

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BÜYÜK PROJEKTİF MODÜLLER

Yüksek Lisans Tezi

Maryam BARADARAN

Danışman
Doç. Dr. Celil NEBİYEY

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Maryam BARADARAN tarafından, **Doç. Dr. Celil NEBİYEV** danışmanlığında hazırlanan “**Büyük Projektif Modüller**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 13/07/2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği/oy çokluğu ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı, Adı/Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan (Danışman)	Doç. Dr. Celil NEBİYEV Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Red
	Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Red
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin ÖKTEN Amasya Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Teknolojileri Bölümü		<input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Red

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
... / ... / ...
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

14/06/2021

Maryam BARADARAN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : Büyük Projektif Modüller

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 07/06/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 10

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

14/06/2021

Celil NEBİYEV

ÖZET

BÜYÜK PROJEKTİF MODÜLLER

Maryam BARADARAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans, Temmuz/2021

Danışman: Doç. Dr. Celil NEBİYEYEV

Bu yüksek lisans tezinde büyük projektif modül kavramı tanımlandı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi. Bu çalışmada tüm modüller birimli halka üzerinde olup üniter modüllerdir. M bir R -modül ve K , M 'nin bir büyük alt modülü olmak üzere eğer M/K büyük M -projektif ise $K=M$ olur. M bir büyük projektif R -modül olsun. N bir R -modül olmak üzere eğer N 'den M 'ye çekirdeği N 'de büyük olan en az bir R -modül epimorfizması tanımlanabilirse bu durumda $M=0$ olur. M bir R -modül olmak üzere büyük M -projektif modüllerin direkt toplamının da büyük M -projektif olduğu gösterildi. Ayrıca büyük M -projektif bir modülün her direkt toplam teriminin de büyük M -projektif olduğu gösterildi. M bir büyük N -projektif R -modül ve K , N 'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda M büyük N/K -projektif olur. M bir büyük N -projektif R -modül ve K , N 'nin bir büyük alt modülü olsun. Bu durumda M büyük K -projektif olur.

M ve N iki R -modül olsun. Bu durumda M modülünün N 'nin her kopyalarının direkt toplamına göre büyük projektif olması için gerek ve yeter şart her N -üretilmiş L modülü için M 'nin büyük L -projektif olmasıdır. M bir R -modül olsun. Bu durumda her R -modülün büyük M -projektif olması için gerek ve yeter şart M 'nin yarı basit olmasıdır. Her R -modülün büyük M -projektif olması için gerek ve yeter şart M 'nin temelinin M 'ye eşit olmasıdır. Yine her R -modülün büyük M -projektif olması için gerek ve yeter şart her R -modülün M -projektif (M -injektif) olmasıdır. P bir R -modül olsun. Eğer P büyük P -projektif ise P 'ye bir kendi kendine büyük projektif R -modül denir. Tezin sonunda P kendi kendine büyük projektif modül ve K , P 'nin tamamen değişmez bir alt modülü olmak üzere P/K 'nin kendi kendine büyük projektif olduğu gösterildi.

Anahtar Sözcükler: Büyük alt modül, tam dizi, projektif modül, yarı basit modül.

ABSTRACT

ESSENTIAL PROJECTIVE MODULES

Maryam BARADARAN
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master's degree, July/2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Celil NEBİYEV

In this thesis, essential projective modules are defined and some properties of these modules are investigated. All rings have identities and all modules are unital modules in this work. Let M be an R -module and K be an essential submodule of M . If M/K is essential M -projective, then $K=M$. Let M be an essential projective R -module. If it can be defined an R -module epimorphism from N to M with essential kernel for an R -module N , then $M=0$. For an R -module M , it is proved that the direct sum of essential M -projective modules is essential M -projective. It is also proved that every direct summand of an essential M -projective module is essential M -projective. Let M be an essential N -projective R -module and K be a submodule of N . Then M is essential N/K -projective. Let M be an essential N -projective R -module and K be an essential submodule of N . Then M is essential K -projective.

Let M and N be R -modules. Then M is essential projective according to every direct sum of copies of N if and only if M is essential L -projective for every N -generated module L . Let M be an R -module. Then every R -module is essential M -projective if and only if M is semisimple. Every R -module is essential M -projective if and only if the socle of M equal to M . Also every R -module is essential M -projective if and only if every R -module is M -projective (M -injective). Let P be an R -module. If P is essential P -projective, then P is called a self essential projective R -module. At the end of this thesis, for a self essential projective R -module P and a fully invariant submodule K of P , it is proved that P/K is self essential projective.

Keywords: Essential submodule, exact sequence, projective module, semisimple module.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam sırasında bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Celil NEBİYEV'e teşekkür edeip ve minnetdar olduğumu bildirmek isterim.

Bu süreçte gerekli tüm kolaylıkları sağlayan sevgili eşime Amin ASADIAN ve her zaman yanımda olduğunu bildiğim ve manevi desteklerini hissettiğim Prof. Dr. Cevat NİSBET'e, bizi öğrenmeye teşvik ederek büyüten haklarını ödeyemeyeceğim sevgili annem Sarvar NİSBET ve sevgili babam Habib BARADARAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Maryam BARADARAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER.....	v
SİMGELER VE KISATLAMALAR.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ.....	2
2.1. Literatür Özeti	2
2.2. Modüller.....	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	25
3.1. Projektif Modüller.....	25
3.2. İnjektif Modüller	35
3.3. Büyük Alt Modüller.....	41
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	45
4.1. Büyük Projektif Modüller	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	46
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	58

SİMGELER VE KISATLAMALAR

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
\subset	: Alt küme
\subsetneq	: Öz alt küme
1_R	: R halkasının birim elemanı (çarpımsal birim)
0_R	: R halkasının sıfır elemanı (toplamsal birim)
R – Modül	: R halkası üzerinde tanımlanan modül
${}_R M$: Sol R -modül
\leq	: Alt modül
$<$: Öz alt modül
$\langle X \rangle$: X kümesi tarafından üretilen alt modül
Rm	: m elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
M/N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\text{Im } f$: f modül homomorfizmasının görüntüsü
$\text{Çek}f$: f modül homomorfizmasının çekirdeği
I_M	: M modülünün birim homomorfizması
$\text{End}M$: M modülünün bütün endomorfizmalar kümesi
$\sum_{i \in I} M_i$: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modül ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modül ailesinin direkt toplamı
$\prod_{i \in I} U_i$: $\{U_i\}_{i \in I}$ modüller topluluğunun direkt çarpımı
$M \oplus N$: M ve N alt modüllerinin direkt toplamı
$\sigma[M]$: M tarafından bütün alt üretilmiş modüllerin kümesi
$M^{(\Lambda)}$: M R -modülünün kopyalarının direkt toplamı
$N \trianglelefteq M$: N, M 'nin bir büyük alt modülüdür
$\text{Hom}(K, L)$: K 'dan L 'ye tanımlanan bütün homomorfizmalar kümesi
$\text{Soc}M$: M 'nin bütün basit alt modüllerinin toplamı

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında büyük projektif modül kavramı ele alınmış ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelenmiştir. Üzerinde çalışılan tüm modüller birimli halka üzerinde olup üniter modüllerdir. Bu tez çalışmasında öncelikle modül, projektif modül kavramlarının tanımları verilmiş ve bu kavramlarla ilgili bazı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili çalışmamızda gerekli olacak teoremler ispatlanmıştır. Bu tez çalışması giriş, kuramsal temeller ve kaynak özetleri, materyal ve yöntem, bulgular ve tartışma, sonuç ve öneriler bölümlerinden oluşmaktadır.

Kuramsal temeller ve kaynak özetleri bölümünde ilk olarak literatür özeti yapılmıştır. Devamında modül kavramının temel özelliklerine geniş yer verilerek ilgili teoremler sunulmuştur. Materyal ve yöntem bölümünde büyük projektif modüller için temel oluşturan projektif modül, injektif modül ve büyük alt modül tanımları ile bu modüllerle ilgili temel özellikler ve teoremler verilmiştir.

Bulgular ve tartışma bölümünde ise diğer bölümlerde verilen tanım ve teoremler yardımıyla büyük projektif modül tanımı ve birtakım özellikleri verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde tez konusu ile ilgili bir literatür özeti yapıldıktan sonra bu çalışmada temel oluşturan modül tanımları yapılmış ve bu kavramın çalışmamızla bağlantılı olan özellikleri incelenmiştir.

2.1. Literatür Özeti

G. Azumaya, F. Mbuntum ve K. Varadarajan 1975 yılında yayınladıkları “On M -projective and M -injective modules” adlı çalışmalarında projektif modüllerin birtakım özelliklerini incelemişlerdir. I. Beck’in 1972 yılında yayınladığı “Projective and free modules” başlıklı makalesinde projektif ve serbest modüller arasındaki ilişkiler incelenmiştir. S. Feigelstock ve R. Raphael 1986 yılında yayınladığı “Some aspects of relative projectivity” isimli çalışmalarında projektif modülleri incelemişler. D. Hill’in 1985 yılında yayınladığı “Projective modules with prime endomorphism rings” isimli çalışmasında projektif modüllerin endomorfizma halkaları incelenmiştir. V. A. Hiremath’ın 1978 yılında yayınladığı “Finitely projective modules over a Dedekind domain” isimli çalışmasında Dedekind halkaları üzerindeki projektif modüller incelenmiştir. A. A. Tuganbaev 1979 yılında yayınladığı “Poorly projective modules” adlı çalışmasında projektif modüller üzerine çalışmıştır.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. $(M, +)$ bir değişmeli grup ve $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. Eğer $\cdot : R \times M \rightarrow M, (r, m) \rightarrow rm$ dış işlemi aşağıdaki koşulları sağlarsa M ’ye R üzerinde bir sol modül veya kısaca bir sol R -modül denir ve ${}_R M$ veya sadece M ile gösterilir. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için,

i. $r(m + n) = rm + rn$

ii. $(r + s)m = rm + sm$

iii. $(rs)m = r(sm)$

Eğer R birimli ve $\forall m \in M$ için,

iv. $1_R m = m$

ise, M 'ye bir üniter sol R -modül veya kısaca üniter R -modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Bu çalışmada bütün modüller üniter modül olarak alınacaktır. Ayrıca eğer M bir R -modül ise $(M, +)$ grubunun birimi genellikle 0_M veya sadece 0 ile gösterilecektir.

Teorem 2.2.2. M bir R -modül olsun. Bu takdirde

- i. Her $r \in R$ için $r0_M = 0_M$ olur.
- ii. Her $m \in M$ için $0_R m = 0_M$ olur.
- iii. $\forall r \in R, \forall m \in M$ için $(-r)m = r(-m) = -(rm)$ olur.
- iv. $\forall r \in R, \forall m \in M$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $(nr)m = r(nm) = n(rm)$ olur

(Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.3. M bir R -modül, $N \subset M$ ve $N \neq \emptyset$ olsun. Eğer N , M 'deki işlemlere göre kendi başına bir R -modül ise N 'ye M 'nin bir alt modülü denir ve genellikle $N \leq M$ ile gösterilir (Wisbauer 1991).

Teorem 2.2.4. M bir R -modül ve N , M 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. N 'nin bir alt modül olması için gerek ve yeter şart $\forall a, b \in N$ ve her $r \in R$ için $a - b \in N$ ve $ra \in N$ olmasıdır (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.5. M bir R -modül olsun. Bu durumda 0 ve M , M 'nin birer alt modülüdür. Bu alt modüllere M 'nin aşık alt modülleri denir. Eğer N , M 'nin kendisinden farklı bir alt modülü ise, N 'ye M 'nin bir öz (has) alt modülü denir ve $N < M$ ile ifade edilir (Wisbauer 1991).

Teorem 2.2.6. M modülünün birtakım alt modüllerinin kesişimi de M 'nin bir alt modülüdür (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.7. M bir R -modül ve $X \subset M$ olsun. M 'nin X 'i kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine X 'in ürettiği alt modül denir ve $\langle X \rangle$ ile ifade edilir.

Eğer X kümesi sonlu elemanlı ise, X kümesinin ürettiği alt modüle sonlu üretilmiş alt modül denir. Eğer $X = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise, $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ modülüne bir devirli alt modül adı verilir.

Eğer $M = \langle X \rangle$ ve X sonlu elemanlı ise, M 'ye bir sonlu üretilmiş R -modül, $M = \langle a \rangle$ olacak şekilde $\exists a \in M$ varsa M 'ye a elemanı tarafından üretilmiş bir devirli R -modül denir (Hungerford, 1974).

Not: Boş kümenin ürettiği alt modül sıfırdır, yani eğer $A = \emptyset$ ise $\langle A \rangle = \{0\}$ olur.

Tanım 2.2.8. M bir R -modül ve $X \subset M$ olsun. Bu durumda X 'in elemanlarına, $\langle X \rangle$ alt modülünün üreteçleri denir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.9. M bir R -modül, $X \subset M$ ve $X \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\langle X \rangle = \{r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n \mid r_1, r_2, \dots, r_n \in R, x_1, x_2, \dots, x_n \in X, n \in \mathbb{Z}^+\}$ şeklindedir. Eğer $X = \langle a \rangle$ ise $\langle a \rangle = Ra$ olur (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.10. M bir R -modül ve N , $(M, +)$ grubunun bir alt grubu olsun. M/N bölüm grubu her $r \in R$ ve her $m + N \in M/N$ için, $r(m + N) = rm + N$ ile tanımlı dış işleme göre bir R -modüldür. Bu module M 'nin N 'ye göre bölüm modülü denir ve M/N ile ifade edilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.11. M bir R -modül ve N , M 'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda M 'nin N 'yi kapsayan alt modülleriyle M/N 'nin alt modülleri arasında $K \rightarrow K/N$ şeklinde birebir eşleme yapılabilir. Böylece M/N 'nin her alt modülü K , M 'nin N 'yi kapsayan bir alt modülü olmak üzere K/N şeklindedir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.12. M bir R -modül, K , T ve N , M 'nin alt modülleri, $K \subset N$ ve $K \subset T$ olsun. Bu takdirde, $N/K = T/K$ olması için gerek ve yeter şart $N = T$ olmasıdır (Koşar, 2008).

İspat: (\Rightarrow) $n \in N$ olsun. $N/K = T/K$ olduğundan $n + K = t + K$ olacak şekilde $\exists t \in T$ bulunabilir. Buradan $n - t = k$ olacak şekilde $\exists k \in K$ vardır, $K \subset T$ olduğundan

$n = k + t \in T$ bulunur. Yani $N \subset T$ olur. Benzer şekilde N ve T 'nin yerlerini değiştirerek $T \subset N$ olduğu gösterilebilir. Böylece $N = T$ olup istenen elde edilir.

(\Leftarrow) Açıktır.

Tanım 2.2.13. M ve N iki R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in M$ ve $\forall r \in R$ için,

- i. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- ii. $f(ra) = rf(a)$

şartları sağlanırsa f 'ye bir R -modül homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir. Eğer f birebir ise f 'ye bir monomorfizma (R -modül monomorfizması), örten ise bir epimorfizma (R -modül epimorfizması), birebir ve örten ise bir izomorfizma (R -modül izomorfizması) ($M \cong N$) denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.14. M ve N iki R -modül olsun. $f : M \rightarrow N, m \rightarrow f(m) = 0_N$ ile tanımlı f homomorfizmasına sıfır homomorfizması denir ve 0 ile gösterilir.

$h : M \rightarrow M, m \rightarrow h(m) = m$ ile tanımlı h homomorfizmasına birim homomorfizma denir ve genellikle 1_M veya I_M ile ifade edilir.

M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $i : N \rightarrow M, n \rightarrow i(n) = n$ ile tanımlı i homomorfizması bir monomorfimadır, bu monomorfizmaya içerme monomorfizması veya içerme dönüşümü denir (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.15. M ve N iki R -modül olsun. M 'den N 'ye tanımlanan bütün homomorfizmaların kümesi $Hom_R(M, N)$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.16. $f : M \rightarrow N$ ve $g : N \rightarrow K$ R -modül homomorfizmaları olsun. Bu durumda $gf = g \circ f : M \rightarrow K$ dönüşümü de bir R -modül homomorfizmasıdır (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.17. $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. $\{a \in M \mid f(a) = 0_N\}$ kümesine f 'nin çekirdeği denir ve $\mathcal{C}ekf$ veya $Kerf$ ile ifade edilir.

$\{f(a) \mid a \in M\}$ kümesine f 'nin görüntüsü denir ve $Görf$ veya Imf ile gösterilir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.18. M ve N iki R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu takdirde f 'nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}ekf=0$ olmasıdır (Hungerford, 1974).

İspat: (\Rightarrow) f birebir olsun. $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olduğundan $f : (M, +) \rightarrow (N, +)$ bir grup homomorfizması olup $f(0_M) = 0_N$ ve her $x \in M$ için $f(-x) = -f(x)$ olur. $f(0_M) = 0_N$ olduğundan $0_M \in f^{-1}(0_N) = \mathcal{C}ekf$ olur. Herhangi $x \in \mathcal{C}ekf$ alalım. Bu durumda $f(x) = 0_N = f(0_M)$ olup f birebir olduğundan $x = 0_M$ olur. O halde $\mathcal{C}ekf = 0$ olup istenen elde edilir.

(\Leftarrow) $\mathcal{C}ekf = 0$ olsun. $f(x) = f(y)$ şartını sağlayan her $x, y \in M$ için $f(x) - f(y) = 0_N$ olur. f bir R -modül homomorfizması olduğundan $f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_N$ olur. O halde $x - y \in f^{-1}(0_N) = \mathcal{C}ekf = \{0_M\}$ olup $x - y = 0_M$ ve böylece $x = y$ ve f birebir olur.

Teorem 2.2.19. M bir R -modül ve N , M 'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $p : M \rightarrow M/N$, $a \rightarrow p(a) = a + N$ dönüşümü bir epimorfizma ve $\mathcal{C}ekp = N$ 'dir. Bu epimorfizmaya doğal homomorfizma veya kanonik epimorfizma denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.20. M ve N iki R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun.

i. Eğer $K \leq M$ ise, $f(K) \leq N$ 'dir. Buna göre Imf , N 'nin bir alt modülüdür.

ii. Eğer $S \leq N$ ise, $f^{-1}(S)$ de M 'nin $\mathcal{C}ekf$ 'yi kapsayan bir alt modülüdür. Buna göre $\mathcal{C}ekf \leq M$ olur.

iii. $M/\mathcal{C}ekf \cong Imf$ 'tir (1. İzomorfizma Teoremi) (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.21. M bir R -modül, $H \leq M$ ve $K \leq M$ olsun. Bu takdirde

- i. $(H + K)/K \leq M/K$ olup $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$ olur (2. İzomorfizma Teoremi).
- ii. K, H 'nin bir alt modülü ise $H/K \leq M/K$ olup $(M/K)/(H/K) \cong M/H$ olur (3. İzomorfizma Teoremi) (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.22. M bir R -modül ve $K_i \leq M$ ($i=1,2,\dots,n$) olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) $p: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M/K_i$, $m \rightarrow p(m) = (m + K_i) = (m + K_1, m + K_2, \dots, m + K_n)$ dönüşümü örtendir ($I = \{1, 2, \dots, n\}$).
- (b) $\forall j=1, 2, \dots, n$ için $K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i = M$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) \Rightarrow (b) $p: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M/K_i$, $m \rightarrow p(m) = (m + K_i) = (m + K_1, m + K_2, \dots, m + K_n)$

dönüşümü örten olsun. Herhangi $j=1, 2, \dots, n$ ve herhangi $x \in M$ alalım. $\prod_{i=1}^n M/K_i$

kümesinin $(\delta_{ij}(x + K_j))_{i \in I}$ $\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1_R, & i = j \text{ ise} \\ 0_R, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \right)$ elemanını alalım. p örten olduğundan

$p(m) = (\delta_{ij}(x + K_j))_{i \in I}$ olacak şekilde $\exists m \in M$ vardır.

$p(m) = (m + K_i)_{i \in I} = (\delta_{ij}(x + K_j))_{i \in I}$ olduğundan $m + K_j = x + K_j$ ve $i \neq j$ için

$m + K_i = K_i$ olur. $i \neq j$ için $m + K_i = K_i$ olduğundan $i \neq j$ için $m \in K_i$ olup $m \in \bigcap_{i \neq j} K_i$

olur. $m + K_j = x + K_j$ olduğundan $x - m \in K_j$ olup $x = x - m + m \in K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i$ olur. O

halde $M \subset K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i$ olup ayrıca $K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i \subset M$ olduğundan $M = K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i$ olur.

(b) \Rightarrow (a) Her $j=1, 2, \dots, n$ için $M = K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i$ olsun. Herhangi

$(m_1 + K_1, m_2 + K_2, \dots, m_n + K_n) \in \prod_{i=1}^n M/K_i$ ($m_i \in M$) alalım. $j=1, 2, \dots, n$ için

$M = K_j + \bigcap_{i \neq j} K_i$ olduğundan $m_j = k_j + t_j$ olacak şekilde $\exists k_j \in K_j$ ve $\exists t_j \in \bigcap_{i \neq j} K_i$ vardır. $m = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ diyelim. Burada $j = 1, 2, \dots, n$ için $m - t_j \in K_j$ olup $m + K_j = t_j + K_j$ olur. Diğer yandan $j = 1, 2, \dots, n$ için $m_j = k_j + t_j$ olduğundan $m_j - t_j = k_j \in K_j$ olup $m_j + K_j = t_j + K_j$ olur. O halde $j = 1, 2, \dots, n$ için $m + K_j = m_j + K_j$ olup $p(m) = (m + K_1, \dots, m + K_n) = (m_1 + K_1, \dots, m_n + K_n)$ olur. Bu durumda p örten olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.23. M bir R -modül ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $K_i \leq M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

$$(a) \quad p: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M/K_i, \quad m \rightarrow p(m) = (m + K_i) = (m + K_1, m + K_2, \dots, m + K_n)$$

dönüşümü birebirdir ($I = \{1, 2, \dots, n\}$).

$$(b) \quad \bigcap_{i=1}^n K_i = 0 \text{ olur (Wisbauer, 1991).}$$

$$\text{İspat: (a) } \Rightarrow \text{(b) } p: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M/K_i, \quad m \rightarrow p(m) = (m + K_i)_{i \in I} = (m + K_1, m + K_2, \dots, m + K_n)$$

dönüşümü birebir olsun. Bu takdirde $\zeta \text{ekp} = 0$ olur. Herhangi $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ alalım.

$x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ olduğundan $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $x \in K_i$ olup ve $x + K_i = K_i$ olur. Bu durumda

$p(x) = (x + K_1, x + K_2, \dots, x + K_n) = (K_1, K_2, \dots, K_n)$ olup $x \in \zeta \text{ekp} = 0$ olur. O halde

$x = 0$ olup $\bigcap_{i=1}^n K_i = 0$ olur.

$$(b) \Rightarrow (a) \quad \bigcap_{i=1}^n K_i = 0 \text{ olsun. Her } x \in \zeta \text{ekp} \text{ için } p(x) = (x + K_1, x + K_2, \dots, x + K_n) =$$

(K_1, K_2, \dots, K_n) olduğundan $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $x + K_i = K_i$ olup $x \in K_i$ ve buradan da

$x \in \bigcap_{i=1}^n K_i = 0$ elde edilir. Bu takdirde $x = 0$ olup $\zeta \text{ekp} = 0$ olur. Böylece p birebir olup

istenen elde edilir.

Tanım 2.2.24. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$X = \bigcup_{i \in I} N_i$ olmak üzere X tarafından üretilen alt modüle $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesinin toplamı denir

ve $\sum_{i \in I} N_i = \langle X \rangle$ ile ifade edilir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.25. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

Bu takdirde $\sum_{i \in I} N_i = \{n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+, i_1, i_2, \dots, i_k \in I, n_{i_1} \in N_{i_1}, n_{i_2} \in N_{i_2}, \dots, n_{i_k} \in N_{i_k}\}$

şeklinindedir. Eğer I sonlu ve $I = \{1, 2, \dots, k\}$ ise $\sum_{i \in I} N_i = N_1 + N_2 + \dots + N_k =$

$\{n_1 + n_2 + \dots + n_k \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots, n_k \in N_k\}$ şeklinindedir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.26. (Modüler Kuralı) M bir R -modül, $H, K, N \leq M$ ve H, N 'nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda $(H + K) \cap N = H + K \cap N$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $a \in (H + K) \cap N$ olsun. Bu takdirde $a \in H + K$ ve $a \in N$ olur. $a \in H + K$ olduğundan $a = h + k$ olacak şekilde $\exists h \in H$ ve $\exists k \in K$ vardır. $H \subset N$ olduğundan $h \in N$ olup ayrıca $a \in N$ olduğundan $k = a - h \in N$ olur. O halde $k \in K \cap N$ olup ayrıca $h \in H$ olduğundan $a = h + k \in H + K \cap N$ bulunur. Bu takdirde $(H + K) \cap N \subset H + K \cap N$ olur. Ayrıca $H + K \cap N \subset H + K$ ve $H + K \cap N \subset N$ olduğundan $H + K \cap N \subset (H + K) \cap N$ olur. Dolayısıyla $(H + K) \cap N = H + K \cap N$ 'dir.

Tanım 2.2.27. R bir halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i \in I}$

R -modüllerin bir ailesi olsun. $\left\{ \alpha \mid \alpha : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i, \text{ her } i \in I \text{ için } \alpha(i) \in M_i \right\}$ dönüşümler

kümesine $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i \in I} M_i$ ile ifade edilir.

Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ olmak üzere α elemanı genellikle $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ veya (α_i) ile gösterilir. Her $i \in I$ için α_i 'ye α 'nın i . bileşeni denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir

ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}, \dots)$ şeklinde gösterilir. $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$, $\beta = (\beta_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$

olmak üzere,

- i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$
- ii. $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I}$
- iii. $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i \in I}$

şeklinde tanımlanır. Bu cebirsel işlemlere göre $\prod_{i \in I} M_i$ bir sol R -modül yapısına sahiptir.

Bu modüle $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin direkt çarpımı denir. Bir $\alpha \in \prod_{i \in I} M_i$ elemanın sonlu tane bileşeni sıfırdan farklı ve diğer bütün bileşenleri sıfır ise, α 'ya sonlu desteklidir denir. $\prod_{i \in I} M_i$ modülünde sıfır eleman sonlu destekli kabul edilerek tüm sonlu destekli elemanların kümesi $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ile ifade edilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.2.28. Her $i \in I$ için M_i bir R -modül olmak üzere $\prod_{i \in I} M_i$ direkt çarpımının sonlu destekli elemanlar kümesi $\bigoplus_{i \in I} M_i$, $\prod_{i \in I} M_i$ modülünün bir alt modülüdür (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(m_i), (n_i) \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ ve $r \in R$ için, tanım gereği $A = \{i \in I \mid m_i \neq 0\}$ ve $B = \{i \in I \mid n_i \neq 0\}$ kümeleri sonludur (veya boştur). O halde $\{i \in I \mid m_i - n_i \neq 0\} \subset A \cup B$ ve $\{i \in I \mid rm_i \neq 0\} \subset A$ olduğundan bu kümeler de sonludur (veya boştur). Bu durumda $(m_i) - (n_i), r(m_i) \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ olur ve böylece Teorem 2.2.4.'ten $\bigoplus_{i \in I} M_i$, $\prod_{i \in I} M_i$ modülünün bir alt modülü olur.

Tanım 2.2.29. $\prod_{i \in I} M_i$ modülünün $\bigoplus_{i \in I} M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı denir. Eğer I indis kümesi sonlu ise $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olur.

Eğer her $i \in I$ için $M_i = M$ ise $\bigoplus_{i \in I} M_i = M^{(I)}$ olarak yazılır ve bu modüle M modülünün kopyalarının toplamı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.30. $\{M_i | i \in I\}$ sol R -modüllerin bir ailesi olsun. $j \in I$ için $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$, $\forall (m_i) \in \prod_{i \in I} M_i$ için $\pi_j((m_i)) = m_j$ ile tanımlanan fonksiyona kanonik projeksiyon ve $\forall m_j \in M_j$ için $\varepsilon_j : M_j \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$, $\varepsilon_j(m_j) = (m_i) = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m_j, & i = j \end{pmatrix}$ ile tanımlanan fonksiyona kanonik injeksiyon denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.31. π_j kanonik projeksiyon bir R -modül epimorfizmasıdır ve ε_j kanonik injeksiyon da bir R -modül monomorfizmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $\{M_i | i \in I\}$ sol R -modüllerin bir ailesi olsun. $j \in I$ olmak üzere $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$, $(m_i) \rightarrow \pi_j((m_i)) = m_j$ ile tanımlı π_j kanonik projeksiyon fonksiyonunu alalım. Önce bu fonksiyonun bir R -modül homomorfizması olduğunu gösterelim. π_j fonksiyonunun tanımından her $(m_i), (m'_i) \in \prod_{i \in I} M_i$ ve her $r \in R$ için $\pi_j((m_i) + (m'_i)) = \pi_j((m_i + m'_i)) = m_j + m'_j = \pi_j(m_i) + \pi_j(m'_i)$ ve $\pi_j(r(m_i)) = \pi_j((rm_i)) = rm_j = r\pi_j((m_i))$ olup, π_j fonksiyonu bir R -modül homomorfizmasıdır. Her $m_j \in M_j$ için $\pi_j((m_i)) = m_j$ olacak şekilde $\exists (m_i) \in \prod_{i \in I} M_i$ bulunabildiği gösterilebilir. Bu takdirde π_j fonksiyonu örtendir. Dolayısıyla π_j bir R -modül epimorfizmasıdır.

Şimdi ε_j kanonik injeksiyon fonksiyonunun bir R -modül monomorfizması olduğunu gösterelim. $m_j, m'_j \in M_j$ ve $r \in R$ için $\varepsilon_j(rm_j) = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ rm_j, & i = j \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m_j, & i = j \end{pmatrix} = r\varepsilon_j(m_j)$ ve $\varepsilon_j(m_j + m'_j) = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m_j + m'_j, & i = j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m_j, & i = j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m'_j, & i = j \end{pmatrix} = \varepsilon_j(m_j) + \varepsilon_j(m'_j)$ olur. O halde ε_j bir R -modül homomorfizmasıdır. $m_j, m'_j \in M_j$ olmak üzere $\varepsilon_j(m_j) = \varepsilon_j(m'_j)$ olsun. O halde $\begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m_j, & i = j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ m'_j, & i = j \end{pmatrix}$ olup $m_j = m'_j$ olur. Böylece ε_j birebir olur.

Tanım 2.2.32. M bir R -modül ve $\{M_k \mid k \in K\}$ M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $m \in M$ tek türlü olarak M_k alt modüllerinin elemanlarının toplamı, yani $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_n}$ ve $m_{k_i} \in M_{k_i}$ şeklinde tek türlü olarak yazılabilirse, M 'ye M_k alt modüllerinin bir iç direkt toplamı denir. Bu durum $M = \bigoplus_{k \in K} M_k$ ile ifade edilir ve bu yazılışa M 'nin bir direkt parçalanışı veya sadece parçalanışı denir. Eğer M öz alt modüllerin bir direkt toplamı olarak yazılamıyorsa M 'ye parçalanamayandır denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.33. $M = \bigoplus_{k \in K} M_k$ olması için gerek ve yeter şart $M = \sum_{k \in K} M_k$ ve $\forall i \in K$ için $M_i \cap \left(\sum_{k \neq i} M_k \right) = 0$ olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (\Rightarrow) $M = \bigoplus_{k \in K} M_k$ olsun. $\forall m \in M$ için $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_n}$ şeklinde yazılabileceğinden, $m \in M_{k_1} + M_{k_2} + \dots + M_{k_n} \subset \sum_{k \in K} M_k$ olup $M = \sum_{k \in K} M_k$ gerçekleşir.

Diğer taraftan eğer $x \in M_i \cap \left(\sum_{k \neq i} M_k \right)$ ise $x = m_i = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_n}$, $k_j \neq i$ olacak şekilde $\exists m_i \in M_i$ ve $\exists m_{k_1} \in M_{k_1}, \exists m_{k_2} \in M_{k_2}, \dots, \exists m_{k_n} \in M_{k_n}$ vardır. Yazılışın tek türlü olmasından $m_i = m_{k_1} = m_{k_2} = \dots = m_{k_n} = 0$ elde edilir. O halde $M_i \cap \left(\sum_{k \neq i} M_k \right) = 0$ olur.

(\Leftarrow) $M = \sum_{k \in K} M_k$ olduğundan $\forall m \in M = \sum_{k \in K} M_k$ elemanı, $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_n}$ ($m_{k_1} \in M_{k_1}, m_{k_2} \in M_{k_2}, \dots, m_{k_n} \in M_{k_n}$) şeklinde yazılabilir. Bu yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_n} = m'_{k'_1} + m'_{k'_2} + \dots + m'_{k'_t}$ alalım ($m_{k_i} \in M_{k_i}, i = 1, 2, \dots, n, m'_{k'_j} \in M'_{k'_j}, j = 1, 2, \dots, t$). Gerekirse toplam terimlerinin yerlerini değiştirerek ve sıfır toplam terimlerini ekleyerek, $t = n$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $k_i = k'_i$ kabul edebiliriz. O halde yukarıdaki eşitlikten her $i = 1, 2, \dots, n$ için

$m_{k_i} - m'_{k'_i} = \sum_{j \neq i} (m'_{k'_j} - m_{k_j}) \in M_{k_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} M_{k_j} \right) = 0$ ve buradan da $m_{k_i} = m'_{k'_i}$ elde edilir. O

halde yazılış tek türüdür.

Önerme 2.2.34. M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ 'dir. Tersine, $\{M_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olmak üzere

$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, $M'_i = \left\{ (m_j)_{j \in I} \mid \forall j \neq i \text{ için } m_j = 0_{M_j}, m_i \in M_i \right\} \cong M_i$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M'_i$

gerçeklenir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $f: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$, $f((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} m_i$ ile tanımlı f fonksiyonunun bir R -

modül epimorfizması olduğu açıktır. Her $m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ için $f(m) = \sum_{i \in I} m_i$ tek türlü olacak

şekilde $m_i \in M_i$ var olduğundan f bir R -modül izomorfizmasıdır.

Tersine, $\{M_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. $k = i$ için

$x_k = m$ ve $k \neq i$ için $x_k = 0$ alınarak $f_i(m) = (x_k)_{k \in I}$ ile tanımlı $f_i: M_i \rightarrow M'_i$

fonksiyonunun bir R -modül izomorfizması olduğu gösterilebilir.

$0 \neq m_i \in M_i$ ($t = 1, 2, \dots, n$) elemanları için $m = (m_i)_{i \in I} \in M$ elemanı

$m = (\dots, 0, m_i, 0, \dots) + \dots + (\dots, 0, m_n, 0, \dots) \in \sum_{i \in I} M'_i$ şeklinde yazılabilir. Burada $\forall i \in I$ için

$M'_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M'_j \right) = 0$ olduğu gösterilebilir. O halde Teorem 2.2.33.'ten $M = \bigoplus_{i \in I} M'_i$ olup

istenilen elde edilir.

Not: Önerme 2.2.34.'ten $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ olduğu görülür ve bundan sonra \bigoplus' yerine

\bigoplus kullanılacaktır.

Önerme 2.2.35. M bir R -modül ve $X = \{x_k \mid k \in K\} \subset M$ olsun. Bu takdirde

aşağıdaki iki koşul birbirine denktir.

(a) $\forall a \in M$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ şeklinde yazılabilir.

(b) $\forall k \in K$ için $f_k : R \rightarrow Rx_k$, $f_k(r) = rx_k$ ile tanımlanan f_k fonksiyonu bir R -modül izomorfizmasıdır ve $M = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (a) \Rightarrow (b) f_k fonksiyonunun bir epimorfizma olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $f_k(r) = f_k(s)$ olan herhangi $r, s \in R$ alalım. Buradan $rx_k = sx_k$ elde edilir. Yazılış tek türlü olduğundan $r = s$ ve f_k bir R -modül monomorfizmadır. Bu takdirde f_k bir R -modül izomorfizması olup $R \cong Rx_k$ olur. Her $a \in M$ elemanı tek türlü olarak Rx_k modüllerinin $r_k x_k$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve $M = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ şeklinde yazılabilir.

(b) \Rightarrow (a) $M = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ olduğundan $\forall a \in M$ için $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve $a = \sum_{k \in K} r_k x_k = \sum_{k \in K} r'_k x_k$ ise, her $k \in K$ için $r_k x_k = r'_k x_k$ olur. O halde $f_k(r_k) = f_k(r'_k)$ olur. Burada $f_k : R \rightarrow Rx_k$ bir R -modül monomorfizması olduğundan $r_k = r'_k$ olur. Bu durumda $a \in M$ elemanı $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

Tanım 2.2.36. M bir R -modül olsun. Önerme 2.2.35.'teki denk şartlardan birini sağlayan M modülüne bir serbest modül denir. $X = \{x_k \mid k \in K\}$ kümesi de M 'nin bir tabanı (veya serbest üretenler kümesi) olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

1_R , R halkasının birimi olmak üzere $X = \{1_R\}$, R halkasının bir tabanı olup ${}_R R$ modülü bir serbest R -modüldür.

Teorem 2.2.37. Her Λ indis kümesi için R -modülünün kopyalarının toplamı olan $R^{(\Lambda)}$ bir serbest modüldür (Wisbauer, 1991).

İspat: Her $\mu \in \Lambda$ için $r_\lambda = \begin{cases} 1_R, & \lambda = \mu \text{ ise} \\ 0_R, & \lambda \neq \mu \text{ ise} \end{cases}$ olmak üzere $m_\mu = (r_\lambda)_\Lambda \in R^{(\Lambda)}$ olsun.

$X = \{m_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ kümesini tanımlayalım ve herhangi $\alpha \in R^{(\Lambda)}$ alalım. Her $\lambda \in \Lambda$ için $a_\lambda \in R$ olmak üzere $\alpha = (a_\lambda)_\Lambda \in R^{(\Lambda)}$ olsun. Bu durumda a_λ elemanlarının sonlu tanesi hariç diğerleri sıfırdır. Kabul edelim ki $i=1,2,\dots,n$ için $\lambda_i \in \Lambda$ olmak üzere her $\lambda \in \Lambda - \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ için $a_\lambda = 0$ olsun. Bu takdirde $\alpha = (a_\lambda)_\Lambda = a_{\lambda_1} m_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} m_{\lambda_2} + \dots + a_{\lambda_n} m_{\lambda_n}$ olur ve bu yazılışın tek türlü olduğu gösterilebilir. Bu durumda $X = \{m_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$, $R^{(\Lambda)}$ 'nin bir tabanıdır ve $R^{(\Lambda)}$ bir serbest modüldür.

Teorem 2.2.38. Her $i \in I$ için $f_i : M_i \rightarrow N_i$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda $f : \bigoplus M_i \rightarrow \bigoplus N_i$, $m = (m_i)_{i \in I} \rightarrow f(m) = (f_i(m_i))_{i \in I}$ ile tanımlı f dönüşümü bir R -modül homomorfizması olup $\text{Çek}f = \bigoplus \text{Çek}f_i$ ve $\text{Im}f = \bigoplus \text{Im}f_i$ 'dir (Hungerford, 1974).

İspat: f 'nin bir fonksiyon olduğu açıktır. $\forall i \in I$ için $f_i : M_i \rightarrow N_i$ bir R -modül homomorfizması olduğundan $\forall m = (m_i)_{i \in I}, m' = (m'_i)_{i \in I} \in \bigoplus M_i$ ve her $r \in R$ için $f(m+m') = f((m_i+m'_i)_{i \in I}) = (f_i(m_i+m'_i))_{i \in I} = (f_i(m_i)+f_i(m'_i))_{i \in I} = (f_i(m_i))_{i \in I} + (f_i(m'_i))_{i \in I} = f(m) + f(m')$ ve $f(rm) = f((rm_i)_{i \in I}) = (f_i(rm_i))_{i \in I} = (rf_i(m_i))_{i \in I} = r(f_i(m_i))_{i \in I} = rf(m)$ olur. O halde f bir R -modül homomorfizmasıdır.

Şimdi $\text{Çek}f = \bigoplus \text{Çek}f_i$ olduğunu gösterelim. Herhangi $m = (m_i)_{i \in I} \in \text{Çek}f$ alalım. Bu durumda $f(m) = (f_i(m_i))_{i \in I} = 0$ olup $\forall i \in I$ için $f_i(m_i) = 0$ olur. O halde $\forall i \in I$ için $m_i \in \text{Çek}f_i$ olup $m = (m_i)_{i \in I} \in \bigoplus \text{Çek}f_i$ olur. Herhangi $t = (t_i)_{i \in I} \in \bigoplus \text{Çek}f_i$ alalım. $t = (t_i)_{i \in I} \in \bigoplus \text{Çek}f_i$ olduğundan $\forall i \in I$ için $t_i \in \text{Çek}f_i$ olup $f_i(t_i) = 0$ olur. O halde $f(t) = (f_i(t_i))_{i \in I} = 0$ olup $t \in \text{Çek}f$ bulunur. Böylece $\text{Çek}f = \bigoplus \text{Çek}f_i$ olur.

Şimdi $Imf = \bigoplus Imf_i$ olduğunu gösterelim. n , Imf 'nin keyfi bir elemanı olsun. Bu durumda $f(m) = n$ olacak şekilde $\exists m = (m_i)_{i \in I} \in \bigoplus M_i$ vardır. Yani $n = f\left((m_i)_{i \in I}\right) = (f_i(m_i))_{i \in I}$ olur. Her $i \in I$ için $f_i(m_i) \in Imf_i$ olduğundan $n = (f_i(m_i))_{i \in I} \in \bigoplus Imf_i$ bulunur. Herhangi $t \in \bigoplus Imf_i$ alalım. $t \in \bigoplus Imf_i$ olduğundan $t = (f_i(s_i))_{i \in I}$ olacak şekilde $\exists s_k \in M_k$ ($k \in I$) vardır. $s = (s_i)_{i \in I} \in \bigoplus M_i$ için $f(s) = (f_i(s_i))_{i \in I} = t$ olup $t \in Imf$ olur. O halde $Imf = \bigoplus Imf_i$ olur.

Tanım 2.2.39. M bir R -modül ve $f: M \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu homomorfizmaya M 'nin bir endomorfizması denir. M 'nin bütün endomorfizmalarının kümesi $End_R(M)$ veya $End(M)$ ile ifade edilir (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.40. M ve N iki R -modül ve $f: M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması olsun. Eğer $fg = f \circ g = I_N$ olacak şekilde bir $g: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa, f epimorfizması parçalanabilirdir denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.41. M ve N iki R -modül ve $f: M \rightarrow N$ bir R -modül monomorfizması olsun. Eğer $gf = g \circ f = I_M$ olacak şekilde bir $g: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa, f monomorfizması parçalanabilirdir denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.42. M ve N iki R -modül, $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizmaları ve $gf = g \circ f = I_M$ olsun. Bu durumda $N = Imf \oplus Çekg$ 'dir (Kasch, 1982).

İspat: Her $n \in N$ için $n = f(g(n)) + n - f(g(n))$ olur. Burada $f(g(n)) \in Imf$ olur. Ayrıca $gf = g \circ f = I_M$ olduğundan $g(n - f(g(n))) = g(n) - g(f(g(n))) = g(n) - g(n) = 0$ olup $n - f(g(n)) \in Çekg$ olur. O halde $N = Imf + Çekg$ olur. $n \in Imf \cap Çekg$ için $g(n) = 0_M$ ve $f(m) = n$ olacak şekilde $\exists m \in M$ mevcuttur. Bu takdirde $gf = I_M$ olduğundan $0_M = g(n) = g(f(m)) = m$ olup $n = f(m) = f(0_M) = 0_N$

bulunur. Bu durumda $Imf \cap \mathcal{C}ekg = \{0_N\}$ olup ayrıca $N = Imf + \mathcal{C}ekg$ olduğundan $N = Imf \oplus \mathcal{C}ekg$ olur.

Teorem 2.2.43. M , N ve K R -modüller olsun. $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ R -modül homomorfizmalar dizisi için $Imf = \mathcal{C}ekg$ ise bu dizi N 'de tamdır denir.

$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ sonlu sayıda R -modül homomorfizmaları dizisi

verildiğinde eğer her $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ için $Imf_i = \mathcal{C}ekf_{i+1}$ ise bu dizi tamdır denir. Eğer

$\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow \cdots$ R -modül homomorfizmalarının sonsuz dizisinde her $i \in \mathbb{Z}$

için $Imf_{i-1} = \mathcal{C}ekf_i$ ise bu diziye de bir tam dizi denir (Alizade ve Pancar,1999).

Tanım 2.2.44. $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ şeklinde tanımlı bir tam diziye bir kısa tam dizi denir (Alizade ve Pancar,1999).

Teorem 2.2.45. $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} 0$ dizisi tam ise g bir R -modül monomorfizması ve h bir R -modül epimorfizmasıdır. Diğer yandan $Img \cong M$ ve $K \cong N/Img$ 'dir. Bu takdirde izomorf grupları özdeşleştirerek $K = N/M$ yazılabilir (Alizade ve Pancar,1999).

İspat: $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} 0$ bir tam dizi olsun. Tam dizi tanımından $Imf = \mathcal{C}ekg$ olur. $f: 0 \rightarrow M$ olduğundan $Imf = \{f(x) | x \in 0\} = 0$ ve $Imf = \mathcal{C}ekg = 0$ olup g bir

monomorfizmadır. $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} 0$ bir tam dizi olduğundan $Imh = \mathcal{C}eke$ olur.

$e: K \rightarrow 0$ olduğundan $\mathcal{C}eke = \{k \in K | e(k) = 0\} = K$ ve $Imh = \mathcal{C}eke = K$ olup h örten ve

dolayısıyla da bir epimorfizmadır. 1. İzomorfizma Teoremi'nden $M/\mathcal{C}ekg \cong Img$ olup

$\mathcal{C}ekg = 0$ olduğu için $M \cong M/0 \cong Img$ olur. Benzer şekilde yine 1. İzomorfizma

Teoremi'nden $N/\mathcal{C}ekh \cong Imh$ olup $Imh = K$ ve $Img = \mathcal{C}ekh$ olduğundan $K \cong N/Img$

olur.

Teorem 2.2.46. $0 \rightarrow A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{h} \end{matrix} B \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{k} \end{matrix} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki şartlar

birbirine denktir;

- (a) $h \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $h: B \rightarrow A$ homomorfizması vardır;
- (b) Imf alt modülü B 'nin bir direkt toplam terimidir;
- (c) $g \circ k = 1_C$ olacak şekilde bir $k: C \rightarrow B$ homomorfizması vardır. Bu

takdirde $B \cong A \oplus C$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (a) \Rightarrow (b) $h \circ f = 1_A$ olduğundan Teorem 2.2.42. gereği $B = Imf \oplus Çekf$ olup Imf B 'nin bir direkt toplam terimi olur.

(b) \Rightarrow (c) Imf , B 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan öyle $D \leq B$ vardır ki $B = Imf \oplus D$ olur. $t = g|_D: D \rightarrow C$, $d \rightarrow t(d) = g(d)$ homomorfizmasını tanımlayalım. $B = Imf \oplus D$ ve $Imf = Çekg$ olduğundan $B = Çekg \oplus D$ olup $Çekg \cap D = 0$ olur. Herhangi $d \in Çekt$ için $t(d) = g(d) = 0$ olup $d \in Çekg$ olur. Ayrıca $d \in D$ olduğundan $d \in Çekg \cap D = 0$ olup $d = 0$ olur. O halde $Çekt = 0$ olup t birebirdir. Herhangi $y \in C$ alalım. g örten olduğundan $g(b) = y$ olacak şekilde $\exists b \in B$ mevcuttur. $b \in B = Çekg \oplus D$ olduğundan $b = x + d$ olacak şekilde teklikle belirli $x \in Çekg$ ve $d \in D$ vardır. Burada $y = g(b) = g(x + d) = g(x) + g(d) = 0 + g(d) = g(d) = t(d)$ olup t örtendir. $t: D \rightarrow C$ birebir ve örten bir homomorfizma olduğundan t bir izomorfizma olup $t^{-1}: C \rightarrow D$ homomorfizması vardır. $k = t^{-1}$ diyelim. Herhangi $c \in C$ için $k(c) = t^{-1}(c) = d$ olsun. Burada $g(d) = t(d) = c$ olup $(g \circ k)(c) = g(k(c)) = g(d) = c = 1_C(c)$ ve böylece $g \circ k = 1_C$ olur. f bir monomorfizma olduğundan $Imf \cong A$ olur. $t: D \rightarrow C$ bir izomorfizma olduğundan $D \cong C$ olur. O halde $B = Imf \oplus D \cong A \oplus C$ olup istenen elde edilir.

(c) \Rightarrow (a) $g \circ k = 1_C$ olacak şekilde bir $k: C \rightarrow B$ homomorfizması bulunabilir. Bu takdirde Teorem 2.2.42.'den $B = Imk \oplus Çekg$ olup $Çekg = Imf$ olduğundan $B = Imk \oplus Imf$ olur. $h: B \rightarrow A$, $a = k(x) + f(y) \rightarrow h(a) = y$ dönüşümünü

tanımlayalım. h 'nin kapalı olduğu açıktır. $x_1, x_2 \in C$ ve $y_1, y_2 \in A$ olmak üzere $a = k(x_1) + f(y_1) = k(x_2) + f(y_2)$ olsun. Burada $f(y_1 - y_2) = f(y_1) - f(y_2) = k(x_2) - k(x_1) = k(x_2 - x_1) \in \text{Im}k$ olup ayrıca $f(y_1 - y_2) \in \text{Im}f$ olduğundan $f(y_1 - y_2) \in \text{Im}k \cap \text{Im}f = 0$ olur. O halde $f(y_1 - y_2) = 0$ olup f birebir olduğundan $y_1 - y_2 = 0$ ve buradan da $y_1 = y_2$ elde edilir. O halde h iyi tanımlıdır. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Ayrıca h 'nin tanımından $\forall y \in A$ için $(h \circ f)(y) = h(f(y)) = h(k(0) + f(y)) = y = 1_A(y)$ olup $h \circ f = 1_A$ olur.

Tanım 2.2.47. $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ bir kısa tam dizi olsun. Eğer Teorem 2.2.46.'daki şartların biri sağlanırsa bu diziye bir parçalanmış (veya parçalanabilir) kısa tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.48. M ve N iki R -modül olsun. Eğer $\exists \Lambda \neq \emptyset$ indis kümesi için bir $f : M^{(\Lambda)} \rightarrow N$ epimorfizması varsa, N 'ye M tarafından üretilmiştir veya M -üretilmiştir denir (Clark vd, 2006).

Tanım 2.2.49. M ve N iki R -modül olsun. Eğer en az bir $\Lambda \neq \emptyset$ sonlu elemanlı indis kümesi için bir $f : M^{(\Lambda)} \rightarrow N$ epimorfizması varsa, N 'ye M tarafından sonlu üretilmiştir veya sonlu M -üretilmiştir denir (Clark vd, 2006).

Teorem 2.2.50. Her R -modül R -üretilmiştir (Koşar, 2014).

İspat: M bir R -modül olsun. M 'ye elemanlarıyla birlikte indis kümesi diyelim. $\forall (r_m)_{m \in M} \in R^{(M)}$ için $f : R^{(M)} \rightarrow M$, $f((r_m)_{m \in M}) = \sum_{m \in M} r_m m$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Bu durumda M R -üretilmiştir.

Tanım 2.2.51. M bir R -modül ve $\emptyset \neq S = \{M_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer S artan zincir kuralını sağlıyorsa yani $M_{i_1} \subset M_{i_2} \subset \dots \subset M_{i_n} \subset M_{i_{n+1}} \subset \dots$ için $M_{i_k} = M_{i_{k+1}} = \dots$ olacak şekilde $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ var ise, bu S ailesine noetheriandır denir. Eğer M 'nin bütün alt modüller kümesi noetherian ise M 'ye noetheriandır denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.52. M bir R -modül olsun. M 'nin noetherian olması için gerek ve yeter şart M 'nin her alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.53. M ve N iki R -modül ve N, M -üretilmiş bir modülün bir alt modülüne izomorf olursa N, M tarafından alt üretilmiştir denir. M tarafından bütün alt üretilmiş modüllerin kümesi $\sigma[M]$ ile ifade edilir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.54. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin aşikar alt modüllerinden başka alt modülü yoksa M 'ye bir basit modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.55. M bir R -modül $N \leq M$ ve $N \neq M$ olsun. M 'nin N 'yi kapsayan M ve N 'den farklı hiçbir alt modülü yoksa N 'ye M 'nin bir maksimal alt modülü denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.56. M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Bu takdirde M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: N, M 'nin herhangi bir öz alt modülü olsun. M 'nin N 'yi kapsayan öz alt modüllerinin kümesini S ile gösterelim. $N \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ olur. S kümelerdeki kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. K, S kümesinin boştan farklı bir zinciri olsun. K 'nın bütün elemanlarının birleşimini L ile gösterelim. K tam sıralı olduğundan K kümesinin elemanları kümelerdeki kapsama bağıntısına göre karşılaştırılabilir olup L, M 'nin bir alt modülüdür. M sonlu üretilmiş olduğundan $M = Rm_1 + Rm_2 + \dots + Rm_n$ olacak şekilde $\exists m_1, m_2, \dots, m_n \in M$ elemanları vardır. Eğer $L = M$ ise $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $m_i \in L = \bigcup_{N' \in K} N'$ olur. Bu takdirde öyle $N' \in K$ vardır ki $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $m_i \in N'$ olup $N' = M$ olur. Bu ise $N' \in K$ olması ile çelişir. O halde $L \neq M$ 'dir. Yani L, M modülünün bir öz alt modülüdür. L, K kümesinin S 'de bir üst sınırı olduğundan, Zorn Lemması gereğince S kümesi bir maksimal elemana sahiptir. Bu takdirde bu maksimal eleman M 'nin N öz alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Teorem 2.2.57. M bir R -modül, $N \leq M$ ve $N \neq M$ olsun. Bu takdirde N 'nin bir maksimal alt modül olması için gerek ve yeter şart M/N bölüm modülünün bir basit modül olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: Teorem 2.2.11. ve Teorem 2.2.12.'nin bir sonucudur.

Teorem 2.2.58. M bir R -modül, $N \leq M$ ve $N \neq M$ olsun. Bu durumda N 'nin maksimal olması için gerek ve yeter şart her $m \in M \setminus N$ için $N + Rm = M$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: (\Rightarrow) Her $m \in M \setminus N$ için $N \leq N + Rm$, $N \neq N + Rm$ ve N bir maksimal alt modül olduğundan maksimal alt modül tanımı gereği $N + Rm = M$ olur.

(\Leftarrow) Herhangi K alt modülü için $N \leq K$ ve $N \neq K$ olsun. Şimdi $K = M$ olduğunu göstermeliyiz. $N \neq K$ olduğuna göre $\exists m \in K \setminus N$ vardır. Bu takdirde $m \in M \setminus N$ olup hipotez gereği $N + Rm = M$ olur. Aynı zamanda $m \in K$ olduğundan $Rm \leq K$ olup $M = N + Rm \leq K$ olur. Buradan da $K = M$ olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.59. M bir R -modül ve her $i \in I$ için M_i , M 'nin bir basit alt modülü olmak üzere $M = \sum_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda;

(a) M 'nin her T öz alt modülü için $M = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olacak şekilde $\exists J \subset I$ vardır.

(b) $M = \bigoplus_{i \in F} M_i$ olacak şekilde I 'nin en az bir F alt kümesi vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (a) $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve T , M 'nin bir öz alt modülü olduğundan $\exists i_0 \in I$ için $M_{i_0} \not\subset T$ olur. O halde $T \cap M_{i_0} \neq M_{i_0}$ olup M_{i_0} basit olduğundan $T \cap M_{i_0} = 0$ olur.

$\Psi = \left\{ P \subset I \mid T + \sum_{i \in P} M_i = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in P} M_i \right) \right\}$ kümesini tanımlayalım. $T \cap M_{i_0} = 0$ olduğundan

$T + M_{i_0} = T \oplus M_{i_0}$ olup $\{i_0\} \in \Psi$ olur. Bu takdirde $\Psi \neq \emptyset$ olur. Ψ 'nin herhangi Ω

zincirini alalım. $P = \bigcup_{F \in \Omega} F$ diyelim. Herhangi $x \in T + \sum_{i \in P} M_i$ alalım. $x \in T + \sum_{i \in P} M_i$

olduğundan $x = t + m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$ olacak şekilde $\exists i_1, i_2, \dots, i_n \in P$, $\exists t \in T$,

$\exists m_{i_1} \in M_{i_1}$, $\exists m_{i_2} \in M_{i_2}$, ..., $\exists m_{i_n} \in M_{i_n}$ vardır. $i_1, i_2, \dots, i_n \in P = \bigcup_{F \in \Omega} F$ olduğundan

$i_1 \in F_1, i_2 \in F_2, \dots, i_n \in F_n$ olacak şekilde $\exists F_1, F_2, \dots, F_n \in \Omega$ vardır. Ω bir zincir olduğundan bir $F_0 \in \Omega$ için $F_s \subset F_0$ ($s=1, 2, \dots, n$) olur. O halde $i_1, i_2, \dots, i_n \in F_0$ olup $F_0 \in \Omega \subset \Psi$ olduğundan $x = t + m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n} \in T \oplus \left(\bigoplus_{i \in F_0} M_i \right)$ olur. Bu durumda x bu şekilde tek türlü yazılabilir. Dolayısıyla Tanım 2.2.32. gereği $T + \sum_{i \in P} M_i = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in P} M_i \right)$ olup $P \in \Psi$ olur. Böylece Ψ 'nin kapsama bağıntısına göre her zincirinin bir üst sınırı vardır. Dolayısıyla Zorn Lemması'ndan Ψ bir maksimal J elemanı içerir. $J \in \Psi$ olduğundan $T + \sum_{i \in J} M_i = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olur. Eğer $M \neq T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olsa $\exists j \in I$ için $M_j \not\subset T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olup M_j basit olduğundan $T + \sum_{i \in J \cup \{j\}} M_i = T + \sum_{i \in J} M_i + M_j = T \oplus \sum_{i \in J} M_i \oplus M_j = T \oplus \sum_{i \in J \cup \{j\}} M_i$ olur. Bu takdirde $J \cup \{j\} \in \Psi$ olup $J \neq J \cup \{j\}$ olduğundan bu durum J 'nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $M = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olup istenen elde edilir.

(b) $T = 0$ alınırsa (a) şikkından istenen elde edilir.

Tanım 2.2.60. Basit modüllerin toplamı şeklinde yazılabilen bir modüle bir yarı basit modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.61. M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) M 'nin her alt modülü basit alt modüllerinin bir toplamıdır.
- (b) M yarı basittir.
- (c) M basit alt modüllerin bir direkt toplamıdır.
- (d) M 'nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) \Rightarrow (b) $M \leq M$ olduğundan Tanım 2.2.60.'tan açıktır.

(b) \Rightarrow (c) Teorem 2.2.59.(b)'den açıktır.

(c) \Rightarrow (b) açıktır.

(b) \Rightarrow (d) Teorem 2.2.59.(a)'dan açıktır.

(d) \Rightarrow (b) M 'nin basit alt modüllerinin toplamına T diyelim. Hipotezden T, M 'nin bir direkt toplam terimi olup $M = T \oplus P$ olacak şekilde $\exists P \leq M$ vardır. Burada $P = 0$ olduğunu gösterirsek $M = T$ olup istenen elde edilir. Aksine kabul edelim. Yani kabul edelim ki $P \neq 0$ olsun. Bu durumda $\exists 0 \neq p \in P$ vardır. $S = Rp$ diyelim. $S \leq P$ ve $T \cap P = 0$ olduğundan $T \cap S = 0$ olur. $S \neq 0$ ve S sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 2.2.56. gereği S 'nin 0 öz alt modülü S 'nin bir L maksimal alt modülünde kapsanır. $L \leq S$ ve $S \leq M$ olduğundan $L \leq M$ olup hipotezden $M = L \oplus L'$ olacak şekilde $\exists L' \leq M$ vardır. Burada Modüler Kuralı'ndan $S = L \oplus (S \cap L')$ olur. L, S 'nin bir maksimal alt modülü olduğundan $L \neq S$ olup $S \cap L' \neq 0$ olur. Diğer yandan yine L, S 'nin bir maksimal alt modülü olduğundan Teorem 2.2.57.'den S/L basit olup $S/L = (L + (S \cap L'))/L \cong (S \cap L')/(S \cap L' \cap L) = (S \cap L')/0 \cong S \cap L'$ olduğundan $S \cap L'$ de basit olur. Bu durumda $S \cap L' \subset T$ olup ayrıca $S \cap L' \subset S$ olduğundan $S \cap L' \subset T \cap S = 0$ olur. Bu da $S \cap L' \neq 0$ olması ile çelişir. O halde kabulumuz yanlış olup $P = 0$ olur.

(d) \Rightarrow (a) M 'nin herhangi T alt modülünü ve T 'nin de herhangi P alt modülünü alalım. Burada $P \leq M$ olup hipotezden $M = P \oplus P'$ olacak şekilde $\exists P' \leq M$ vardır. $M = P \oplus P'$ ve $P \leq T$ olduğundan Modüler Kuralı'ndan $T = T \cap M = T \cap (P \oplus P') = P \oplus (T \cap P')$ olup P, T 'nin bir direkt toplam terimi olur. Yani T 'nin her alt modülü T 'nin bir direkt toplam terimi olup bu teoremin (d) \Rightarrow (b) geçişini T 'ye uygularsak T yarı basit olur. Yani M 'nin her alt modülü basit alt modüllerinin bir toplamı olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.62. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$ M 'nin N alt modülünü kapsayan alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} (N_i/N) = \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) / N$ 'dir (Koşar, 2014).

İspat: $m + N \in \bigcap_{i \in I} (N_i / N)$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $m + N \in N_i / N$ olup

$m \in N_i$ olur. O halde $m \in \bigcap_{i \in I} N_i$ olur ki buradan da $m + N \in \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) / N$ elde edilir.

Tersine, benzer işlemler yapılarak eşitlik gösterilebilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde büyük projektif modülleri tanımlayabilmek için gerekli olan projektif modül, injektif modül ve büyük alt modülleri kavramları ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

3.1. Projektif Modüller

Tanım 3.1.1. M ve N birer R -modül olsun. Her $g: M \rightarrow T$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow T$ homomorfizması için $f = goh$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse, N 'ye bir M -projektif modül denir. Diğer bir deyişle, tam satırlı her

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & T & \longrightarrow & 0 \\ & \nearrow h & & & \end{array}$$

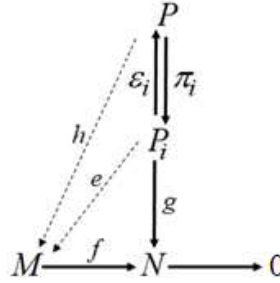
diyagramı bir h homomorfizmasıyla değişmeli “üçgene” tamamlanabilirse, N 'ye bir M -projektif modül denir.

K bir R -modül olsun. Eğer diyagramdaki her modül $\sigma[K]$ 'nin elemanı olsa ve aynı ifade doğru ise N 'ye $\sigma[K]$ 'da M -projektiftir denir.

$P \in \sigma[K]$ olsun. Eğer P her $L \in \sigma[K]$ için $\sigma[K]$ 'da L -projektif ise, P 'ye $\sigma[K]$ içinde projektiftir denir. Eğer P her M modülü için M -projektif ise, P 'ye bir projektif modül denir. Eğer P bir P -projektif modül ise P kendi kendine projektiftir (self-projective) denir (Wisbauer, 1991).

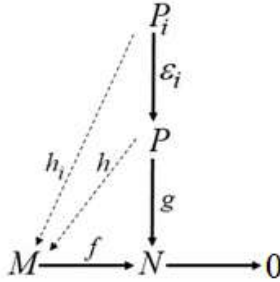
Önerme 3.1.2. R bir halka ve $\{P_i\}_{i \in I}$ kümesi R -modüllerin bir ailesi olsun. $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ direkt toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için P_i 'nin projektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (\Rightarrow) $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ projektif olsun. Herhangi $f: M \rightarrow N$ R -modül epimorfizmasını ve $g: P_i \rightarrow N$ R -modül homomorfizmasını alalım. $\pi_i: P \rightarrow P_i$ i . kanonik projeksiyon ve $\varepsilon_i: P_i \rightarrow P$ i . kanonik injeksiyon olmak üzere P projektif olduğundan $g\pi_i: P \rightarrow N$ homomorfizması için $g\pi_i = fh$ olacak şekilde $\exists h: P \rightarrow M$ homomorfizması mevcuttur. $e = h\varepsilon_i$ olmak üzere $e: P_i \rightarrow M$ homomorfizmasını alalım.



Böylece $fe = fh\varepsilon_i = g\pi_i\varepsilon_i = g1_{P_i} = g$ 'dir. O halde P_i projektif olup istenen elde edilir.

(\Leftarrow) $f: M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması ve $g: P \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Her $i \in I$ için P_i projektif olduğundan $g\varepsilon_i: P_i \rightarrow N$ homomorfizması için $g\varepsilon_i = fh_i$ olacak şekilde en az bir $h_i: P_i \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilir.



$h: P \rightarrow M$, $(m_i) \rightarrow \sum h_i(m_i)$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Herhangi $(m_i)_{i \in I} \in P$ alalım. Bu takdirde her

$i \in I$ için $g\varepsilon_i = fh_i$ olduğundan $(fh)(m_i)_{i \in I} = f(\sum h_i(m_i)) = \sum f(h_i(m_i)) = \sum g(\varepsilon_i(m_i)) = g(\sum \varepsilon_i(m_i)) = g(m_i)_{i \in I}$ olup $fh = g$ olur. O halde P projektiftir.

Teorem 3.1.3. M ve P iki R -modül olsun. P 'nin M -projektif olması için gerek ve yeter şart $L \leq M$ olmak üzere her

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{p} & M/L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramı için $p \circ h = f$ olacak şekilde $\exists h: P \rightarrow M$ homomorfizmasının bulunabilmesidir (burada $p: M \rightarrow M/L, m \rightarrow p(m) = m + L$ ile tanımlıdır) (Wisbauer, 1991).

İspat: (\Rightarrow) Açıktır.

(\Leftarrow) Satır tam olmak üzere herhangi

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını alalım. $\bar{f}: M/\zeta ekf \rightarrow N, a + \zeta ekf \rightarrow \bar{f}(a + \zeta ekf) = f(a)$ dönüşümünün bir R -modül izomorfizması olduğu gösterilebilir. Hipotez gereği

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \bar{f}^{-1} \circ g & & \\ M & \xrightarrow{p} & M/\zeta ekf & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists h : P \rightarrow M$ R -modül homomorfizması bulunabilir. Burada $\forall x \in P$ için $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \bar{f}(h(x) + \text{Çekf}) = \bar{f}(p(h(x))) = (\bar{f} \circ p \circ h)(x) = (\bar{f} \circ \bar{f}^{-1} \circ g)(x) = g(x)$ olup $f \circ h = g$ olur. O halde P , M -projektif olup istenen elde edilir.

Teorem 3.1.4. P modülü M -projektif olsun. Bu durumda $\forall K \leq M$ için P modülü K -projektif olur.

İspat: $T \leq K$ olmak üzere $p_K : K \rightarrow K/T$ kanonik epimorfizma ve $g : P \rightarrow K/T$ bir R -modül homomorfizması olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 & h & & & \\
 & \swarrow & & & \\
 K & \xrightarrow{p_K} & K/T & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists h : P \rightarrow K$ R -modül homomorfizmasının varlığını gösterirsek istenen elde edilir. $i_{K/T} : K/T \rightarrow M/T$, $a + T \rightarrow i_{K/T}(a + T) = a + T$ içermeye dönüşümü ve $p : M \rightarrow M/T$, $a \rightarrow p(a) = a + T$ kanonik epimorfizmasını alırsak, P M -projektif olduğundan $p \circ h = i_{K/T} \circ g$ olacak şekilde $\exists h : P \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $\forall x \in P$ için $h(x) + T = p(h(x)) = (p \circ h)(x) = (i_{K/T} \circ g)(x) = i_{K/T}(g(x)) = g(x) \in K/T$ olup $h(x) \in K$ olur. O halde $h : P \rightarrow K$ R -modül homomorfizması olarak düşünebiliriz. Burada $\forall x \in P$ için $(p_K \circ h)(x) = p_K(h(x)) = h(x) + T = g(x)$ olup $p_K \circ h = g$ olur. Yani gösterdiğimiz diyagram değişmeli olacak şekilde $\exists h : P \rightarrow K$ R -modül homomorfizması bulunabilir.

Teorem 3.1.5. P modülü M -projektif olsun. Bu durumda $\forall K \leq M$ için P modülü M/K -projektif olur.

İspat: Satır tam dizi olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
& & & P & \\
& & & \downarrow g & \\
& & h & & \\
& & \nearrow & & \\
M/K & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramını alalım. $p: M \rightarrow M/K$ kanonik epimorfizmasını göz önüne alırsak p ve f örten olduğundan $f \circ p$ de örten olup $f \circ p: M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması olur. O halde P M -projektif olduğundan $f \circ p \circ h' = g$ olacak şekilde $\exists h': P \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $h = p \circ h'$ dersek $h: P \rightarrow M/K$ bir R -modül homomorfizması ve $f \circ h = g$ olup P modülü M/K -projektif olur.

Teorem 3.1.6. P bir R -modül ve $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ R -modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. Eğer P , M -projektif ise P hem M' -projektif, hem de M'' -projektiftir (Clark vd, 2006).

İspat: $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ bir kısa tam dizi olduğundan f birebir ve g örten olup $M' \cong f(M')$ ve $M/\text{Çek}g \cong M''$ olur. P , M -projektif ve $f(M') \leq M$ olduğundan Teorem 3.1.4.'ten P , $f(M')$ -projektif olup $M' \cong f(M')$ olduğundan P , M' -projektif olur. Yine P , M -projektif olduğundan Teorem 3.1.5.'ten P , $M/\text{Çek}g$ -projektif olup $M/\text{Çek}g \cong M''$ olduğundan P , M'' -projektif olur.

Teorem 3.1.7. P ve M modülleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) Her Λ indis kümesi için P , $M^{(\Lambda)}$ -projektiftir.
- (b) Her $N \in \sigma[M]$ için P , N -projektiftir (Clark vd, 2006).

İspat: (a) \Rightarrow (b) Herhangi $N \in \sigma[M]$ alalım. Bu durumda N , M tarafından üretilen bir T modülünün bir alt modülü olur. T , M tarafından üretildiğinden öyle Λ indis kümesi vardır ki $f: M^{(\Lambda)} \rightarrow T$ R -modül epimorfizması bulunabilir. Hipotezden P , $M^{(\Lambda)}$ -projektiftir. Burada $0 \rightarrow \text{Çek}f \xrightarrow{i} M^{(\Lambda)} \xrightarrow{f} T \rightarrow 0$ kısa tam dizisini düşünürsek P ,

$M^{(\wedge)}$ -projektif olduğundan Teorem 3.1.6. gereği P , T -projektif olur. Bu durumda $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} T/N \rightarrow 0$ kısa tam dizisini alırsak yine Teorem 3.1.6. gereği P , N -projektif olur.

(b) \Rightarrow (a) $M^{(\wedge)} \in \sigma[M]$ olduğundan istenen elde edilir.

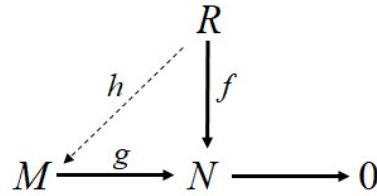
Teorem 3.1.8. M bir R -modül ve P , $\sigma[M]$ 'de sonlu üretilmiş bir R -modül olsun.

Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) P , M -projektiftir.
- (b) P , $\sigma[M]$ 'de projektiftir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.9. R birimli bir halka olsun. Bu takdirde ${}_R R$ projektiftir ve bundan dolayı her R -modül projektif (serbest) bir R -modülün bir epimorfik görüntüsüdür (Wisbauer, 1991).

İspat: M bir R -modül olsun. Önce ${}_R R$ 'nin projektif olduğunu gösterelim. Satır tam olmak üzere R -modüllerin herhangi



diyagramı verilsin. $f(1_R) = n$ diyelim. g örten olduğundan $g(m) = n$ olacak şekilde $\exists m \in M$ vardır. $h: R \rightarrow M$, $r \rightarrow h(r) = rm$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $\forall r \in R$ için $(g \circ h)(r) = g(h(r)) = g(rm) = rg(m) = rn = rf(1_R) = f(r1_R) = f(r)$ olup $g \circ h = f$ olur. O halde ${}_R R$ projektiftir. ${}_R R$ projektif olduğundan Önerme 3.1.2.'den ${}_R R^{(M)}$ de projektiftir. Bu durumda Teorem 2.2.50.'den M projektif bir R -modülün bir epimorfik görüntüsüdür.

Teorem 3.1.10. P bir R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) P projektiftir.
- (b) P , $R^{(\Lambda)}$ 'nin bir direkt toplam terimine izomorftur.
- (c) Öyle $\{p_\lambda \in P \mid \lambda \in \Lambda\}$ ve $\{f_\lambda \in \text{Hom}(P, R) \mid \lambda \in \Lambda\}$ kümeleri vardır ki $\forall p \in P$ için;
- Sadece sonlu sayıda $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda(p) \neq 0$ olur.
 - $p = \sum_{\Lambda} f_\lambda(p)p_\lambda$ olur (dual taban) (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) \Rightarrow (b) P projektif olsun. Teorem 2.2.50.'den $\exists f: R^{(P)} \rightarrow P$ epimorfizması vardır. Bu takdirde

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & & \downarrow 1_P & & \\
 & \swarrow h & & & \\
 R^{(P)} & \xrightarrow{f} & P & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: P \rightarrow R^{(P)}$ homomorfizması vardır. Burada Teorem 2.2.42.'den $R^{(P)} = \text{Im}h \oplus \text{Çek}f = h(P) \oplus \text{Çek}f$ olur. Ayrıca $h(x) = h(y)$ olan her $x, y \in P$ için $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(h(y)) = (f \circ h)(y)$ olup $f \circ h = 1_P$ olduğundan $x = y$ olur. Bu durumda h birebir olup $P \cong h(P)$ olur. O halde P , $R^{(P)}$ 'nin bir direkt toplam terimine izomorf olur.

(b) \Rightarrow (a) Λ bir indis kümesi ve P , $R^{(\Lambda)}$ 'nin bir direkt toplam terimine izomorf olsun. Bu takdirde $R^{(\Lambda)}$ projektif olduğundan Önerme 3.1.2.'den $R^{(\Lambda)}$ 'nin her direkt toplam terimi projektif olup P projektif olur.

(b) \Rightarrow (c) P , $R^{(\Lambda)}$ 'nin bir direkt toplam terimine izomorf olsun. Bu takdirde $R^{(\Lambda)}$ 'nin öyle bir K direkt toplam terimi vardır ki $P \cong K$ olur. $P \cong K$ olduğuna göre en az bir $f_0: P \rightarrow K$ izomorfizması mevcuttur. $i_K: K \rightarrow R^{(\Lambda)}$ içerme dönüşümü olmak üzere $f = i_K \circ f_0$ olsun. K , $R^{(\Lambda)}$ 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $R^{(\Lambda)} = K \oplus T$ olacak

şekilde $\exists T \leq R^{(\Lambda)}$ vardır. $g : R^{(\Lambda)} = K \oplus T \rightarrow P$, $x = k + t \rightarrow g(x) = f_0^{-1}(k)$ dönüşümünü tanımlayalım. g 'nin bir homomorfizma ve $g \circ f = I_p$ olduğu gösterilebilir. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\varepsilon_\lambda : R \rightarrow R^{(\Lambda)}$ kanonik injeksiyon ve $\pi_\lambda : R^{(\Lambda)} \rightarrow R$ kanonik projeksiyon olmak üzere $\sum_{\Lambda} \varepsilon_\lambda \circ \pi_\lambda = 1_{R^{(\Lambda)}}$ olur. Burada her $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda = \pi_\lambda \circ f$ dersek, her $p \in P$ için $f(p) \in R^{(\Lambda)}$ olduğuna göre sadece sonlu sayıdaki $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda(p) = (\pi_\lambda \circ f)(p) \neq 0$ olur. Diğer yandan her $\lambda \in \Lambda$ için $p_\lambda = (g \circ \varepsilon_\lambda)(1)$ dersek $p = I_p(p) = (g \circ f)(p) = (g \circ I_{R^{(\Lambda)}} \circ f)(p) = g(I_{R^{(\Lambda)}}(f(p))) = g\left(\left(\sum_{\Lambda} \varepsilon_\lambda \circ \pi_\lambda\right)(f(p))\right) = g\left(\sum_{\Lambda} \varepsilon_\lambda(\pi_\lambda(f(p)))\right) = \sum_{\Lambda} (g \circ \varepsilon_\lambda)(\pi_\lambda(f(p))) = \sum_{\Lambda} (g \circ \varepsilon_\lambda)(\pi_\lambda(f(p)) \cdot 1_R) = \sum_{\Lambda} \pi_\lambda(f(p))(g \circ \varepsilon_\lambda)(1_R) = \sum_{\Lambda} (\pi_\lambda \circ f)(p) p_\lambda = \sum_{\Lambda} f_\lambda(p) p_\lambda$ olur.

(c) \Rightarrow (b) Her $p \in P$ için $f(p) = (f_\lambda(p))_{\Lambda}$ olmak üzere $f : P \rightarrow R^{(\Lambda)}$ dönüşümünü tanımlayalım. i. şıktan sadece sonlu sayıda $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda(p) \neq 0$ olup f kapalıdır. f 'nin iyi tanımlı olduğu da açıktır. Bu durumda f bir fonksiyondur. Her $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda : P \rightarrow R$ bir homomorfizma olduğuna göre f 'nin bir homomorfizma olduğu da gösterilebilir. $g : R^{(\Lambda)} \rightarrow P$, $(r_\lambda)_{\Lambda} = \sum_{\Lambda} r_\lambda p_\lambda$ dönüşümünü tanımlarsak g 'nin bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. O halde ii. şıktan her $p \in P$ için $(g \circ f)(p) = g(f(p)) = g(f_\lambda(p))_{\Lambda} = \sum_{\Lambda} f_\lambda(p) p_\lambda = p = I_p(p)$ olup $g \circ f = I_p$ olur. Bu takdirde Teorem 2.2.42.'den $R^{(\Lambda)} = \text{Im} f \oplus \text{Çek} g = f(P) \oplus \text{Çek} g$ olur. $f(x) = f(y)$ olan $\forall x, y \in P$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ olup $g \circ f = I_p$ olduğundan $I_p(x) = I_p(y)$ ve buradan da $x = y$ elde edilir. Bu durumda f birebir ve $P \cong f(P)$ olup $P, R^{(\Lambda)}$ 'nin bir direkt toplam terimine izomorf olur.

Tanım 3.1.11. Teorem 3.1.10. (c) şıkında ifade edilen $\{p_\lambda \in P \mid \lambda \in \Lambda\}$ ve $\{f_\lambda \in \text{Hom}(P, R) \mid \lambda \in \Lambda\}$ kümeleri birlikte P için bir dual taban olarak adlandırılır (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.1.12. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin $M = U + V$ şartını sağlayan her U ve V alt modülleri için $\text{Im}f \subset U$ ve $\text{Im}(1_M - f) \subset V$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ varsa M 'ye bir π -projektif (veya eşsüreklili) modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.13. M bir R -modül olsun. Bu durumda M 'nin π -projektif olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ olan her $U, V \leq M$ için $\varphi: U \times V \rightarrow M$, $(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = u + v$ ile tanımlanan epimorfizmanın parçalanabilir olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (\Rightarrow) $M = U + V$ şartını sağlayan M 'nin U ve V alt modüllerini alalım. $\varphi \circ h = 1_M$ olacak şekilde bir $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizmasının var olduğunu göstereceğiz. M π -projektif olduğundan $\text{Im}f \subset U$ ve $\text{Im}(1_M - f) \subset V$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ vardır. $h: M \rightarrow U \times V, m \rightarrow h(m) = (f(m), (1_M - f)(m))$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Burada her $m \in M$ için $(\varphi \circ h)(m) = \varphi(h(m)) = \varphi(f(m), (1_M - f)(m)) = f(m) + (1_M - f)(m) = f(m) + m - f(m) = m$ olduğundan $\varphi \circ h = I_M$ olup istenen elde edilir.

(\Leftarrow) $M = U + V$ şartını sağlayan M 'nin U ve V alt modüllerini ele alalım. $\varphi: U \times V \rightarrow M$, $(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = u + v$ ile tanımlanan homomorfizma parçalanabilir olduğundan $\varphi \circ h = 1_M$ olacak şekilde en az bir $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizması mevcuttur. Her $m \in M$ için $h(m) = (u_m, v_m)$ diyelim. $f: M \rightarrow M, m \rightarrow f(m) = u_m$ dönüşümünü tanımlayalım. f 'nin bir homomorfizma olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Eğer $\text{Im}f \subset U$ ve $\text{Im}(1_M - f) \subset V$ olduğunu göstersek istenen elde edilir. $\text{Im}f \subset U$ olduğu açıktır. Herhangi $a \in \text{Im}(1_M - f)$ alalım. Bu durumda $a = m - f(m)$ olacak

şekilde en az bir $m \in M$ vardır. O halde $a = m - u_m = (\varphi \circ h)(m) - u_m = \varphi(h(m)) - u_m = \varphi(u_m, v_m) - u_m = u_m + v_m - u_m = v_m \in V$ bulunur. Yani $Im(1_M - f) \subset V$ olur.

Teorem 3.1.14. Projektif modüller π -projektiftir (Wisbauer, 1991).

İspat: M bir projektif modül, $U, V \leq M$ ve $M = U + V$ olsun. Bu takdirde $p: M \rightarrow M/V$ kanonik epimorfizma olmak üzere $p|_U: U \rightarrow M/V$ bir epimorfizma olup M projektif olduğundan

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & \swarrow f & \downarrow p & & \\
 U & \xrightarrow{p|_U} & M/V & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists f: M \rightarrow U$ homomorfizması vardır (Yani $(p|_U)f = p$ 'dir). O halde $f \in End M$ ve $f(M) \subset U$ olur. Her $x \in Im(1_M - f)$ için $x = y - f(y)$ olacak şekilde en az bir $y \in M$ mevcuttur. $p(x) = p(y - f(y)) = p(y) - ((p|_U)f)(y) = p(y) - p(y) = 0$ olur. Böylece $x \in \text{Çek}p = V$ olur. Yani $Im(1_M - f) \subset V$ olup ayrıca $Im f \subset U$ olduğundan M , π -projektiftir.

Tanım 3.1.15. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. Eğer $\forall f \in End_R(M)$ için $f(K) \subset K$ ise K 'ya M 'nin bir tamamen değişmez (fully invariant) alt modülü denir (Koşan ve Tütüncü, 2007).

Teorem 3.1.16. P bir kendi kendine projektif R -modül olsun. Bu durumda P 'nin her tamamen değişmez K alt modülü için P/K modülü de kendi kendine projektif olur (Wisbauer, 1991).

İspat: P 'nin tamamen değişmez herhangi K alt modülünü ve tam satırlı herhangi

$$\begin{array}{ccccc}
& & P/K & & \\
& & \downarrow f & & \\
P/K & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramını alalım. $p: P \rightarrow P/K$ kanonik epimorfizma olmak üzere g örten olduğundan $g \circ p: P \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması olur. Bu durumda P kendi kendine projektif olduğundan $g \circ p \circ h = f \circ p$ olacak şekilde $\exists h: P \rightarrow P$ R -modül homomorfizması vardır. $h_1: P/K \rightarrow P/K, x+K \rightarrow h_1(x+K) = h(x)+K$ dönüşümünü tanımlayalım. h_1 'in kapalı olduğu açıktır. $x+K = y+K$ olan herhangi $x, y \in P$ alalım. $x+K = y+K$ olduğundan $x-y \in K$ olup $h(x-y) \in h(K)$ olur. Burada K, P 'nin bir tamamen değişmez alt modülü olduğundan $h(K) \subset K$ olup $h(x-y) \in K$ olur. $h(x) - h(y) = h(x-y) \in K$ olduğundan $h(x)+K = h(y)+K$ olur. O halde h_1 iyi tanımlıdır. Böylece $h_1: P/K \rightarrow P/K$ bir fonksiyon olur. Burada h_1 'in bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Ayrıca $g \circ p \circ h = f \circ p$ olduğundan $\forall x+K \in P/K$ için $(g \circ h_1)(x+K) = g(h_1(x+K)) = g(h(x)+K) = g(p(h(x))) = f(p(x)) = f(x+K)$ olup $g \circ h_1 = f$ olur. O halde P/K kendi kendine projektif olup istenen elde edilir.

3.2. İnjektif Modüller

Tanım 3.2.1. M ve N iki R -modül olsun. Eğer satır tam dizi olan R -modül homomorfizmalarının her

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{g} & M \\
& & \downarrow f & \searrow h & \\
& & N & &
\end{array}$$

diyagramı için $h \circ g = f$ olacak şekilde $\exists h: M \rightarrow N$ homomorfizması varsa N 'ye M -injektiftir denir.

Eğer diyagramdaki her modül $\sigma[T]$ 'nin elemanı olmak koşuluyla aynı ifade doğru ise N 'ye $\sigma[T]$ içinde M -injektiftir denir.

Eğer N her $L \in \sigma[T]$ için $\sigma[T]$ içinde L -injektif ise, N 'ye $\sigma[T]$ 'de injektiftir denir.

Eğer N her M R -modülü için M -injektif ise, N 'ye bir injektif modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.2.2. M ve N iki R -modül olsun. N 'nin M -injektif olması için gerek ve yeter şart $\forall K \leq M$ ve her $f: K \rightarrow N$ homomorfizması için $i: K \rightarrow M$ içermeye dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & M \\
 & & \downarrow f & \searrow h & \\
 & & N & &
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde en az bir $h: M \rightarrow N$ homomorfizmasının bulunmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (\Rightarrow) Açıktır.

(\Leftarrow) Satır tam dizi olan herhangi

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{g} & M \\
 & & \downarrow f & & \\
 & & N & &
 \end{array}$$

diyagramını alalım. $g: T \rightarrow M$ bir R -modül monomorfizması olduğundan $g: T \rightarrow g(T)$ bir R -modül izomorfizması olarak düşünülebilir. $K = g(T)$ diyelim.

Hipotezden

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & K=g(T) \xrightarrow{i} M \\
& & \downarrow f \circ g^{-1} \\
& & N
\end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: M \rightarrow N$ homomorfizması vardır. Burada $\forall t \in T$ için $(h \circ g)(t) = h(g(t)) = h(i(g(t))) = (h \circ i)(g(t)) = (f \circ g^{-1})(g(t)) = f(g^{-1}(g(t))) = f(t)$ olup $h \circ g = f$ olur. O halde tanımdan N, M -injektif olup istenen elde edilir.

Teorem 3.2.3. M bir R -modül ve $\{U_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\prod_{i \in I} U_i$ direkt çarpımının M -injektif olması için gerek ve yeter şart $\forall \mu \in I$ için U_μ 'nün M -injektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (\Rightarrow) $\prod_{i \in I} U_i, M$ -injektif olsun. $\mu \in I, f: K \rightarrow M$ bir monomorfizma ve $\gamma: K \rightarrow U_\mu$ bir homomorfizma olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & M \\
& & \downarrow \gamma & & \searrow \delta \\
& & U_\mu & & \\
& & \uparrow \pi_\mu & & \\
& & \varepsilon_\mu & & \\
& & \prod_{i \in I} U_i & &
\end{array}$$

diyagramını göz önüne alalım. $\varepsilon_\mu: U_\mu \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ kanonik injeksiyon olmak üzere, $\varepsilon_\mu \gamma: K \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ homomorfizması için $\varepsilon_\mu \gamma = \delta f$ olacak şekilde bir $\delta: M \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ homomorfizması mevcuttur. O halde $\pi_\mu: \prod_{i \in I} U_i \rightarrow U_\mu$ μ . kanonik projeksiyon olmak

üzere $\delta' = \pi_\mu \delta$ eşitliği ile tanımlanan $\delta' : M \rightarrow U_\mu$ homomorfizması için $\delta' f = \pi_\mu \delta f = \pi_\mu \varepsilon_\mu \gamma = 1_{U_\mu} \gamma = \gamma$ elde ederiz. Yani $\delta' f = \gamma$ elde etmiş olduk. Dolayısıyla $\forall \mu \in I$ için U_μ, M -injektiftir.

(\Leftarrow) $\forall \mu \in I$ için U_μ, M -injektif olsun. $\mu \in I$, $f : K \rightarrow M$ bir monomorfizma ve $g : K \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ bir homomorfizma olmak üzere aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & M \\
 & & \downarrow g & \searrow h & \\
 & & \prod_{i \in I} U_i & & \\
 & & \downarrow \pi_\mu & \searrow h_\mu & \\
 & & U_\mu & &
 \end{array}$$

U_μ M -injektif olduğundan $\pi_\mu g : K \rightarrow U_\mu$ R -modül homomorfizması için $\pi_\mu g = h_\mu f$ olacak şekilde bir $h_\mu : M \rightarrow U_\mu$ R -modül homomorfizması vardır. $h : M \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$, $m \rightarrow h(m) = (h_i(m))_{i \in I}$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir homomorfizma ve her $i \in I$ için $\pi_i h = h_i$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda $\forall i \in I$ için $\pi_i(hf) = h_i f = \pi_i g$ olup $hf = g$ eşitliğini elde ederiz. O halde $\prod_{i \in I} U_i$ çarpımı M -injektiftir.

Teorem 3.2.4. U, M -injektif bir R -modül olsun. Bu durumda M 'nin her V alt modülü için U hem V -injektif hem de M/V -injektiftir (Koşar, 2008).

İspat: Önce U 'nun V -injektif olduğunu gösterelim. Satır tam dizi olmak üzere,

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & V \\
& & \downarrow g & & \\
& & U & &
\end{array}$$

diyagramını düşünelim. V , M 'nin bir alt modülü olduğundan $i:V \rightarrow M$ içirme dönüşümünü alırsak $if:K \rightarrow M$ bir monomorfizmadır. U , M -injektif olduğu için

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{if} & M \\
& & \downarrow g & \nearrow h & \\
& & U & &
\end{array}$$

diyagramında öyle bir $h:M \rightarrow U$ R -modül homomorfizması vardır ki $h(if) = g$ 'dir.

Buradan $(hi)f = g$ yazılır. Eğer $h' = hi$ dersek aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & V \\
& & \downarrow g & \nearrow h' & \\
& & U & &
\end{array}$$

en az bir $h':V \rightarrow U$ R -modül homomorfizması bulunmuş olur. O halde U , V -injektif olur.

Şimdi U 'nun M/V -injektif olduğunu gösterelim. $V \leq K \leq M$ olan herhangi bir $K \leq M$ alalım. Her

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K/V & \xrightarrow{i_{K/V}} & M/V \\
& & \downarrow g & \nearrow h & \\
& & U & &
\end{array} \quad (3.1.)$$

diyagramı için $hi_{K/V} = g$ olacak şekilde en az bir $h : M/V \rightarrow U$ homomorfizmasının varlığını göstermeliyiz. Her $m \in M$ ve $k \in K$ için $p(m) = m + V$ ve $p_1(k) = k + V$ ile tanımlı $p : M \rightarrow M/V$ ve $p_1 : K \rightarrow K/V$ dönüşümlerinin birer homomorfizma oldukları bilinmektedir. U, M -injektif olduğuna göre

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i_K} & M \\
 & & \downarrow g \circ p_1 & \searrow h_1 & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists h_1 : M \rightarrow U$ homomorfizması vardır. Bu takdirde $h_1 i_K = g p_1$ olur. $h : M/V \rightarrow U, m + V \rightarrow h(m + V) = h_1(m)$ dönüşümünü tanımlayalım. $m + V = m' + V$ olan herhangi $m, m' \in M$ alalım. O halde $m - m' \in V$ olup $V \leq K$ olduğundan $h_1(m - m') = h_1(i_K(m - m')) = g(p_1(m - m')) = g(0_{K/V}) = 0$ olur. Bu durumda $h_1(m) - h_1(m') = 0$ olup $h_1(m) = h_1(m')$ olur. O halde h iyi tanımlıdır. h 'nin bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. $k \in K$ olmak üzere $k + V \in K/V$ için $hi_{K/V}(k + V) = h(k + V) = h_1(k) = (g p_1)(k) = g(p_1(k)) = g(k + V)$ olduğundan $hi_{K/V} = g$ olur. Yani (3.1.) diyagramını değişmeli kılan en az bir $h : M/V \rightarrow U$ R -modül homomorfizması mevcuttur. O halde $U, M/V$ -injektiftir.

Sonuç 3.2.5. M, M_1 ve M_2 birer R -modül olmak üzere $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$ bir tam dizi olsun. Eğer U, M -injektif ise, U hem M_1 -injektif ve hem de M_2 -injektiftir (Wisbauer, 1991).

İspat: Dizi tam olduğundan $Imf = Çekg$, g örten ve f birebirdir. 1. İzomorfizma Teoremi'nden $M/Çekg \cong M_2$ olur. Bu durumda $M/Imf \cong M_2$ ve $M_1 \cong Imf \leq M$ olduğundan M_1, M 'nin bir alt modülü ve $M_2 = M/M_1$ olarak düşünülebilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.4.'ten U hem M_1 -injektif ve hem de M_2 -injektiftir.

Sonuç 3.2.6. U ve M iki R -modül olsun. Bu durumda U 'nun M -injektif olması için gerek ve yeter şart M 'nin her K alt modülü için U 'nun K -injektif olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (\Rightarrow) U , M -injektif ve K , M 'nin bir alt modülü ise, Teorem 3.2.4. gereği U , K -injektiftir.

(\Leftarrow) Her modül kendisinin bir alt modülü olduğundan K 'yı M olarak seçebiliriz. Bu durumda kabul gereği U , M -injektiftir.

3.3. Büyük Alt Modüller

Tanım 3.3.1. M modülünün bir N alt modülünün, M 'nin sıfırdan farklı her alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı ise (diğer bir deyişle, $N \cap U = 0$ olan her $U \leq M$ için $U = 0$ ise), N ye M 'nin bir büyük veya önemli alt modülü denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.3.2. Bir $f : M \rightarrow N$ monomorfizmasının Imf görüntüsü N 'nin bir büyük alt modülü ise, f 'ye bir büyük veya önemli monomorfizma denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.3.3. K, L ve M birer R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $K \leq L \leq M$ ise $K \trianglelefteq M$ olması için gerek ve yeter şart $K \trianglelefteq L \trianglelefteq M$ olmasıdır.

(b) $f : K \rightarrow L$ ve $g : L \rightarrow M$ iki monomorfizma olsun. Bu takdirde $g \circ f$ 'nin bir büyük monomorfizma olması için gerek ve yeter şart f ve g 'nin büyük monomorfizma olmasıdır.

(c) $h : K \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması ve $L \trianglelefteq M$ ise $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$ olur.

(d) $K_1 \trianglelefteq L_1 \leq M$ ve $K_2 \trianglelefteq L_2 \leq M$ ise $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$ olur.

(e) M 'nin iki büyük alt modülünün kesişimi de M 'nin bir büyük alt modülüdür (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) (\Rightarrow) $K \trianglelefteq M$ olsun. $K \leq L$ olduğundan $L \cap T = 0$ olan her $T \leq M$ için $K \cap T = 0$ olup $K \trianglelefteq M$ olduğundan $T = 0$ olur. Bu durumda $L \trianglelefteq M$ olur. $K \cap S = 0$

olan her $S \leq L$ için $S \leq M$ ve $K \trianglelefteq M$ olduğundan $S = 0$ olup $K \trianglelefteq L$ olur. O halde $K \trianglelefteq L \trianglelefteq M$ olur.

(\Leftarrow) $K \trianglelefteq L \trianglelefteq M$ olsun. $K \cap T = 0$ olan herhangi $T \leq M$ alalım. $K \cap T = 0$ olduğundan $K \cap T \cap L = 0$ olup $T \cap L \leq L$ ve $K \trianglelefteq L$ olduğundan $T \cap L = 0$ olur. $L \cap T = T \cap L = 0$ ve $L \trianglelefteq M$ olduğuna göre $T = 0$ olup $K \trianglelefteq M$ olur.

(b) $f: K \rightarrow L$ ve $g: L \rightarrow M$ birer monomorfizma olduğundan $g \circ f: K \rightarrow M$ bir R -modül monomorfizması olur.

(\Rightarrow) $g \circ f$ bir büyük monomorfizma olsun. Bu takdirde $g(f(K)) = (g \circ f)(K) = \text{Im}(g \circ f) \trianglelefteq M$ olur. $g(f(K)) \trianglelefteq M$ ve $g(f(K)) \leq g(L) \leq M$ olduğundan (a) şikkından $\text{Im}g = g(L) \trianglelefteq M$ olup g bir büyük monomorfizma olur. Ayrıca yine (a) şikkından $g(f(K)) \trianglelefteq g(L)$ olup g birebir olduğuna göre $g: L \rightarrow g(L)$ bir R -modül izomorfizması olarak düşünülebilir. Bu durumda $f(K) \trianglelefteq L$ olup f bir büyük monomorfizma olur.

(\Leftarrow) f bir büyük monomorfizma olduğundan $f(K) \trianglelefteq L$ olup g birebir olduğundan $g(f(K)) \trianglelefteq g(L)$ olduğu kolayca gösterilebilir. g bir büyük monomorfizma olduğundan $g(L) \trianglelefteq M$ olup ayrıca $g(f(K)) \trianglelefteq g(L)$ olduğundan (a) şikkından $\text{Im}(g \circ f) = g(f(K)) \trianglelefteq M$ olur. Bu durumda $g \circ f$ bir büyük monomorfizma olur.

(c) $h: K \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması ve $L \trianglelefteq M$ olsun. $h^{-1}(L) \cap T = 0$ olan herhangi $T \leq K$ alalım. Herhangi $x \in L \cap h(T)$ alalım. Buradan $x \in L$ ve $x = h(t)$ olacak şekilde en az bir $t \in T$ vardır. $h(t) = x \in L$ olduğuna göre $t \in h^{-1}(L)$ olup ayrıca $t \in T$ olduğundan $t \in h^{-1}(L) \cap T = 0$ olur. Bu durumda $t = 0$ olup $x = h(t) = h(0) = 0$ olur. Bu takdirde $L \cap h(T) = 0$ olup $L \trianglelefteq M$ olduğundan $h(T) = 0$ olur. Herhangi $y \in T$ alalım. Bu durumda $h(T) = 0$ olduğundan $h(y) = 0 \in L$ olup $y \in h^{-1}(L)$ olur. Ayrıca

$y \in T$ olduğundan $y \in h^{-1}(L) \cap T = 0$ olup $y = 0$ olur. O halde $T = 0$ olup $h^{-1}(L) \leq K$ olur.

(d) $K_1 \leq L_1 \leq M$ ve $K_2 \leq L_2 \leq M$ olsun. $K_1 \cap K_2 \cap T = 0$ olan herhangi $T \leq L_1 \cap L_2$ alalım. $K_1 \cap K_2 \cap T = 0$, $K_2 \cap T \leq T \leq L_1 \cap L_2 \leq L_1$ ve $K_1 \leq L_1$ olduğuna göre $K_2 \cap T = 0$ olur. $K_2 \cap T = 0$, $T \leq L_1 \cap L_2 \leq L_2$ ve $K_2 \leq L_2$ olduğundan $T = 0$ olup $K_1 \cap K_2 \leq L_1 \cap L_2$ olur.

(e) $K_1 \leq M$ ve $K_2 \leq M$ ise (d) şikkından $K_1 \cap K_2 \leq M \cap M = M$ olup istenen elde edilir.

Sonuç 3.3.4. M bir R -modül olmak üzere M 'nin sonlu sayıda büyük alt modüllerinin kesişimi de M 'nin bir büyük alt modülüdür (Wisbauer, 1991).

İspat: Teorem 3.3.3.(e)'den açıktır.

Sonuç 3.3.5. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. $K \leq T \leq M$ olmak üzere $T/K \leq M/K$ ise $T \leq M$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: Teorem 3.3.3.(c)'den açıktır.

Tanım 3.3.6. M bir R -modül ve $K, L \leq M$ olsun. Eğer $K \cap L = 0$ ve $K \cap N = 0$ olan her $L \leq N \leq M$ için $N = L$ ise L 'ye K 'nın M 'de kesişime göre bir tümleyeni denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.3.7. M bir R -modül olmak üzere M 'nin her alt modülünün M 'de kesişime göre bir tümleyeni vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: $K \leq M$ olsun. $S = \{N \leq M \mid K \cap N = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $K \cap 0 = 0$ olduğuna göre $0 \in S$ olup $S \neq \emptyset$ olur. S 'nin kapsama bağıntısına göre herhangi T zincirini alalım. $X = \bigcup_{C \in T} C$ diyelim. Burada $X \leq M$ olduğu gösterilebilir. Herhangi $x \in K \cap X$ alalım. Buradan $x \in K$ ve $x \in X$ olur. $x \in X = \bigcup_{C \in T} C$ olduğundan $x \in C$ olacak şekilde en az bir $C \in T$ vardır. O halde $x \in K \cap C = 0$ olup $x = 0$ olur. Bu durumda $K \cap X = 0$ olup $X \in S$ olur. Ayrıca her $C \in T$ için $C \leq X$ olduğundan X ,

T 'nin bir üst sınırı olur. O halde Zorn Lemması'ndan S kümesi en az bir maksimal L elemanı içerir. Burada L, K 'nın M 'de kesişime göre bir tümleyeni olur.

Teorem 3.3.8. M bir R -modül olmak üzere $K, L \leq M$ ve L, K 'nın M 'de kesişime göre bir tümleyeni olsun. Bu takdirde $(K+L)/L \trianglelefteq M/L$ olup $K \oplus L \trianglelefteq M$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: $T/L \leq M/L$ olmak üzere $((K+L)/L) \cap (T/L) = 0$ olsun. Bu takdirde $((K \cap T) + L)/L = ((K+L)/L) \cap (T/L) = 0$ olup $(K \cap T) + L = L$ olur. Buradan $K \cap T \leq L$ olup $K \cap L = 0$ olduğundan $K \cap T \leq K \cap L = 0$ olur. O halde $L \leq T$ ve L, K 'nın M 'de kesişime göre bir tümleyeni olduğundan $T = L$ olup $T/L = 0$ olur. Böylece $(K+L)/L \trianglelefteq M/L$ olur. Bu durumda Sonuç 3.3.5.'ten $K \oplus L \trianglelefteq M$ olur.

Tanım 3.3.9. M bir R -modül olsun. M 'nin bütün basit alt modüllerinin toplamına M 'nin temeli denir ve genellikle $SocM$ ile ifade edilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.3.10. M bir R -modül olsun. Bu takdirde $SocM = \bigcap_{L \trianglelefteq M} L$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: $T = \bigcap_{L \trianglelefteq M} L$ diyelim. $L \trianglelefteq M$ olsun. K, M 'nin bir basit alt modülü olmak üzere $K \leq L$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece $SocM \leq L$ olup $SocM \leq T$ olur.

Tersine, T 'nin yarı basit olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. T 'nin herhangi S alt modülünü alalım. Teorem 3.3.7.'den S 'nin M 'de en az bir X kesişime göre tümleyeni vardır. Teorem 3.3.8.'den $S \oplus X \trianglelefteq M$ olup $T = \bigcap_{L \trianglelefteq M} L \leq S \oplus X$ olur. Burada $S \leq T$ olduğuna göre Modüler Kuralı'ndan $T = T \cap (S \oplus X) = S \oplus (T \cap X)$ olup S, T 'nin bir direkt toplam terimi olur. Bu durumda Teorem 2.2.61.'den T yarı basit olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde büyük projektif modül kavramı tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

4.1. Büyük Projektif Modüller

Tanım 4.1.1. M ve N iki R -modül olsun. Eğer $\zeta ekg \trianglelefteq N$ olan her $g: N \rightarrow K$ R -modül epimorfizması ve her $f: M \rightarrow K$ R -modül homomorfizması için $f = goh$ olacak şekilde en az bir $h: M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması bulunabilirse, M 'ye bir büyük N -projektif modül denir. Yani $\zeta ekg \trianglelefteq N$ ve $N \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ satırı bir tam dizi olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \nearrow h & \downarrow f & & \\ N & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan en az bir $h: M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması bulunabilirse M 'ye bir büyük N -projektif modül denir. Eğer her N R -modülü için M büyük N -projektif ise M 'ye bir büyük projektif modül denir.

Teorem 4.1.2. M ve N iki R -modül olsun. M 'nin büyük N -projektif olması için gerek ve yeter şart $K \trianglelefteq N$ olan her

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow f & & \\ N & \xrightarrow{p} & N/K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: M \rightarrow N$ homomorfizmasının bulunabilmesidir (burada $p: N \rightarrow N/K, x \rightarrow p(x) = x + K$ ile tanımlıdır).

İspat: (\Rightarrow) Açıktır.

(\Leftarrow) g bir R -modül epimorfizması ve $\zeta ekg \trianglelefteq N$ olmak üzere herhangi

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow f & & \\ N & \xrightarrow{g} & T & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını alalım. $g: N \rightarrow T$ bir R -modül epimorfizması olduğundan $\bar{g}: N/\zeta ekg \rightarrow T$, $x + \zeta ekg \rightarrow \bar{g}(x + \zeta ekg) = g(x)$ ile tanımlı \bar{g} dönüşümünün bir R -modül izomorfizması olduğu gösterilebilir. Hipotezden $p: N \rightarrow N/\zeta ekg$ bir kanonik epimorfizma olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow \bar{g}^{-1} \circ f & & \\ N & \xrightarrow{p} & N/\zeta ekg & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $\forall x \in M$ için $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \bar{g}(h(x) + \zeta ekg) = \bar{g}(p(h(x))) = (\bar{g} \circ p \circ h)(x) = (\bar{g} \circ \bar{g}^{-1} \circ f)(x) = f(x)$ olup $g \circ h = f$ olur. O halde M büyük N -projektif olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.3. M bir R -modül ve $K \trianglelefteq M$ olsun. Eğer M/K büyük M -projektif ise $K = M$ olur.

İspat: M/K büyük M -projektif olsun. Bu durumda $p: M \rightarrow M/K$ bir kanonik epimorfizma olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
& & M/K \\
& & \downarrow 1_{M/K} \\
M & \xrightarrow{p} & M/K \longrightarrow 0
\end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: M/K \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $p \circ h = 1_{M/K}$ olduğundan Teorem 2.2.42.'den $M = \text{Im}h \oplus \text{Çek}p$ olup $\text{Çek}p = K$ olduğundan $M = \text{Im}h \oplus K$ olur. Bu durumda $K \cap \text{Im}h = 0$ olup $K \leq M$ olduğundan $\text{Im}h = 0$ olur. O halde $M = \text{Im}h \oplus K = 0 \oplus K = K$ olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.4. M bir büyük projektif R -modül olsun. N bir R -modül olmak üzere eğer $\text{Çek}f \leq N$ olan en az $f: N \rightarrow M$ bir R -modül epimorfizması bulunabilirse $M = 0$ olur.

İspat: $f: N \rightarrow M$ bir R -modül epimorfizması ve $\text{Çek}f \leq N$ olsun. Bu durumda $N/\text{Çek}f \cong M$ olup M büyük projektif olduğundan $N/\text{Çek}f$ de büyük projektif olur. O halde $N/\text{Çek}f$ büyük N -projektif olup Teorem 4.1.3. gereği $\text{Çek}f = N$ olur. $\text{Çek}f = N$ olduğundan $M = f(N) = f(\text{Çek}f) = 0$ olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.5. M bir büyük projektif R -modül ve $M \neq 0$ olsun. Bu durumda N bir R -modül olmak üzere $\text{Çek}f \leq N$ olan hiç bir $f: N \rightarrow M$ R -modül epimorfizması yoktur.

İspat: Teorem 4.1.4.'ten açıktır.

Teorem 4.1.6. $\{P_i\}_{i \in I}$ kümesi R -modüllerin bir ailesi ve N bir R -modül olsun. Bu durumda $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ direkt toplamının büyük N -projektif olması için gerek ve yeter koşul $\forall j \in I$ için P_j 'nin büyük N -projektif olmasıdır.

İspat: (\Rightarrow) Herhangi $j \in I$ ve $\text{Çek}g \leq N$ olan tam satırlı herhangi

$$\begin{array}{ccc}
 & & P_j \\
 & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{g} & T \longrightarrow 0
 \end{array}$$

diyagramını alalım. $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ büyük N -projektif olduğundan $\pi_j : P \rightarrow P_j$ j . kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & & \downarrow f \circ \pi_j \\
 N & \xrightarrow{g} & T \longrightarrow 0
 \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h' : P \rightarrow N$ R -modül homomorfizması vardır. $\varepsilon_j : P_j \rightarrow P$ j . kanonik injeksiyon olmak üzere $h = h' \circ \varepsilon_j$ diyelim. Burada $g \circ h = g \circ h' \circ \varepsilon_j = f \circ \pi_j \circ \varepsilon_j = f \circ 1_{P_j} = f$ olur. O halde P_j büyük N -projektif olup istenen elde edilir.

(\Leftarrow) $\forall j \in I$ için P_j büyük N -projektif olsun. g bir epimorfizma ve $\text{Çekg} \trianglelefteq N$ olan herhangi

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{g} & T \longrightarrow 0
 \end{array}$$

diyagramını alalım. $\forall j \in I$ için P_j büyük N -projektif olduğundan $\varepsilon_j : P_j \rightarrow P$ j . kanonik injeksiyon olmak üzere $g \circ h_j = f \circ \varepsilon_j$ olacak şekilde $\exists h_j : P_j \rightarrow N$ R -modül homomorfizması vardır. $h : P \rightarrow N$, $x = (x_i)_{i \in I} \rightarrow h(x) = \sum_{i \in I} h_i(x_i)$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu

gösterilebilir. Herhangi $x = (x_i)_{i \in I} \in P$ alalım. Burada $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\sum_{i \in I} h_i(x_i)\right) = \sum_{i \in I} g(h_i(x_i)) = \sum_{i \in I} f(\varepsilon_i(x_i)) = f\left(\sum_{i \in I} \varepsilon_i(x_i)\right) = f(x)_{i \in I} = f(x)$ olup $g \circ h = f$ olur. O halde P büyük N -projektif olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.7. P bir büyük N -projektif R -modül olsun. Bu durumda P 'nin her direkt toplam terimi de büyük N -projektif olur.

İspat: Teorem 4.1.6.'dan açıktır.

Teorem 4.1.8. M bir büyük N -projektif R -modül ve $K \leq N$ olsun. Bu durumda M büyük N/K -projektiftir.

İspat: $\zeta ekg \trianglelefteq N/K$ olan tam satırlı herhangi

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow f & & \\ N/K & \xrightarrow{g} & T & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diyagramını alalım. $g : N/K \rightarrow T$ bir R -modül epimorfizması olduğundan $p : N \rightarrow N/K$ kanonik epimorfizması için $g \circ p : N \rightarrow T$ bir R -modül epimorfizması olur. $\zeta ekg \trianglelefteq N/K$ olduğundan Teorem 3.3.3.(c)'den $p^{-1}(\zeta ekg) \trianglelefteq N$ olur. Herhangi $x \in p^{-1}(\zeta ekg)$ alalım. $x \in p^{-1}(\zeta ekg)$ olduğundan $p(x) \in \zeta ekg$ olup $(g \circ p)(x) = g(p(x)) = 0$ olur. O halde $x \in \zeta ek(g \circ p)$ olup $p^{-1}(\zeta ekg) \leq \zeta ek(g \circ p)$ olur. $p^{-1}(\zeta ekg) \leq \zeta ek(g \circ p) \leq N$ ve $p^{-1}(\zeta ekg) \trianglelefteq N$ olduğundan Teorem 3.3.3.(a)'dan $\zeta ek(g \circ p) \trianglelefteq N$ olur. Ayrıca $g \circ p : N \rightarrow T$ bir R -modül epimorfizması ve M büyük N -projektif olduğundan

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & & \\
& & \downarrow f & & \\
N & \xrightarrow{g \circ p} & T & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h': M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $g \circ p \circ h' = f$ olup $h = p \circ h'$ dersek $h: M \rightarrow N/K$ bir R -modül homomorfizması ve $g \circ h = f$ olur. O halde M büyük N/K -projektif olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.9. M bir büyük N -projektif R -modül ve $K \trianglelefteq N$ olsun. Bu durumda M büyük K -projektiftir.

İspat: $T \trianglelefteq K$ ve $p_K: K \rightarrow K/T$ kanonik epimorfizma olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & & \\
& & \downarrow f & & \\
K & \xrightarrow{p_K} & K/T & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramını alalım. $T \trianglelefteq K \trianglelefteq N$ olduğundan Teorem 3.3.3.(a)'dan $T \trianglelefteq N$ olur. M büyük N -projektif olduğundan $i_{K/T}: K/T \rightarrow N/T$ içerme dönüşümü ve $p_N: N \rightarrow N/T$ kanonik epimorfizma olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & & \\
& & \downarrow i_{K/T} \circ f & & \\
N & \xrightarrow{p_N} & N/T & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $p_N \circ h = i_{K/T} \circ f$ olup $\forall x \in M$ için $h(x) + T = p_N(h(x)) = (p_N \circ h)(x) = (i_{K/T} \circ f)(x) = i_{K/T}(f(x)) = f(x) \in K/T$ olur. O halde $\forall x \in M$ için $h(x) \in K$ olup $h: M \rightarrow K$ bir R -modül homomorfizması olarak düşünebiliriz. Burada $\forall x \in M$ için $h(x) + T = f(x)$

olduğundan $(p_K \circ h)(x) = p_K(h(x)) = h(x) + T = f(x)$ olup $p_K \circ h = f$ olur. O halde M büyük K -projektif olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.10. M bir büyük N -projektif R -modül ve $K \trianglelefteq N$ olsun. Bu durumda M hem büyük K -projektif, hem de büyük N/K -projektiftir.

İspat: Teorem 4.1.8. ve Teorem 4.1.9.'dan açıktır.

Sonuç 4.1.11. $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ bir kısa tam dizi ve $Imf \trianglelefteq N$ olsun. Eğer M büyük N -projektif ise M hem büyük N' -projektif, hem de büyük N'' -projektiftir.

İspat: M büyük N -projektif olsun. $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ bir tam dizi olduğundan f birebir, g örten ve $Imf = Çekg$ olur. $f(N') = Imf \trianglelefteq N$ ve M büyük N -projektif olduğundan Teorem 4.1.9.'dan M büyük $f(N')$ -projektif olur. Öte yandan $f: N' \rightarrow N$ bir R -modül monomorfizması olduğundan $N' \cong f(N')$ olur. O halde M büyük N' -projektif olur. $Çekg \leq N$ ve M büyük N -projektif olduğundan Teorem 4.1.8.'den M büyük $N/Çekg$ -projektiftir. Öte yandan $g: N \rightarrow N''$ bir R -modül epimorfizması olduğundan $N/Çekg \cong N''$ olur. O halde M büyük N'' -projektif olur.

Sonuç 4.1.12. $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ bir kısa tam dizi ve $Çekg \trianglelefteq N$ olsun. Eğer M büyük N -projektif ise M hem büyük N' -projektif, hem de büyük N'' -projektiftir.

İspat: $Imf = Çekg \trianglelefteq N$ olduğundan Sonuç 4.1.11.'den istenen elde edilir.

Teorem 4.1.13. M ve N modülleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) Her Λ indis kümesi için M büyük $N^{(\Lambda)}$ -projektiftir.
- (b) Her N -üretilmiş L modülü için M büyük L -projektiftir.

İspat: (a) \Rightarrow (b) N -üretilmiş herhangi L modülünü alalım. L , N tarafından üretildiğinden öyle Λ indis kümesi vardır ki en az bir $f: N^{(\Lambda)} \rightarrow L$ R -modül epimorfizması bulunabilir. Hipotezden M büyük $N^{(\Lambda)}$ -projektif olup Teorem 4.1.8. gereği M büyük $N^{(\Lambda)}/Çekf$ -projektif olur. Öte yandan $f: N^{(\Lambda)} \rightarrow L$ bir R -modül

epimorfizması olduğundan $N^{(\Lambda)} / \text{Çekf} \cong L$ olur. O halde M büyük L -projektif olup istenen elde edilir.

(b) \Rightarrow (a) Her Λ indis kümesi için $N^{(\Lambda)}$ modülü N -üretilmiş olduğundan istenen elde edilir.

Aşağıdaki teoremin son üç şıkkının denkliği (Wisbauer, 1991)'de vardır.

Teorem 4.1.14. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) Her R -modül büyük M -projektiftir.
- (b) M 'nin her bölüm modülü büyük M -projektiftir.
- (c) Her $K \trianglelefteq M$ için M/K büyük M -projektiftir.
- (d) $\text{Soc}M = M$ olur.
- (e) M yarı basittir.
- (f) Her R -modül M -projektiftir.
- (g) Her R -modül M -injektiftir.

İspat: (a) \Rightarrow (b) Açıktır.

(b) \Rightarrow (c) Açıktır.

(c) \Rightarrow (d) Herhangi $K \trianglelefteq M$ alalım. Hipotezden M/K büyük M -projektiftir. Bu durumda Teorem 4.1.3. gereği $K = M$ olur. Yani M 'nin hiçbir öz büyük alt modülü yoktur. O halde Teorem 3.3.10. gereği $\text{Soc}M = M$ olur.

(d) \Rightarrow (e) $\text{Soc}M = M$ olsun. Bu durumda Tanım 2.2.60. ve Tanım 3.3.9.'dan M yarı basit olup istenen elde edilir.

(e) \Rightarrow (f) Herhangi N R -modülünü ve $p: M \rightarrow M/K$ kanonik epimorfizma olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
& & N \\
& & \downarrow f \\
M & \xrightarrow{p} & M/K \longrightarrow 0
\end{array}$$

diyagramını alalım. M yarı basit olduğundan Teorem 2.2.61.'den K , M 'nin bir direkt toplam terimi olup $M = K \oplus L$ olacak şekilde $\exists L \leq M$ vardır. $g = p|_L$ diyelim. g 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu açıktır. Herhangi $x \in \text{Çek}g$ alalım. $x \in \text{Çek}g$ olduğundan $p(x) = g(x) = 0$ olup $x \in \text{Çek}p = K$ olur. Ayrıca $x \in L$ olduğundan $x \in K \cap L = 0$ olup $x = 0$ olur. O halde $\text{Çek}g = 0$ olup Teorem 2.2.18. gereği g birebir olur. Herhangi $m + K \in M/K$ alalım. $m \in M = K \oplus L$ olduğundan $m = k + l$ olacak şekilde $\exists k \in K$ ve $\exists l \in L$ vardır. Burada $m + K = k + l + K = l + K = p(l) = p|_L(l) = g(l)$ olup g örtendir. $g: L \rightarrow M/K$ birebir ve örten bir R -modül homomorfizması olduğundan bir R -modül izomorfizması olup $g^{-1}: M/K \rightarrow L$ bir R -modül homomorfizması olur. $i: L \rightarrow M$ içerme dönüşümü olmak üzere $h = i \circ g^{-1} \circ f$ diyelim. Burada $h: N \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması olur. Herhangi $y \in N$ alalım. $g^{-1}(f(y)) = z$ diyelim. Burada $p(z) = g(z) = f(y)$ olup $(p \circ h)(y) = p(h(y)) = p(i(g^{-1}(f(y)))) = p(i(z)) = p(z) = f(y)$ olur. O halde $p \circ h = f$ olur. Böylece Teorem 3.1.3. gereği N modülü M -projektif olup istenen elde edilir.

(f) \Rightarrow (a) Açıktır.

(e) \Rightarrow (g) M yarı basit olsun. Herhangi L R -modülünü alalım. $T \leq M$ ve $i: T \rightarrow M$ içerme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & T \xrightarrow{i} M \\
& & \downarrow f \\
& & L
\end{array}$$

diyagramı verilsin. $T \leq M$ ve M yarı basit olduğundan Teorem 2.2.61. gereği T, M 'nin bir direkt toplam terimi olup $M = T \oplus S$ olacak şekilde bir $S \leq M$ vardır. $h: M = T \oplus S \rightarrow L, x = t + s (t \in T, s \in S) \rightarrow h(x) = f(t)$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin kapalı olduğu açıktır. $x = t_1 + s_1 = t_2 + s_2$ olan herhangi $t_1, t_2 \in T$ ve herhangi $s_1, s_2 \in S$ alalım. $t_1 + s_1 = t_2 + s_2$ olduğundan $t_1 - t_2 = s_2 - s_1 \in S$ olup ayrıca $t_1 - t_2 \in T$ olduğundan $t_1 - t_2 \in T \cap S = 0$ olur. O halde $t_1 - t_2 = 0$ olup $t_1 = t_2$ olur. $t_1 = t_2$ olduğundan $f(t_1) = f(t_2)$ olur. O halde h iyi tanımlı olup ayrıca h kapalı olduğundan $h: M = T \oplus S \rightarrow L$ bir fonksiyon olur. $f: T \rightarrow L$ bir R -modül homomorfizması olduğundan $\forall x = t_1 + s_1, y = t_2 + s_2 \in M = T \oplus S (t_1, t_2 \in T, s_1, s_2 \in S)$ ve $\forall r \in R$ için $h(x + y) = h(t_1 + s_1 + t_2 + s_2) = h(t_1 + t_2 + s_1 + s_2) = f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2) = h(x) + h(y)$ ve $h(rx) = h(r(t_1 + s_1)) = h(rt_1 + rs_1) = f(rt_1) = rf(t_1) = rh(x)$ olup h bir R -modül homomorfizması olur. Burada h 'nin tanımından $\forall t \in T$ için $(h \circ i)(t) = h(i(t)) = h(t) = h(t + 0) = f(t)$ olup $h \circ i = f$ olur. O halde Teorem 3.2.2. gereği L, K -injektif olur.

(g) \Rightarrow (e) Her R -modül M -injektif olsun. M 'nin herhangi K alt modülünü alalım.

Hipotezden K modülü M -injektif olup

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow 1_K & & \\ & & K & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: M \rightarrow K$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $h \circ i = 1_K$ olup Teorem 2.2.42. gereği $M = i(K) \oplus \text{Çek}h = K \oplus \text{Çek}h$ olur. Yani M 'nin her alt modülü bir direkt toplam terimi olup Teorem 2.2.61. gereği M yarı basit olur.

Tanım 4.1.15. P bir R -modül olmak üzere eğer P modülü büyük P -projektif ise P 'ye kendi kendine büyük projektiftir denir.

Teorem 4.1.16. P bir kendi kendine büyük projektif R -modül olsun. Bu durumda P 'nin tamamen değişmez her K alt modülü için P/K kendi kendine büyük projektif olur.

İspat: P 'nin tamamen değişmez herhangi K alt modülü verilsin. Tam satırlı ve $\text{Çekg} \trianglelefteq P/K$ olan herhangi

$$\begin{array}{ccc} & & P/K \\ & & \downarrow f \\ P/K & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

diyagramını alalım. $p: P \rightarrow P/K$ kanonik epimorfizma olmak üzere g örten olduğundan $g \circ p: P \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması olur. Ayrıca

$$x \in \text{Çek}(g \circ p) \Leftrightarrow g(p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(x) \in \text{Çekg} \Leftrightarrow x \in p^{-1}(\text{Çekg}) \quad \text{denkliklerinden}$$

$\text{Çek}(g \circ p) = p^{-1}(\text{Çekg}) \trianglelefteq P$ elde edilir. Bu durumda P kendi kendine büyük projektif olduğundan $g \circ p \circ h = f \circ p$ olacak şekilde $\exists h: P \rightarrow P$ R -modül homomorfizması vardır.

$h_1: P/K \rightarrow P/K$, $x+K \rightarrow h_1(x+K) = h(x)+K$ dönüşümünü tanımlayalım.

h_1 'in kapalı olduğu açıktır. $x+K = y+K$ olan herhangi $x, y \in P$ alalım. $x+K = y+K$ olduğundan $x-y \in K$ olup $h(x-y) \in h(K)$ olur. Burada K , P 'nin bir tamamen değişmez alt modülü olduğundan $h(K) \subset K$ olup $h(x-y) \in K$ olur.

$h(x) - h(y) = h(x-y) \in K$ olduğundan $h(x)+K = h(y)+K$ olur. O halde h_1 iyi tanımlıdır. Böylece $h_1: P/K \rightarrow P/K$ bir fonksiyon olur. Burada h_1 'in bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir.

Ayrıca $g \circ p \circ h = f \circ p$ olduğundan

$$\forall x+K \in P/K \text{ için } (g \circ h_1)(x+K) = g(h_1(x+K)) = g(h(x)+K) = g(p(h(x))) = f(p(x)) = f(x+K) \text{ olup } g \circ h_1 = f \text{ olur. O halde } P/K \text{ kendi kendine büyük projektif olup istenen elde edilir.}$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında projektif modüllerden hareketle büyük projektif modül kavramı tanımlandı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi. M bir R -modül ve K , M 'nin bir büyük alt modülü olmak üzere eğer M/K büyük M -projektif ise $K=M$ olduğu gösterildi. M bir R -modül olmak üzere her R -modülün büyük M -projektif olması için gerek ve yeter şart M 'nin yarı basit olduğu gösterildi.

Üzerindeki büyük projektif modülleri projektif olan halkalar üzerinde çalışılabilir. Büyük projektif modüllerle projektif modülleri ayırt edici örnekler incelenebilir. Hangi koşullarda büyük projektif modüllerin projektif olduğu incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). *Homoloji cebire giriş*. Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi.
- Azumaya, G., Mbuntum, F. and Varadarajan, K. (1975). On M-projective and M-injective modules. *Pacific Journal of Mathematics*. 59. 9-16.
- Beck, I. (1972). Projective and free modules. *Mathematical Journal*. 129. 231-234.
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting modules supplements and projectivity in module theory*. Basel–Boston–Berlin: Birkhauser Verlag.
- Feigelstock, S. and Raphael, R. (1986). Some aspects of relative projectivity. *Communications in Algebra*. 14. 1187-1212.
- Hill, D. (1985). Projective modules with prime endomorphism rings. *Archive of Mathematics*. 44. 126-137.
- Hiremath, V.A. (1978). Finitely projective modules over a Dedekind domain. *Journal of the Australian Mathematical Society*. A 26. 330-336.
- Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
- Kasch, F. (1982). *Modules and rings*. London: Academic Press.
- Koşan, T. and Tütüncü, D. (2007). H-Supplement duo modules. *Journal of Algebra and Its Applications*. 6(6). 965-971.
- Koşar, B. (2008). *Mükemmel modüller ve halkalar*. Yüksek Lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 66, Samsun.
- Koşar, B. (2014). *T-genelleştirilmiş tümlenmiş modüller*. Doktora Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 87, Samsun.
- Sharpe, D.W. and Vamos, P. (1972). *Injective modules*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tuganbaev, A.A. (1979). Poorly projective modules. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 34(5). 43-47.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of module and ring theory*. Philadelphia: Gordon and Breach.

ÖZGEÇMİŞ

Maryam BARADARA, Fen Lisesi'ni bitirdikten sonra Fen Fakültesi'nden 2007 yılında mezun oldu. 2019 yılında OMÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Eğitimine başladı. Orta derecede İngilizce ve iyi derecede Farsça bilmektedir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1248-7429>