan Mannheim-B eğrisini tanımlayarak, Mannheim B-eğri çiftlerinin Frenet ve Bishop vektörleri ve eğrilikleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir (Masal ve Azak, 2017).

Bir eğrilik çizgisi, bir yüzeydeki önemli karakteristik eğrilerden biridir. Asli yöndeki değişiklikleri göstermek için yüzey analizinde faydalı bir araçtır. Eğrilik çizgisi; Geometrik Tasarım, Şekil Tanıma, Yüzeylerin Poligonizasyonu ve Yüzey İşleme’de yaygın olarak kullanılan yüzeylerin analizini yönlendirir (Aliez vd,2003; Maekawa vd,1996; Patrikalakis vd,2002).



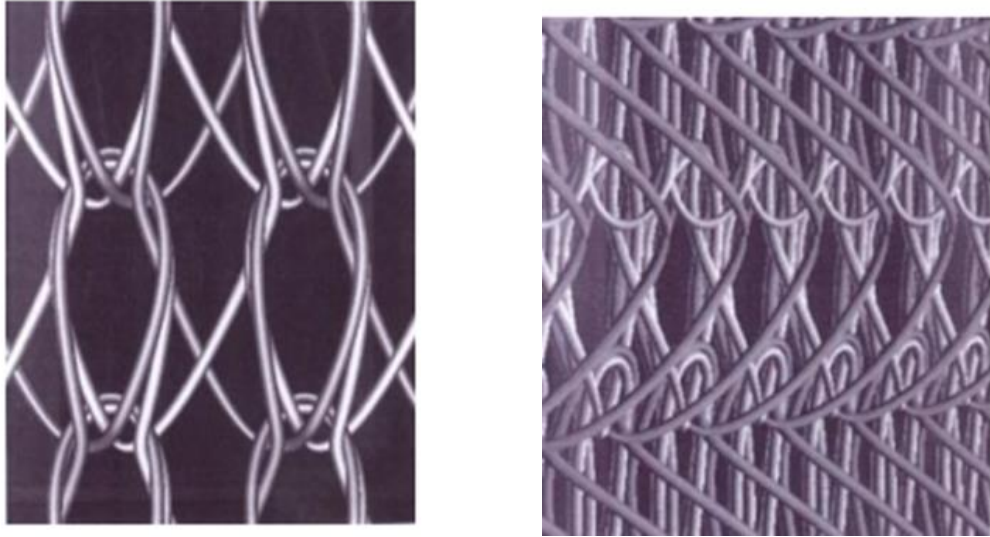
Şekil 2.2. Eğrilik çizgileriyle Michelangelo'nun David'i adlı eseri(Aliez vd,2003; Maekawa vd,1996; Patrikalakis vd,2002).



Şekil 2.3. Eğrilik çizgileriyle kubbe benzeri şekil ağı (Aliez vd,2003; Maekawa vd,1996; Patrikalakis vd,2002).

Parametrik yüzeylerin eğrilik çizgisi, Diferansiyel Geometride uzun zamandır devam eden bir araştırma odağı olmuştur (Do Carmo,1976; Willmore,1956). Yüzeyin asli eğrilik çizgileri ile ilgili pek çok yayınlar vardır. Martin, sistematik olarak asli yamalar olarak adlandırılan eğrilik çizgileri ile sınırlandırılmış yüzey yamalarını araştırdı. Martin, bu tür yamaların varlığının yama sınır eğrileri boyunca belirli konum eşleştirme ve çatı eşleştirme koşullarına bağlı olduğunu göstermiştir (Martin, 1983). Alaurdas ve diğ. (1990) bir B-spline yüzeyi üzerine eğri çizgiler ağı inşa etmek için bir yöntem sağlamıştır. Maekawa ve diğ.(1996) şekil sorgulama için serbest biçimli parametrik yüzeylerin genel özelliklerini çıkartmak için bir yöntem tarif etmişlerdir. Umbiliklerin genel özelliğini ve parametrik bir serbest biçimli yüzeyde bir umbilikten geçen eğrilik çizgilerinin davranışını araştırdılar. Che ve Paul (2007), eğrilik çizgilerini ve onların kapalı yüzeylerde tanımlanan diferansiyel

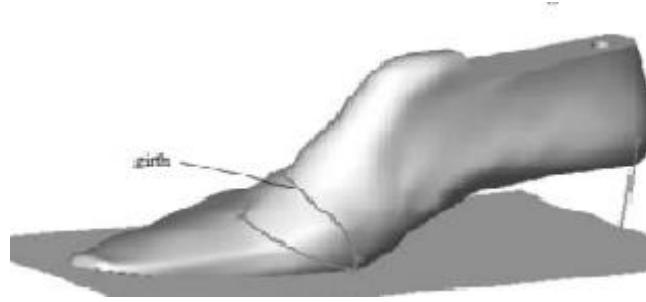
geometrilerini hesaplamak ve analiz etmek için bir metot geliştirdiler. Ayrıca umbilik olmayan noktalar ve kapalı bir yüzeydeki umbilik noktalar için yeni bir kriter sunmuştur. Zhang ve arkadaşları (2009) kapalı bir yüzey üzerinde tanımlanan eğrilik çizgilerini hesaplamak ve görselleştirmek için bir şema ortaya koydular. Eğrilik çizgileri levha metallere dayalı üretimde oldukça önemlidir (Munchmeyer, 1987). Bir levha silindirden geçirilerek eğilmek istendiğinde silindirin içine belli bir yönde sokulur ve silindirler belli bir eğriliğe göre ayarlanır. Kalogerakis ve arkadaşları (2009) eğrilik çizgilerini küme noktalardan çıkarmak için sağlam bir sistem ortaya koydular. Onların yaklaşımı, sınırlı veya sınırsız rastgele türlerin yüzeylerine uygulanabilmektedir ve yüzeyin keskin özelliklerini korurken uç değerlere ve parazitlere karşı dirençlidir. Bu yaklaşımın çeşitli miktarlardaki parazit ve uç değere sahip sentetik ve gerçek veri tabanları üzerinde etkili olabileceğini gösterdiler. Eğrilik bilgilerinin ayrıştırılması, CAD (Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım), Bilgisayar Görüntüleme ve Grafik için küme noktalarının analizi, tanımlanması ve sınıflandırılması gibi birçok uygulamaya fayda sağlayabilir. Nokta bulutu şekil analizi, tanıma ve bölümlendirme için birçok uygulamaya yarar sağlayabilir.



Şekil 2.4. Kumaşların bilgisayarla oluşturulmuş bazı 3 boyutlu katı görüntüleri (Göktepe,2001).

Verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi özel bir eğri kabul eden yüzey ailesinin bulunma problemi ilk olarak 2004 yılında Wang ve arkadaşları tarafından ele alınmıştır. Yapılan çalışmada verilen bir eğrinin bir yüzey üzerinde geodezik olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek ortak geodezik eğrili yüzey ailesi

tanıtılmıştır. Bu çalışma sonucunda da elde edilen verilerin günlük hayatta ayakkabı ve elbise tasarımında kullanılabileceklerini ifade etmişlerdir (Wang vd, 2004).



Şekil 2.5. Çevre eğrisi ile bir ayakkabı yüzey modeli (Wang vd, 2004).



Şekil 2.6. Parametreleri ile birlikte nominal isogeodezik yüzey (Wang vd, 2004).

Daha sonra 2011 yılında Li ve arkadaşları ise verilen bir eğrinin yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşulları vererek ortak eğrilik çizgili yüzey ailesini tanımlamışlardır. 2012 yılında ise Bayram ve arkadaşları ortak asimptotik eğriye sahip yüzey ailesi bulunması problemini incelemişler (Bayram vd, 2012). Son zamanlarda ise Frenet ve Bishop çatisına göre özel eğri çeşitlerini içeren yüzey ailesinin bulunması problemi incelenmiştir (Atalay ve Kasap, 2016-2017; Atalay, 2018; Ayvaci, 2019; Ayvaci ve Atalay, 2020).

2. GENEL BİLGİLER

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: \mathbb{R} reel sayılar cismini göstermek üzere

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, p_n) | p_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n\}$$

eşitliğiyle belirli \mathbb{R}^n kümesinde;

Toplama işlemi: $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu işlemlere göre \mathbb{R}^n kümesi \mathbb{R} cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

\mathbb{R}^n vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

eşitliği ile tanımlanan

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle$$

fonksiyonu \mathbb{R}^n uzayında bir iç çarpım uzayıdır. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^n uzayında doğal iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir.

$p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

diyelim

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow \|p\|$$

fonksiyonu \mathbb{R}^n uzayında bir normdur. Buna göre \mathbb{R}^n vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

şeklinde tanımlanan

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu \mathbb{R}^n uzayında bir metriktir. Dolayısıyla \mathbb{R}^n bir metrik uzayıdır. Bu metrikle birlikte \mathbb{R}^n uzayına Öklid uzayı denir. Bu uzay E^n ile gösterilir (Sabuncuoğlu,2001).

Tanım 2.1.2: E^3 te tanımlı, reel değerli bir f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona diferansiyellenebilir veya C^∞ sınıfındandır denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.3: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere; $\alpha : I \rightarrow E^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.4: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olmak üzere; $\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right)$ tanjant vektörüne α eğrisinin $t \in I$ parametre değişimine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.5: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin.

$$v: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow v(t) = \|\alpha'(t)\| = \left(\left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_t$$

reel değerli fonksiyonuna α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.6: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de yay parametresi denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.7: $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisine regülerdir denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.8: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun $T = \alpha'$ vektör alanına α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir. $T' = \alpha''$ vektör alanına da α eğrisinin eğrilik vektör alanı denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.9: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'\|$ şeklinde tanımlanan κ reel değerli fonksiyonuna α nın eğrilik fonksiyonu, $\kappa(s)$ değerine de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.10: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. $N = \frac{1}{\kappa} T'$ vektör alanına α eğrisinin asli normal vektör alanı ve $B = T \times N$ vektör alanına da α eğrisinin binormal vektör alanı denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.11: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. Bu takdirde α eğrisinin her noktasında T, N, B vektör alanları ikişer ikişer birbirine diktir ve α eğrisinde Frenet çatı alanları olarak adlandırılır (O’neill, 1966).

Tanım 2.1.12: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $\forall s \in I$ için $\alpha''(s) \neq 0$ olsun. $\forall s \in I$ için $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ olarak tanımlı τ reel değerli fonksiyonuna α eğrisinin

burulma fonksiyonu, herhangi bir $s \in I$ için $\tau(s)$ değerine de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.13: (Frenet Formülleri): $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisi için Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.14: α birim hızlı bir uzay eğrisi ve V , α eğrisi boyunca bir vektör alanı olsun. Eğer V , α eğrisi boyunca eğrinin teğeti $T(s) = \alpha'(s)$ vektörüne dikse V ye normal vektör alanı denir. Eğer V nin türevi eğri boyunca teğet $V'(s)/T(s)$ ise V nin normal vektör alanına relatif paralel normal vektör alanı denir (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.15: $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisi boyunca Gram-Schmidt yöntemi ile ortonormalleştirilmiş iki paralel normal vektör alanı N_1, N_2 olsun. Bu durumda $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına α eğrisinin Bishop çatısı denir. Bu çatı için türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Burada k_1 ve k_2 , α eğrisinin Bishop eğrilikleri olarak adlandırılırlar ve

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}$$

$$\angle(\vec{N}_1, \vec{N}) = \theta$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \theta(s) = \arctan \frac{k_2}{k_1} \\ \tau(s) = \frac{-d\theta(s)}{ds} \\ k_1 = \kappa \cos \theta(s) \\ k_2 = \kappa \sin \theta(s) \end{cases}$$

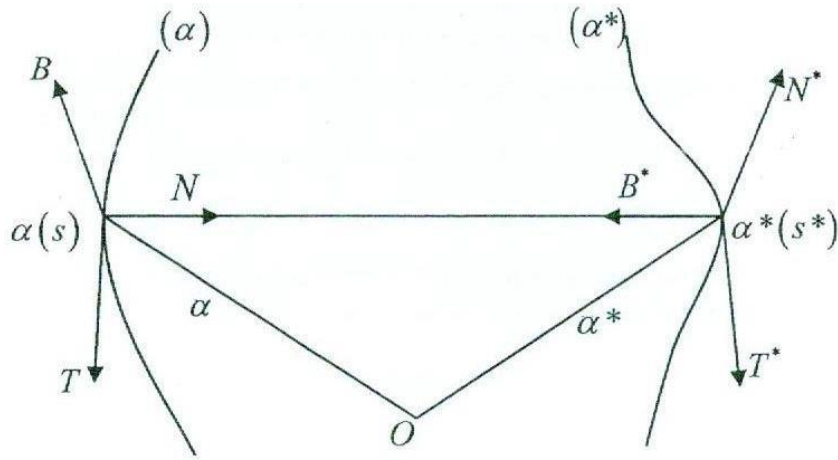
dır (Bishop, 1975).

Ayrıca Frenet ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki;

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Bishop, 1975).

Tanım 2.1.16: $\alpha : I \rightarrow E^3$ ve $\alpha^* : I \rightarrow E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektörü ile α^* eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise, α eğrisine Mannheim eğrisi ve α^* eğrisine Mannheim partner eğrisi denir (Wang ve Liu, 2007).



Şekil 3.1. Mannheim eğrileri

Bu tanıma göre Mannheim eğrisinin denklemi;

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) - \lambda N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s^*)$$

şeklindedir (Orbay ve Kasap, 2009). Bu eğrilerin Frenet çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{ds^*}{ds}$$

$$\sin\theta = \lambda \tau^* \frac{ds^*}{ds}$$

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağlantıları mevcuttur. Burada $S(T, T^*) = \theta$ dır (Orbay ve Kasap, 2009)

Teorem 2.1.17: (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğriler arasındaki uzaklık sabittir (Orbay ve Kasap, 2009).

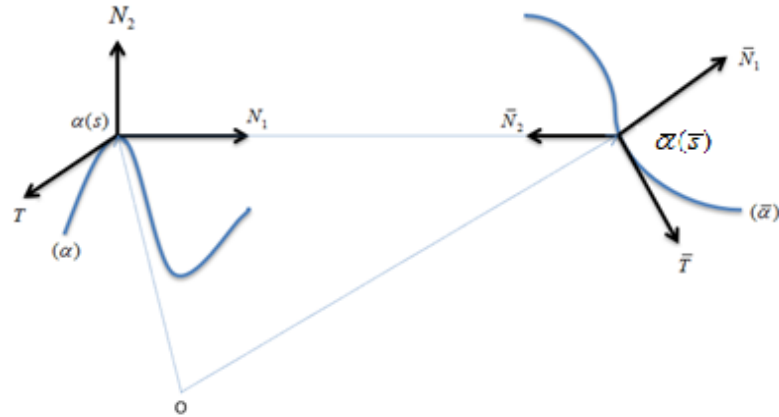
Teorem 2.1.18: E^3 de bir α eğrisi için $(\alpha, \bar{\alpha})$ Mannheim çifti olacak şekilde bir $\bar{\alpha}$ eğrisi vardır (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 2.1.19: (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α^* eğrisinin burulması τ^* ise

$$\tau^* = \frac{\kappa}{\lambda\tau}$$

dır (Orbay ve Kasap, 2009).

Tanım 2.1.20: α ve $\bar{\alpha}$ birim hızlı eğriler olmak üzere α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin yay uzunluğu parametreleri sırasıyla s ve \bar{s} , Bishop elemanları $\{T, N_1, N_2, k_1, k_2\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2\}$ olsun. Eğer α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin N_1 Bishop vektörü ile \bar{N}_2 Bishop vektörü lineer bağımlıysa $\bar{\alpha}$ eğrisine, α eğrisinin Mannheim-B çifti ya da $(\alpha, \bar{\alpha})$ eğri çiftine ise Mannheim-B çifti denir (Masal ve Azak, 2017).



Şekil 3.2. Mannheim-B eğrileri

$(\alpha, \bar{\alpha})$ Mannheim-B çiftinin tanjant vektörleri arasındaki açı θ olsun. Mannheim-B çifti tanımından $\{T, N_1, N_2\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ Bishop çatıları arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Masal ve Azak, 2017).

Teorem 2.1.21: Mannheim-B eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Masal ve Azak, 2017).

Teorem 2.1.22: $(\alpha, \bar{\alpha})$ E^3 de Mannheim-B eğri çifti olsun. α ve $\bar{\alpha}$ nin Bishop vektörleri arasındaki ilişki $T = \mu\bar{T}$, $N_1 = \bar{N}_2$, $N_2 = \mu\bar{N}_1$ şeklindedir. Burada

$$\mu = \begin{cases} 1, & \theta = 0 \\ -1, & \theta = \pi \end{cases}$$

olup θ , α ve $\bar{\alpha}$ nin tanjant vektörleri arasındaki açıdır (Masal ve Azak, 2017).

Tanım 2.1.23: M , \mathbb{R}^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için, p nin \mathbb{R}^3 de bir A komşuluğu ve \mathbb{R}^2 nin bir U açık alt kümesinden, \mathbb{R}^3 uzayına bir φ fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi doğrulayacak biçimde bulunabiliyorsa, M ye \mathbb{R}^3 uzayında bir yüzey denir (O'Neill, 1966).

1) $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve regüler bir fonksiyondur.

2) $\varphi(U) = M \cap A$ ve $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

Tanım 2.1.24: $\varphi : D \subseteq E^2 \rightarrow E^3$ ile tanımlanan $\varphi(D) \subseteq E^3$ yüzeyi verilsin. Yüzey

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v)$$

üzerinde $v = v_0 = \text{sabit}$ için $\varphi(u, v_0) = \alpha(u)$, $u = u_0 = \text{sabit}$ için; $\varphi(u_0, v) = \beta(v)$ eğrilerine sırasıyla u -parametre eğrisi ve v -parametre eğrisi denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.25: $M = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid f : U \subseteq E^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{diferansiyellenebilir},$

$$X \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c = \text{sabit},$$

$\forall P \in M, \nabla f|_p \neq 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye E^n de $(n-1)$ boyutlu yüzey, hiperyüzey veya $(n-1)$ -yüzey denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.26: M , E^n de hiperyüzey olsun,

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D_X Y$$

dönüşümü,

$$1) D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$$

$$2) D_X(fY) = (D_X f)Y + fD_X Y$$

özelliklerini sağlıyorsa D 'ye E^n de bir afin konneksiyon denir.

Ayrıca

$$3) D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

$$4) X[\langle Y, Z \rangle] = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle D_X Z, Y \rangle$$

şartlarını da sağlıyorsa D operatörüne E^n de bir Riemann konneksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.27: $N = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, M 'nin birim normal vektör alanı; $\chi(M)$, M 'nin vektör alanları uzayı; $T_M P$, M 'nin P noktasındaki tanjant uzayı ve D , E^n de bir Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$S(X) = D_X N = (X[a_1], \dots, X[a_n])$$

veya bir P noktasındaki

$$S_P(X_P) = D_{X_P} N_P = (X_P[a_1], \dots, X_P[a_n])$$

değeri ile tanımlı S dönüşümüne M nin şekil operatörü, S_P ye P noktasında şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.28: V bir vektör uzayı olmak üzere

$$A: V \rightarrow V$$

$$X \rightarrow A(X)$$

lineer dönüşümü verilsin $A(X) = \lambda X, X \neq 0$ denklemini sağlayan $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısına A lineer dönüşümünün karakteristik değeri $X \neq \vec{0}$ vektörüne λ 'ya karşılık gelen karakteristik vektör denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.29: E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı \vec{T} ve hiperyüzeyin şekil operatörü S olmak üzere; eğer \vec{T} , α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde eğrilik çizgisi denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.30: M bir yüzey olmak üzere $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde bir eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.31: $M \in E^3$ yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Yüzeyin birim normal vektör alanı n olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$g = (n \circ \alpha) \times T$$

eşitliği ile tanımlanan g vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $\forall s \in I$ için $\{T(s), g(s), n(s)\}$ cümlesi $T_{\alpha(s)}E^3$ uzayının bir ortonormal tabanı olur. Bu tabana Darboux çatısı (eğri-yüzey çatısı) denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.1.32: $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\tau_g(s) = -\langle n'(s), g(s) \rangle$$

eşitliği ile belirli $\tau_g(s)$ sayısına (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.1.33: $M \in E^3$ bir yüzey ve $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ regüler birim hızlı bir eğri olsun. n , M yüzeyinin normal vektörü olmak üzere α eğrisinin geodezik burulması

$$\tau_g = \det\left(\frac{d\alpha}{ds}, n, \frac{dn}{ds}\right)$$

ile tanımlıdır (Biran, 1981).

Teorem 2.1.34: $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul $\tau_g = 0$ olmasıdır (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.1.35: $M \in E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı veya ana doğrusu denir.

Bir başka ifadeyle, bir regle yüzey; bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesi sonucu meydana gelen yüzeydir.

Bu regle yüzey φ ile gösterilirse, φ nin parametrik ifadesi,

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3 \\ (s, v) &\rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s) \end{aligned}$$

dir. Burada; e , regle yüzeyin doğrultmanı doğrultusundaki birim vektör

$$\begin{aligned} \alpha &: I \rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir eğrisi de regle yüzeyin dayanak eğrisidir (Matsuda ve Yorozu, 2009).

Tanım 2.1.36: φ, E^3 de bir regle yüzey olsun. Eğer φ nin komşu iki doğrultmanı kesişiyorsa φ ye açılabilir denir (Ravanı ve Ku, 1991).

Teorem 2.1.37: φ, E^3 de açılabilir bir regle yüzey, e , φ nin doğrultman vektörü ve α da dayanak eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\det(\alpha', e, e') = 0$$

dır (Ravanı ve Ku, 1991).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Cai-Yun Li, Ren-Hong Wang, Chun-Gang Zhu (2011) tarafından yazılan *Parametric Representation Of A Surface Pencil With A Common Line Of Curvature* isimli makaleden faydalanılmıştır.

Teorem 3.1: Bir yüzeydeki eğrinin bir eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, eğri boyunca yüzey normallerinin açılabilir bir yüzey oluşturmasıdır (Munchmeyer, 1987).

$r = r(s)$, $0 \leq s \leq L$, üç boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyon olmak üzere $r(s)$ eğrisinden geçen parametrik yüzeyler

$$P(s, t) = r(s) + [u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s)], 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq L \quad (3.1)$$

ile verilir.

$r(s)$ eğrisini hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olarak kabul eden $P(s, t)$ yüzeyi için gerekli ve yeterli koşulları ifade etmek istiyoruz.

İlk olarak $r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametrik bir eğri olması için gerekli ve yeterli koşul

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) \equiv 0, \quad 0 \leq s \leq L \quad (3.2)$$

olacak şekilde $\exists t_0 \in [0, T]$ bulunmasıdır.

$r(s)$ 'nin normal yüzeyi

$$Q(s, t) = r(s) + tn_1 \quad (3.3)$$

olmak üzere burada $n_1 = N\cos\theta + B\sin\theta$ ile tanımlıdır.

Teorem 3.1'e göre $r(s)$, $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir ancak ve ancak $Q(s, t)$ açılabilir ve n_1 normal vektörü yüzeyin normal vektörü $n(s, t)$ 'ye paraleldir.

$Q(s, t)$ yüzeyinin açılabilir olması için $\det(r', n_1, n'_1) = 0$ olma koşulu kullanılarak $\theta' = -\tau$ elde edilir.

$P(s, t)$ yüzeyinin normal vektörü

$$n(s, t) = P_s(s, t) \times P_t(s, t)$$

ile tanımlı olup gerekli hesaplamalar yapılırsa $t = t_0$ için

$$n(s, t_0) = T\phi_1(s, t_0) + N\phi_2(s, t_0) + B\phi_3(s, t_0) \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada

$$\phi_1(s, t_0) = \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial t},$$

$$\begin{aligned}\phi_2(s, t_0) &= -\left(1 - \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial s}\right) \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial t}, \\ \phi_3(s, t_0) &= \left(1 + \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial s}\right) \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.5)$$

dır.

Ayrıca $n_1(s) \parallel n(s, t_0)$ olması şartı kullanılırsa

$$\begin{cases} \phi_1(s, t_0) = 0, \\ \phi_2(s, t_0) = \lambda(s)\cos\theta, \\ \phi_3(s, t_0) = \lambda(s)\sin\theta \end{cases}\quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.2: $r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametrik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{cases} u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) \equiv 0, \\ \phi_1(s, t_0) = 0, \phi_2(s, t_0) = \lambda(s)\cos\theta, \phi_3(s, t_0) = \lambda(s)\sin\theta \end{cases}\quad (3.7)$$

olmasıdır. Burada $0 \leq t_0 \leq T, 0 \leq s \leq L, \lambda(s) \neq 0$ dır. $\theta(s)$ ve $\lambda(s)$ fonksiyonlarına da kontrol fonksiyonları denir (Li vd, 2011).

4. BULGULAR

4.1. Bishop Çatısına Göre Ortak Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri

$\alpha = \alpha(s)$, $L_1 \leq s \leq L_2$, üç boyutlu Öklid uzayında $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. $f(s, v), g(s, v), h(s, v)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyon olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisinden geçen parametrik yüzeyler

$$P(s, v) = \alpha(s) + [f(s, v)T(s) + g(s, v)N_1(s) + h(s, v)N_2(s)], \quad L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq v \leq T_2 \quad (4.1)$$

ile verilir.

$\alpha(s)$ eğrisini hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olarak kabul eden $P(s, v)$ yüzeyi için gerekli ve yeterli koşulları bulmak istiyoruz.

$\alpha(s)$ eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı arasındaki ilişkinin kullanılmasıyla (4.1) yüzeyi

$$P(s, v) = \alpha(s) + f(s, v)T(s) + (g(s, v) \cos \theta + h(s, v) \sin \theta)N(s) + (-g(s, v) \sin \theta + h(s, v) \cos \theta)B(s) \quad (4.2)$$

şeklinde elde edilir.

İlk olarak $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde parametrik bir eğri olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f(s, v_0) = g(s, v_0) = h(s, v_0) \equiv 0, \quad L_1 \leq s \leq L_2 \quad (4.3)$$

olacak şekilde $\exists v_0 \in [T_1, T_2]$ bulunmasıdır.

$P = P(s, v)$ yüzeyinin normali

$$n(s, v) = P_s \times P_v$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} P_s(s, v) = & \left[1 + \frac{\partial f(s, v)}{\partial s} - \kappa(g(s, v) \cos \theta + h(s, v) \sin \theta) \right] T(s) \\ & + \left[f(s, v) \kappa + \frac{\partial g(s, v)}{\partial s} \cos \theta - \sin \theta \theta' g(s, v) + \frac{\partial h(s, v)}{\partial s} \sin \theta + \cos \theta \theta' h(s, v) - \right. \\ & \left. \tau(g(s, v) \sin \theta + h(s, v) \cos \theta) \right] N(s) \\ & + \left[\tau(g(s, v) \cos \theta + h(s, v) \sin \theta) - \frac{\partial g(s, v)}{\partial s} \sin \theta - \cos \theta \theta' g(s, v) + \frac{\partial h(s, v)}{\partial s} \cos \theta \right. \\ & \left. - \sin \theta \theta' h(s, v) \right] B(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P_v(s, v) = & \left(\frac{\partial f(s, v)}{\partial v} \right) T(s) + \left(\cos \theta \frac{\partial g(s, v)}{\partial v} + \sin \theta \frac{\partial h(s, v)}{\partial v} \right) N(s) \\ & + \left(-\sin \theta \frac{\partial g(s, v)}{\partial v} + \cos \theta \frac{\partial h(s, v)}{\partial v} \right) B(s) \end{aligned}$$

dır. Böylece gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$v = v_0$ için,

$$n(s, v_0) = T\phi_1(s, v_0) + N\phi_2(s, v_0) + B\phi_3(s, v_0) \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \phi_1(s, v_0) = 0, \\ \phi_2(s, v_0) = \sin\theta \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} - \cos\theta \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v}, \\ \phi_3(s, v_0) = \cos\theta \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} + \sin\theta \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} \end{cases} \quad (4.5)$$

dır. Böylece

$$n(s, v_0) = \left(\sin\theta \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} - \cos\theta \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} \right) N + \left(\cos\theta \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} + \sin\theta \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} \right) B \quad (4.6)$$

elde edilir.

$\alpha(s)$ eğrisinin normal yüzeyi

$$\begin{aligned} Q(s, v) &= \alpha(s) + vn_1 \\ &= \alpha(s) + v(\cos\theta N_1 + \sin\theta N_2) \end{aligned}$$

olup $Q(s, v)$ yüzeyinin açılabilir olması için $\det(\alpha', n_1, n_1') = 0$ olma şartı kullanılırsa

$$\theta' = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Bishop eğrilikleri arasındaki ilişkiden $\theta' = -\tau$ olması kullanılırsa $\tau = 0$

elde edilir. Bu ise $\alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

Ayrıca Teorem 3.1 gereğince $n(s, v_0) // n_1$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \phi_2(s, v_0) &= \sin\theta \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} - \cos\theta \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} \neq 0, \\ \phi_3(s, v_0) &= \cos\theta \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} + \sin\theta \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

olup bu eşitsizliklerden $\lambda(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} = \lambda(s) \sin\theta \\ \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} = -\lambda(s) \cos\theta \end{cases} \quad (4.9)$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1.1: $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ile verilen $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $P = P(s, v)$ yüzeyi üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şart

$$\begin{cases} f(s, v_0) = g(s, v_0) = h(s, v_0) \equiv 0, \\ \tau = 0, \lambda(s) \neq 0, \\ \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} = \lambda(s) \sin\theta, \\ \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} = -\lambda(s) \cos\theta \end{cases} \quad (4.10)$$

olmasıdır.

Örnek 4.1.1: $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ birim hızlı çember eğrisini alalım. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısının

$$\begin{aligned} T &= (-\sin s, \cos s, 0) \\ N_1 &= (-\cos s, -\sin s, 0) \\ N_2 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\tau = 0$ dır.

Çemberi üzerinde bulunduran tek kanatlı hiperboloid yüzeyi

$$P(s, v) = \left(\cos s - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{v}{\sqrt{2}} \right)$$

olup çemberin bu yüzey üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğu bilinmektedir. ($\tau_g = 0$ olduğundan). Bu yüzeyin şekli $0 \leq s \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1$ değerleri için Şekil 4.1 de mavi ile belirtilen şekildedir.

a)Eğer

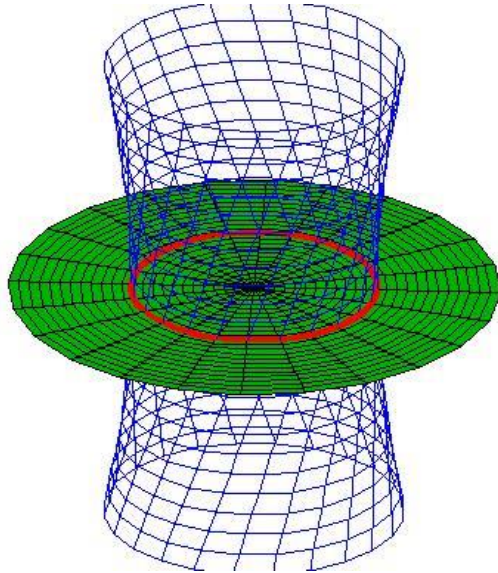
$$f(s, v) = h(s, v) = 0, g(s, v) = v$$

$v_0 = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\lambda = 1$ olarak seçilirse (4.10) denklemindeki parametrik ve eğrilik çizgisi olması şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_1(s, v) = (\cos s(1 - v), \sin s(1 - v), 0)$$

yüzeyi üzerinde de eğrilik çizgisidir. Bu yüzeyin şekli $0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$ değerleri için Şekil 4.1 de yeşil ile belirtilen şekildedir.

Böylece ortak çember eğrili eğrilik çizgisine sahip tek kanatlı hiperboloid ile P_1 yüzeyinin şekli Şekil 4.1 ile verilmektedir.



Şekil 4.1. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_1(s, v)$ yüzeyi

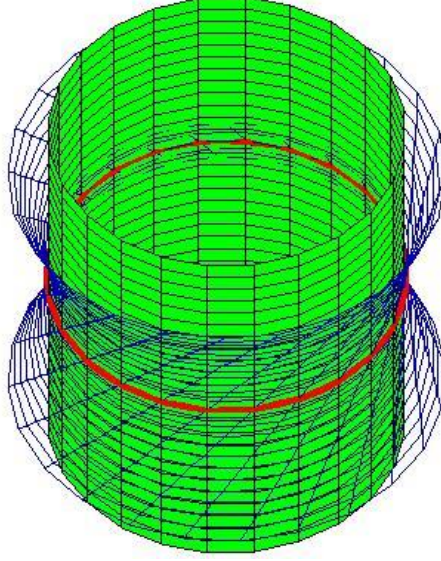
b)Eğer

$$f(s, v) = g(s, v) = 0, h(s, v) = v$$

$v_0 = 0, \theta = \pi$ ve $\lambda = 1$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_2(s, v) = (\cos s, \sin s, v)$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir. Bu yüzeyin şekli de $0 \leq s \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1$ değerleri için Şekil 4.2 de yeşil ile belirtilen şekildedir.



Şekil 4.2. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_2(s, v)$ yüzeyi

c) Eğer

$$f(s, v) = 0$$

$$g(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin s$$

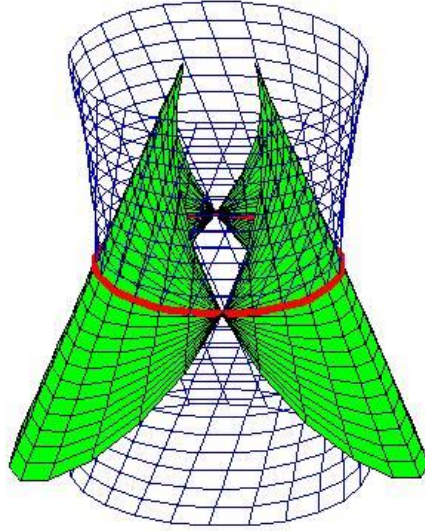
$$h(s, v) = -\frac{1}{\sqrt{2}} v \cos s$$

$v_0 = 0, \theta = 0$ ve $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla

Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_3(s, v) = \left(\cos s \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin s\right), \sin s \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin s\right), \frac{1}{\sqrt{2}} v \cos s \right)$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir. Bu yüzeyin şekli $0 \leq s \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1$ alınarak Şekil 4.3 de yeşil ile belirtilen şekildedir.



Şekil 4.3. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_3(s, v)$ yüzeyi

d) Eğer

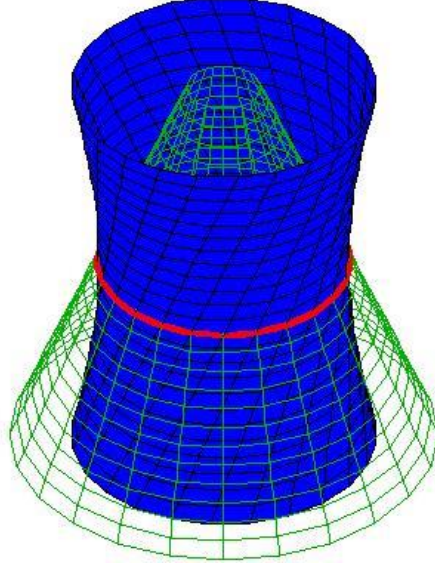
$$\begin{aligned} f(s, v) &= 0 \\ g(s, v) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}v \\ h(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{aligned}$$

$\theta = \frac{5\pi}{4}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $v_0 = 0$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla

Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_4(s, v) = \left(\cos\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right), \sin\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right), \frac{1}{\sqrt{2}}v \right)$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir. Bu yüzeyin şekli $0 \leq s \leq 2\pi$, $-1 \leq v \leq 1$ değerleri için Şekil 4.4 da yeşil ile verilmektedir.



Şekil 4.4. Ortak eğrilik çizgili tek kanatlı hiperboloid ve $P_4(s, v)$ yüzeyi

Örnek 4.1.2: $\alpha(s) = (2 + \cos s, 0, \sin s)$ birim hızlı çember eğrisini alalım. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısının

$$\begin{aligned} T &= (-\sin s, 0, \cos s) \\ N_1 &= (-\cos s, 0, -\sin s) \\ N_2 &= (0, -1, 0) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\tau = 0$ dır.

Çemberi üzerinde bulunduran tor yüzeyi

$$P(s, v) = ((2 + \cos s)\cos v, (2 + \cos s)\sin v, \sin v)$$

dır. $\tau_g = 0$ olduğundan çember eğrisinin bu yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olduğu bilinmektedir. Bu tor yüzeyinin şekli $0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için Şekil 4.5 de yeşil ile belirtilen şekildedir.

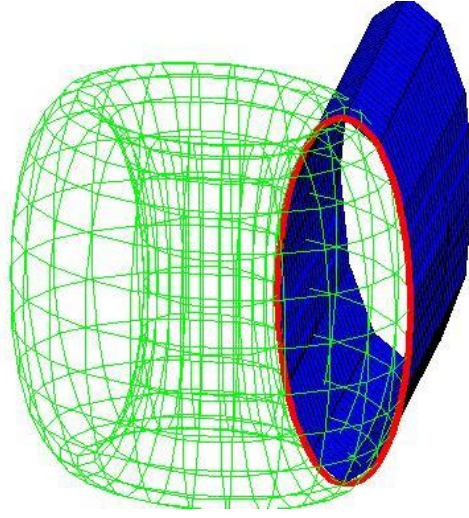
a)Eğer

$$f(s, v) = g(s, v) = 0, h(s, v) = -v$$

$v_0 = 0, \theta = 0$ ve $\lambda = 1$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_5(s, v) = (2 + \cos s, v, \sin s)$$

yüzeyi üzerinde de eğrilik çizgisidir. Bu yüzeyin şekli $-2\pi \leq s \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için Şekil 4.5 de mavi ile verilmektedir.



Şekil 4.5. Ortak eğrilik çizgili tor ve $P_5(s, v)$ yüzeyi

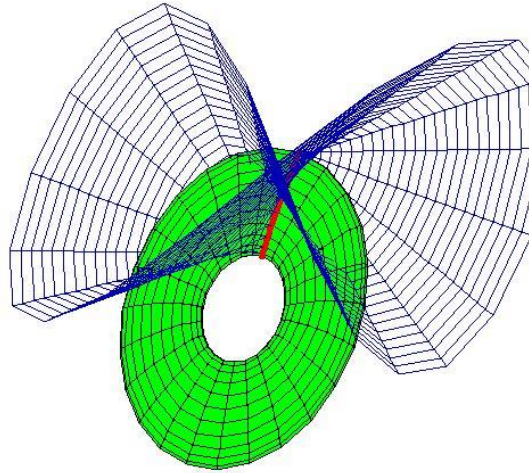
b)Eğer

$$f(s, v) = 0, g(s, v) = vsins, h(s, v) = -vcoss$$

$\theta = 0, \lambda = 1$ ve $v_0 = 0$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_6(s, v) = (2 + (coss(1 - vsins), vcoss, sins(1 - vsins))$$

yüzeyi üzerinde de eğrilik çizgisidir. Burada $-2\pi \leq s \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzey Şekil 4.6 de mavi ile verilmektedir.



Şekil 4.6. Ortak eğrilik çizgili tor ve $P_6(s, v)$ yüzeyi

Örnek 4.1.3: $\alpha(s) = (2\cos(\frac{s}{2}), \sin(\frac{s}{2}), 0)$ birim hızlı çember eğrisini alalım. Bu eğrinin Bishop çatısının

$$\begin{aligned} T &= (-\sin(\frac{s}{2}), \cos(\frac{s}{2}), 0) \\ N_1 &= (-\cos(\frac{s}{2}), -\sin(\frac{s}{2}), 0) \\ N_2 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\tau = 0$ dir.

Çemberi üzerinde bulunduran bir kanatlı helikoid yüzeyi

$$P(s, v) = (2 \cos(\frac{s}{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin(\frac{s}{2}), 2 \sin(\frac{s}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} v \cos(\frac{s}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} v)$$

olup çember bu yüzey üzerinde eğrilik çizgisidir. ($\tau_g = 0$ olduğundan). Bu yüzeyin şekli $-2\pi \leq s, v \leq 2\pi$ değerleri için Şekil 4.9 daki gibidir. (Yeşil)

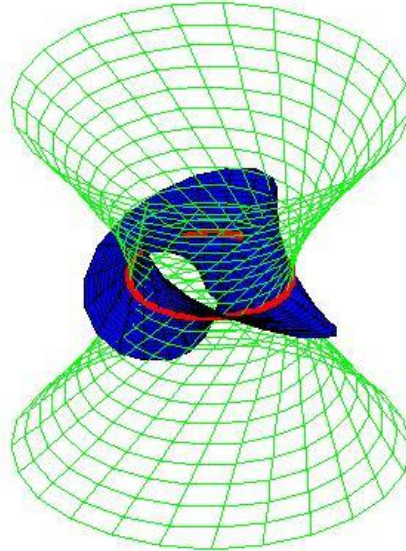
a) Eğer

$$f(s, v) = 0, \quad g(s, v) = v \sin(\frac{s}{2}), \quad h(s, v) = -v \cos(\frac{s}{2})$$

$\theta = 0, \lambda = 1$ ve $v_0 = 0$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_7(s, v) = (2\cos(\frac{s}{2}) - v\sin(\frac{s}{2})\cos(\frac{s}{2}), 2\sin(\frac{s}{2}) - v\sin(\frac{s}{2})\sin(\frac{s}{2}), v\sin(\frac{s}{2}))$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir. Bu yüzey özel bir yüzey olan möbiüs yüzeyi olup şekli $-2\pi \leq s \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ değerleri için Şekil 4.7 ile verilmektedir. (Mavi)



Şekil 4.7. Ortak eğrilik çizgili bir kanatlı helikoid ve möbiüs yüzeyi

b) Eğer

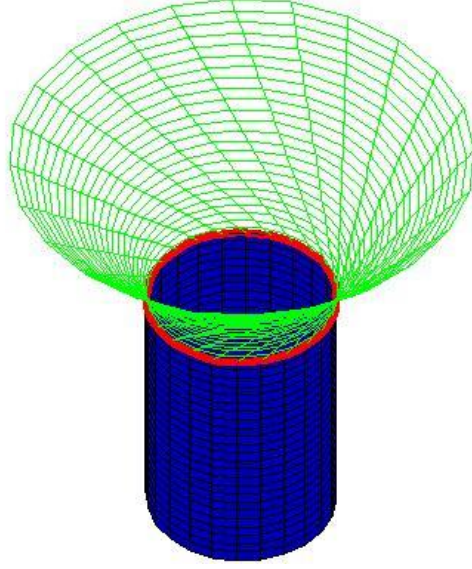
$$f(s, v) = g(s, v) = 0, \quad h(s, v) = -v$$

$\theta = 0, \lambda = 1$ ve $v_0 = 0$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_8(s, v) = (2\cos\frac{s}{2}, 2\sin\frac{s}{2}, -v)$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir.

$-2\pi \leq s \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin ve helikoid yüzeyinin şekli Şekil 4.8 ile verilmektedir.



Şekil 4.8. Ortak eğrilik çizgili helikoid (yeşil) ve $P_8(s, v)$ yüzeyi

c)Eğer

$$f(s, v) = h(s, v) = 0, g(s, v) = -v$$

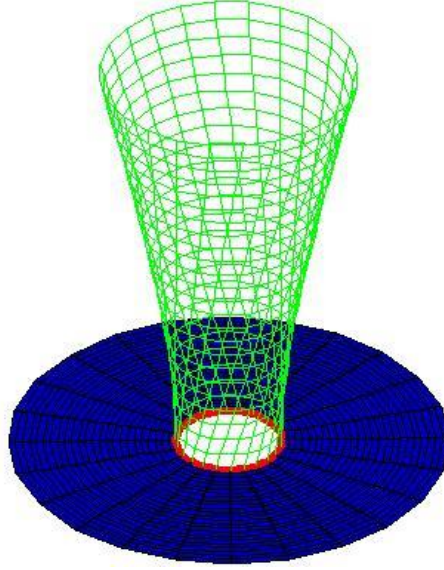
$\theta = \frac{\pi}{2}, \lambda = -1$ ve $v_0 = 0$ olarak seçilirse (4.10) şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla

Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisi

$$P_9(s, v) = (2\cos\frac{s}{2} + v\cos\frac{s}{2}, 2\sin\frac{s}{2} + v\sin\frac{s}{2}, 0)$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir.

$-2\pi \leq s \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin ve helikoid yüzeyinin şekli Şekil 4.9 ile verilmektedir.



Şekil 4.9. Ortak eğrilik çizgili helikoid (Yeşil) ve $P_0(s, v)$ yüzeyi

4.2. Ortak Mannheim Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri

$\alpha = \alpha(s)$, $L_1 \leq s \leq L_2$, üç boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. α 'nın Mannheim çifti olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olma şartını inceleyeceğiz.

$\bar{\alpha}$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ ve $f(s, v), g(s, v), h(s, v)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyonlar olmak üzere $\bar{\alpha}$ eğrisinden geçen parametrik yüzeyler

$$P(s, v) = \bar{\alpha}(s) + [f(s, v)\bar{T}(s) + g(s, v)\bar{N}(s) + h(s, v)\bar{B}(s)], \quad L_1 \leq s \leq L_2, \quad T_1 \leq v \leq T_2 \quad (4.11)$$

ile verilir.

İlk olarak $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde parametrik bir eğri olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f(s, v_0) = g(s, v_0) = h(s, v_0) \equiv 0 \quad (4.12)$$

olacak şekilde $\exists v_0 \in [T_1, T_2]$ bulunmasıdır.

$P = P(s, v)$ yüzeyinin normali

$$n(s, v) = P_s \times P_v$$

ile tanımlı olup gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} n(s, v) = & \left[\frac{\partial h(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial g(s, v)}{\partial s} + \bar{\kappa}(s)f(s, v) - \bar{\tau}(s)h(s, v) \right) - \frac{\partial g(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial h(s, v)}{\partial s} + \right. \right. \\ & \left. \left. \bar{\tau}(s)g(s, v) \right) \right] \bar{T}(s) \\ & + \left[\frac{\partial f(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial h(s, v)}{\partial s} + \bar{\tau}(s)g(s, v) \right) - \frac{\partial h(s, v)}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial f(s, v)}{\partial s} - \bar{\kappa}(s)g(s, v) \right) \right] \bar{N}(s) \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\partial g(s,v)}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial f(s,v)}{\partial s} - \bar{\kappa}(s)g(s,v) \right) - \frac{\partial f(s,v)}{\partial v} \left(\frac{\partial g(s,v)}{\partial s} + \bar{\kappa}(s)f(s,v) - \bar{\tau}(s)h(s,v) \right) \right] \bar{B}(s)$$

elde edilir. Burada $v = v_0$ için

$$\begin{aligned} \phi_1(s, v_0) &= \frac{\partial h(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial g(s, v)}{\partial s} + \bar{\kappa}(s)f(s, v) - \bar{\tau}(s)h(s, v) \right) \\ &\quad - \frac{\partial g(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial h(s, v)}{\partial s} + \bar{\tau}(s)g(s, v) \right) \\ \phi_2(s, v_0) &= \frac{\partial f(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial h(s, v)}{\partial s} + \bar{\tau}(s)g(s, v) \right) \\ &\quad - \frac{\partial h(s, v)}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial f(s, v)}{\partial s} - \bar{\kappa}(s)g(s, v) \right) \\ \phi_3(s, v_0) &= \frac{\partial g(s, v)}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial f(s, v)}{\partial s} - \bar{\kappa}(s)g(s, v) \right) \\ &\quad - \frac{\partial f(s, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial g(s, v)}{\partial s} + \bar{\kappa}(s)f(s, v) - \bar{\tau}(s)h(s, v) \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$n(s, v_0) = \phi_1(s, v_0)\bar{T} + \phi_2(s, v_0)\bar{N} + \phi_3(s, v_0)\bar{B} \quad (4.14)$$

dır.

$\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin normal yüzeyi

$$\begin{aligned} Q(s, v) &= \bar{\alpha}(s) + vn_1 \\ &= \bar{\alpha}(s) + v(\cos\theta\bar{N} + \sin\theta\bar{B}) \end{aligned}$$

olup $Q(s, v)$ yüzeyinin açılabilir olması için $\det(\bar{\alpha}', n_1, n_1') = 0$ olma şartı ve Mannheim eğri çiftlerinin eğrilik ve burulması arasındaki $\bar{\tau} = \frac{\kappa}{\lambda\tau}$ eşitliği kullanılarak gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$$\theta' = -\bar{\tau}(s) \Leftrightarrow \theta = -\int \bar{\tau} ds \Leftrightarrow \theta = -\frac{1}{\lambda} \int \frac{\kappa}{\tau} ds \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada λ Mannheim eğri çiftleri arası uzaklık olup sabittir.

Ayrıca Teorem 3.1 gereğince $\bar{n}(s, v_0) \parallel n_1$ olması kullanılırsa,

$$\begin{cases} \phi_1(s, v_0) = 0, \\ \phi_2(s, v_0) = -\frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} \neq 0, \\ \phi_3(s, v_0) = \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} \neq 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

olup bu eşitsizliklerden $\beta(s) \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} = \beta(s)\sin\theta, \\ \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} = -\beta(s)\cos\theta \end{cases} \quad (4.17)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.1: $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen $\alpha(s)$ 'nin Mannheim eğri çifti olan $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{cases} f(s, v_0) = g(s, v_0) = h(s, v_0) \equiv 0, \\ \theta = -\frac{1}{\lambda} \int \frac{\kappa}{\tau} ds, \lambda \neq 0, \beta(s) \neq 0, \\ \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} = \beta(s) \sin \theta, \\ \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} = -\beta(s) \cos \theta, \end{cases} \quad (4.18)$$

olmasıdır.

Örnek 4.2.1: $\alpha(s) = \left(\frac{3}{5} \sin s, \frac{3}{5} \cos s, \frac{4}{5} s \right)$ birim hızlı eğrisini alalım. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısının

$$\begin{cases} T(s) = \left(\frac{3}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \sin s, \frac{4}{5} \right) \\ N(s) = (-\sin s, -\cos s, 0) \\ B(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, -\frac{4}{5} \sin s, -\frac{3}{5} \right) \end{cases}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\kappa = \frac{3}{5}$ ve $\tau = -\frac{4}{5}$ dir.

$\alpha(s)$ eğrisinin Mannheim eğri çifti olan $\bar{\alpha}(s)$ eğrisi $\lambda = 1$ için

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(s) &= \alpha(s) + \lambda N(s) \\ &= \left(-\frac{2}{5} \sin s, -\frac{2}{5} \cos s, \frac{4}{5} s \right) \end{aligned}$$

olup böylece bu eğrinin Frenet çatısı

$$\begin{cases} \bar{T}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ \bar{N}(s) = (-\sin s, -\cos s, 0) \\ \bar{B}(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{cases}$$

dir.

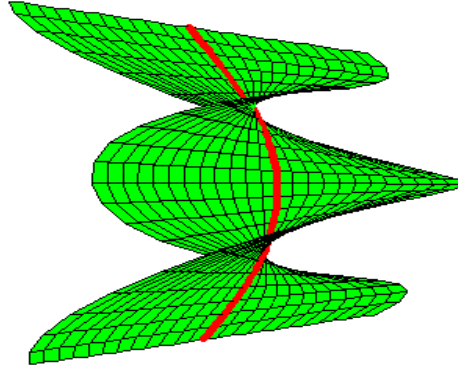
Eğer

$$\begin{aligned} f(s, v) &= 0, \\ g(s, v) &= v \sin \left(\frac{3}{4} s \right), \\ h(s, v) &= -v \cos \left(\frac{3}{4} s \right), \end{aligned}$$

$v_0 = 0$, $\theta = \frac{3}{4} s$ ve $\beta(s) = \cos s$ olarak seçilirse (4.18) denklemindeki parametrik ve eğrilik çizgisi olması şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla Frenet çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisinin Mannheim çifti olan $\bar{\alpha}(s)$ eğrisi

$$P_{10}(s, v) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \sin(s) - v \cos(s) \left(\sin(s) \sin\left(\frac{3s}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(s) \cos\left(\frac{3s}{4}\right) \right), \\ -\frac{2}{5} \cos(s) - v \cos(s) \left(\cos(s) \sin\left(\frac{3s}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(s) \cos\left(\frac{3s}{4}\right) \right), \\ \frac{4}{5} s - \frac{v}{\sqrt{5}} \cos(s) \cos\left(\frac{3s}{4}\right) \end{pmatrix}$$

yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir. Bu yüzeyin şekli $-\pi \leq s \leq \pi$ ve $-1 \leq v \leq 1$ değerleri için Şekil 4.10 ile verilmektedir.



Şekil 4.10. Ortak Mannheim eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

4.3. Ortak Mannheim-B Eğrilik Çizgili Yüzey Aileleri

$\alpha = \alpha(s)$, $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. α nın Mannheim B-eğri çifti olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olma şartını inceleyeceğiz.

$\bar{\alpha}$ eğrisinin Bishop çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ olmak üzere $\bar{\alpha}$, α nın Mannheim B-eğri çifti olduğundan $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda N_1(s)$ dir.

$\bar{\alpha}$ eğrisinden geçen parametrik yüzeyler

$$P(s, v) = \bar{\alpha}(s) + [f(s, v)\bar{T}(s) + g(s, v)\bar{N}_1(s) + h(s, v)\bar{N}_2(s)] \quad (4.19)$$

olup burada $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda N_1(s)$ olması kullanılırsa

$$P(s, v) = \alpha(s) + \lambda N_1 + [f(s, v)\bar{T}(s) + g(s, v)\bar{N}_1(s) + h(s, v)\bar{N}_2(s)] \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada λ , Mannheim B-eğri çiftleri arasındaki uzaklık olup sıfırdan farklı bir sabittir.

Teorem 2.1.22 den $\theta = 0$ için,

$$T = \bar{T}, \quad N_1 = \bar{N}_2, \quad N_2 = \bar{N}_1$$

olması (4.20) denkleminde kullanılırsa

$$P(s, v) = \alpha(s) + f(s, v)T(s) + (\lambda + h(s, v))N_1(s) + g(s, v)N_2(s) \quad (4.21)$$

elde edilir.

Şimdi bu yüzey üzerinde α nın Mannheim-B eğri çiftinin parametrik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartları bulalım:

İlk olarak bu Mannheim-B eğri çiftinin parametrik olması gerektiğinden $v = v_0$ için;

$$f(s, v_0) = g(s, v_0) \equiv 0, h(s, v_0) = -\lambda \quad (4.22)$$

olmalıdır.

$P=P(s, v)$ yüzeyinin normali

$$n(s, v) = P_s \times P_v$$

olduğundan,

$$P_s(s, v) = T + \frac{\partial f}{\partial s}T + f(s, v)T' + \frac{\partial h}{\partial s}N_1 + (h(s, v) + \lambda)N'_1 + \frac{\partial g}{\partial s}N_2 + g(s, v)N'_2$$

olup Bishop formülleri kullanılırsa;

$$P_s(s, v) = T \left(1 + \frac{\partial f}{\partial s} - k_1(h(s, v) + \lambda) - k_2g(s, v) \right) + N_1 \left(f(s, v)k_1 + \frac{\partial h}{\partial s} \right) + N_2 \left(f(s, v)k_2 + \frac{\partial g}{\partial s} \right)$$

elde edilir.

$$P_v(s, v) = \frac{\partial f}{\partial v}T + \frac{\partial h}{\partial v}N_1 + \frac{\partial g}{\partial v}N_2$$

dır. Böylece

$$n(s, v) = \left[\frac{\partial g}{\partial v} \left(-f(s, v)k_1 + \frac{\partial h}{\partial s} \right) - \frac{\partial h}{\partial v} \left(f(s, v)k_2 + \frac{\partial g}{\partial s} \right) \right] T + \left[\frac{\partial f}{\partial v} \left(f(s, v)k_2 + \frac{\partial g}{\partial s} \right) - \frac{\partial g}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial f}{\partial s} - k_1(h(s, v) + \lambda) - k_2g(s, v) \right) \right] N_1 + \left[\frac{\partial h}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial f}{\partial s} - k_1(h(s, v) + \lambda) - k_2g(s, v) \right) - \frac{\partial f}{\partial v} \left(f(s, v)k_1 + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right] N_2$$

elde edilir. $v = v_0$ için;

$$n(s, v_0) = T\phi_1(s, v_0) + N_1\phi_2(s, v_0) + N_2\phi_3(s, v_0) \quad (4.23)$$

olup burada

$$\begin{cases} \varphi_1(s, v_0) = 0, \\ \varphi_2(s, v_0) = -\frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{v_0}, \\ \varphi_3(s, v_0) = \frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{v_0} \end{cases}, \quad (4.24)$$

dır. Böylece

$$n(s, v_0) = -\frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{v_0} N_1 + \frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{v_0} N_2$$

dır.

Teorem 3.1 gereğince eğrilik çizgisi şartından $\bar{\alpha}$ eğrisinin normal yüzeyi açılabilir ve $n(s, v_0) \parallel \bar{n}_1$ olmalıdır.

$\bar{\alpha}$ eğrisinin normal yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(s, v) &= \bar{\alpha} + v\bar{n}_1 \\ &= \alpha + \lambda N_1 + v(\cos \psi N_2 + \sin \psi N_1) \\ &= \alpha + (\lambda + v \sin \psi) N_1 + v \cos \psi N_2 \end{aligned}$$

ile tanımlı olup burada ψ , \bar{n}_1 ile N_2 arasındaki açıdır.

$\mathbb{Q}(s, v)$ normal yüzeyinin açılabilir olması için $\Leftrightarrow \det(\bar{\alpha}', \bar{n}_1, \bar{n}_1') = 0$ olması kullanılarak gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$$\psi' (1 - \lambda k_1) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten $\psi' = 0$ veya $1 - \lambda k_1 = 0$ olmalıdır.

$$\psi' = 0 \Leftrightarrow \psi = \text{sabit}$$

veya

$$1 - \lambda k_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{k_1} \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada $k_1 = \kappa \cos \theta$ ile tanımlı olup $\kappa \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğundan $k_1 \neq 0$ dır.

$n(s, v_0) \parallel \bar{n}_1$ olması kullanılırsa

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{v_0} = -\beta(s) \sin \psi \\ \frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{v_0} = \beta(s) \cos \psi \end{cases}, \quad \beta(s) \neq 0 \quad (4.26)$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.3.1: $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ile verilen $\alpha(s)$ eğrisinin Mannheim B-eğri çifti olan $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin $P(s, v)$ yüzeyi üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left\{ \begin{array}{l} f(s, v_0) = g(s, v_0) \equiv 0, \quad h(s, v_0) = -\lambda, \lambda = \text{sabit} \\ \psi = \text{sabit} \quad \text{veya} \quad \lambda = \frac{1}{k_1}, k_1 \neq 0 \\ \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{v_0} = -\beta(s) \sin \psi \\ \left. \frac{\partial h}{\partial v} \right|_{v_0} = \beta(s) \cos \psi, \quad \beta(s) \neq 0 \end{array} \right. \quad (4.27)$$

olmasıdır.

Örnek 4.3.1: $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ birim hızlı çember eğrisini alalım. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısını Örnek 4.1.1 de ifade etmiştik.

Bilindiği üzere çember eğrisi düzlemsel olup $\tau = 0$ ve $\kappa = 1$ dir. Bishop eşitliklerinden $\tau = -\theta'$ olup $\theta = c = \text{sabit}$ elde edilir. Dolayısıyla $c = 0$ alabiliriz. Yine Bishop eşitliklerinden $k_1 = \kappa \cos \theta$ ile tanımlı olup $k_1 = 1$ dir. Ayrıca (4.27)

denkleminde $\lambda = \frac{1}{k_1} = 1$ dir. Böylece α eğrisinin Mannheim-B eğri çiftini üzerinde

bulunduran yüzey

$$P_{11}(s, v) = \alpha(s) + (\lambda + h(s, v))N_1(s) + f(s, v)T(s) + g(s, v)N_2(s)$$

olmak üzere

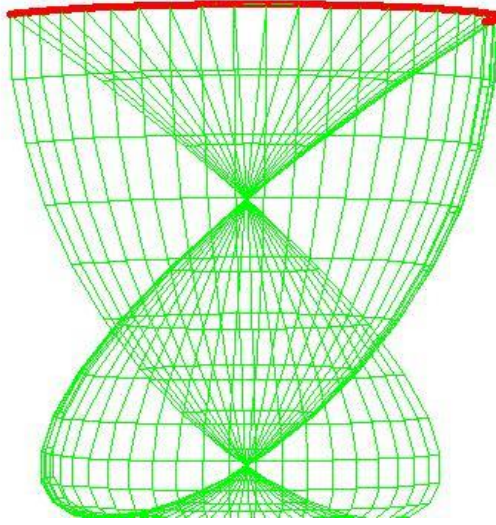
a)Eğer

$$\begin{aligned} f(s, v) &= 0 \\ g(s, v) &= -\sin v \\ h(s, v) &= -\lambda + v \sin v \end{aligned}$$

$v_0 = 0, \beta(s) = 1$ ve $\psi = \frac{\pi}{2}$ olarak seçilirse (4.27) denklemindeki parametrik ve eğrilik çizgisi olması şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla ortak Mannheim-B eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_{11}(s, v) = (\cos s(1 - v \sin v), \sin s(1 - v \sin v), \sin v)$$

şeklinde elde edilir. Bu yüzeyin şekli $-\pi \leq s \leq \pi$ ve $0 \leq v \leq \pi$ değerleri için Şekil 4.11 ile verilmektedir.



Şekil 4.11. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

b)Eğer

$$f(s, v) = 0$$

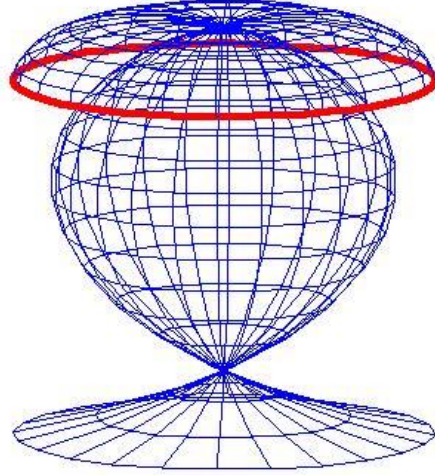
$$g(s, v) = v \cos v$$

$$h(s, v) = -\lambda + v \cos v$$

$v_0 = 0, \beta(s) = 1$ ve $\psi = \frac{7\pi}{4}$ olarak seçilirse (4.27) denklemindeki parametrik ve eğrilik çizgisi olması şartı sağlanmış olur. Böylece ortak Mannheim-B eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$P_{12}(s, v) = (\cos s(1 - v \cos v), \sin s(1 - v \cos v), v \cos v)$$

şeklinde elde edilir. Bu yüzeyin şekli $0 \leq s, v \leq 2\pi$ değerleri için Şekil 4.12 ile verilmektedir.



Şekil 4.12. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir başka üyesi

4.4. Ortak Eğrilik Çizgili Regle Yüzeyler

$\alpha = \alpha(s)$, $P(s,v)$ yüzeyi üzerinde $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. $\|\alpha''\| \neq 0$ olarak alalım. α dayanak eğrili $P=P(s,v)$ regle yüzeyini alalım. Regle yüzeyin tanımı gereğince,

$$P(s, v) - P(s, v_0) = (v - v_0)R(s) \quad (4.28)$$

olacak şekilde $R=R(s)$ vektörü vardır. (4.1) denklemi ve (4.3) şartının (4.28) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$(v - v_0)R(s) = f(s, v)T(s) + g(s, v)N_1(s) + h(s, v)N_2(s) \quad (4.29)$$

elde edilir. Buradan Bishop çatısı tanımından $f(s,v)$, $g(s,v)$, $h(s,v)$ bilinmeyenleri

$$\begin{cases} f(s, v) = (v - v_0) \langle R, T \rangle \\ g(s, v) = (v - v_0) \langle R, N_1 \rangle \\ h(s, v) = (v - v_0) \langle R, N_2 \rangle \end{cases} \quad (4.30)$$

dır.

Şimdi $P=P(s,v)$ regle yüzeyi üzerinde Bishop çatısı ile verilen α dayanak eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartları inceleyelim:

(4.10) nolu eğrilik çizgisi şartının (4.30) de kullanılmasıyla $\lambda(s) \neq 0$ olmak üzere;

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} \right|_{v_0} = \lambda(s) \sin \theta = \langle R, N_1 \rangle \\ \left. \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} \right|_{v_0} = -\lambda(s) \cos \theta = \langle R, N_2 \rangle \end{cases} \quad (4.31)$$

elde edilir. Böylece sapma fonksiyonları

$$f(s, v) = (v - v_0)y(s), \quad g(s, v) = (v - v_0)\lambda(s) \sin \theta, \quad h(s, v) = -(v - v_0)\lambda(s) \cos \theta$$

olarak seçilirse

$$R(s) = y(s)T + \lambda(s) \sin \theta N_1 - \lambda(s) \cos \theta N_2, \quad \lambda(s) \neq 0 \quad (4.32)$$

olup burada $y(s)$ reel değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere ortak eğrilik çizgili regle yüzeyler ailesi

$$P(s, v) = \alpha(s) + (v - v_0)[y(s)T(s) + \lambda(s) \sin \theta N_1(s) - \lambda(s) \cos \theta N_2(s)] \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi bu yüzey içerisinde açılabilir olanları inceleyelim:

(4.33) nolu regle yüzeyin açılabilirlik şartı için $\det(\alpha', R, R') = 0$ olması kullanılarak gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda(s)(y(s)\kappa(s) - \lambda(s)\tau(s)) = 0$$

olup bu eşitlikte $\lambda(s) \neq 0$ olması kullanılırsa

$$y(s) = \lambda(s) \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$$

elde edilir. (4.10) nolu koşuldan $\tau(s) = 0$ olacağından dolayı bu regle yüzeyin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul $y(s) = 0$ olmalıdır.

Böylece

$$R(s) = \lambda(s) \sin \theta N_1 - \lambda(s) \cos \theta N_2, \quad \lambda(s) \neq 0 \quad (4.34)$$

olup ortak eğrilik çizgili açılabilir regle yüzeyler ailesi,

$$P(s, v) = \alpha(s) + (v - v_0)[\lambda(s) \sin \theta N_1 - \lambda(s) \cos \theta N_2] \quad (4.35)$$

şeklindedir.

Örnek 4.4.1: $\alpha(s) = (\frac{4}{5} \cos(s), -\frac{3}{5} \cos(s), 1 - \sin(s))$ birim hızlı eğrisini alalım.

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısının

$$\begin{aligned} T &= (-\frac{4}{5} \sin s, \frac{3}{5} \sin s, -\cos s) \\ N_1 &= (\frac{2}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \cos s, \frac{1}{2} \sin s) \\ N_2 &= (\frac{2\sqrt{3}}{5} \cos s, \frac{3\sqrt{3}}{10} \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s) \end{aligned}$$

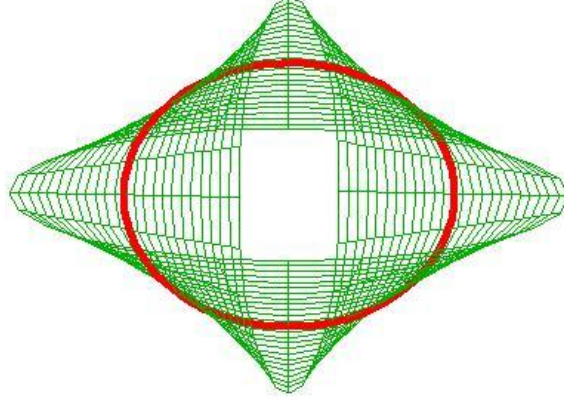
olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\tau = 0$ dır.

$$f(s, v) = h(s, v) = 0, \quad g(s, v) = v$$

$v_0 = 0, \lambda = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ olarak seçilirse ortak eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_{13}(s, v) = \left(\frac{2}{5} \cos(2s + v \cos s), -\frac{3}{5} \cos(1 + v), 1 - \sin s + v \frac{1}{2} \sin s \right)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca aynı şartlar için $y(s) = 0$ olduğundan bu regle yüzey açılabilir. Bu yüzeyin şekli $0 \leq s \leq 2\pi$ ve $-1 \leq v \leq 1$ değerleri için aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.13. Ortak eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi

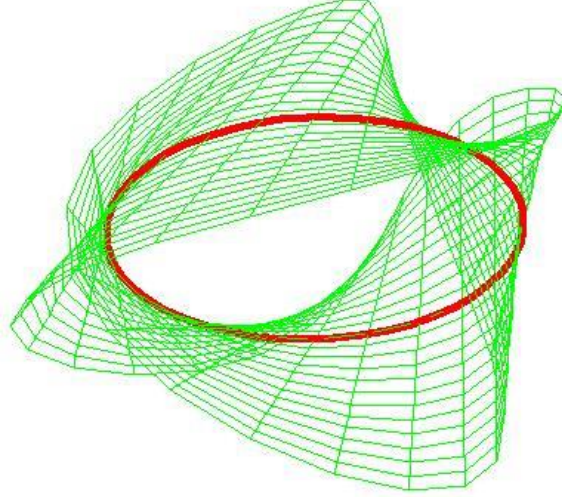
Eğer

$$f(s, v) = g(s, v) = v, h(s, v) = 0$$

$v_0 = 0$, $\lambda=1$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ olarak seçilirse ortak eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$P_{14}(s, v) = \left(\frac{4}{5} \cos s + \frac{2v}{5} (-2 \sin s + \cos s), -\frac{3v}{5} (\sin s - \cos s), 1 - \sin s + v \left(-\cos s + \frac{1}{2} \sin s \right) \right)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca aynı şartlar için $y(s) \neq 0$ olduğundan bu regle yüzey açılabilir değildir. Bu yüzeyin şekli $0 \leq s \leq 2\pi$ ve $-1 \leq v \leq 1$ değerleri için aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.14. Ortak eğrilik çizgili açılabilir olmayan regle yüzey ailesinin bir üyesi

4.5. Ortak Mannheim Eğrilik Çizgili Regle Yüzeyler

$\alpha = \alpha(s)$, $P(s,v)$ yüzeyi üzerinde $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. $\|\alpha''\| \neq 0$ olarak alalım. α nın Mannheim çifti olan $\bar{\alpha}$ dayanak eğrili $P=P(s,v)$ regle yüzeyini alalım. Regle yüzeyin tanımını gereğince,

$$P(s, v) - P(s, v_0) = (v - v_0)R(s) \quad (4.36)$$

olacak şekilde $R=R(s)$ vektörü vardır.

$\bar{\alpha}$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olmak üzere (4.11) denklemi ve (4.12) şartının (4.36) da kullanılmasıyla

$$(v - v_0)R(s) = f(s, v)\bar{T}(s) + g(s, v)\bar{N}(s) + h(s, v)\bar{B}(s) \quad (4.37)$$

elde edilir. Buradan Frenet çatısı tanımından $f(s,v)$, $g(s,v)$, $h(s,v)$ bilinmeyenleri

$$\begin{aligned} f(s, v) &= (v - v_0) \langle R, \bar{T} \rangle \\ g(s, v) &= (v - v_0) \langle R, \bar{N} \rangle \\ h(s, v) &= (v - v_0) \langle R, \bar{B} \rangle \end{aligned} \quad (4.38)$$

dır.

Şimdi verilen $P=P(s,v)$ regle yüzeyi üzerinde Frenet çatısı ile verilen $\bar{\alpha}(s)$ dayanak eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartları inceleyelim:

(4.18) nolu eğrilik çizgisi şartının (4.38) de kullanılmasıyla $\beta(s) \neq 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} &= \beta(s) \sin \theta = \langle R, \bar{N} \rangle \\ \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} &= -\beta(s) \cos \theta = \langle R, \bar{B} \rangle \end{aligned} \quad (4.39)$$

elde edilir. Böylece sapma fonksiyonları

$$f(s, v) = (v - v_0)x(s),$$

$$\begin{aligned} g(s, v) &= (v - v_0)\beta(s)\sin\theta, \\ h(s, v) &= -(v - v_0)\beta(s)\cos\theta \end{aligned}$$

olarak seçilirse

$$R(s) = x(s)\bar{T}(s) + \beta(s)\sin\theta\bar{N}(s) - \beta(s)\cos\theta\bar{B}(s), \quad \beta(s) \neq 0 \quad (4.40)$$

olup burada $x(s)$ reel değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere ortak eğrilik çizgili regle yüzeyler ailesi

$$P(s, v) = \bar{\alpha}(s) + (v - v_0)[x(s)\bar{T}(s) + \beta(s)\sin\theta\bar{N}(s) - \beta(s)\cos\theta\bar{B}(s)] \quad (4.41)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi bu yüzey içerisinde açılabilir olanları inceleyelim:

(4.41) nolu regle yüzeyin açılabilirlik şartı için $\det(\bar{\alpha}', R, R') = 0$ olması kullanılarak gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$$\beta^2(s)(\bar{\tau} + \theta') + \beta(s)x(s)\cos\theta\bar{\kappa} = 0$$

elde edilir. Burada $\theta' = -\bar{\tau} = \frac{\kappa}{\lambda\tau}$, $\bar{\kappa} \neq 0$ ve $\beta(s) \neq 0$ olması kullanılırsa

$$x(s) = 0$$

elde edilir. O halde (4.41) regle yüzey ailesinin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul $x(s) = 0$ olmasıdır.

Böylece

$$R(s) = \beta(s)\sin\theta\bar{N}(s) - \beta(s)\cos\theta\bar{B}(s), \quad \beta(s) \neq 0 \quad (4.42)$$

olup ortak eğrilik çizgili açılabilir regle yüzeyler ailesi,

$$P(s, v) = \bar{\alpha}(s) + (v - v_0)[\beta(s)\sin\theta\bar{N}(s) - \beta(s)\cos\theta\bar{B}(s)] \quad (4.43)$$

şeklindedir.

Örnek 4.5.1: $\alpha(s) = \left(\frac{3}{5}\sin s, \frac{3}{5}\cos s, \frac{4}{5}s\right)$ birim hızlı eğrisini alalım. Örnek 4.2.1 de

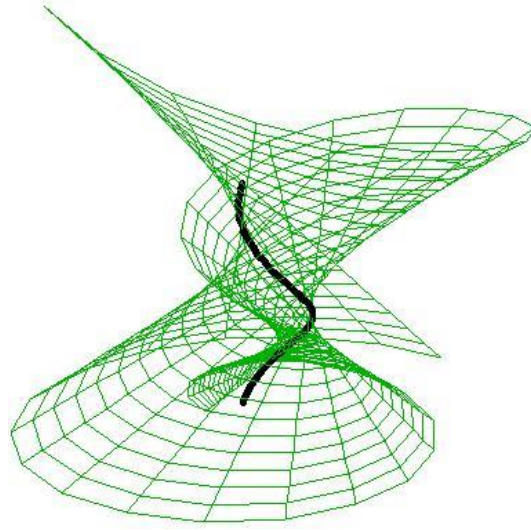
bu eğrinin Mannheim çifti olan $\bar{\alpha}$ eğrisini ve Frenet elemanlarını belirtmiştik.

$x(s)=s, v_0 = 0, \theta = \frac{3}{4}s$ ve $\beta(s) = 1$ olarak seçilirse (4.41) şartı sağlanmış olur.

Böylece ortak Mannheim eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesini elde etmiş oluruz. Öyle ki:

$$P_{15}(s, v) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\sin(s) + v\left(-\frac{s}{\sqrt{5}}\cos(s) - \sin(s)\sin\left(\frac{3s}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos(s)\cos\left(\frac{3s}{4}\right)\right), \\ -\frac{2}{5}\cos(s) - v\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\sin(s) - \cos(s)\sin\left(\frac{3s}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(s)\cos\left(\frac{3s}{4}\right)\right), \\ \frac{4}{5}s + \frac{v}{\sqrt{5}}\left(2s + \cos\left(\frac{3s}{4}\right)\right) \end{pmatrix}$$

dir. Burada $0 \leq s \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1$ olmak üzere bu yüzeyin şekli Şekil 4.15 daki gibidir.



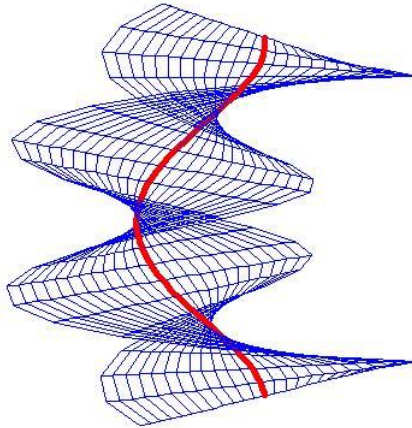
Şekil 4.15. Ortak Mannheim eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi

Eğer $x(s)=0, v_0 = 0, \theta = \frac{3}{4}s$ ve $\beta(s) = 1$ olarak seçilirse (4.43) şartı sağlanmış olur.

Böylece ortak Mannheim eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_{16}(s, v) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \sin(s) - v \left(\sin(s) \sin\left(\frac{3s}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(s) \cos\left(\frac{3s}{4}\right) \right), \\ -\frac{2}{5} \cos(s) - v \left(\cos(s) \sin\left(\frac{3s}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(s) \cos\left(\frac{3s}{4}\right) \right), \\ \frac{4}{5} s + \frac{v}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{3s}{4}\right) \end{pmatrix}$$

dir. Burada $-\pi \leq s \leq \pi, -1 \leq v \leq 1$ olmak üzere bu yüzeyin şekli Şekil 4.16 deki gibidir.



Şekil 4.16. Ortak Mannheim eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi

4.6. Ortak Mannheim-B Eğrilik Çizgili Regle Yüzeyler

$\alpha = \alpha(s)$, $P(s,v)$ yüzeyi üzerinde $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. $\|\alpha''\| \neq 0$ olarak alalım. α nın Mannheim-B çifti olan $\bar{\alpha}$ dayanak eğrili $P=P(s,v)$ regle yüzeyini alalım. Regle yüzeyin tanımı gereğince,

$$P(s, v) - P(s, v_0) = (v - v_0)R(s) \quad (4.44)$$

olacak şekilde $R=R(s)$ vektörü vardır.

(4.21) denklemini ve (4.22) şartının (4.44) de kullanılmasıyla

$$(v - v_0)R(s) = f(s, v)T(s) + (\lambda + h(s, v))N_1(s) + g(s, v)N_2(s) \quad (4.45)$$

elde edilir. Buradan Bishop çatısı tanımından $f(s,v)$, $g(s,v)$, $h(s,v)$ bilinmeyenleri

$$\begin{aligned} f(s, v) &= (v - v_0) \langle R, T \rangle \\ g(s, v) &= (v - v_0) \langle R, N_2 \rangle \\ h(s, v) &= (v - v_0) \langle R, N_1 \rangle - \lambda \end{aligned} \quad (4.46)$$

dır.

Şimdi verilen $P=P(s,v)$ regle yüzeyi üzerinde Bishop çatısı ile verilen α nın Mannheim-B çifti olan $\bar{\alpha}$ dayanak eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartları inceleyelim:

(4.26) nolu eğrilik çizgisi şartının (4.46) de kullanılmasıyla $\beta(s) \neq 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(s, v_0)}{\partial v} &= -\beta(s) \sin \psi = \langle R, N_2 \rangle \\ \frac{\partial h(s, v_0)}{\partial v} &= \beta(s) \cos \psi = \langle R, N_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. Böylece sapma fonksiyonları

$$\begin{cases} f(s, v) = (v - v_0)x(s), \\ g(s, v) = -(v - v_0)\beta(s) \sin \psi, \\ h(s, v) = (v - v_0)\beta(s) \cos \psi - \lambda \end{cases} \quad (4.48)$$

olarak seçilirse

$$R(s) = x(s)T + \beta(s) \cos \psi N_1 - \beta(s) \sin \psi N_2, \quad \beta(s) \neq 0, \psi = \text{sabit} \quad (4.49)$$

olup burada $x(s)$ reel değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere ortak Mannheim-B eğrilik çizgili regle yüzeyler ailesi

$$P(s, v) = \alpha(s) + (v - v_0) \left[x(s)T + \beta(s) \cos \psi N_1 - \beta(s) \sin \psi N_2 \right] \quad (4.50)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi bu yüzey içerisinde açılabilir olanları inceleyelim:

(4.49) nolu regle yüzeyin açılabilirlik şartı için $\det(\bar{\alpha}', R, R') = 0$ olması kullanılarak gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa

$$\beta(s)x(s)(k_2 \cos \psi + k_1 \sin \psi) = 0$$

elde edilir. Burada $k_1 = \kappa \cos \theta$, $k_2 = \kappa \sin \theta$, $\kappa \neq 0$ ve $\beta(s) \neq 0$ olması kullanılırsa

$$x(s) = 0 \text{ veya } \cos(\theta - \psi) = 0 \Leftrightarrow \theta = \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (4.51)$$

elde edilir.

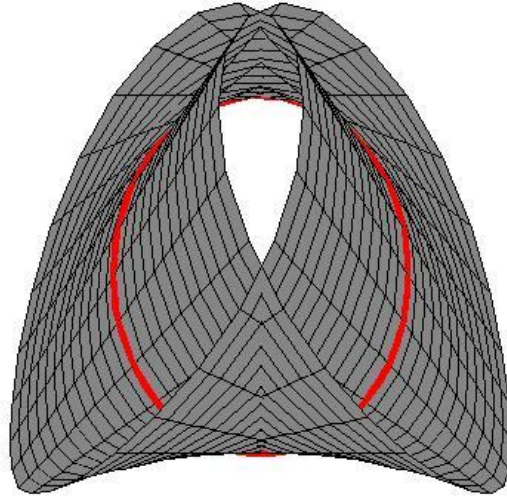
Örnek 4.6.1: Örnek 4.3.1 de belirttiğimiz çember eğrisi örneğini ele alalım.

$x(s)=s$, $v_0 = 0$, $\psi = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta(s) = -\cos s$ olarak seçilirse (4.49) şartı sağlanmış

olur. Böylece ortak Mannheim-B eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_{17}(s, v) = \left(\cos s + v(\sin^2 s + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 s), \sin s + v(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \sin s \cos s, v \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s \right)$$

şeklinde elde edilir. Burada $-\pi \leq s \leq \pi$, $-1 \leq v \leq 1$ olmak üzere bu yüzeyin şekli Şekil 4.17 deki gibidir.

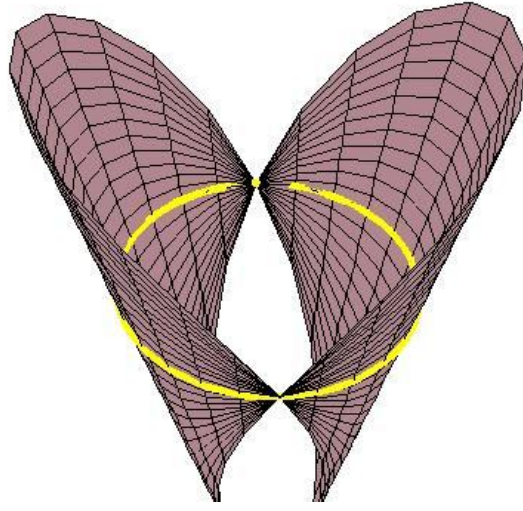


Şekil 4.17. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi

Eğer özel olarak $x(s)=0$ olarak seçilirse (4.51) şartı sağlanmış olur. Böylece ortak Mannheim-B eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_{18}(s, v) = \left(\cos s \left(1 + v \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s\right), \sin s \left(1 + v \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s\right), v \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s \right)$$

dir. Burada $-\pi \leq s \leq \pi$, $-1 \leq v \leq 1$ olmak üzere bu yüzeyin şekli Şekil 4.18 daki gibidir.



Şekil 4.18. Ortak Mannheim-B eğrilik çizgili açılabilir regle yüzey ailesinin bir üyesi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı ile verilen birim hızlı bir eğriden geçen ve bu eğriyi hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olarak kabul eden yüzeyler için gerekli ve yeterli koşullar elde edildi. Ardından 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklem ile verilmiş bir yüzey üzerinde Frenet çatısı ile verilen birim hızlı eğrinin Mannheim eğri çiftinin ve Bishop çatısı ile verilen eğrinin Mannheim-B eğri çiftinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edildi. Yüzeyin özel bir çeşidi olan regle yüzey olması durumunda bahsi geçen eğrilerin eğrilik çizgisi olma şartı incelenerek bu regle yüzeyler içerisinde açılabilir olması için gerekli koşul verildi. Ayrıca elde edilen bulgular kullanılarak verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi hem parametrik hem de eğrilik çizgisi kabul eden bilinen özel yüzey çeşitlerini de içeren çeşitli yüzey aileleri örnekleri verildi.

Bu çalışmada elde edilen sonuçların karşılıkları 3-boyutlu Minkowski uzayında ya da yüksek boyutlu çeşitli uzaylarda araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Alliez P, Cohen-Steiner D, Devillers O, Levy B, Desbrum M. (2003). Anisotropic polygonal remeshing. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH, p. 485-93.
- Alourgas PG, Hottel GR, Tuorhy ST. (1990). A design and interrogation system for modeling with rational splines, In; S. K. Chakrabarti et al., editors, Proc. Ninth International Symposium on OMAE, Volume 1, Part b, Houston, TX, ASME, New York, p. 555-65.
- Atalay G Ş, Kasap E, (2016). Surfaces family with common Smarandache geodesic curve according to Bishop frame in Euclidean space, *Mathematical Science and Applications E-Notes.*, 4, 1.
- Atalay G.Ş, Kasap E, (2016). "Surfaces family with common Smarandache asymptotic curve according to Bishop frame in Euclidean space", *Bol. Soc. Paran. Mat.*, Vol. 34 No: 1, 1-16, (ISSN 00378712),
- Atalay G.Ş, Kasap E, (2016). "Surfaces family with common Smarandache asymptotic curve", *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, Vol. 34, No, 1, doi:10.5269.
- Atalay G.Ş, Kasap E, (2017). Surfaces family with common Smarandache geodesic curve, *Journal of Science and Arts (JOSA)*, 4, 41.
- Atalay G.Ş. (2018). Surfaces family with a common Mannheim asymptotic curve. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 2(4), 143-154.
- Atalay G Ş. (2018). Surfaces family with a common Mannheim geodesic curve. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 2(4), 155-165.
- Ayvacı K. H. (2019). Ortak Mannheim-B İsogeodezikli ve İsoasimptotikli Yüzey Ailesi, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 48., Samsun.
- Ayvacı K. H. , Atalay G. Ş (2020). Ortak Bertrand-B İsogeodezik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 10(3): 1975-1983, doi: 10.21597/jist.696719.
- Bayram E. , Güler F. , Kasap E. (2012). Parametric representation of a surface pencil with a common spatial asymptotic curve. *Computer Aided Design*. Ondokuz Mayıs University, Arts and Science Faculty, Department of Mathematics, 55139, Kurupelit, Samsun, Turkey
- Biran, L. (1981). *Diferansiyel Geometri Dersleri*, üçüncü baskı, AR-yayın dağıtım, İstanbul.
- Bishop, R.L. (1975). There is more than one way to Frame a curve. *American Mathematical Monthly*, 82(3):246-251.
- Blum, R. (1966). A remarkable class of Mannheim-curves. *Canadian Mathematical Bulletin*, 9:223-228.
- Che WJ, Paul JC. (2007). Lines of curvature and umbilical points for implicit surfaces. *Computer Aided Geometric Design*; 24(7): 395-409.
- Clauvelin, N., Olson, W.K., Tobias, I., (2012). Characterization of the geometry and topology of DNA pictured as a discrete collection of atoms, *Journal of Chemical Theory Computation*, 8, 1092-1107.
- Carmo MP. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, New Jersey.
- Göktepe Ö. (2001). Use of Non-Uniform Rational B-Splines for Tree-Dimensional Computer Simulation of Warp Knitted Structures. *Turk J Engin Environ Sci* 25, 369-378.

- Hacısalıhoğlu H.H. (1993). Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- Han C.Y., (2008). Nonexistence of rational rotation-minimizing frames on cubic curves, *Computer Aided Geometric Design*, 25(4-5), 298-304.
- Kalogerakis E, Nowrouzezahrai D, Simari, P, Singh K. (2009). Extracting lines of curvature from noisy point clouds. *Computer-Aided Design*; 41(4): 282-92.
- Li, CY, Wang, RH, Zhu, CG.(2011). Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature. *Computer Aided Design*; 43 1110-1117. doi:10.1016/j.cad.2011.05.001.
- Liu, H. and Wang, F. (2008). Mannheim partner curves in 3-space, *Journal of Geometry*, vol. 88, no. 1-2, pp. 120-126(7).
- Maekawa, T, Wolter F-E, Patrikalakis NM. (1996) .Umbilics and lines of curvature for shape interrogation. *Computer Aided Geometric Design*; 13(2): 133-61.
- Martin RR. (1983). Principal patches-a new class of surface patches based on differential geometry. In: Ten Hagen PJW, editor. *Eurographics'83, Proc. 4th Ann. European Association for Computer Graphics Conference and Exhibition, Zagreb, Yugoslavia*. Amsterdam: North-Holland. P. 47-55.
- Masal M., Azak A.(2017). Mannheim B-Curves in the Euclidean 3-Space. *Kuwait J. Sci.* 44 (1) pp. 36-41.
- Matsuda, H. & Yorozu, S. (2009). On generalized Mannheim curves in Euclidean 4-space. *Nihonkai Mathematical Journal*, 20:33-56.
- Munchmeyer FC. (1987). On surface imperfections. In: Martin R, editor. *Mathematics of Surfaces II*. Oxford: Oxford University Press. P . 459-74.
- O'neill B. (1966). *Elementary differential geometry*. New York: Academic Press Inc.
- Orbay,K. & Kasap, E. (2009). On Mannheim partner curves in E^3 . *International Journal of Physical Sciences* ,4(5):261-264.
- Patrikalakis NM, Maekawa T. (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer – Verlag.
- Ravani, B. and Ku, T.S. (1991). Bertrand Offsets of Ruled and Developable Surfaces. *Comput.Aided Geom. Design*, 23 (2): 145-152.
- Sabuncuoğlu, A., (2001). *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Yılmaz, G. Pirinççi, B. Erdoğan, M.(2005). DNA'nın Topolojisi ve Geometrisi. *Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi*. Sayı 3, 11-22.
- Zhang XP Che Vj Paul JC.(2009). Computing lines of curvature for implicit surfaces. *Computer Aided Geometric Design*; 26(9): 423-40.
- Wang F.,and Liu, H., (2007). Mannheim Partner Curves in 3-Space, *Proceedings of The Eleventh International Workshop on Diff. Geom.* pp.25-31.
- Wang, G.J., Tang, K., Tai ,C. L. (2004). Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic, *Computer Aided Design*. 36(5), 447-459.
- Willmore TJ. (1956). *An Introduction to Differential Geometry*. Oxford University Press.

ÖZGEÇMİŞ



Hasret Murat, 17.11.1995 tarihinde Kayseri’de doğdu. Sorgun Anadolu Öğretmen Lisesi’ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi’nden 2018 yılında mezun oldu. Orta derecede İngilizce bilmektedir. Temel ilgi alanları, makale inceleme, kitap okuma, voleybol, moda tasarım.

İletişim Bilgileri

E-mail: hasret.karasahin17@gmail.com

Telefon: 0537 507 60 66

ORCID ID:0000-0003-3038-4554