**T.C.**
**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ**
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

# KLASİK VE *-KALKÜLÜSE GÖRE BİKOMPLEKS DİZİ UZAYLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Doktora Tezi

**Nilay DEĞİRMEN**

Danışman
**Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR**

Bu tez TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı tarafından desteklenmiştir.

SAMSUN
2021

## TEZ KABUL VE ONAYI

**Nilay DEĞİRMEN** tarafından, **Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR** danışmanlığında hazırlanan **"Klasik ve *-Kalkülüse Göre Bikompleks Dizi Uzayları ve Bazı Özellikleri"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 21.1.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

| | **Unvanı Adı Soyadı**<br>**Üniversitesi**<br>**Ana Bilim/Ana Sanat Dalı** | **İmza** | **Sonuç** |
|---|---|---|---|
| **Başkan**<br>**(Danışman)** | Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR<br>Ondokuz Mayıs Üniversitesi<br>Matematik Anabilim Dalı | | ☐ Kabul<br>☐ Ret |
| **Üye** | Prof. Dr. Ayhan TUTAR<br>Ondokuz Mayıs Üniversitesi<br>Matematik Anabilim Dalı | | ☐ Kabul<br>☐ Ret |
| **Üye** | Doç. Dr. Oğuz OĞUR<br>Giresun Üniversitesi<br>Matematik Anabilim Dalı | | ☐ Kabul<br>☐ Ret |
| **Üye** | Prof. Dr. İmdat İŞCAN<br>Giresun Üniversitesi<br>Matematik Anabilim Dalı | | ☐ Kabul<br>☐ Ret |
| **Üye** | Prof. Dr. Sevda AKDAĞ<br>Sinop Üniversitesi<br>Matematik Anabilim Dalı | | ☐ Kabul<br>☐ Ret |

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
… / … / …
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

İmza
21/01/2021
Nilay DEĞİRMEN

## TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

**Tez Başlığı:** Klasik ve *-Kalkülüse Göre Bikompleks Dizi Uzayları ve Bazı Özellikleri

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 05.01.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 16

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

İmza
05/01/2021
Birsen SAĞIR DUYAR

## ÖZET


KLASİK VE *-KALKÜLÜSE GÖRE BİKOMPLEKS DİZİ UZAYLARI
VE BAZI ÖZELLİKLERİ
Nilay DEĞİRMEN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Doktora, Ocak/2021
Danışman: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR



Altı bölümden oluşan bu tez çalışmasının amacı; bikompleks sayılar kullanılarak tanımlanan dizi uzaylarında bazı topolojik ve geometrik özellikleri vermek ve Newtonyen olmayan kalkülüse göre bikompleks sayıları inşa ederek yine ilgili dizi uzaylarında topolojik ve geometrik problemlere temel oluşturacak bazı sonuçları elde etmektir.

Tezin birinci bölümünde, bikompleks sayıların ve dizi uzaylarının kısa bir tarihçesine değinilmiş, son zamanlarda yapılan bilimsel çalışmalardan bahsedilmiş ve tez konusu tanıtılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, bikompleks sayılar ve bu sayıların reel değerli Öklid normu kullanılarak bikompleks dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların tamlık özelliğinin sağlandığı ispatlanmıştır. Buna bağlı olarak hem topolojik hem cebirsel bir özellik olan bikompleks sayılar cebiri üzerindeki Banach modül yapısının incelenmesinin yanı sıra solidlik, ayrılabilirlik gibi bazı diğer topolojik özellikler ve kesin konvekslik, düzgün konvekslik gibi bazı geometrik özellikler araştırılmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde, yine bikompleks sayılar ve bu sayıların hiperbolik değerli k-normu kullanılarak bikompleks dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların üzerlerindeki hiperbolik değerli normlara göre tamlık özelliğinin sağlandığı ispatlanmıştır. Bikompleks sayılar cebiri üzerindeki Banach modül yapısı bikompleks cebirler kullanılarak hiperbolik değerli norma göre tanımlanmış ve bu yapı hiperbolik değerli norma göre bikompleks sayılar bikompleks cebiri üzerinde Banach bikompleks modül diye isimlendirilmiştir. Önceki bölümdeki tüm problemler hiperbolik değerli norma göre yeniden oluşturulmuş ve çözülmüştür.

Tezin beşinci bölümünde, Newtonyen olmayan bikompleks kurulumun temeli olarak, hem bikompleks sayıların hem de Newtonyen olmayan kompleks sayıların bir genelleştirilmesi olan Newtonyen olmayan bikompleks sayılar tanımlanmış ve Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kümesinin bir quasi-Banach cebiri olduğu gösterilmiştir. Ayrıca *-bikompleks dizilerden oluşan Lebesgue dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların üzerindeki Newtonyen olmayan reel değerli *-normuna göre Newtonyen olmayan tamlık özellikleri incelenmiştir.

Tezin son bölümünde, tezden elde edilen sonuçlar sıralanmış ve çeşitli önerilere yer verilmiştir.



**Anahtar Sözcükler:** Bikompleks sayı, dizi uzayları, topolojik özellik, geometrik özellik, topolojik dual, Newtonyen olmayan kalkülüs.

## ABSTRACT

BICOMPLEX SEQUENCE SPACES AND THEIR SOME PROPERTIES
ACCORDING TO CLASSICAL AND *-CALCULUS
Nilay DEĞİRMEN
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Ph.D., January/2021
Supervisor: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

The aim of this thesis consisting six parts is to give some topological and geometric properties in some sequence spaces defined using bicomplex numbers and to obtain some results that will form the basis of topological and geometric problems in related sequence spaces by constructing bicomplex numbers in the sense of non-Newtonian calculus.

In the first part of the thesis, a brief historical background of bicomplex numbers and sequence spaces is given, recent scientific studies are mentioned and the topic of the thesis is introduced.

In the second part of the thesis, some basic definitions, theorems and results which are needed in the further parts are given.

In the third part of the thesis, by using bicomplex numbers and the real valued Euclid norm of these numbers, bicomplex sequence spaces are defined and it has been proved that these spaces hold the completeness property. Accordingly, in addition to the examination of the Banach module structure on the algebra of bicomplex numbers, which is both topological and algebraic properties, some of other topological properties such as solidity, seperability and some geometric properties such as strictly convexity, uniformly convexity are investigated.

In the fourth part of the thesis, by using bicomplex numbers and the hyperbolic valued k-norm of these numbers, bicomplex sequence spaces are establihed and it has been proved that these spaces hold the completeness property with respect to the hyperbolic valued norm on them. Also, Banach modules on the algebra of bicomplex numbers with respect to the hyperbolic valued norm are defined in bicomplex setting by using bicomplex algebras and it is called a Banach bicomplex module on the bicomplex algebra of bicomplex numbers with respect to hyperbolic valued norm. All problems in the previous part have been reconstructed and solved with respect to the hyperbolic valued norm.

In the fifth part of the thesis, as the basis of the non-Newtonian bicomplex setting, non-Newtonian bicomplex numbers are defined as a generalization of both bicomplex numbers and non-Newtonian complex numbers and it has been showed that the set of non-Newtonian bicomplex numbers is a quasi-Banach algebra. Also, Lebesgue sequence spaces of *-bicomplex numbers are constructed and it has been examined that these spaces hold the completeness property with respect to the non-Newtonian real valued *-norm on them.

In the last part of the thesis, the results which are obtained from the thesis are listed and some proposals are discussed.

**Keywords:** Bicomplex number, sequence spaces, topological property, geometric property, topological dual, non-Newtonian calculus.

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca desteğini ve emeğini her daim hissettiğim, kıymetli görüşlerinden ve birikiminden faydalandığım, yol göstericiliği ile daha sağlam adımlar atmamı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan, sevgi ve desteklerini her zaman hissettiren canım aileme, mutluluk kaynağım biricik babaanneme ve çalışmalarım süresince beni motive ederek güç veren sevgili eşime sonsuz teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Nilay DEĞİRMEN

# İÇİNDEKİLER

**ÖZET** .................................................. **iii**

**ABSTRACT** .................................................. **iv**

**ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR** .................................................. **v**

**SİMGELER VE KISALTMALAR** .................................................. **vii**

**1. GİRİŞ** .................................................. **1**

**2. GENEL BİLGİLER** .................................................. **4**

2.1. Temel Kavramlar .................................................. 4

2.2. Bikompleks Sayılar .................................................. 8

2.3. Bikompleks Skalerli Temel Fonksiyonel Analiz Kavramları .................................................. 14

2.4. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi ve Bazı Özellikleri .................................................. 18

2.5. $*-$Kalkülüs .................................................. 24

2.6. Newtonyen Olmayan Kompleks Cisim .................................................. 26

**3. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ NORMUNA GÖRE BİKOMPLEKS DİZİ UZAYLARI** .................................................. **28**

3.1. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bazı Bikompleks Eşitsizlikler .................................................. 28

3.2. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzayları .................................................. 33

3.3. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri .................................................. 53

3.4. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Geometrik Özellikleri .................................................. 60

**4. HİPERBOLİK DEĞERLİ $|.|_k$ NORMUNA GÖRE BİKOMPLEKS DİZİ UZAYLARI** .................................................. **66**

4.1. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bazı Bikompleks Eşitsizlikler .................................................. 66

4.2. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzayları .................................................. 74

4.3. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri .................................................. 96

4.4. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Geometrik Özellikleri .................................................. 100

4.5. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının $\mathbb{D}-$Topolojik Dualleri .................................................. 105

**5. $\mathbb{BC}(N)$ QUASİ-BANACH CEBİRİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ** .................................................. **118**

5.1. $*-$Bikompleks Sayılar (Newtonyen Olmayan Bikompleks Sayılar) .................................................. 118

5.2. $\mathbb{BC}(N)$ de $\ddot{\|.\|}_2$ $*-$Normuna Göre Bazı Eşitsizlikler .................................................. 123

5.3. $\ddot{\|.\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ $*-$Normuna Göre $*-$Bikompleks Dizi Uzayları .................................................. 132

**6. SONUÇ VE ÖNERİLER** .................................................. **144**

**KAYNAKLAR** .................................................. **146**

**ÖZGEÇMİŞ** .................................................. **148**

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}(i)$ | : $i$ sanal birimine göre kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}(j)$ | : $j$ sanal birimine göre kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{BC}$ | : Bikompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{D}$ | : Hiperbolik sayılar kümesi |
| $\varnothing$ | : Boş küme |
| $\aleph_0$ | : Alef sıfır, doğal sayılar kümesinin kardinalitesi |
| $\Vert\cdot\Vert_{\mathbb{BC}}$ | : Bikompleks sayılar kümesindeki Öklid normu |
| $\vert\Vert\cdot\Vert\vert$ | : $p-$Norm |
| $\vert\cdot\vert_k$ | : Hiperbolik değerli modül |
| $d_{\mathbb{D},\cdot}$ | : Hiperbolik değerli metrik |
| $\Vert\cdot\Vert_{\mathbb{D},\cdot}$ | : Hiperbolik değerli norm |
| $\vert\Vert\cdot\Vert\vert_{\mathbb{D},\cdot}$ | : Hiperbolik değerli $p-$norm |
| $B_{\mathbb{BC}}(X,Y)$ | : $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer operatörlerin kümesi |
| $X^{*_{\mathbb{D}}}$ | **:** $X$ in $\mathbb{D}-$topolojik duali |
| $\mathbb{R}_\alpha$ | : Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}_\alpha^+$ | : Newtonyen olmayan pozitif reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}(N)$ | : Newtonyen olmayan kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{BC}(N)$ | : Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kümesi |
| $d_1^*$ | : $\mathbb{C}(N)$ deki Newtonyen olmayan reel değerli metrik |
| $d_{\mathbb{BC}(N)}$ | : $\mathbb{BC}(N)$ üzerindeki Newtonyen olmayan reel değerli metrik |
| $\ddot{\Vert}\cdot\ddot{\Vert}_1$ | : $\mathbb{C}(N)$ deki Newtonyen olmayan reel değerli norm |
| $\ddot{\Vert}\cdot\ddot{\Vert}_2$ | : $\mathbb{BC}(N)$ deki Newtonyen olmayan reel değerli norm |
| $w$ | : Kompleks terimli tüm dizilerin uzayı |
| $sp\{A\}$ | : $A$ kümesinin gerdiği uzay |

# 1. GİRİŞ

Tarihi 1800'lü yıllara dayanan bikompleks sayılar, özel cebir geliştirme arayışında yaptığı çalışmalar sonucunda Segre (1892) tarafından tanımlanmıştır. Aynı çalışmada, Segre (1892) bikompleks sayılar kümesinin 4-boyutlu Öklid uzayına gömülebilir olduğu göstermiş, idempotent elemanlar ile bikompleks sayıların idempotent gösterimini elde etmiştir. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kaydedildiği yıllar 1928-1940 yıllarıdır. Hem 1843 yılında William Hamilton tarafından tanımlanan kuaterniyonlar hem de bikompleks sayılar kümesi kompleks sayılar kümesinin bir genellemesidir. Kuaterniyonlar değişmeli olmayan bir bölüm cebiri oluştururken, bikompleks sayılar, sıfır bölene sahip olan değişmeli bir halka oluşturur. Bikompleks sayılar, kuaterniyon cebirinin alt cebirlerinden biridir. Ayrıca hiperkompleks sayılar ve kuaterniyonlar teorisi alanlarında bikompleks sayıların kullanıldığı çalışmalara rastlanmaktadır.

Bikompleks sayılar kümesine en büyük katkıyı sağlayan ve bu alandaki en temel kitabı hazırlayan Price (1991) bikompleks sayıları analiz yönüyle ele almış ve bikompleks değişkenli holomorfik fonksiyonlar teorisini geliştirmiştir. Rochon ve Shapiro (2004) bikompleks sayılar için eşlenik ve modül kavramlarını tanımlamıştır. Alpay et al. (2014) bikompleks skalerli fonksiyonel analizin temellerini atmıştır.

Oldukça yeni bir konu olan $\mathbb{BC}$ deki fonksiyonel analiz yalnızca matematiksel bakış açısı ile ilgili değil, aynı zamanda fizik ve mühendislikte de önemli uygulamalara sahiptir. Fonksiyonel analiz çalışmalarının ortaya çıkması ile birlikte bikompleks sayıların önemi daha da artmıştır. Luna-Elizarraras et al. (2014) $\mathbb{D}-$modül ve $\mathbb{BC}-$modülleri, bu modüller üzerindeki lineer fonksiyonelleri ve bu modüller için Hahn-Banach teoremlerini çalışmıştır. Kumar ve Singh (2015) bikompleks Hilbert uzayları üzerindeki bikompleks lineer operatörleri incelemiştir. Kumar et al. (2016) ağırlıklı Hardy uzayının bikompleks versiyonunu ele almış ve klasikte sağlanan özellikleri bikompleks duruma genelleştirmiştir. Kumar ve Saini (2016), Kumar et al. (2011) tarafından tanımlanan topolojik bikompleks modülleri geliştirmiş, bu modüller üzerinde bikompleks konvekslik, hiperbolik değerli yarınorm ve hiperbolik değerli Minkowski fonksiyonel kavramlarını ele almış ve bu kavramların özelliklerini araştırmıştır. Saini et al. (2020), Luna-Elizarraras et al. (2014) tarafından yapılan çalışmayı daha genel haliyle topolojik hiperbolik ve topolojik bikompleks modüller için sunmuştur. Ayrıca Saini et al. (2020) aynı çalışmasında düzgün sınırlılık prensibi, açık dönüşüm teoremi, ters dönüşüm teoremi, kapalı grafik teoremi ve Hahn-Banach ayırma teoreminin bikompleks versiyonlarını ifade etmiş ve ispatlamıştır.

Günümüzde yoğun bir şekilde çalışılmakta olan dizi uzayları matematiğin birçok alanında merkezi bir rol oynar. En popüler dizi uzayları kompleks değerli mutlak toplanabilir dizilerden oluşan $l_p$ uzaylarıdır ve faydalı pek çok uygulamaları vardır. Ayrıca bu uzaylar çok zengin topolojik ve geometrik özelliklere sahip olduğundan araştırmacılar bu uzayları kullanmaya, burada elde edilen sonuçların farklı dizi uzaylarındaki karşılıklarını araştırarak yeni problemler çözmeye ve önemli sonuçlar elde etmeye yönelirler.

Dizi uzayları ve bu uzayların topolojik ve geometrik yapısı ile ilgili son zamanlarda yapılan çalışmalar, Carothers (2005), Savaş vd. (2009), Başar (2012), Altun (2012), Kara (2013), Duyar ve Oğur (2013) ve Banas and Mursaleen (2014) dir.

1967-1970 yılları arasında Grossman and Katz (1972) klasik hesap tarzına bir alternatif olarak yeni bir hesap tarzı (kalkülüs) inşa ettiler. İlerleyen yıllarda Grossman bu yapıları genişleterek geometrik, kuadratik ve harmonik hesap sınıflarını elde etmiştir (Grossman, 1979; Grossman, 1983). Daha sonra da bigeometrik, biharmonik ve bikuadratik kalkülüsü tanımlayıp klasik kalkülüsten farklı olan her kalkülüs için Newtonyen olmayan kalkülüs (non-Newtonian) adını kullanmışlardır. Klasik hesapta kullanılan tüm kavramların Newtonyen olmayan hesap sınıfının her bir üyesi içinde karşılığı vardır. Bu ise bize günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere bakış açısını geliştirme adına yeni fikirler verecektir.

Newtonyen olmayan kalkülüs fen bilimleri, mühendislik, matematik gibi çeşitli alanlarda mükemmel uygulamalara sahiptir. Üzerinde çalışılan alanlardan birkaçı faiz oranları, ekonomide esneklik teorisi, kanın akışkanlığı, bilgi teknolojisi, biyoloji, diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz, dinamik sistemler, fraktallar, finans, yaklaşım teorisi ve olasılık teorisidir.

Çakmak ve Başar (2012) Newtonyen olmayan kalkülüse göre reel dizi uzayları üzerinde; Tekin ve Başar (2013) ise Newtonyen olmayan kompleks cismi tanımlayarak bu cisim üzerinde bazı dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzaylar üzerinde bazı sonuçlar elde etmiştir. Çakmak ve Başar (2014) Newtonyen olmayan kalkülüse göre kompleks sayıların ve fonksiyonların bazı karakteristik özelliklerini araştırmıştır. Kadak (2015) $*-$kalkülüse göre kompleks cisim üzerinde bazı dizi uzaylarını ve duallerini tanımlamış ve Hilbert uzaylarını çalışmıştır. Duyar vd. (2015) Newtonyen olmayan reel eksende bazı temel topolojik ve cebirsel özellikleri çalışmıştır. Newtonyen olmayan kalkülüse göre son zamanlarda yapılan diğer çalışmalar (Duyar ve Erdoğan, 2016; Duyar ve Oğur, 2017; Güngör, 2020; Kirişci, 2017; Oğur ve Demir, 2019) dur.

Bu tezin ana amacı; bikompleks analizin gelişimine katkıda bulunmaktır. Literatüre bakıldığında, $\mathbb{BC}-$modül ve Banach $\mathbb{BC}-$modül yapılarının hiperbolik değerli norma göre oldukça yakın bir zamanda incelenen bikompleks cebirler kullanılarak tanımlanmadığı gözlenmiştir. Bu durum, bikompleks skalerli fonksiyonel analiz için yeni bir çalışma alanı yaratmıştır. Yine literatürde, bikompleks sayıların Newtonyen olmayan kalkülüse göre karakterize edilmemiş olması hem bikompleks analizi hem de Newtonyen olmayan kalkülüsü kapsayan Newtonyen olmayan bikompleks analizi oluşturmamızı sağlamıştır. Farkedilen bu iki eksiklik tezimizin çıkış noktası olmuştur.

Bu tezde, bikompleks sayılar ve Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kullanılarak reel, hiperbolik ve Newtonyen olmayan reel değerli normlara göre yeni dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların kapsama özellikleri, topolojik özellikleri ve geometrik özellikleri incelenmiştir.

# 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, literatürde var olan ve üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler için gerekli bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

## 2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $A$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir cebir ve $M$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bir $A\times M \to M$, $(a,m)\to am$ $\left(M\times A\to M,\,(m,a)\to ma\right)$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa $M$ lineer uzayına bir sol (sağ) $A-$ modül, $A\times M \to M$, $(a,m)\to am$ $\left(M\times A\to M,\,(m,a)\to ma\right)$ dönüşümüne de modül çarpımı denir.

(i) Her bir sabitlenmiş $a\in A$ için $m\to am$ $\left(m\to ma\right)$ dönüşümü $M$ üzerinde lineerdir.

(ii) Her bir sabitlenmiş $m\in M$ için $a\to am$ $\left(a\to ma\right)$ dönüşümü $A$ üzerinde lineerdir.

(iii) Her $a_1,a_2\in A$ ve her $m\in M$ için $a_1\left(a_2m\right)=\left(a_1a_2\right)m$ $\left(\left(ma_1\right)a_2=m\left(a_1a_2\right)\right)$ dir.

$M$, hem sol $A-$ modül hem de sağ $A-$ modül ise $M$ lineer uzayına bir $A-$ bimodül ya da $A-$modül denir. Burada modül çarpımı her $a,b\in A$ ve her $m\in M$ için $a\left(mb\right)=\left(am\right)b$ şeklindedir (Bonsall and Duncan, 1973).

Tanım 2.1.2. $A$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu cebir ve $M$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu lineer uzay olsun. Eğer $M$ bir sol (sağ) $A-$ modül ve her $a\in A$ ve her $m\in M$ için $\|am\|\le K\|a\|\|m\|$ $\left(\|ma\|\le K\|m\|\|a\|\right)$ olacak şekilde pozitif bir $K$ sabiti varsa $M$ lineer uzayına bir normlu sol (sağ) $A-$modül denir. $M$, hem normlu sol $A-$modül hem de normlu sağ $A-$modül ise $M$ lineer uzayına bir normlu $A-$bimodül ya da normlu $A-$modül denir.

Bir normlu sol (sağ) $A-$modül bir normlu lineer uzay olarak tam ise bu modüle bir Banach sol (sağ) $A-$modül denir. $M$, hem Banach sol $A-$modül hem de Banach sağ $A-$modül ise $M$ lineer uzayına bir Banach $A-$bimodül ya da Banach $A-$modül denir (Bonsall and Duncan, 1973).

Tanım 2.1.3. $X$ bir dizi uzayı ve

$$\tilde{X} := \{(s_n) \in w : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } |s_n| \le |t_n| \text{ olacak şekilde } (t_n) \in X \text{ vardır}\}$$

olsun. Eğer $\tilde{X} \subset X$ ise $X$ dizi uzayına solid ya da normal uzay denir (Başar, 2012).

Tanım 2.1.4. $X$ bir dizi uzayı, $A := \{(s_n) \in w : s_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ ve $M_0 = sp\{A\}$ olsun. Eğer $M_0 X \subset X$ ise $X$ dizi uzayına monoton uzay denir (Banas and Mursaleen, 2014).

Tanım 2.1.5. $X$ bir Banach dizi uzayı olsun. Eğer $\zeta^{(n)} \to \zeta\ (n \to \infty)$ iken her $l \in \mathbb{N}$ için $\zeta_l^{(n)} \to \zeta_l\ (n \to \infty)$ oluyorsa $X$ dizi uzayına $BK-$uzay denir (Banas and Mursaleen, 2014).

Tanım 2.1.6. $X$ bir dizi uzayı ve $\pi := \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ birebir ve örten}\}$ olsun. Eğer $(s_n) \in X$ ve $\sigma \in \pi$ iken $s_\sigma = \left(s_{\sigma(n)}\right) \in X$ oluyorsa $X$ dizi uzayına simetrik uzay denir (Banas and Mursaleen, 2014).

Tanım 2.1.7. $X$ bir topolojik uzay olsun. Eğer $X$ uzayının $X$ de yoğun olan sayılabilir bir alt kümesi varsa $X$ uzayına ayrılabilir uzay denir (Moore, 1964).

Tanım 2.1.8. $X$ bir lineer uzay ve $C \subset X$ olsun. Eğer her $x, y \in C$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ oluyorsa $C$ kümesine konveks küme denir (Agarwal, et al., 2009).

Tanım 2.1.9. $X$ bir Banach uzay ve $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ olsun. Eğer $x \ne y$ olan her $x, y \in S_X$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için $\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$ ise $X$ kümesine kesin konveks küme denir (Agarwal, et al., 2009).

Tanım 2.1.10. $X$ bir Banach uzay olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ ve $\varepsilon \le \|x-y\|$ olduğunda $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1-\delta$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $X$ kümesine düzgün konveks küme denir (Agarwal, et al., 2009).

Önerme 2.1.11. $X$ bir Banach uzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $X$ kesin konvekstir.

(ii) $1 < p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ olan her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p < \lambda \|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p$ eşitsizliği sağlanır (Agarwal, et al., 2009).

Teorem 2.1.12. Her düzgün konveks Banach uzay kesin konvekstir (Agarwal, et al., 2009).

Tanım 2.1.13. $X$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $0 < p \leq 1$ olmak üzere eğer bir $|||.|||: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $X$ üzerinde bir $p-$norm diye isimlendirilir. $X$ lineer uzayına da $|||.|||$ $p-$normuna göre $p-$normlu uzay denir.

(i) Her $x \in X$ için $|||x||| \geq 0$ dır.

(ii) $|||x||| = 0$ ise $x = 0$ dır.

(iii) Her $x \in X, \mu \in \mathbb{F}$ için $|||\mu x||| = |\mu|^p . |||x|||$ dir.

(iv) Her $x, y \in X$ için $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$ dir (Köthe, 1983).

Bir tam $p-$normlu uzaya bir $p-$Banach uzay denir (Jarchow, 1981).

Bu kesimin devamında, gelecek bölümlerde kullanılacak olan bazı eşitsizlikler verilmiştir (Agarwal, et al., 2009; Maddox, 1988; Yeh, 2006).

(i) (Young Eşitsizliği) $1 < p < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.1}$$

dir. Eğer $a^p = b^q$ ise eşitlik sağlanır.

(ii) (Reel Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olan her $p, q \in \mathbb{R}$ ve $m \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere her $s_m, t_m \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{m=1}^{n} |s_m t_m| \leq \left( \sum_{m=1}^{n} |s_m|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{m=1}^{n} |t_m|^q \right)^{1/q} \tag{2.2}$$

dir.

(iii) Her $p \in (0,1)$ ve her $a,b \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left(a+b\right)^p \le a^p + b^p \tag{2.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Eşitlik $a$ ve $b$ sayılarından en az birinin sıfır olması durumunda sağlanır.

(iv) Her $p \in [2,\infty)$ ve $a,b \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left(a^2+b^2\right)^{p/2} \le 2^{(p-2)/2}\left(a^p+b^p\right) \tag{2.4}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(v) Her $s,t \in \mathbb{C}$ için

$$\frac{|s+t|}{1+|s+t|} \le \frac{|s|}{1+|s|} + \frac{|t|}{1+|t|} \tag{2.5}$$

dir.

(vi) $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olan her $p,q \in \mathbb{R}$ ve $m \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_m, t_m \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{m=1}^{n} |s_m t_m| \le \left(\sum_{m=1}^{n} |s_m|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} |t_m|^q\right)^{1/q} \tag{2.6}$$

dir.

(vii) $1 < p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve $m \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_m, t_m \in \mathbb{C}$ için

$$\left(\sum_{m=1}^{n} |s_m + t_m|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{m=1}^{n} |s_m|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{n} |t_m|^p\right)^{1/p} \tag{2.7}$$

dir.

(viii) $2 \le p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{C}$ için

$$|s+t|^p + |s-t|^p \le 2^{p-1}\left(|s|^p + |t|^p\right) \tag{2.8}$$

dir.

(ix) $1 < p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$ ve $s \neq t$ olan her $s,t \in \mathbb{C}$ için

$$\left|\lambda s + (1-\lambda)t\right|^p < \lambda |s|^p + (1-\lambda)|t|^p \qquad \textbf{(2.9)}$$

dir.

(x) $0 < p < 1$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{C}$ için

$$|s+t|^p \leq |s|^p + |t|^p \qquad \textbf{(2.10)}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli şart $s = 0$ veya $t = 0$ olmasıdır.

### 2.2. Bikompleks Sayılar

Tanım 2.2.1. Bikompleks sayılar kümesi, $i$ ve $j$ birbirinden bağımsız sanal birimler ve $i^2 = j^2 = -1,\ ij = ji$ olmak üzere

$$\left\{ z = z_1 + jz_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C}(i) \right\}$$

ile tanımlanır ve $\mathbb{BC}$ ile gösterilir $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z \in \mathbb{BC}$ bikompleks sayısı için $z = a + bi + cj + dij$ gösterimi de kullanılır (Price, 1991).

Teorem 2.2.2. $\mathbb{BC}$ bikompleks sayılar kümesi her $z = z_1 + jz_2$, $w = w_1 + jw_2$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
z + w &= (z_1 + jz_2) + (w_1 + jw_2) = (z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2), \\
\lambda.z &= \lambda.(z_1 + jz_2) = \lambda z_1 + j\lambda z_2, \\
z \times w &= zw = (z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2) = (z_1w_1 - z_2w_2) + j(z_1w_2 + z_2w_1), \\
\|.\|_{\mathbb{BC}} &: \mathbb{BC} \to \mathbb{R}, z \to \|z\|_{\mathbb{BC}} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}
\end{aligned}$$

ile tanımlı toplama, skalerle çarpma, çarpma işlemleri ve $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ normuna göre bir Banach cebiridir (Price, 1991). Ayrıca $\mathbb{BC}$, üzerindeki toplama, skalerle çarpma ve çarpma işlemlerine göre bir $\mathbb{BC}-$modüldür.

Tanım 2.2.3. Hiperbolik sayılar kümesi $k^2 = 1$ ve $k = ij$ olmak üzere $\{x + ky : x, y \in \mathbb{R}\}$ ile tanımlanır ve $\mathbb{D}$ ile gösterilir (Alpay, et al., 2014).

Tanım 2.2.4. Herhangi bir $z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ için $\overline{z_1}, \overline{z_2}$ kompleks sayıları $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(i)$ kompleks sayılarının kompleks eşlenikleri olmak üzere üç tip eşlenik vardır. Bu eşlenikler

$$\begin{aligned} z^{\dagger_1} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2}, \\ z^{\dagger_2} &= z_1 - jz_2, \\ z^{\dagger_3} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \end{aligned}$$

ile tanımlıdır (Alpay, et al., 2014).

Tanım 2.2.5. Bikompleks sayılar kümesinde üç tip modül vardır. Bu modüller

$$\begin{aligned} |z|_i^2 &= zz^{\dagger_2} = z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{C}(i), \\ |z|_j^2 &= zz^{\dagger_1} = \left(|z_1|^2 - |z_2|^2\right) + j\left(2\Re\left(z_1.\overline{z_2}\right)\right) \in \mathbb{C}(j), \\ |z|_k^2 &= zz^{\dagger_3} = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) + k\left(-\Im\left(z_1.\overline{z_2}\right)\right) \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

ile tanımlıdır (Alpay, et al., 2014).

Önerme 2.2.6. Her $z, w \in \mathbb{BC}$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(i) $\|z \pm w\|_{\mathbb{BC}} \leq \|z\|_{\mathbb{BC}} + \|w\|_{\mathbb{BC}}$ ve $\|\lambda z\|_{\mathbb{BC}} = |\lambda|\|z\|_{\mathbb{BC}}$ dir.

(ii) $\left|\|z\|_{\mathbb{BC}} - \|w\|_{\mathbb{BC}}\right| \leq \|z \mp w\|_{\mathbb{BC}}$ dir.

(iii) $\|zw\|_{\mathbb{BC}} \leq \sqrt{2}\|z\|_{\mathbb{BC}}\|w\|_{\mathbb{BC}}$ dir. Burada eşitlik hali $z = w = \dfrac{1+ij}{2}$ için gerçeklenir (Price, 1991).

Teorem 2.2.7. $d_{\mathbb{BC}} : \mathbb{BC} \times \mathbb{BC} \to [0, \infty)$, $(z, w) \to d_{\mathbb{BC}}(z, w) = \|z - w\|_{\mathbb{BC}}$ ile tanımlı $d_{\mathbb{BC}}$ fonksiyonu $\mathbb{BC}$ üzerinde bir metrik ve dolayısıyla $(\mathbb{BC}, d_{\mathbb{BC}})$ bir metrik uzaydır (Price, 1991).

Tanım 2.2.8. Eğer $z, w \in \mathbb{BC}$ ve $zw = 1$ ise $z$ ve $w$ elemanlarına birbirlerinin çarpımsal tersi denir. Bir çarpımsal terse sahip bir elemana terslenebilir eleman denir. $\dfrac{1+ij}{2}$ ve $\dfrac{1-ij}{2}$ terslenebilir olmayan elemanlardır (Price, 1991).

Teorem 2.2.9. $z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ elemanının terslenebilir olması için gerekli ve yeterli şart $|z|_i \neq 0$ olması, yani $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ olmasıdır (Price, 1991).

Tanım 2.2.10. $z, w \in \mathbb{BC}$ olmak üzere $z = w\eta$ olacak şekilde bir tek $\eta \in \mathbb{BC}$ varsa $\frac{z}{w}$ tanımlıdır ve $\frac{z}{w} = \eta$ dır (Price, 1991).

Teorem 2.2.11. $\frac{z}{w}$ bölümünün tanımlı olması için gerekli ve yeterli şart $w$ elemanının terslenebilir olmasıdır. Eğer $w$ terslenebilir ve $w^{-1}$, $w$ elemanının tersi ise $\frac{z}{w} = zw^{-1}$ dir. Ayrıca $w$ elemanının tersi $\frac{1}{w} = w^{-1} = \frac{w^{\dagger_2}}{|w|_i^2}$ dir (Price, 1991).

Not 2.2.12. $e_1 = \frac{1+ij}{2}$ ve $e_2 = \frac{1-ij}{2}$ olsun. $e_1 e_2 = 0$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ olduğundan $e_1, e_2 \in \mathbb{BC}$ birer sıfır bölen olup $\mathbb{BC}$ bir bölme halkası ve bir cisim değildir (Price, 1991).

Teorem 2.2.13. $e_1$ ve $e_2$ sayıları bikompleks sayılar için bir idempotent taban oluşturur ve böylece her $z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ sayısı, $\beta_1 = z_1 - iz_2$, $\beta_2 = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}(i)$ olmak üzere $z = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ şeklinde tek türlü yazılır. Bu gösterime $z$ bikompleks sayısının idempotent gösterimi denir (Price, 1991).

Tanım 2.2.14. $\alpha = x + ky$ herhangi bir hiperbolik sayı olsun. O halde $\alpha_1 = x + y$, $\alpha_2 = x - y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ eşitliği vardır. Eğer $\alpha_1 \geq 0$ ve $\alpha_2 \geq 0$ ise $\alpha$ sayısına pozitif hiperbolik sayı denir ve pozitif hiperbolik sayılar kümesi $\mathbb{D}^+$ ile gösterilir, yani $\mathbb{D}^+ = \{\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 : \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\}$ dır. İki $\alpha$ ve $\beta$ hiperbolik sayısı için, eğer $\beta - \alpha \in \mathbb{D}^+$ (ya da $\beta - \alpha \in \mathbb{D}^+ - \{0\}$) ise $\alpha \underset{\sim}{\prec} \beta$ (ya da $\alpha \underset{\neq}{\prec} \beta$) ile gösterilir. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2$, $\beta = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \in \mathbb{D}$ için

$$\alpha \underset{\sim}{\prec} \beta \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1 \text{ ve } \alpha_2 \leq \beta_2,$$

$$\alpha \underset{\neq}{\prec} \beta \Leftrightarrow \alpha \neq \beta, \ \alpha_1 \leq \beta_1 \text{ ve } \alpha_2 \leq \beta_2,$$

$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha_1 < \beta_1 \text{ ve } \alpha_2 < \beta_2$$

bağıntıları mevcuttur. $\underset{\sim}{\prec}$ bağıntısı yansımalı, ters simetrik ve geçişli olduğundan $\mathbb{D}$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Teorem 2.2.15. Her $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{D}$ ve $z,w\in\mathbb{BC}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $|z+w|_k \precsim |z|_k+|w|_k$, $|zw|_k=|z|_k|w|_k$ ve $|w|_i\neq 0$ olmak üzere $\left|\dfrac{z}{w}\right|_k=\dfrac{|z|_k}{|w|_k}$ dır.

(ii) $z=\beta_1e_1+\beta_2e_2$ olmak üzere $|z|_k=|\beta_1|e_1+|\beta_2|e_2$ ve $\|z\|_{\mathbb{BC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\beta_1|^2+|\beta_2|^2}$ dir.

(iii) Eğer $\alpha\in\mathbb{D}^+$ ise $|\alpha|_k=\alpha$ ve $|\alpha z|_k=\alpha|z|_k$ dır.

(iv) Eğer $\alpha\precsim\beta$ ve $0\precsim\gamma$ ($0\precneqq\gamma$) ise $\alpha\gamma\precsim\beta\gamma$ ($\alpha\gamma\precneqq\beta\gamma$) dır.

(v) Eğer $\alpha\precneqq\beta$ ve $0\precsim\gamma$ veya $0\precneqq\gamma$ ise $\alpha\gamma\precneqq\beta\gamma$ dır.

(vi) Eğer $\alpha\precsim\beta$ ($\alpha\precneqq\beta$) ise $\alpha+\gamma\precsim\beta+\gamma$ ($\alpha+\gamma\precneqq\beta+\gamma$) dır.

(vii) Eğer $\alpha\precsim\beta$ ve $\gamma\precsim\delta$ ($\gamma\precneqq\delta$) ise $\alpha+\gamma\precsim\beta+\delta$ ($\alpha+\gamma\precneqq\beta+\delta$) dır.

(viii) Eğer $\alpha\precsim\beta$ ve $\beta\precsim\gamma$ ($\beta\precneqq\gamma$) ise $\alpha\precsim\gamma$ ($\alpha\precneqq\gamma$) dır.

(ix) $z=\beta_1e_1+\beta_2e_2$, $w=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2$ olmak üzere

$$(\beta_1e_1+\beta_2e_2)+(\gamma_1e_1+\gamma_2e_2)=(\beta_1+\gamma_1)e_1+(\beta_2+\gamma_2)e_2$$

ve

$$(\beta_1e_1+\beta_2e_2)(\gamma_1e_1+\gamma_2e_2)=(\beta_1+\gamma_1)e_1(\beta_2+\gamma_2)e_2$$

dir.

(x) $z=\beta_1e_1+\beta_2e_2$, $w=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2$ ve $\gamma_1,\gamma_2\neq 0$ olmak üzere

$$\frac{\beta_1e_1+\beta_2e_2}{\gamma_1e_1+\gamma_2e_2}=\frac{\beta_1}{\gamma_1}e_1+\frac{\beta_2}{\gamma_2}e_2$$

dir.

(xi) $z=\beta_1e_1+\beta_2e_2$, $w=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2$ olsun. O halde $z=w$ ise $\beta_1=\gamma_1$ ve $\beta_2=\gamma_2$ dir (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Tanım 2.2.16. $\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$ ile tanımlanan çok değerli $\ln z$ fonksiyonuna kompleks logaritma denir. $z = re^{i\theta}$ üstel ifadesi kullanılırsa $\ln z = \ln r + i(\theta + 2n\pi),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ alternatif tanımı elde edilir (Zill and Shanahan, 2009).

Tanım 2.2.17. Bir $W = w_1 + jw_2 \in \mathbb{BC}$ bikompleks sayısı için Euler formülü $e^W = e^{w_1}(\cos w_2 + j\sin w_2)$ şeklindedir. Burada $e^{w_1}$ ve $w_2$, $e^W$ bikompleks sayısının sırasıyla kompleks modülü ve kompleks argümanıdır. $W = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ idempotent gösterimi kullanılırsa $e^W = e^{\gamma_1} e_1 + e^{\gamma_2} e_2$ yazılır (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Tanım 2.2.17 de geçen bir bikompleks sayının kompleks argümanının tanımına (Luna-Elizarrarás, et al., 2015) kaynağından ulaşılabilir.

Tanım 2.2.18. Bir $W$ bikompleks sayısı terslenebilir ise $\ln W := \ln\left|\|W\|_i\right| + i\arg|W|_i + j\arg_i W$ sayısına $W$ bikompleks sayısının bikompleks logaritmasının esas değeri, keyfi $m$ ve $n$ tamsayıları için $\ln_{m,n}(W) = \ln_m |W|_i + j(\arg_i W + 2\pi n)$ sayısına $W$ bikompleks sayısının bikompleks logaritmasının $(m,n)-$dalı ve $Ln(W) = \{\ln_{m,n}(W)\ :\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ ifadesine $W$ bikompleks sayısının bikompleks logaritması denir. $Ln(W)$ bir kümedir, bir fonksiyon değildir. $W = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ idempotent gösterimi kullanılırsa $Ln(W) = Ln(\gamma_1)e_1 + Ln(\gamma_2)e_2$ yazılır. Ayrıca iki terslenebilir $W_1$ ve $W_2$ sayısı için $Ln(W_1 W_2) = Ln(W_1) + Ln(W_2)$ dir (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Tanım 2.2.19. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{BC},\ n \to s_n$ ile tanımlı $s$ fonksiyonuna $\mathbb{BC}$ bikompleks sayılar kümesinde bir dizi denir (Price, 1991).

Tanım 2.2.20. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $\|s_n - s^*\|_{\mathbb{BC}} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $(s_n) \subset \mathbb{BC}$ dizisi $s^* \in \mathbb{BC}$ noktasına yakınsar denir.

Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $m,n \geq n_0(\varepsilon)$ için $\|s_n - s_m\|_{\mathbb{BC}} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $(s_n) \subset \mathbb{BC}$ dizisine $\mathbb{BC}$ kümesinde bir Cauchy dizisi denir (Price, 1991).

Teorem 2.2.21. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{BC}$, $s = (s_n)$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = z_{1n} + jz_{2n} = w_{1n}e_1 + w_{2n}e_2$ ve $\zeta^* = z_1^* + jz_2^* = w_1^* e_1 + w_2^* e_2$ olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} s_n = \zeta^*$ ise

$$\lim_{n\to\infty} z_{1n} = z_1^*,\ \lim_{n\to\infty} z_{2n} = z_2^* \tag{2.11}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} w_{1n} = w_1^*,\ \lim_{n\to\infty} w_{2n} = w_2^* \tag{2.12}$$

dır. Ayrıca (2.11) veya (2.12) limitleri varsa $\lim_{n\to\infty} s_n$ limiti vardır ve değeri $\xi^*$ dır (Price, 1991).

Teorem 2.2.22. Bikompleks sayılar kümesindeki diziler için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Yakınsak dizilerin limiti tektir.

(ii) Her Cauchy dizisi yakınsaktır.

(iii) Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

(iv) $\lim_{n\to\infty} s_n = s^*$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = t^*$ ise $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s^* + t^*$ dır.

(v) $\lim_{n\to\infty} s_n = s^*$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = t^*$ ise $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = s^* t^*$ dır.

(vi) $\lim_{n\to\infty} s_n = s^*$, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n$ ve $t$ terslenebilir elemanlar olmak üzere $\lim_{n\to\infty} t_n = t^*$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{s^*}{t^*}$ dır.

(vii) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = t^*$ ise $\lim_{n\to\infty}(\lambda t_n) = \lambda t^*$ dir (Price, 1991, Alpay, et al., 2014; Luna – Elizarraras, et al., 2015).

Tanım 2.2.23. Herhangi bir $(\zeta_n) \subset \mathbb{BC}$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots \tag{2.13}$$

sonsuz toplamına bikompleks sayılar kümesinde bir sonsuz seri denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k$ şeklinde bir $(s_n)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda (2.13) serisinin yakınsak olması $\lim_{n\to\infty} s_n$ limitinin var olması anlamına gelir. Eğer bu limit yoksa, seri ıraksaktır. Eğer $\lim_{n\to\infty} s_n = \zeta^*$ ise, $\zeta^*$ bikompleks sayısına serinin toplamı denir ve $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \zeta^*$ yazılır (Price, 1991).

Lemma 2.2.24. (2.13) serisinde her $k \in \mathbb{N}$ için $\zeta_k = \zeta_{1k} + j\zeta_{2k}$ olsun. O halde (2.13) serisinin $\zeta^* = \zeta_1^* + j\zeta_2^*$ bikompleks sayısına yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{1k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{2k}$ kompleks terimli serilerinin yakınsak ve toplamlarının sırasıyla $\zeta_1^*$ ve $\zeta_2^*$ olmasıdır (Price, 1991).

Lemma 2.2.25. (2.13) serisinde her $k \in \mathbb{N}$ için $\zeta_k = \zeta_{1k}e_1 + \zeta_{2k}e_2$ olsun. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{1k}e_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{2k}e_2$ olur ve (2.13) serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{1k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{2k}$ kompleks terimli serilerinin yakınsak olmasıdır (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

### 2.3. Bikompleks Skalerli Temel Fonksiyonel Analiz Kavramları

Tanım 2.3.1. $X$ bir $\mathbb{BC}-$modül olsun. Eğer bir $\|.\|_{\mathbb{D}} : X \to \mathbb{D}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $X$ üzerinde bir hiperbolik değerli norm ya da $\mathbb{D}-$norm diye isimlendirilir.

(i) $\|x\|_{\mathbb{D}} = 0$ olması için gerekli ve yeterli şart $x = 0$ olmasıdır.

(ii) Her $x \in X$, $\mu \in \mathbb{BC}$ için $\|\mu x\|_{\mathbb{D}} = |\mu|_k . \|x\|_{\mathbb{D}}$ dir.

(iii) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\|_{\mathbb{D}} \precsim \|x\|_{\mathbb{D}} + \|y\|_{\mathbb{D}}$ dir (Alpay, et al., 2014).

Tanım 2.3.2. $X$ bir $\mathbb{BC}-$modül, $(x_n) \subset \mathbb{BC}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $0 \precneq \varepsilon$ için her $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_0\|_{\mathbb{D}} \precneq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisi hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D}}$ normuna göre $x_0$ noktasına yakınsar denir.

Eğer her $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ için her $n, m \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_{\mathbb{D}} \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisi hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D}}$ normuna göre Cauchy dizisidir denir.

Eğer $X$ de hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D}}$ normuna göre her Cauchy dizisi hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D}}$ normuna göre bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsar ise $X$ hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D}}$ normuna göre tamdır denir (Alpay, et al., 2014).

*Örnek 2.3.3.* $|.|_k : \mathbb{BC} \to \mathbb{D}^+$ dönüşümü aşağıdaki üç özelliği sağladığından $\mathbb{BC}$ $\mathbb{BC}-$modülü üzerinde bir hiperbolik değerli norm tanımlar.

(i) $|z|_k = 0$ olması için gerekli ve yeterli şart $z = 0$ olmasıdır.

(ii) Her $z, w \in \mathbb{BC}$ için $|zw|_k = |z|_k |w|_k$ dır.

(iii) $|z + w|_k \precsim |z|_k + |w|_k$ dır.

Ayrıca $\mathbb{BC}$, $|.|_k$ hiperbolik değerli normuna göre tamdır (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Tanım 2.3.4. $A \subset \mathbb{D}$ olsun. Her $a \in A$ için $a \precsim \alpha$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{D}$ bulunabilmesi $\alpha$ hiperbolik sayısının $A$ kümesi için bir $\mathbb{D}-$üst sınır, $\alpha \precsim a$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{D}$ bulunabilmesi ise $\alpha$ hiperbolik sayısının $A$ kümesi için bir $\mathbb{D}-$alt sınır olması anlamına gelir.

Eğer $A$ kümesi üstten $\mathbb{D}-$sınırlı bir küme ise $A$ nın en küçük $\mathbb{D}-$üst sınırına $A$ kümesinin $\mathbb{D}-$supremumu denir ve $\sup_{\mathbb{D}} A$ ile gösterilir.

Eğer $A$ kümesi alttan $\mathbb{D}-$sınırlı bir küme ise $A$ nın en büyük $\mathbb{D}-$alt sınırına $A$ kümesinin $\mathbb{D}-$infimumu denir ve $\inf_{\mathbb{D}} A$ ile gösterilir.

Burada, en küçük $\mathbb{D}-$üst sınır tüm $\mathbb{D}-$üst sınırlar karşılaştırılabilir olmasa da her $\alpha$ $\mathbb{D}-$üst sınırı için $\sup_{\mathbb{D}} A \precsim \alpha$, en büyük $\mathbb{D}-$alt sınır tüm $\mathbb{D}-$alt sınırlar karşılaştırılabilir olmasa da her $\alpha$ $\mathbb{D}-$alt sınırı için $\alpha \precsim \inf_{\mathbb{D}} A$ olması anlamına gelir.

Ayrıca $A_1=\{a_1\ :\ a_1e_1+a_2e_2\in A\}$ ve $A_2=\{a_2\ :\ a_1e_1+a_2e_2\in A\}$ olmak üzere eğer $A$ kümesi üstten $\mathbb{D}-$sınırlı ise

$$\sup_{\mathbb{D}} A=\sup A_1e_1+\sup A_2e_2, \tag{2.14}$$

alttan $\mathbb{D}-$sınırlı ise

$$\inf_{\mathbb{D}} A=\inf A_1e_1+\inf A_2e_2 \tag{2.15}$$

dir (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Teorem 2.3.5. $\mathbb{D}-$supremum ve $\mathbb{D}-$infimum için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $A$ ve $B$ kümesi alttan $\mathbb{D}-$sınırlı ise $A+B$ kümesi de alttan $\mathbb{D}-$sınırlıdır ve $\inf_{\mathbb{D}}(A+B)=\inf_{\mathbb{D}} A+\inf_{\mathbb{D}} B$ dir.

(ii) Eğer $A$ ve $B$ kümesi üstten $\mathbb{D}-$sınırlı ise $A+B$ kümesi de üstten $\mathbb{D}-$sınırlıdır ve $\sup_{\mathbb{D}}(A+B)=\sup_{\mathbb{D}} A+\sup_{\mathbb{D}} B$ dir.

(iii) Eğer $A,B\subset\mathbb{D}^+$ ve $A$ ve $B$ kümesi alttan $\mathbb{D}-$sınırlı ise $A.B$ kümesi de alttan $\mathbb{D}-$sınırlıdır ve $\inf_{\mathbb{D}}(A.B)=\inf_{\mathbb{D}} A.\inf_{\mathbb{D}} B$ dir.

(iv) Eğer $A,B\subset\mathbb{D}^+$ ve $A$ ve $B$ kümesi üstten $\mathbb{D}-$sınırlı ise $A.B$ kümesi de üstten $\mathbb{D}-$sınırlıdır ve $\sup_{\mathbb{D}}(A.B)=\sup_{\mathbb{D}} A.\sup_{\mathbb{D}} B$ dir (Luna-Elizarrarás, et al., 2015).

Tanım 2.3.6. $X$ boştan farklı bir küme ve $d_{\mathbb{D}}:X\times X\to\mathbb{D}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y,z\in X$ için aşağıdaki ifadeler sağlanırsa $d_{\mathbb{D}}$ fonksiyonuna $X$ üzerinde hiperbolik değerli ya da $\mathbb{D}-$değerli metrik, $(X,d_{\mathbb{D}})$ ikilisine de hiperbolik değerli ya da $\mathbb{D}-$değerli metrik uzay denir.

(i) $0\precsim d_{\mathbb{D}}(x,y)$ dir ve $d_{\mathbb{D}}(x,y)=0$ olması için gerekli ve yeterli şart $x=y$ olmasıdır.

(ii) $d_{\mathbb{D}}(x,y)=d_{\mathbb{D}}(y,x)$ dir.

(iii) $d_{\mathbb{D}}(x,z)\precsim d_{\mathbb{D}}(x,y)+d_{\mathbb{D}}(y,z)$ dir (Kumar and Saini, 2016).

Tanım 2.3.7. $X$ ve $Y$ iki $\mathbb{BC}-$modül ve $T:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ ve her $\lambda\in\mathbb{BC}$ için $T(\lambda x+y)=\lambda T(x)+T(y)$ ise $T$ dönüşümüne bir

$\mathbb{BC}-$lineer operatör denir. Tüm $\mathbb{BC}-$lineer operatörlerin oluşturduğu küme $L_{\mathbb{BC}}(X,Y)$ ile gösterilir. $Y=\mathbb{BC}$ olması durumunda $T$ dönüşümüne bir $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyonel denir (Alpay, et al., 2014).

Tanım 2.3.8. $X$ ve $Y$ iki $\mathbb{BC}-$modül, $T:X\to Y$ bir $\mathbb{BC}-$lineer operatör, $X$ ve $Y$ sırasıyla $\|.\|_{\mathbb{D},X}$ ve $\|.\|_{\mathbb{D},Y}$ hiperbolik değerli normlara sahip olsun. Eğer her $x\in X$ için $\|Tx\|_{\mathbb{D},Y}\precsim\Lambda\|x\|_{\mathbb{D},X}$ olacak şekilde $\Lambda\in\mathbb{D}^+$ varsa $T$ operatörüne $\mathbb{D}-$sınırlıdır denir. Tüm $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer operatörlerin kümesi $B_{\mathbb{BC}}(X,Y)$ ile gösterilir (Alpay, et al., 2014).

Teorem 2.3.9. $\mathbb{BC}-$lineer operatörlerin ve $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer operatörlerin kümesi birer $\mathbb{BC}-$modüldür (Alpay, et al., 2014).

Teorem 2.3.10. $X$ ve $Y$ iki $\mathbb{BC}-$modül, $T:X\to Y$ bir $\mathbb{BC}-$lineer operatör, $X$ ve $Y$ sırasıyla $\|.\|_{\mathbb{D},X}$ ve $\|.\|_{\mathbb{D},Y}$ hiperbolik değerli normlara sahip olsun. Bu durumda $T\to\inf_{\mathbb{D}}\left\{\Lambda\in\mathbb{D}^+:\|Tx\|_{\mathbb{D},Y}\precsim\Lambda.\|x\|_{\mathbb{D},X},\forall x\in X\right\}=:\|T\|_{\mathbb{D}}$ dönüşümü $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer operatörlerin $\mathbb{BC}-$modülü üzerinde bir hiperbolik değerli norm tanımlar (Alpay, et al., 2014).

Teorem 2.3.11. $X$ ve $Y$ iki $\mathbb{BC}-$modül, $T:X\to Y$ bir $\mathbb{BC}-$lineer operatör, $X$ ve $Y$ sırasıyla $\|.\|_{\mathbb{D},X}$ ve $\|.\|_{\mathbb{D},Y}$ hiperbolik değerli normlara sahip olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

(i) $\|T\|_{\mathbb{D}}=\sup_{\mathbb{D}}\left\{\frac{\|Tw\|_{\mathbb{D},Y}}{\|w\|_{\mathbb{D},X}}:\|w\|_{\mathbb{D},X}\notin\left\{z=z_1+jz_2\in\mathbb{BC}:z_1^2+z_2^2=0\right\}\right\}$ dir.

(ii) $\|T\|_{\mathbb{D}}=\sup_{\mathbb{D}}\left\{\|Tw\|_{\mathbb{D},Y}:\|w\|_{\mathbb{D},X}=1\right\}$ dir (Alpay, et al., 2014).

Tanım 2.3.12. $A$, $\mathbb{BC}$ üzerinde bir modül olsun. Eğer her $x,y,z\in A$ ve her $\lambda\in\mathbb{BC}$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $A$ modülüne bikompleks cebir denir.

(i) $x(y+z)=xy+xz,$

(ii) $(x+y)z=xz+yz,$

(iii) $x(yz)=(xy)z,$

(iv) $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$ (Kumar, et al., 2016).

*Örnek 2.3.13.* $\mathbb{BC}$ $\mathbb{BC}-$modülü üzerinde tanımlı toplama, çarpma ve bikompleks skalerle çarpma işlemlerine göre bir bikompleks cebirdir.

Tanım 2.3.14. $A$ bir bikompleks cebir ve bir hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D},A}$ normuna göre hiperbolik değerli normlu uzay olsun . Eğer $A$ bir Banach modülü ve her $x,y\in A$ için $\|xy\|_{\mathbb{D}} \precsim \|x\|_{\mathbb{D}}\|y\|_{\mathbb{D}}$ ifadesi sağlanırsa $A$ cebirine bir $\mathbb{D}-$normlu bikompleks Banach cebiri denir (Kumar, et al., 2016).

*Örnek 2.3.16.* $\mathbb{BC}$ bikompleks cebiri hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre tam olduğundan ve istenen eşitsizliği sağladığından $\mathbb{BC}$ $\mathbb{D}-$normlu bikompleks Banach cebiridir.

### 2.4. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi ve Bazı Özellikleri

Aritmetik, evreni reel sayıların bir alt kümesi olan tam sıralı bir cisimdir. Aritmetik sistem ise bu cisim üzerinde tanımlı cebirsel işlemlerle elde edilen yapıya denir. Sonsuz çoklukta aritmetik bulunmaktadır. Bunlardan biri klasik aritmetik olarak adlandırılan reel sayı sistemidir. Aritmetik sistemleri oluşturmaya yarayan üreteç (doğurucu) fonksiyonu, tanım kümesi reel sayılar kümesi ve değer kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan birebir ve örten bir dönüşümdür. Örneğin; $I$ özdeşlik fonksiyonu ve exp (yani $e^x$) fonksiyonu birer üreteçtir.

Görüntü kümesi $A$ olan bir $\alpha$ üreteci düşünülsün. $\alpha-$aritmetik ile işlemleri ve sıralama bağıntısı aşağıda verilen aritmetik sistem ifade edilir.

$\alpha-$toplama $\qquad y\dot{+}z=\alpha\left\{\alpha^{-1}(y)+\alpha^{-1}(z)\right\}$

$\alpha-$çıkarma $\qquad y\dot{-}z=\alpha\left\{\alpha^{-1}(y)-\alpha^{-1}(z)\right\}$

$\alpha-$çarpma $\qquad y\dot{\times}z=\alpha\left\{\alpha^{-1}(y)\times\alpha^{-1}(z)\right\}$

$\alpha-$bölme$\left(z\neq\dot{0}=\alpha(0)\right)$ $\qquad y\dot{/}z=\alpha\left\{\alpha^{-1}(y)/\alpha^{-1}(z)\right\}$

$\alpha-$sıralama $\qquad y\dot{<}z\Leftrightarrow\alpha^{-1}(y)<\alpha^{-1}(z)$

$I$ özdeşlik fonksiyonu klasik aritmetiği, exp fonksiyonu ise geometrik aritmetiği üretir. Her bir üreteç tek bir aritmetik üretir, tersine her bir aritmetik de tek bir üreteç tarafından üretilir.

$\dot{0}\dot{<}x$ olan sayılar $\alpha-$pozitif, $x\dot{<}\dot{0}$ olan sayılar $\alpha-$negatif sayılardır. $\alpha-$sıfır sayısı $\dot{0}=\alpha(0)$ ile, $\alpha-$bir sayısı ise $\dot{1}=\alpha(1)$ ile gösterilir. $\alpha-$tamsayılar, $\dot{0}$ sayısına ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının $\alpha-$toplamasıyla ve $\dot{0}$ sayısından ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının $\alpha-$çıkarmasıyla elde edilir. $\alpha-$tamsayılar;

$$...,\alpha(-2),\alpha(-1),\alpha(0),\alpha(1),\alpha(2),...$$

şeklindedir. $\alpha-$aritmetiğine göre her bir $n$ tamsayısı $\dot{n}=\alpha(n)$ ile gösterilir (Grossman and Katz, 1972; Grossman, 1979).

Tanım 2.4.1. $\{\alpha(x): x\in\mathbb{R}\}$ kümesine Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}_\alpha$ ile gösterilir (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 2.4.2. $\mathbb{R}_\alpha$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi üzerinde toplama işlemi

$$\dot{+}:\mathbb{R}_\alpha\times\mathbb{R}_\alpha\to\mathbb{R}_\alpha,\ (x,y)\to x\dot{+}y=\alpha\left\{\alpha^{-1}(x)+\alpha^{-1}(y)\right\}$$

fonksiyonu ile, çarpma işlemi ise

$$\dot{\times}:\mathbb{R}_\alpha\times\mathbb{R}_\alpha\to\mathbb{R}_\alpha,\ (x,y)\to x\dot{\times}y=\alpha\left\{\alpha^{-1}(x)\times\alpha^{-1}(y)\right\}$$

fonksiyonu ile tanımlıdır. $\mathbb{R}_\alpha$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı da $x,y\in\mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere

$$x\dot{\leq}y\Leftrightarrow\alpha^{-1}(x)\leq\alpha^{-1}(y)$$

ile tanımlıdır (Çakmak ve Başar, 2012).

Teorem 2.4.3. $\left(\mathbb{R}_\alpha,\dot{+},\dot{\times},\dot{\leq}\right)$ bir tam sıralı cisimdir (Çakmak ve Başar, 2012).

Bu tezde, $\alpha-$bölme için $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $y \neq \dot{0} = \alpha(0)$ olmak üzere $\frac{x}{y}_\alpha$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.4.4. Bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının $\alpha-$ karesi $x^{\dot{2}} = x \dot{\times} x$ ile, $\alpha-$karekökü, $\alpha-$karesi $x$ sayısına eşit olan $\alpha-$negatif olmayan sayı olarak, yani $\dot{\sqrt{x}} = \alpha\left\{\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\right\}$ ile, $p$. Newtonyen olmayan üssü $x^{\dot{p}} = \alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(x)\right]^p\right\}$ ile, $q$. Newtonyen olmayan kökü ise $\dot{\sqrt[q]{x}} = \alpha\left\{\sqrt[q]{\alpha^{-1}(x)}\right\}$ ile tanımlanır (Grossman and Katz, 1972; Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 2.4.5. Bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının $\alpha-$mutlak değeri

$$|x|_\alpha = \dot{|x|} = \begin{cases} x & , \dot{0} \dot{<} x \\ \dot{0} & , x = \dot{0} \\ \dot{0} \dot{-} x & , x \dot{<} \dot{0} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu değer $\alpha\left(\left|\alpha^{-1}(x)\right|\right)$ ifadesine eşittir (Grossman and Katz, 1972; Çakmak ve Başar, 2012).

Önerme 2.4.6. $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $\left|a \dot{\times} b\right|_\alpha = |a|_\alpha \dot{\times} |b|_\alpha$ dir.

(ii) (Newtonyen olmayan üçgen eşitsizliği) $\left|a \dot{+} b\right|_\alpha \dot{\leq} |a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha$ dir.

(iii) $\left||a|_\alpha \dot{-} |b|_\alpha\right|_\alpha \dot{\leq} \left|a \dot{-} b\right|_\alpha$ dir.

(iv) $\frac{\left|a \dot{+} b\right|_\alpha}{\dot{1} \dot{+} \left|a \dot{+} b\right|_\alpha}_\alpha \dot{\leq} \frac{|a|_\alpha}{\dot{1} \dot{+} |a|_\alpha}_\alpha \dot{+} \frac{|b|_\alpha}{\dot{1} \dot{+} |b|_\alpha}_\alpha$ dir.

(v) (Newtonyen olmayan Minkowski eşitsizliği) $k \in \{1,2,...,n\}$ için $\dot{0} \dot{\le} a_k, b_k$ ve $p$, 1 den büyük bir doğal sayı olmak üzere $\sqrt[\dot{p}]{{}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \dot{+} b_k\right)^{\dot{p}}} \dot{\le} \sqrt[\dot{p}]{{}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\dot{p}}} \dot{+} \sqrt[\dot{p}]{{}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\dot{p}}}$ dır (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 2.4.7. $X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $d_\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_\alpha$ aşağıda verilen Newtonyen olmayan metrik aksiyomlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $d_\alpha$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir Newtonyen olmayan metrik ($\alpha-$metrik) ve $(X, d_\alpha)$ ikilisine de bir Newtonyen olmayan metrik uzay ($\alpha-$metrik uzay) denir.

NM1) Her $x, y \in X$ için $\dot{0} \dot{\le} d_\alpha(x,y)$ dir.

NM2) $x, y \in X$ olmak üzere $d_\alpha(x,y) = \dot{0}$ olması için gerekli ve yeterli şart $x = y$ olmasıdır.

NM3) Her $x, y \in X$ için $d_\alpha(x,y) = d_\alpha(y,x)$ dir.

NM4) Her $x, y, z \in X$ için $d_\alpha(x,y) \dot{\le} d_\alpha(x,z) \dot{+} d_\alpha(z,y)$ dir (Çakmak ve Başar, 2012).

Teorem 2.4.8. $d_\alpha : \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$, $(x,y) \to d_\alpha(x,y) = \left| x \dot{-} y \right|_\alpha$ ile tanımlı $d_\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde bir Newtonyen olmayan metriktir. Böylece $(\mathbb{R}_\alpha, d_\alpha)$ bir Newtonyen olmayan metrik uzaydır (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 2.4.9. $(X, \oplus_X, \odot_X)$, $\mathbb{R}_\alpha$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\|.\|_\alpha : X \to \mathbb{R}_\alpha$ aşağıda verilen Newtonyen olmayan norm aksiyomlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\|.\|_\alpha$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir Newtonyen olmayan norm ($\alpha-$norm) ve $(X, \|.\|_\alpha)$ ikilisine de bir Newtonyen olmayan normlu uzay ($\alpha-$normlu uzay) denir.

NN1) Her $x \in X$ için $\dot{0} \dot{\le} \|x\|_\alpha$ dir.

NN2) $x \in X$ olmak üzere $\|x\|_\alpha = \dot{0}$ olması için gerekli ve yeterli şart $x = 0_X$ olmasıdır.

NN3) Her $x \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}_\alpha$ için $\|\lambda \odot_X x\|_\alpha = |\lambda|_\alpha \dot{\times} \|x\|_\alpha$ dir.

NN4) Her $x, y \in X$ için $\|x \oplus_X y\|_\alpha \dot{\leq} \|x\|_\alpha \dot{+} \|y\|_\alpha$ dir.

$X$ üzerinde bir Newtonyen olmayan $\|.\|_\alpha$ normu her $x, y \in X$ için $d_\alpha(x,y) = \|x \ \Theta_X \ y\|_\alpha$ ile tanımlı $d_\alpha$ metriğini üretir ve bu metriğe Newtonyen olmayan normdan indirgenen Newtonyen olmayan metrik denir.

Tanım 2.4.10. $(X, d_\alpha)$ Newtonyen olmayan metrik uzayında bir $(x_n)$ dizisi ve bir $x$ noktası verilsin. Eğer herhangi bir $\dot{0} \dot{<} \varepsilon$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_\alpha(x_n, x) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $(x_n)$ dizisine Newtonyen olmayan yakınsaktır ($\alpha-$yakınsaktır) denir ve ${}^{\alpha}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $n \to \infty$ için $x_n \xrightarrow{\alpha} x$ ile gösterilir.

Eğer herhangi bir $\dot{0} \dot{<} \varepsilon$ sayısı verildiğinde her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_\alpha(x_n, x_m) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $(x_n)$ dizisine Newtonyen olmayan Cauchy dizisi ($\alpha-$Cauchy dizisi) denir.

Eğer bir $(X, d_\alpha)$ Newtonyen olmayan metrik uzayındaki her Newtonyen olmayan Cauchy dizisi $X$ uzayında Newtonyen olmayan yakınsak ise $(X, d_\alpha)$ uzayına Newtonyen olmayan tam uzay ($\alpha-$tam metrik uzay) denir (Çakmak ve Başar, 2012).

Teorem 2.4.11. $d_\alpha : \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$, $(x,y) \to d_\alpha(x,y) = \left| x \dot{-} y \right|_\alpha$ olmak üzere $(\mathbb{R}_\alpha, d_\alpha)$ Newtonyen olmayan metrik uzayı Newtonyen olmayan tam metrik uzaydır (Çakmak ve Başar, 2012).

Teorem 2.4.12. i) $X \subset \mathbb{R}_\alpha^+$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $x \dot{\leq} M$ ise ve her $\varepsilon \dot{>} \alpha(0)$ için $|M \dot{-} x| \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $X$ kümesinin $\alpha-$supremumu $M$ dir denir ve ${}^{\alpha}\sup X$ ile gösterilir.

ii) $X, Y \neq \varnothing$ ve $X \subset Y$ olsun. Bu durumda ${}^{\alpha}\sup X$ ve ${}^{\alpha}\sup Y$ sayıları vardır ve $\,{}^{\alpha}\sup X \ddot{\leq} {}^{\alpha}\sup Y$ eşitsizliği gerçeklenir (Kirişci, 2017).

Tezin beşinci bölümünde, ${}^{\alpha}\sup$ yerine $\dot{\sup}$ ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.4.13.

$$_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n \dot{+} \ldots$$

sonsuz toplamına Newtonyen olmayan reel sayı serisi ya da $\alpha-$seri denir. Eğer $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Newtonyen olmayan reel sayı serisi ise, $S_m =_{\alpha} \sum_{n=1}^{m} a_n$ genel terimli $(S_m)$ dizisine $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

Eğer $(S_m)$ $\alpha-$yakınsak ise $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine $\alpha-$ yakınsaktır denir. Eğer ${}^{\alpha}\lim_{m\to\infty} S_m = S$ ise $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ yazılır.

Eğer ${}^{\alpha}\lim_{m\to\infty} S_m$ limiti yoksa ya da $\dot{-}\infty\left(=\lim_{x\to-\infty}\alpha(x)\right)$ veya $\dot{+}\infty\left(=\lim_{x\to\infty}\alpha(x)\right)$ değerlerine eşit ise $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine $\alpha-$ıraksaktır denir (Duyar ve Erdoğan, 2016).

Tezin beşinci bölümünde, $_{\alpha}\sum$ yerine $\dot{\sum}$ simgesi kullanılacaktır.

Lemma 2.4.14. $\alpha-$ yakınsaklıkla ilgili aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{n}\,\dot{}_{\alpha}$ serisi $\alpha-$yakınsak değildir.

(ii) $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $\alpha-$yakınsak ise ${}^{\alpha}\lim_{n\to\infty} a_n = \dot{0}$ dır.

(iii) $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri $\alpha-$yakınsak ise $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \dot{+} b_n\right)$ serisi de $\alpha-$ yakınsaktır.

(iv) $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $\alpha-$yakınsak ise $\lambda \in \mathbb{R}_{\alpha}$ olmak üzere $_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda \dot{\times} a_n\right)$ serisi de $\alpha-$ yakınsaktır.

(v) Her $n \in \mathbb{N}$ için $|b_n|_\alpha \dot{\leq} a_n$ olsun. Eğer ${}_\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $\alpha-$yakınsak ise ${}_\alpha\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi de $\alpha-$ yakınsaktır.

(vi) ${}_\alpha\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{n^{\dot{p}}}\alpha$ serisi $p>1$ için $\alpha-$yakınsak, $p \leq 1$ için $\alpha-$ıraksaktır (Duyar ve Erdoğan, 2016).

Önerme 2.4.15. $a, b \dot{\geq} \dot{0}$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için $\left(\frac{a \dot{+} b}{\dot{2}}\alpha\right)^{\dot{p}} \dot{\leq} \frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\alpha$ dir (Güngör, 2020).

Önerme 2.4.15 den $1 < p < \infty$ için $\left(a \dot{+} b\right)^{\dot{p}} \dot{\leq} \dot{2}^{\left(\dot{p} \dot{-} \dot{1}\right)} \dot{\times} \left(a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}\right)$ eşitsizliğinin gerçeklendiği kolayca görülür.

**2.5. $*-$Kalkülüs**

Grossman (1972) iki üreteç fonksiyonu kullanarak yeni bir aritmetik geliştirmiştir. Aritmetiklerin tamamını içine alan bu yapı Newtonyen olmayan hesap tarzı olarak isimlendirilmiştir.

Bu yapıda ilk bölümde bahsedilen $\alpha-$üretecinin özelliklerinin tümünü sağlayan, cebirsel işlemler için $\ddot{+}$, $\ddot{-}$, $\ddot{\times}$ ve $\ddot{/}$ notasyonları kullanılan bir $\beta-$üreteci seçilir. Aritmetik yapılar birbiriyle izomorf olduklarından $\alpha-$aritmetik ile elde edilen tüm yapılar $\beta-$aritmetik içinde geçerlidir.

Bu kesimden itibaren $\alpha$ ve $\beta$ keyfi seçilmiş üreteçler, $*$ ise aritmetiklerin sıralı ikilisi ($\alpha-$aritmetik, $\beta-$aritmetik) olarak alınacak ve aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır.

| | $\alpha-$aritmetik | $\beta-$ aritmetik |
|---|---|---|
| Evren | $A$ | $B$ |
| Toplama | $\dot{+}$ | $\ddot{+}$ |
| Çıkarma | $\dot{-}$ | $\ddot{-}$ |

Çarpma $\dot{\times}$ $\ddot{\times}$

Bölme $\dot{/}$ $\ddot{/}$

Sıralama $\dot{<}$ $\ddot{<}$

$*-$kalkülüste $\alpha-$aritmetik girdiler üzerinde, $\beta-$aritmetik çıktılar (değerler) üzerinde kullanılır. Özellikle girdi ve çıktı değişimleri sırasıyla $\alpha-$aritmetik ve $\beta-$aritmetik ile ölçülür. $*-$kalkülüste operatörler, girdileri $A$ kümesinde, çıktıları $B$ kümesinde olan fonksiyonlara uygulanır.

Tanım 2.5.1. $\alpha-$aritmetikten $\beta-$aritmetiğe tanımlanan izomorfizma dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tek $\iota$ (iota) fonksiyonudur.

(i) $\iota$ fonksiyonu birebirdir.

(ii) $\iota$ fonksiyonu $A$ kümesinden $B$ kümesine tanımlı örten bir fonksiyondur.

(iii) Her $u,v \in A$ için

$$\iota\left(u \dot{+} v\right) = \iota(u) \ddot{+} \iota(v),$$

$$\iota\left(u \dot{-} v\right) = \iota(u) \ddot{-} \iota(v),$$

$$\iota\left(u \dot{\times} v\right) = \iota(u) \ddot{\times} \iota(v)$$

ve her $u \in A, v \in A - \left\{\dot{0}\right\}$ için

$$\iota\left(u \dot{/} v\right) = \iota(u) \ddot{/} \iota(v)$$

dir. Ayrıca $u,v \in A$ olmak üzere

$$u \dot{\leq} v \Leftrightarrow \iota(u) \ddot{\leq} \iota(v)$$

bağıntısı geçerlidir.

Bu özellikleri sağlayan $\iota$ fonksiyonu, her $x \in A$ için $\iota(x) = \beta\left\{\alpha^{-1}(x)\right\}$ olarak tek türlü tanımlıdır ve her $n$ tamsayısı için $\iota\left(\dot{n}\right) = \ddot{n}$ dir (Grossman and Katz, 1972).

### 2.6. Newtonyen Olmayan Kompleks Cisim

Tanım 2.6.1. $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ tam sıralı kümeler olmak üzere, $\alpha(a)=\dot{a}\in\left(\mathbb{R}_\alpha,\dot{+},\dot{-},\dot{\times},\dot{/},\dot{<}\right)$ ve $\beta(b)=\ddot{b}\in\left(\mathbb{R}_\beta,\ddot{+},\ddot{-},\ddot{\times},\ddot{/},\ddot{<}\right)$, $\alpha$ ve $\beta$ aritmetik sistemlerinden seçilmiş elemanlar olsun. Bu durumda $\left(\dot{a},\ddot{b}\right)$ sıralı ikilisine $*-$nokta denir. Tüm $*-$noktaların kümesi Newtonyen olmayan kompleks sayılar kümesi diye adlandırılır ve $\mathbb{C}(N)$ ile gösterilir, yani

$$\mathbb{C}(N):=\left\{z^*=\left(\dot{a},\ddot{b}\right):\dot{a}\in\mathbb{R}_\alpha,\ddot{b}\in\mathbb{R}_\beta\right\}$$

dir (Tekin ve Başar, 2013).

Tanım 2.6.2. $\mathbb{C}(N)$ Newtonyen olmayan kompleks sayılar kümesi üzerinde $z_1^*=\left(\dot{a}_1,\ddot{b}_1\right)$, $z_2^*=\left(\dot{a}_2,\ddot{b}_2\right)$ olmak üzere toplama işlemi

$$\oplus_1:\mathbb{C}(N)\times\mathbb{C}(N)\to\mathbb{C}(N),$$
$$\left(z_1^*,z_2^*\right)\to z_1^*\oplus_1 z_2^*=\left(\alpha\left\{a_1+a_2\right\},\beta\left\{b_1+b_2\right\}\right)=\left(\dot{a}_1\dot{+}\dot{a}_2,\ddot{b}_1\ddot{+}\ddot{b}_2\right)$$

fonksiyonu ile, çarpma işlemi ise

$$\otimes_1:\mathbb{C}(N)\times\mathbb{C}(N)\to\mathbb{C}(N),$$
$$\left(z_1^*,z_2^*\right)\to z_1^*\otimes_1 z_2^*=\left(\alpha\left\{a_1a_2-b_1b_2\right\},\beta\left\{a_1b_2+b_1a_2\right\}\right)$$

fonksiyonu ile tanımlanır (Tekin ve Başar, 2013).

Teorem 2.6.3. $\left(\mathbb{C}(N),\oplus_1,\otimes_1\right)$ bir cisimdir (Tekin ve Başar, 2013).

Not 2.6.4. Her $z_1^*\in\mathbb{C}(N)$ için $z_1^*\oplus_1 z_2^*=z_2^*\oplus_1 z_1^*=0^*$ olacak şekildeki $z_2^*$ Newtonyen olmayan kompleks sayısına $z_1^*$ Newtonyen olmayan kompleks sayısının toplama işlemine göre tersi denir ve $\Theta_1 z_1^*$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.5. Herhangi iki $z_1^* = \left(\dot{a}_1, \ddot{b}_1\right)$, $z_2^* = \left(\dot{a}_2, \ddot{b}_2\right) \in \mathbb{C}(N)$ noktaları arasındaki $d_1^*$ $*-$uzaklığı

$$d_1^* : \mathbb{C}(N) \times \mathbb{C}(N) \to \mathbb{R}_\beta,$$

$$\left(z_1^*, z_2^*\right) \to d_1^*\left(z_1^*, z_2^*\right) = \ddot{\sqrt{\left[\iota\left(\dot{a}_1 \dot{-} \dot{a}_2\right)\right]^{\ddot{2}} \ddot{+} \left(\ddot{b}_1 \ddot{-} \ddot{b}_2\right)^{\ddot{2}}}}$$

$$= \beta\left\{\sqrt{\left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(b_1 - b_2\right)^2}\right\}$$

fonksiyonu ile tanımlanır (Tekin ve Başar, 2013).

Tanım 2.6.6. Herhangi bir $z^* \in \mathbb{C}(N)$ elemanının $*-$normu $d_1^*\left(z^*, 0^*\right)$ olarak tanımlanır ve $\ddot{\|}.\ddot{\|}_1$ ile gösterilir. Yani $z^* = \left(\dot{a}, \ddot{b}\right)$ ve $\overset{*}{0} = \left(\dot{0}, \ddot{0}\right)$ olmak üzere

$$\ddot{\|} z^* \ddot{\|}_1 = d_1^*\left(z^*, 0^*\right) = \ddot{\sqrt{\left[\iota\left(\dot{a} \dot{-} \dot{0}\right)\right]^{\ddot{2}} \ddot{+} \left(\ddot{b} \ddot{-} \ddot{0}\right)^{\ddot{2}}}} = \beta\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

dir (Tekin ve Başar, 2013).

Teorem 2.6.7. $\mathbb{C}(N)$ üzerindeki $\ddot{\|} z^* \ddot{\|}_1$ normu her $z_1^*, z_2^* \in \mathbb{C}(N)$ için $d_1^*\left(z_1^*, z_2^*\right) = \ddot{\|} z_1^* \Theta_1 z_2^* \ddot{\|}_1$ ile tanımlı $d_1^*$ metriğini üretir ve $\left(\mathbb{C}(N), d_1^*\right)$ bir tam metrik uzaydır (Tekin ve Başar, 2013).

# 3. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ NORMUNA GÖRE BİKOMPLEKS DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, birinci kesimde, sonraki bölümler için gerekli olan Hölder ve Minkowski gibi bazı önemli eşitsizliklerin bikompleks anlamda geçerliliği araştırılmıştır. İkinci kesimde, bikompleks sayılar kümesi üzerinde $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ normuna göre bikompleks dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların tamlık özelliği incelenmiştir. Ayrıca bu uzayların $\mathbb{BC}-$modül yapısı ve üzerlerinde tanımlanan norma göre Banach $\mathbb{BC}-$modül yapısı irdelenmiştir. Üçüncü kesimde, ikinci kesimde tanımlanan ve tamlık özelliği ispatlanan $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ normuna göre bikompleks dizi uzaylarının solid uzay, monoton uzay, $BK-$uzay, simetrik uzay ve ayrılabilir uzay olma gibi bazı topolojik özellikleri tartışılmıştır. Dördüncü kesimde ise, konvekslik, kesin konvekslik ve düzgün konvekslik gibi bazı geometrik özelliklerin bikompleks dizi uzayları için sağlanıp sağlanmadığı ispatlanmıştır.

## 3.1. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bazı Bikompleks Eşitsizlikler

Bu kesimde, reel ve kompleks sayılar için bilinen bazı eşitsizlikler Öklid normuna göre bikompleks sayılara genelleştirilmiş ve ispatlanmıştır.

Lemma 3.1.1. Her $s,t \in \mathbb{BC}$ için

$$\frac{\|s+t\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s+t\|_{\mathbb{BC}}} \leq \frac{\|s\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s\|_{\mathbb{BC}}} + \frac{\|t\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|t\|_{\mathbb{BC}}}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $f:\mathbb{R}-\{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonu tanımlansın. Her $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ için $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ olduğundan $f$ fonksiyonu artandır. Böylece her $s,t \in \mathbb{BC}$ için sağlanan $\|s+t\|_{\mathbb{BC}} \leq \|s\|_{\mathbb{BC}} + \|t\|_{\mathbb{BC}}$ eşitsizliği $f\left(\|s+t\|_{\mathbb{BC}}\right) \leq f\left(\|s\|_{\mathbb{BC}} + \|t\|_{\mathbb{BC}}\right)$ eşitsizliğini gerektirir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{\|s+t\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s+t\|_{\mathbb{BC}}} &\leq \frac{\|s\|_{\mathbb{BC}}+\|t\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s\|_{\mathbb{BC}}+\|t\|_{\mathbb{BC}}} \\ &= \frac{\|s\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s\|_{\mathbb{BC}}+\|t\|_{\mathbb{BC}}} + \frac{\|t\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s\|_{\mathbb{BC}}+\|t\|_{\mathbb{BC}}}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|s\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s\|_{\mathbb{BC}}}+\frac{\|t\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|t\|_{\mathbb{BC}}}$$

ifadesinden istenen elde edilir.

Lemma 3.1.2. ($\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Hölder Eşitsizliği) $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekildeki her $p,q\in\mathbb{R}$ ve $k\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_k,t_k\in\mathbb{BC}$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\|s_k t_k\|_{\mathbb{BC}} \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $p,q\in\mathbb{R}$ ve $k\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere $s_k,t_k\in\mathbb{BC}$ alınsın. Eğer her $k\in\{1,2,...,n\}$ için $\|s_k\|_{\mathbb{BC}}=0$ veya $\|t_k\|_{\mathbb{BC}}=0$ ise $\sum_{k=1}^{n}\|s_k t_k\|_{\mathbb{BC}}=\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}=0$ olup eşitlik sağlanır. $\|s_{k_1}\|_{\mathbb{BC}}\neq 0$ ve $\|t_{k_2}\|_{\mathbb{BC}}\neq 0$ olacak şekilde $k_1,k_2\in\{1,2,...,n\}$ olduğu kabul edilirse $\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\neq 0$ ve $\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}\neq 0$ olur. Böylece $\alpha=\frac{\|s_k\|_{\mathbb{BC}}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}}, \beta=\frac{\|t_k\|_{\mathbb{BC}}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}}$ seçilirse reel sayılar için geçerli Young eşitsizliği gereği

$$\alpha\beta=\frac{\|s_k\|_{\mathbb{BC}}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}}\leq\frac{1}{p}\frac{\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}}{\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}}+\frac{1}{q}\frac{\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}}{\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}}$$

yazılır. Buradan terim terim toplama ile

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

eşitsizliği, yani $\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}\|t_k\|_{\mathbb{BC}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}$ elde edilir. Bu eşitsizlik reel Hölder eşitsizliğinden de yazılabilirdi. Böylece Önerme 2.2.6 iii) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}\|s_k t_k\|_{\mathbb{BC}} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{2}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}\|t_k\|_{\mathbb{BC}} \le \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{q}\right)^{1/q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.1.3. ($\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Minkowski Eşitsizliği) $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$ ve $k\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_k, t_k \in \mathbb{BC}$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$, $k\in\{1,2,...,n\}$ ve $s_k, t_k\in\mathbb{BC}$ olsun. Bir $q$ reel sayısı $\dfrac{p}{p-1}$ olarak seçilirse; $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olur. Bu durumda reel Hölder eşitsizliği gereği

$$\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{(p-1)q}\right)^{1/q},$$
$$\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin toplanması ile de Önerme 2.2.6 i) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p} &= \sum_{k=1}^{n}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p-1}\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\left(\|s_k\|_{\mathbb{BC}}+\|t_k\|_{\mathbb{BC}}\right)\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p-1}\\
&\le \left[\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{(p-1)q}\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $(p-1)q=p$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|s_k+t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\leq\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|s_k+t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/q}$$

eşitsizliği ve dolayısıyla

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|s_k+t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1-1/q}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|s_k+t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.4. $0<p\leq 1$ olan her $p\in\mathbb{R}$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için

$$\left\|s+t\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\leq\left\|s\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}+\left\|t\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* Önerme 2.2.6 i) ve (2.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|s+t\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\leq\left(\left\|s\right\|_{\mathbb{BC}}+\left\|t\right\|_{\mathbb{BC}}\right)^{p}\leq\left\|s\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}+\left\|t\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}$$

olup istenen eşitsizlik elde edilir.

Lemma 3.1.5. Her $s,t\in\mathbb{BC}$ için $\left\|s+t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}+\left\|s-t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=2\left(\left\|s\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}+\left\|t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}\right)$ eşitliği gerçeklenir.

*İspat:* Her $s=s_1+js_2, t=t_1+jt_2\in\mathbb{BC}$ için

$$\left\|s+t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=\left\|(s_1+js_2)+(t_1+jt_2)\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=\left\|(s_1+t_1)+j(s_2+t_2)\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=\left|s_1+t_1\right|^2+\left|s_2+t_2\right|^2$$

ve

$$\left\|s-t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=\left\|(s_1+js_2)-(t_1+jt_2)\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=\left\|(s_1-t_1)+j(s_2-t_2)\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}=\left|s_1-t_1\right|^2+\left|s_2-t_2\right|^2$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\left\|s+t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}+\left\|s-t\right\|_{\mathbb{BC}}^{2}&=\left(\left|s_1+t_1\right|^2+\left|s_2+t_2\right|^2\right)+\left(\left|s_1-t_1\right|^2+\left|s_2-t_2\right|^2\right)\\&=\left(\left|s_1+t_1\right|^2+\left|s_1-t_1\right|^2\right)+\left(\left|s_2+t_2\right|^2+\left|s_2-t_2\right|^2\right)\\&=2\left(\left|s_1\right|^2+\left|t_1\right|^2\right)+2\left(\left|s_2\right|^2+\left|t_2\right|^2\right)\end{aligned}$$

$$= 2\left(|s_1|^2 + |s_2|^2\right) + 2\left(|t_1|^2 + |t_2|^2\right)$$
$$= 2\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.6. $2 \le p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{BC}$ için

$$\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^p + \|s-t\|_{\mathbb{BC}}^p \le 2^{p-1}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* (Castillo and Rafeiro, 2016) çalışmasındaki Lemma 3.67 nin ispatındaki $t$ reel sayısı $\dfrac{\|s+t\|_{\mathbb{BC}}}{\|s-t\|_{\mathbb{BC}}}$ olarak alınırsa; her $s,t \in \mathbb{BC}$ ve $2 \le p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ için

$$\left(\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^p + \|s-t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} \le \left(\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|s-t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)^{1/2}$$

dir. Ayrıca Lemma 3.1.5 den

$$\left(\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|s-t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)^{1/2} = \left(2\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)\right)^{1/2} = \sqrt{2}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)^{1/2}$$

olduğu biliniyor. O halde reel Hölder eşitsizliği gereği $\dfrac{2}{p} + \dfrac{p-2}{p} = 1$ için

$$\|s\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|t\|_{\mathbb{BC}}^2 \le \left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{2/p}(1+1)^{(p-2)/p} = 2^{(p-2)/p}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{2/p}$$

ve böylece

$$\sqrt{2}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^2 + \|t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)^{1/2} \le 2^{1/2 + (p-2)/2p}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} = 2^{(p-1)/p}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p}$$

dir. Buradan $\left(\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^p + \|s-t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} \le 2^{(p-1)/p}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p}$ elde edilir. Sonuç olarak $2 \le p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{BC}$ için $\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^p + \|s-t\|_{\mathbb{BC}}^p \le 2^{p-1}\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^p + \|t\|_{\mathbb{BC}}^p\right)$ eşitsizliği gerçeklenir.

## 3.2. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzayları

Bu kesimde, ilk olarak reel değerli $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ normu kullanılarak bikompleks terimli dizilerden oluşan $l_\infty(\mathbb{BC})$ ve $0<p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümeleri tanımlanmıştır. Bu kümelerin birer bikompleks dizi uzayı olduğu gösterilmiş, tamlık özelliği incelenmiş ve Banach $\mathbb{BC}-$modül olup olmadıkları tartışılmıştır.

Tanım 3.2.1. Terimleri bikompleks sayılar olan tüm dizilerin kümesi ve bu kümenin alt kümeleri olan sınırlı ve $p-$ toplanabilir dizilerin kümesi;

$$\begin{aligned}
&w(\mathbb{BC}) := \{\zeta = (\zeta_k) : \zeta_k \in \mathbb{BC}, \forall k \in \mathbb{N}\},\\
&l_\infty(\mathbb{BC}) := \left\{\zeta = (\zeta_k) \in w(\mathbb{BC}) : \sup\left\{\|\zeta_k\|_{\mathbb{BC}} : k \in \mathbb{N}\right\} < \infty\right\},\\
&l_p(\mathbb{BC}) := \left\{\zeta = (\zeta_k) \in w(\mathbb{BC}) : \sum_{k=1}^{\infty} \|\zeta_k\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty\right\} \quad (0<p<\infty \text{ için})
\end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2.2. $w(\mathbb{BC})$ kümesi üzerinde her $s=(s_k),\ t=(t_k)\in w(\mathbb{BC})$ ve her $\alpha\in\mathbb{C}$ için toplama işlemi

$$+ : w(\mathbb{BC}) \times w(\mathbb{BC}) \to w(\mathbb{BC}), (s,t) \to s+t = (s_k + t_k)$$

ile, kompleks skalerle çarpma işlemi

$$\cdot : \mathbb{C} \times w(\mathbb{BC}) \to w(\mathbb{BC}), (\alpha, s) \to \alpha \cdot s = \alpha s = (\alpha s_k)$$

ile, çarpma işlemi

$$\times : w(\mathbb{BC}) \times w(\mathbb{BC}) \to w(\mathbb{BC}), (s,t) \to s \times t = st = (s_k t_k)$$

ile, bikompleks skalerle çarpma işlemi ise

$$\cdot : \mathbb{BC} \times w(\mathbb{BC}) \to w(\mathbb{BC}), (\lambda, s) \to \lambda \cdot s = \lambda s = (\lambda s_k)$$

ile tanımlıdır.

Teorem 3.2.3. $w(\mathbb{BC})$ kümesi üzerinde tanımlı toplama ve kompleks skalerle çarpma işlemine göre bir kompleks vektör uzayıdır.

*İspat:* İlk olarak $w(\mathbb{BC})$ kümesinin toplama işlemine göre bir değişmeli grup olduğu gösterilsin. Her $z=(z_n)=(z_{1n}+jz_{2n}),\ w=(w_n)=(w_{1n}+jw_{2n})\in w(\mathbb{BC})$ için

$$z+w=(z_n)+(w_n)=z_1+jz_2+w_1+jw_2=((z_{1n}+w_{1n})+j(z_{2n}+w_{2n}))\in w(\mathbb{BC})$$

olduğundan kapalılık özelliği sağlanır. Her $z=(z_n)=(z_{1n}+jz_{2n}),\ w=(w_n)=(w_{1n}+jw_{2n}),\ t=(t_n)=(t_{1n}+jt_{2n})\in w(\mathbb{BC})$ için

$$\begin{aligned}(z+w)+t&=((z_n)+(w_n))+(t_n)\\&=(((z_{1n}+w_{1n})+t_{1n})+j((z_{2n}+w_{2n})+t_{2n}))\\&=((z_{1n}+(w_{1n}+t_{1n}))+j(z_{2n}+(w_{2n}+t_{2n})))\\&=(z_n)+((w_n)+(t_n))=z+(w+t)\end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır. Her $z=(z_n)=(z_{1n}+jz_{2n})\in w(\mathbb{BC})$ için

$$\begin{aligned}z+0&=(z_n)+0=(z_{1n}+jz_{2n})+(0+j0)\\&=(z_{1n}+0)+j(z_{2n}+0)\\&=(z_{1n})+j(z_{2n})=(z_n)=z\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}0+z&=0+(z_n)=(0+j0)+(z_{1n}+jz_{2n})\\&=(0+z_{1n})+j(0+z_{2n})\\&=(z_{1n})+j(z_{2n})=(z_n)=z\end{aligned}$$

olduğundan 0 dizisi $w(\mathbb{BC})$ kümesi için birim elemandır. Her $z=(z_n)=(z_{1n}+jz_{2n})\in w(\mathbb{BC})$ için $w=-z=((-z_{1n})+j(-z_{2n}))$ için

$$\begin{aligned}z+w&=(z_n)+(w_n)=(z_{1n}+jz_{2n})+((-z_{1n})+j(-z_{2n}))\\&=(z_{1n}+(-z_{1n}))+j(z_{2n}+(-z_{2n}))=0+j0=0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}w+z&=(w_n)+(z_n)=((-z_{1n})+j(-z_{2n}))+(z_{1n}+jz_{2n})\\&=((-z_{1n})+z_{1n})+j((-z_{2n})+z_{2n})=0+j0=0\end{aligned}$$

olduğundan $w(\mathbb{BC})$ kümesinde her elemanın toplamaya göre tersi vardır. Ayrıca her $z=(z_n)=(z_{1n}+jz_{2n}),\ w=(w_n)=(w_{1n}+jw_{2n})\in w(\mathbb{BC})$ için

$$\begin{aligned} z+w=(z_n)+(w_n)&=(z_{1n}+jz_{2n})+(w_{1n}+jw_{2n}) \\ &=(w_{1n}+jw_{2n})+(z_{1n}+jz_{2n})=(w_n)+(z_n)=w+z \end{aligned}$$

olduğundan $w(\mathbb{BC})$ kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

Diğer yandan her $z=z_1+jz_2,\ w=w_1+jw_2\in w(\mathbb{BC})$ ve her $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} \mu(z+w)&=(\mu_{1n}+i\mu_{2n})\left((z_{1n}+jz_{2n})+(w_{1n}+jw_{2n})\right) \\ &=(\mu_{1n}+i\mu_{2n})\left((z_{1n}+w_{1n})+j(z_{2n}+w_{2n})\right) \\ &=(\mu_{1n}+i\mu_{2n})(z_{1n}+w_{1n})+j(\mu_{1n}+i\mu_{2n})(z_{2n}+w_{2n}) \\ &=\left[(\mu_{1n}+i\mu_{2n})z_{1n}+(\mu_{1n}+i\mu_{2n})w_{1n}\right] \\ &\quad+j\left[(\mu_{1n}+i\mu_{2n})z_{2n}+(\mu_{1n}+i\mu_{2n})w_{2n}\right] \\ &=\left[(\mu_{1n}+i\mu_{2n})z_{1n}+j(\mu_{1n}+i\mu_{2n})z_{2n}\right] \\ &\quad+\left[(\mu_{1n}+i\mu_{2n})w_{1n}+j(\mu_{1n}+i\mu_{2n})w_{2n}\right] \\ &=(\mu_{1n}+i\mu_{2n})(z_{1n}+jz_{2n})+(\mu_{1n}+i\mu_{2n})(w_{1n}+jw_{2n}) \\ &=\mu z+\mu w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu+\nu)z&=\left((\mu_1+i\mu_2)+(\nu_1+i\nu_2)\right)(z_{1n}+jz_{2n}) \\ &=\left((\mu_1+i\mu_2)+(\nu_1+i\nu_2)\right)(z_{1n}+jz_{2n}) \\ &=\left((\mu_1+i\mu_2)+(\nu_1+i\nu_2)\right)z_{1n}+j\left((\mu_1+i\mu_2)+(\nu_1+i\nu_2)\right)z_{2n} \\ &=\left[(\mu_1+i\mu_2)z_{1n}+(\nu_1+i\nu_2)z_{1n}\right] \\ &\quad+j\left[(\mu_1+i\mu_2)z_{2n}+(\nu_1+i\nu_2)z_{2n}\right] \\ &=\left[(\mu_1+i\mu_2)z_{1n}+j(\mu_1+i\mu_2)z_{2n}\right] \\ &\quad+\left[(\nu_1+i\nu_2)z_{1n}+j(\nu_1+i\nu_2)z_{2n}\right] \\ &=(\mu_1+i\mu_2)(z_{1n}+jz_{2n})+(\nu_1+i\nu_2)(z_{1n}+jz_{2n}) \\ &=\mu z+\nu z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu\nu)z&=\left((\mu_1+i\mu_2)(\nu_1+i\nu_2)\right)(z_{1n}+jz_{2n}) \\ &=\left((\mu_1+i\mu_2)(\nu_1+i\nu_2)\right)(z_{1n}+jz_{2n}) \\ &=\left((\mu_1+i\mu_2)(\nu_1+i\nu_2)\right)z_{1n}+j\left((\mu_1+i\mu_2)(\nu_1+i\nu_2)\right)z_{2n} \\ &=(\mu_1+i\mu_2)\left((\nu_1+i\nu_2)z_{1n}\right)+j(\mu_1+i\mu_2)\left((\nu_1+i\nu_2)z_{2n}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mu_1 + i\mu_2)\big((\nu_1 + i\nu_2) z_{1n} + j(\nu_1 + i\nu_2) z_{2n}\big)\\
&= (\mu_1 + i\mu_2)\big((\nu_1 + i\nu_2)(z_{1n} + jz_{2n})\big)\\
&= \mu(\nu z)
\end{aligned}
$$

ve

$$1z = 1(z_{1n} + jz_{2n}) = (1z_{1n} + j1z_{2n}) = (z_{1n} + jz_{2n}) = z$$

eşitlikleri sağlandığından $w(\mathbb{BC})$ bir vektör uzayıdır.

Teorem 3.2.4. $w(\mathbb{BC})$ kümesi toplama ve bikompleks skalerle çarpma işlemlerine göre bir $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* $w(\mathbb{BC})$ kümesinin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayı olduğu Teorem 3.2.3 de gösterilmişti. Şimdi bikompleks skalerle çarpma işlemine göre gerekli özellikler ispatlansın. Her $z = z_1 + jz_2 = (z_{1n} + jz_{2n})$, $w = w_1 + jw_2 = (w_{1n} + jw_{2n}) \in w(\mathbb{BC})$ ve her $\mu = \mu_1 + j\mu_2$, $\nu = \nu_1 + j\nu_2 \in \mathbb{BC}$ için

$$
\begin{aligned}
\mu(z+w) &= (\mu_{1n} + j\mu_{2n})\big((z_{1n} + jz_{2n}) + (w_{1n} + jw_{2n})\big)\\
&= (\mu_{1n} + j\mu_{2n})\big((z_{1n} + w_{1n}) + j(z_{2n} + w_{2n})\big)\\
&= (\mu_{1n} + j\mu_{2n})(z_{1n} + w_{1n}) + j(\mu_{1n} + j\mu_{2n})(z_{2n} + w_{2n})\\
&= \big[(\mu_{1n} + j\mu_{2n}) z_{1n} + (\mu_{1n} + j\mu_{2n}) w_{1n}\big]\\
&\quad + j\big[(\mu_{1n} + j\mu_{2n}) z_{2n} + (\mu_{1n} + j\mu_{2n}) w_{2n}\big]\\
&= \big[(\mu_{1n} + j\mu_{2n}) z_{1n} + j(\mu_{1n} + j\mu_{2n}) z_{2n}\big]\\
&\quad + \big[(\mu_{1n} + j\mu_{2n}) w_{1n} + j(\mu_{1n} + j\mu_{2n}) w_{2n}\big]\\
&= (\mu_{1n} + j\mu_{2n})(z_{1n} + jz_{2n}) + (\mu_{1n} + j\mu_{2n})(w_{1n} + jw_{2n})\\
&= \mu z + \mu w,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mu+\nu) z &= \big((\mu_1 + j\mu_2) + (\nu_1 + j\nu_2)\big)(z_{1n} + jz_{2n})\\
&= \big((\mu_1 + j\mu_2) + (\nu_1 + j\nu_2)\big)(z_{1n} + jz_{2n})\\
&= \big((\mu_1 + j\mu_2) + (\nu_1 + j\nu_2)\big) z_{1n} + j\big((\mu_1 + j\mu_2) + (\nu_1 + j\nu_2)\big) z_{2n}\\
&= \big[(\mu_1 + j\mu_2) z_{1n} + (\nu_1 + j\nu_2) z_{1n}\big] + j\big[(\mu_1 + j\mu_2) z_{2n} + (\nu_1 + j\nu_2) z_{2n}\big]\\
&= \big[(\mu_1 + j\mu_2) z_{1n} + j(\mu_1 + j\mu_2) z_{2n}\big] + \big[(\nu_1 + j\nu_2) z_{1n} + j(\nu_1 + j\nu_2) z_{2n}\big]\\
&= (\mu_1 + j\mu_2)(z_{1n} + jz_{2n}) + (\nu_1 + j\nu_2)(z_{1n} + jz_{2n})\\
&= \mu z + \nu z
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu\nu)z &= ((\mu_1 + j\mu_2)(\nu_1 + j\nu_2))(z_{1n} + jz_{2n}) \\ &= ((\mu_1 + j\mu_2)(\nu_1 + j\nu_2))(z_{1n} + jz_{2n}) \\ &= ((\mu_1 + j\mu_2)(\nu_1 + j\nu_2))z_{1n} + j((\mu_1 + j\mu_2)(\nu_1 + j\nu_2))z_{2n} \\ &= (\mu_1 + j\mu_2)((\nu_1 + j\nu_2)z_{1n}) + j(\mu_1 + j\mu_2)((\nu_1 + j\nu_2)z_{2n}) \\ &= (\mu_1 + j\mu_2)((\nu_1 + j\nu_2)z_{1n} + j(\nu_1 + j\nu_2)z_{2n}) \\ &= (\mu_1 + j\mu_2)((\nu_1 + j\nu_2)(z_{1n} + jz_{2n})) \\ &= \mu(\nu z)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $w(\mathbb{BC})$ bir sol $\mathbb{BC}-$modüldür. Ayrıca $\mathbb{BC}$, üzerindeki çarpma işlemine göre değişmeli olduğu için aynı zamanda bir sağ $\mathbb{BC}-$modüldür. Sonuç olarak $w(\mathbb{BC})$ kümesi bir $\mathbb{BC}-$modüldür.

Teorem 3.2.5. $0 < p < q < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC}) \subset l_q(\mathbb{BC})$ kapsaması gerçeklenir. $1 \le p < q < \infty$ için bu kapsama kesindir.

*İspat:* Herhangi bir $\zeta = (\zeta_n) \in l_p(\mathbb{BC})$ dizisi alınsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$ olup her $n \ge n_0$ için $\|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}} < 1$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $0 < q-p$ olduğundan her $n \ge n_0$ için $\|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^{q-p} < 1$ yazılır. Böylece $M = \max\left\{\|\zeta_1\|_{\mathbb{BC}}^{q-p}, \|\zeta_2\|_{\mathbb{BC}}^{q-p}, ..., \|\zeta_{n_0}\|_{\mathbb{BC}}^{q-p}, 1\right\}$ alınırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^q = \sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^{q-p} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p < \sum_{n=1}^{\infty} M \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p = M \sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$$

olup $l_p(\mathbb{BC}) \subset l_q(\mathbb{BC})$ kapsaması elde edilir.

Şimdi $1 \le p < q < \infty$ için kapsamanın kesin olduğu gösterilsin. Bunun için her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_n = j\dfrac{1}{n^{1/p}}$ genel terimli $\zeta = (\zeta_n)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^q = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{n^{1/p}}\right)^2} \right)^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}}$$

ve $\frac{q}{p} > 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^q$ serisi yakınsak olup $\zeta = (\zeta_n) \in l_q(\mathbb{BC})$ dir. Diğer yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{0^2 + \left( \frac{1}{n^{1/p}} \right)^2} \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi ıraksak olup $\zeta = (\zeta_n) \notin l_p(\mathbb{BC})$ dir. Sonuç olarak $1 \leq p < q < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC}) \subset l_q(\mathbb{BC})$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6. $0 < p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC}) \subset l_\infty(\mathbb{BC})$ kapsaması gerçeklenir. $1 \leq p < \infty$ için bu kapsama kesindir.

*İspat:* Herhangi bir $\zeta = (\zeta_n) \in l_p(\mathbb{BC})$ dizisi alınsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$ olup her $n \geq n_0$ için $\|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}} < 1$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Burada $M = \max\left\{ \|\zeta_1\|_{\mathbb{BC}}, \|\zeta_2\|_{\mathbb{BC}}, \ldots, \|\zeta_{n_0}\|_{\mathbb{BC}}, 1 \right\}$ alınırsa; $\sup\left\{ \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N} \right\} \leq M < \infty$ olup $l_p(\mathbb{BC}) \subset l_\infty(\mathbb{BC})$ kapsaması elde edilir.

Şimdi $1 \leq p < \infty$ için kapsamanın kesin olduğu gösterilsin. Bunun için her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_n = j \frac{1}{n^{1/p}}$ genel terimli $\zeta = (\zeta_n)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda

$$\sup\left\{ \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N} \right\} = \sup\left\{ \left\| j \frac{1}{n^{1/p}} \right\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N} \right\} = \sup\left\{ \frac{1}{n^{1/p}} : n \in \mathbb{N} \right\} \leq 1$$

olduğundan $\zeta = (\zeta_n) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ dir. Diğer yandan $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi ıraksak olup $\zeta = (\zeta_n) \notin l_p(\mathbb{BC})$ dir. Sonuç olarak $1 \leq p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC}) \subset l_\infty(\mathbb{BC})$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.7. Her $k\in\mathbb{N}$ için $\mu_k>0$ olmak üzere yakınsak bir $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k$ serisi verilsin. O halde her $s=(s_k),\ t=(t_k)\in w(\mathbb{BC})$ için

$$d_{w(\mathbb{BC})}:w(\mathbb{BC})\times w(\mathbb{BC})\to[0,\infty),$$
$$(s,t)\to d_{w(\mathbb{BC})}(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}$$

ile tanımlı $d_{w(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $w(\mathbb{BC})$ üzerinde bir metrik belirtir ve dolayısıyla $\left(w(\mathbb{BC}),d_{w(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır.

*İspat:* Bikompleks sayılar kümesinin $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ normuna göre bir normlu uzay olduğu kullanılarak $d_{w(\mathbb{BC})}$ fonksiyonunun $w(\mathbb{BC})$ üzerinde metrik aksiyomlarını sağladığı gösterilsin. Her $s=(s_k),\ t=(t_k)\in w(\mathbb{BC})$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}\geq 0$ ve $\mu_k\in(0,\infty)$ olduğundan $d_{w(\mathbb{BC})}(s,t)\geq 0$ dır. Ayrıca her $s=(s_k),\ t=(t_k)\in w(\mathbb{BC})$ için

$$d_{w(\mathbb{BC})}(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{\|t_k-s_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|t_k-s_k\|_{\mathbb{BC}}}=d_{w(\mathbb{BC})}(t,s)$$

olur. Yine

$$\begin{aligned}d_{w(\mathbb{BC})}(s,t)=0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}=0\Leftrightarrow \mu_k\frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}=0,\forall k\in\mathbb{N}\\ &\overset{\mu_k>0,\forall k\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}\frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}=0,\forall k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}=0,\forall k\in\mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow s_k=t_k,\forall k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow s=t\end{aligned}$$

dir.

Şimdi de her $s=(s_k),\ t=(t_k),\ u=(u_k)\in w(\mathbb{BC})$ için $d_{w(\mathbb{BC})}(s,u)\leq d_{w(\mathbb{BC})}(s,t)+d_{w(\mathbb{BC})}(t,u)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. Lemma 3.1.1 gereği her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k \frac{\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}} = \sum_{k=1}^{n}\mu_k \frac{\|(s_k-t_k)+(t_k-u_k)\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|(s_k-t_k)+(t_k-u_k)\|_{\mathbb{BC}}}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\mu_k \left( \frac{\|(s_k-t_k)\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|(s_k-t_k)\|_{\mathbb{BC}}} + \frac{\|(t_k-u_k)\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|(t_k-u_k)\|_{\mathbb{BC}}} \right)$$

olup

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k \frac{\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}} \leq \sum_{k=1}^{n}\mu_k \frac{\|(s_k-t_k)\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|(s_k-t_k)\|_{\mathbb{BC}}} + \sum_{k=1}^{n}\mu_k \frac{\|(t_k-u_k)\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|(t_k-u_k)\|_{\mathbb{BC}}} \tag{3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\mu_k \frac{\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}} \leq \mu_k, \quad \mu_k \frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}} \leq \mu_k, \quad \mu_k \frac{\|t_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|t_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}} \leq \mu_k$$

ve $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k \frac{\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}, \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k \frac{\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}}, \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k \frac{\|t_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}{1+\|t_k-u_k\|_{\mathbb{BC}}}$$

serileri de yakınsaktır. Böylece (3.1) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_{w(\mathbb{BC})}(s,u) \leq d_{w(\mathbb{BC})}(s,t) + d_{w(\mathbb{BC})}(t,u)$ elde edilir. Böylece $d_{w(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $w(\mathbb{BC})$ üzerinde bir metrik ve $\left(w(\mathbb{BC}), d_{w(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır.

Teorem 3.2.8. $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesi bir bikompleks dizi uzayıdır.

*İspat:* $l_\infty(\mathbb{BC}) \subset w(\mathbb{BC})$ olduğu tanımdan açıktır. Herhangi iki $s=(s_k),\ t=(t_k) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ dizisi ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}-\{0\}$ sayısı alınsın. Bu durumda $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k\|_{\mathbb{BC}} < \infty$ ve $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_k\|_{\mathbb{BC}} < \infty$ yazılır. $\left(\mathbb{BC}, \|.\|_{\mathbb{BC}}\right)$ bir normlu uzay olduğundan Önerme 2.2.6 i) gereği

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\|s_k\|_{\mathbb{BC}}+\|t_k\|_{\mathbb{BC}}\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k\|_{\mathbb{BC}} + \sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_k\|_{\mathbb{BC}} < \infty$$

ve

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|\alpha s_k\|_{\mathbb{BC}} = |\alpha|\sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k\|_{\mathbb{BC}} < \infty$$

olup $s+t\in l_\infty(\mathbb{BC})$ ve $\alpha s\in l_\infty(\mathbb{BC})$ elde edilir, $\lambda=0$ için ispat açıktır. Bu ise $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesinin $w(\mathbb{BC})$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.9. $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesi $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

*İspat:* $l_\infty(\mathbb{BC})$ uzayının $w(\mathbb{BC})$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu Teorem 3.2.8 de gösterilmişti. Ayrıca her $\lambda\in\mathbb{BC}-\{0\}$ ve $s=(s_n)\in l_\infty(\mathbb{BC})$ için Önerme 2.2.6 iii) gereği

$$\begin{aligned}\sup\left\{\|\lambda s_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}&\le\sup\left\{\sqrt{2}\,\|\lambda\|_{\mathbb{BC}}\|s_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sqrt{2}\,\|\lambda\|_{\mathbb{BC}}\sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}<\infty\end{aligned}\qquad\textbf{(3.2)}$$

olup $\lambda s\in l_\infty(\mathbb{BC})$ dir, $\lambda=0$ için ispat açıktır. Böylece $l_\infty(\mathbb{BC})$, $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

Teorem 3.2.10. Her $s=(s_k),t=(t_k)\in l_\infty(\mathbb{BC})$ için

$$\begin{aligned}&d_{l_\infty(\mathbb{BC})}:l_\infty(\mathbb{BC})\times l_\infty(\mathbb{BC})\to[0,\infty),\\&\qquad(s,t)\to d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}\end{aligned}$$

ile tanımlı $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_\infty(\mathbb{BC})$ üzerinde bir metrik belirtir ve dolayısıyla $\left(l_\infty(\mathbb{BC}),d_{l_\infty(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır. Üstelik $\left(l_\infty(\mathbb{BC}),d_{l_\infty(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam metrik uzaydır.

*İspat:* Her $s=(s_k)$, $t=(t_k)\in l_\infty(\mathbb{BC})$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}\ge0$ olduğundan $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t)\ge0$ ve

$$d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}=\sup_{k\in\mathbb{N}}\|t_k-s_k\|_{\mathbb{BC}}=d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(t,s)$$

dir. Yine

$$\begin{aligned}d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t)=0&\Leftrightarrow\sup_{k\in\mathbb{N}}\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}=0\\&\Leftrightarrow\|s_k-t_k\|_{\mathbb{BC}}=0,\forall k\in\mathbb{N}\\&\Leftrightarrow s_k=t_k,\forall k\in\mathbb{N}\\&\Leftrightarrow s=t\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan her $s=(s_k), t=(t_k), u=(u_k)\in w(\mathbb{BC})$ için Önerme 2.2.6 i) gereği

$$\begin{aligned}
d_{w(\mathbb{BC})}(s,u) &= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|s_k-u_k\right\|_{\mathbb{BC}} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|(s_k-t_k)+(t_k-u_k)\right\|_{\mathbb{BC}} \\
&\le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\left\|s_k-t_k\right\|_{\mathbb{BC}}+\left\|t_k-u_k\right\|_{\mathbb{BC}}\right) \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|s_k-t_k\right\|_{\mathbb{BC}}+\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|t_k-u_k\right\|_{\mathbb{BC}} \\
&= d_{w(\mathbb{BC})}(s,t)+d_{w(\mathbb{BC})}(t,u)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_\infty(\mathbb{BC})$ üzerinde metrik aksiyomlarını gerçekler, yani $\left(l_\infty(\mathbb{BC}), d_{l_\infty(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır.

Şimdi, $l_\infty(\mathbb{BC})$ dizi uzayının $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ metriğine göre tam olduğu gösterilsin. $s_m=\left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi, $l_\infty(\mathbb{BC})$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde her $m,r\ge n_0(\varepsilon)$ için $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s_m,s_r)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|s_k^m-s_k^r\right\|_{\mathbb{BC}}<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $k\in\mathbb{N}$ ve her $m,r\ge n_0(\varepsilon)$ için

$$\left\|s_k^m-s_k^r\right\|_{\mathbb{BC}}<\varepsilon \tag{3.3}$$

olur. Buradan $\left(s_k^m\right)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\left(\mathbb{BC},\|.\|_{\mathbb{BC}}\right)$ uzayının tamlığından bu dizi bir $s_k^*\in\mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^*=\left(s_k^*\right)=\left(s_1^*,s_2^*,...,s_n^*,...\right)$ dizisi tanımlansın. (3.3) eşitsizliğinde $r\to\infty$ için limit alınırsa; her $m\ge n_0(\varepsilon)$ için

$$\left\|s_k^m-s_k^*\right\|_{\mathbb{BC}}\le\varepsilon \tag{3.4}$$

elde edilir. Buradan da her $m\ge n_0(\varepsilon)$ için $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}\left(s_m,s^*\right)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|s_k^m-s_k^*\right\|_{\mathbb{BC}}\le\varepsilon$ olur. Bu ise $(s_n)\subset l_\infty(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Ayrıca her $m\in\mathbb{N}$ için $\left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}}\in l_\infty(\mathbb{BC})$ olduğundan her $k\in\mathbb{N}$ için $\left\|s_k^m\right\|_{\mathbb{BC}}\le t_m$ olacak şekilde $t_m\in(0,\infty)$ vardır. Böylece (3.4) kullanılırsa her $k\in\mathbb{N}$ ve her $m\ge n_0(\varepsilon)$ için Önerme 2.2.6 i) gereği

$$\left\|s_k^*\right\|_{\mathbb{BC}} \le \left\|s_k^* - s_k^m\right\|_{\mathbb{BC}} + \left\|s_k^m\right\|_{\mathbb{BC}} \le \varepsilon + t_m$$

olup $s^* = \left(s_k^*\right) = \left(s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*, ...\right) \in l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ dir. Sonuç olarak $\left(l_\infty\left(\mathbb{BC}\right), d_{l_\infty(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam metrik uzaydır.

Sonuç 3.2.11. $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ bikompleks dizi uzayı; her $s = \left(s_k\right) \in l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ için

$$\left\|s\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}$$

ile tanımlı $\left\|.\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir normlu uzay ve dolayısıyla Banach uzaydır.

Teorem 3.2.12. $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|.\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ normuna göre Banach $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* Teorem 3.2.9 in ispatındaki (3.2) eşitsizliğinden her $\lambda \in \mathbb{BC}$ ve her $s \in l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ için $\left\|\lambda s\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} \le \sqrt{2}\left\|\lambda\right\|_{\mathbb{BC}}\left\|s\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ eşitsizliği yazılır. Böylece $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülü normlu $\mathbb{BC}-$modüldür. Diğer yandan $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|.\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ normuna göre bir Banach uzay olduğu için $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|.\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ normuna göre Banach $\mathbb{BC}-$modüldür.

Teorem 3.2.13. $0 < p < \infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ bir bikompleks dizi uzayıdır.

*İspat:* $l_p\left(\mathbb{BC}\right) \subset w\left(\mathbb{BC}\right)$ olduğu tanımdan açıktır. Şimdi $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ kümesinin $w\left(\mathbb{BC}\right)$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu göstermek için herhangi iki $s = \left(s_k\right)$, $t = \left(t_k\right) \in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ dizisi ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı alınsın. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$ dur.

Önerme 2.2.6 i) şıkkından elde edilen

$$\left\|s_k + t_k\right\|_{\mathbb{BC}} \le \left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}} + \left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}} \le 2\max\left\{\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}, \left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}\right\}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|s_k + t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p &\le 2^p\left(\max\left\{\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}, \left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}\right\}\right)^p \\ &= 2^p \max\left\{\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p, \left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p\right\} \\ &\le 2^p\left(\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p + \left\|t_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\leq\sum_{k=1}^{\infty}2^{p}\left(\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}+\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)=2^{p}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}+\sum_{k=1}^{\infty}\|t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right]<\infty$$

elde edilir. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k+t_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}$ serisi yakınsaktır, yani $s+t\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ dir.

Diğer yandan $\alpha=0$ için $\alpha s\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ olduğu açıktır. Şimdi $\alpha\in\mathbb{C}-\{0\}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda Önerme 2.2.6 i) gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\alpha s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha|^{p}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}=|\alpha|^{p}\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}<\infty$$

olur. Bu ise $\alpha s\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ anlamına gelir. Böylece $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ kümesinin $w\left(\mathbb{BC}\right)$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu söylenir.

Teorem 3.2.14. $0<p<\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ kümesi, $w\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

*İspat:* $0<p<\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ kümesinin $w\left(\mathbb{BC}\right)$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu Teorem 3.2.13 de gösterilmişti. Ayrıca her $s=(s_k),\ t=(t_k)\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $\lambda\in\mathbb{BC}-\{0\}$ için Önerme 2.2.6 iii) gereği $0<p<1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\|\lambda s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}&\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{p}\|\lambda\|_{\mathbb{BC}}^{p}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\\&=\left(\sqrt{2}\right)^{p}\|\lambda\|_{\mathbb{BC}}^{p}\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\\&<\infty\end{aligned}\qquad\textbf{(3.5)}$$

ve $1\leq p<\infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\lambda s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}&\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{p}\|\lambda\|_{\mathbb{BC}}^{p}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\\&=\left(\sqrt{2}\right)\|\lambda\|_{\mathbb{BC}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}\\&<\infty\end{aligned}\qquad\textbf{(3.6)}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir, $\lambda = 0$ için ispat açıktır. Bu ise $\lambda s \in l_p(\mathbb{BC})$ anlamına gelir. Böylece $0 < p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümesi, $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

Teorem 3.2.15. Her $s = (s_k)$, $t = (t_k) \in l_p(\mathbb{BC})$ için

$$d_{l_p(\mathbb{BC})} : l_p(\mathbb{BC}) \times l_p(\mathbb{BC}) \to [0, \infty),$$

$$(s,t) \to d_{l_p(\mathbb{BC})}(s,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p, & 0 < p < 1 \\ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \end{cases}$$

ile tanımlı $d_{l_p(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_p(\mathbb{BC})$ üzerinde bir metrik belirtir ve dolayısıyla $\left(l_p(\mathbb{BC}), d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır. Üstelik $\left(l_p(\mathbb{BC}), d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam metrik uzaydır.

*İspat:* İlk olarak $l_p(\mathbb{BC})$ dizi uzayı $1 \le p < \infty$ durumunda ele alınsın. Her $s = (s_k)$, $t = (t_k) \in l_p(\mathbb{BC})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}} \ge 0$ olduğundan $d_{l_p(\mathbb{BC})}(s,t) \ge 0$ ve

$$d_{l_p(\mathbb{BC})}(s,t) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|t_k - s_k\|_{\mathbb{BC}}^p \right)^{1/p} = d_{l_p(\mathbb{BC})}(t,s)$$

dir. Yine

$$\begin{aligned} d_{l_p(\mathbb{BC})}(s,t) = 0 &\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p \right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p = 0 \\ &\Leftrightarrow \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}} = 0, \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow s_k = t_k, \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow s = t \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan her $s = (s_k)$, $t = (t_k)$, $u = (u_k) \in l_p(\mathbb{BC})$ için $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ normuna göre bikompleks Minkowski eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d_{l_p(\mathbb{BC})}(s,t) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k - t_k\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|(s_k - u_k) + (u_k - t_k)\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|(s_k - u_k)\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|(u_k - t_k)\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} \\
&= d_{l_p(\mathbb{BC})}(s,u) + d_{l_p(\mathbb{BC})}(u,t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $d_{l_p(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_p(\mathbb{BC})$ üzerinde bir metrik ve $\left(l_p(\mathbb{BC}), d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır.

Şimdi $\left(l_p(\mathbb{BC}), d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ metrik uzayının tam olduğu gösterilsin. $s_m = \left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi , $l_p(\mathbb{BC})$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, r \ge n_0(\varepsilon)$ için

$$
d_{l_p(\mathbb{BC})}(s_m, s_r) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k^m - s_k^r\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} < \varepsilon \qquad \textbf{(3.7)}
$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $m, r \ge n_0(\varepsilon)$ için $\|s_k^m - s_k^r\|_{\mathbb{BC}} < \varepsilon$ olur. Buradan $(s_k^m)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\left(\mathbb{BC}, \|.\|_{\mathbb{BC}}\right)$ uzayının tamlığından bu dizi bir $s_k^* \in \mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^* = (s_k^*) = (s_1^*, s_2^*, ..., s_k^*, ...)$ dizisi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m, r \ge n_0(\varepsilon)$ için (3.7) gereği $\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k^m - s_k^r\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} < \varepsilon$ olduğundan $r \to \infty$ için limit alınırsa; her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m \ge n_0(\varepsilon)$ için $\left(\sum_{k=1}^{n}\|s_k^m - s_k^*\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} \le \varepsilon$ dur. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_{l_p(\mathbb{BC})}(s_m, s^*) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k^m - s_k^*\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p} \le \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $(s_m) \subset l_p(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Ayrıca her $m \in \mathbb{N}$ için $\left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}} \in l_p(\mathbb{BC})$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}\|s_k^m\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$ dur. Ayrıca her $m \ge n_0(\varepsilon)$ için Önerme 2.2.6 i) şıkkından

$$
\begin{aligned}
\left\| s_k^* \right\|_{\mathbb{BC}}^p &= \left\| s_k^m + \left( s_k^* - s_k^m \right) \right\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&\le \left( \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}} + \left\| s_k^* - s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}} \right)^p \\
&\le \left( 2 \max \left\{ \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}, \left\| s_k^* - s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}} \right\} \right)^p \\
&= 2^p \max \left\{ \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p, \left\| s_k^* - s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p \right\} \\
&\le 2^p \left( \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p + \left\| s_k^* - s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece karşılaştırma testi gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k^* \right\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsak ve dolayısıyla $s^* = \left( s_k^* \right) = \left( s_1^*, s_2^*, ..., s_k^*, ... \right) \in l_p \left( \mathbb{BC} \right)$ dir. Sonuç olarak $\left( l_p \left( \mathbb{BC} \right), d_{l_p(\mathbb{BC})} \right)$ bir tam metrik uzaydır.

Şimdi de $l_p \left( \mathbb{BC} \right)$ dizi uzayı $0 < p < 1$ durumunda ele alınsın. Her $s = \left( s_k \right)$, $t = \left( t_k \right) \in l_p \left( \mathbb{BC} \right)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\left\| s_k - t_k \right\|_{\mathbb{BC}} \ge 0$ olduğundan $d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( s, t \right) \ge 0$ ve

$$
d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( s, t \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k - t_k \right\|_{\mathbb{BC}}^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| t_k - s_k \right\|_{\mathbb{BC}}^p = d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( t, s \right)
$$

dir. Yine

$$
\begin{aligned}
d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( s, t \right) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k - t_k \right\|_{\mathbb{BC}}^p = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\| s_k - t_k \right\|_{\mathbb{BC}}^p = 0, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \left\| s_k - t_k \right\|_{\mathbb{BC}} = 0, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow s_k = t_k, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow s = t
\end{aligned}
$$

olur. Diğer yandan her $s = \left( s_k \right)$, $t = \left( t_k \right)$, $u = \left( u_k \right) \in l_p \left( \mathbb{BC} \right)$ için Lemma 3.1.4 den

$$
\begin{aligned}
d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( s, t \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k - t_k \right\|_{\mathbb{BC}}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left( s_k - u_k \right) + \left( u_k - t_k \right) \right\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left( s_k - u_k \right) \right\|_{\mathbb{BC}}^p + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left( u_k - t_k \right) \right\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&= d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( s, u \right) + d_{l_p(\mathbb{BC})} \left( u, t \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $d_{l_p(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_p(\mathbb{BC})$ üzerinde bir metrik ve $\left(l_p(\mathbb{BC}), d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ bir metrik uzaydır.

Şimdi $\left(l_p(\mathbb{BC}), d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ metrik uzayının tam olduğu gösterilsin. $s_m = \left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi, $l_p(\mathbb{BC})$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, r \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$d_{l_p(\mathbb{BC})}(s_m, s_r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k^m - s_k^r \right\|_{\mathbb{BC}}^p < \varepsilon^p \qquad \textbf{(3.8)}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $m, r \geq n_0(\varepsilon)$ için $\left\| s_k^m - s_k^r \right\|_{\mathbb{BC}} < \varepsilon$ olur. Buradan $\left(s_k^m\right)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\left(\mathbb{BC}, \|.\|_{\mathbb{BC}}\right)$ uzayının tamlığından bu dizi bir $s_k^* \in \mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^* = \left(s_k^*\right) = \left(s_1^*, s_2^*, ..., s_m^*, ...\right)$ dizisi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m, r \geq n_0(\varepsilon)$ için (3.8) gereği $\sum_{k=1}^{n} \left\| s_k^m - s_k^r \right\|_{\mathbb{BC}}^p < \varepsilon^p$ olduğundan $r \to \infty$ için limit alınırsa; her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $\sum_{k=1}^{n} \left\| s_k^m - s_k^* \right\|_{\mathbb{BC}}^p \leq \varepsilon^p$ dur. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa; her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{l_p(\mathbb{BC})}\left(s_m, s^*\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k^m - s_k^* \right\|_{\mathbb{BC}}^p \leq \varepsilon^p$ elde edilir. Bu ise $(s_m) \subset l_p(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Ayrıca her $m \in \mathbb{N}$ için $\left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}} \in l_p(\mathbb{BC})$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p < \infty$ dur. Böylece her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için Önerme 2.2.6 i) ve Lemma 3.1.4 gereği

$$\begin{aligned} \left\| s_k^* \right\|_{\mathbb{BC}}^p &= \left\| s_k^m + \left(s_k^* - s_k^m\right) \right\|_{\mathbb{BC}}^p \\ &\leq \left( \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}} + \left\| s_k^* - s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}} \right)^p \\ &\leq \left\| s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p + \left\| s_k^* - s_k^m \right\|_{\mathbb{BC}}^p \end{aligned}$$

olup karşılaştırma testinden $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|s_k^*\right\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsak ve dolayısıyla $s^*=\left(s_k^*\right)=\left(s_1^*,s_2^*,...,s_m^*,...\right)\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ dir. Sonuç olarak $\left(l_p\left(\mathbb{BC}\right),d_{l_p(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam metrik uzaydır.

Sonuç 3.2.16. $0<p<1$ olmak üzere $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ bikompleks dizi uzayı; her $s=\left(s_k\right)\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ için

$$\left\|\left|s\right|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^p$$

ile tanımlı $\left\|\left|\cdot\right|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir $p-$normlu uzay ve $p-$Banach uzayıdır, bir normlu uzay değildir.

Tanım 3.2.17. $A,\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu cebir, $M,\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir $p-$normlu uzay olsun. Eğer $M$ bir sol (sağ) $A-$ modül ve her $a\in A$ ve her $m\in M$ için $\left\|\left|am\right|\right\|\le K\left\|a\right\|^p\left\|\left|m\right|\right\|$ $\left(\left\|\left|ma\right|\right\|\le K\left\|\left|m\right|\right\|\left\|a\right\|^p\right)$ olacak şekilde pozitif bir $K$ sabiti varsa $M$ lineer uzayına bir $p-$normlu sol (sağ) $A-$ modül denir. $M$ lineer uzayı hem $p-$normlu sol $A-$ modül hem de $p-$normlu sağ $A-$ modül ise $M$ ye bir $p-$normlu $A-$ bimodül ya da $p-$normlu $A-$ modül denir.

Bir $p-$normlu sol (sağ) $A-$ modül bir $p-$normlu uzay olarak tam ise bu modüle bir $p-$Banach sol (sağ) $A-$ modül denir. $M$ , hem $p-$Banach sol $A-$ modül hem de $p-$Banach sağ $A-$ modül ise $M$ lineer uzayına bir $p-$Banach $A-$ bimodül ya da $p-$Banach $A-$ modül denir.

Teorem 3.2.18. $0<p<1$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ $p-$normlu uzayı, $\left\|\left|\cdot\right|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ $p-$normuna göre $p-$Banach $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* $0<p<1$ olması durumunda $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ uzayı için Teorem 3.2.14 de elde edilen (3.5) eşitsizliğinden her $\lambda\in\mathbb{BC}$ ve $s\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ için $\left\|\left|\lambda s\right|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}\le\left(\sqrt{2}\right)^p\left\|\lambda\right\|_{\mathbb{BC}}^p\left\|\left|s\right|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ eşitsizliği yazılır. Böylece $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$, $p-$normlu uzayı $p-$normlu $\mathbb{BC}-$modüldür. Diğer yandan $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|\left\|.\right\|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ $p-$normuna göre bir $p-$Banach uzay olduğu için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|\left\|.\right\|\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ $p-$normuna göre $p-$Banach $\mathbb{BC}-$modüldür.

Sonuç 3.2.19. $1\leq p<\infty$ olmak üzere $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ bikompleks dizi uzayı; her $s=\left(s_k\right)\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ için

$$\left\|s\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|s_k\right\|_{\mathbb{BC}}^{p}\right)^{1/p}$$

ile tanımlı $\left\|.\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir normlu uzay ve Banach uzaydır.

Teorem 3.2.20. $1\leq p<\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ normlu uzayı, $\left\|.\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ normuna göre Banach $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* $1\leq p<\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ uzayı Teorem 3.2.14 de elde edilen (3.6) eşitsizliğinden her $\lambda\in\mathbb{BC}$ ve $s\in l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ için $\left\|\lambda s\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}\leq\sqrt{2}\left\|\lambda\right\|_{\mathbb{BC}}\left\|s\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ eşitsizliği yazılır. Böylece $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ normlu uzayı normlu $\mathbb{BC}-$modüldür. Diğer yandan $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|.\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ normuna göre bir Banach uzay olduğu için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|.\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ normuna göre Banach $\mathbb{BC}-$modüldür.

Bu kesimin devamında, hiperbolik değerli $\left\|.\right\|_{\mathbb{BC}}$ normu kullanılarak bikompleks terimli dizilerden oluşan $c\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $c_0\left(\mathbb{BC}\right)$ kümeleri tanımlanmış ve tamlık özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.2.21. Terimleri bikompleks sayılar olan yakınsak ve sıfır dizilerin kümesi;

$$c\left(\mathbb{BC}\right):=\left\{\zeta=\left(\zeta_n\right)\in w\left(\mathbb{BC}\right):\left(\zeta_n\right),\left\|.\right\|_{\mathbb{BC}}\text{ normuna göre } l^*\in\mathbb{BC}\text{ noktasına yakınsar}\right\},$$
$$c_0\left(\mathbb{BC}\right):=\left\{\zeta=\left(\zeta_n\right)\in w\left(\mathbb{BC}\right):\left(\zeta_n\right),\left\|.\right\|_{\mathbb{BC}}\text{ normuna göre 0 noktasına yakınsar}\right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.2.22. $c\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $c_0\left(\mathbb{BC}\right)$ kümeleri birer bikompleks dizi uzayıdır.

*İspat:* $c(\mathbb{BC}) \subset w(\mathbb{BC})$ ve $c_0(\mathbb{BC}) \subset w(\mathbb{BC})$ olduğu tanımdan açıktır. İlk olarak $c(\mathbb{BC})$ kümesinin $w(\mathbb{BC})$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu gösterilsin. Herhangi iki $s=(s_k), t=(t_k) \in c(\mathbb{BC})$ dizisi ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı alınsın. Bu durumda $\lim_{k\to\infty} s_k = l_1^*$ ve $\lim_{k\to\infty} t_k = l_2^*$ olacak şekilde $l_1^*, l_2^*$ bikompleks sayıları ve dolayısıyla herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq k_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left\| s_k - l_1^* \right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her $k \geq k_2(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left\| t_k - l_2^* \right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. $k_0(\varepsilon) = \max\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon)\}$ seçilirse; her $k \geq k_0(\varepsilon)$ için Önerme 2.2.6 i) den

$$\begin{aligned}\left\| (s_k + t_k) - (l_1^* + l_2^*) \right\|_{\mathbb{BC}} &= \left\| (s_k - l_1^*) + (t_k - l_2^*) \right\|_{\mathbb{BC}} \\ &\leq \left\| (s_k - l_1^*) \right\|_{\mathbb{BC}} + \left\| (t_k - l_2^*) \right\|_{\mathbb{BC}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\lim_{k\to\infty}(s_k + t_k) = l_1^* + l_2^*$ elde edilir. Bu ise $s + t \in c(\mathbb{BC})$ anlamına gelir.

Diğer yandan $\alpha = 0$ için $\alpha s \in c(\mathbb{BC})$ olduğu açıktır. Şimdi $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ olduğu kabul edilsin. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq k_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left\| s_k - l_1^* \right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

olacak şekilde $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $k \geq k_1(\varepsilon)$ için Önerme 2.2.6 i) den

$$\left\| (\alpha \cdot s_k) - (\alpha \cdot l_1^*) \right\|_{\mathbb{BC}} = \left\| \alpha \cdot (s_k - l_1^*) \right\|_{\mathbb{BC}} = |\alpha| \left\| s_k - l_1^* \right\|_{\mathbb{BC}} \leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

yazılır. Buradan $\lim_{k\to\infty} \alpha s_k = \alpha l_1^*$ elde edilir. Bu ise $\alpha s \in c(\mathbb{BC})$ anlamına gelir. Böylece $c(\mathbb{BC})$ kümesi $w(\mathbb{BC})$ vektör uzayının bir alt uzayıdır. Bu ispatta $l_1^* = l_2^* = 0$ alınırsa; $c_0(\mathbb{BC})$ kümesinin de $w(\mathbb{BC})$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.23. $c(\mathbb{BC})$ ve $c_0(\mathbb{BC})$ dizi uzayları $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre birer tam metrik uzaydır.

*İspat:* $s_m = \left(s_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi, $c(\mathbb{BC})$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, r \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s_m, s_r) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|s_k^m - s_k^r\right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $m, r \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left\|s_k^m - s_k^r\right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.9}$$

olur. Buradan $\left(s_k^m\right)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\left(\mathbb{BC}, \|.\|_{\mathbb{BC}}\right)$ uzayının tamlığından bu dizi bir $s_k^* \in \mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^* = \left(s_k^*\right) = \left(s_1^*, s_2^*, ..., s_k^*, ...\right)$ dizisi tanımlansın. (3.9) eşitsizliğinde $r \to \infty$ için limit alınırsa; her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $\left\|s_k^m - s_k^*\right\|_{\mathbb{BC}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ elde edilir. Buradan da her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}\left(s_m, s^*\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|s_k^m - s_k^*\right\|_{\mathbb{BC}} \leq \varepsilon$ olur. Bu ise $(s_m) \subset c(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin $s^* = \left(s_k^*\right) \in w(\mathbb{BC})$ dizisine yakınsadığını gösterir. Diğer yandan $\left(s_k^{n_0}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{BC})$ olduğundan bir Cauchy dizisidir ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $k, l \geq k_0(\varepsilon)$ için $\left\|s_k^{n_0} - s_l^{n_0}\right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $k, l \geq k_0(\varepsilon)$ için Önerme 2.2.6 i) gereği

$$\begin{aligned}\left\|s_k^* - s_l^*\right\|_{\mathbb{BC}} &= \left\|s_k^* - s_k^{n_0} + s_k^{n_0} - s_l^{n_0} + s_l^{n_0} - s_l^*\right\|_{\mathbb{BC}} \\ &\leq \left\|s_k^* - s_k^{n_0}\right\|_{\mathbb{BC}} + \left\|s_k^{n_0} - s_l^{n_0}\right\|_{\mathbb{BC}} + \left\|s_l^{n_0} - s_l^*\right\|_{\mathbb{BC}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

olup $s^* = \left(s_k^*\right)$ dizisi $\mathbb{BC}$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $\left(\mathbb{BC}, \|.\|_{\mathbb{BC}}\right)$ uzayının tamlığından bu dizi $\mathbb{BC}$ uzayında yakınsaktır, yani $s^* = \left(s_k^*\right) \in c\left(\mathbb{BC}\right)$ olur. Sonuç olarak $c\left(\mathbb{BC}\right)$ dizi uzayı $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir tam metrik uzaydır. Benzer şekilde $c_0\left(\mathbb{BC}\right)$ dizi uzayı da $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir tam metrik uzaydır.

Sonuç 3.2.24. $c\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $c_0\left(\mathbb{BC}\right)$ dizi uzayları, $\|.\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}$ normuna göre birer Banach uzayıdır.

### 3.3. $\|.\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri

Bu kesimde, ikinci bölümün birinci kesiminde tanımı verilen solid uzay, monoton uzay, $BK-$uzay, simetrik uzay kavramlarından yola çıkılarak bikompleks solid, bikompleks monoton, bikompleks $BK-$uzay ve bikompleks simetrik uzay kavramları tanımlanmış, $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $0 < p < \infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ bikompleks dizi uzaylarının gerekli şartlara sahip olup olmadıkları elde edilmiştir.

Tanım 3.3.1. $X$ bir bikompleks dizi uzayı ve

$$\tilde{X} := \left\{\left(s_n\right) \in w\left(\mathbb{BC}\right) : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \|s_n\|_{\mathbb{BC}} \leq \|t_n\|_{\mathbb{BC}} \text{ olacak şekilde } \left(t_n\right) \in X \text{ vardır}\right\}$$

olsun. Eğer $\tilde{X} \subset X$ ise $X$ dizi uzayına bikompleks solid ya da bikompleks normal uzay denir.

Tanım 3.3.2. $X$ bir bikompleks dizi uzayı, $A := \left\{\left(s_n\right) \in w\left(\mathbb{BC}\right) : s_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $M_0 = sp\{A\}$ olsun. Eğer $M_0 X \subset X$ ise $X$ dizi uzayına bikompleks monoton uzay denir.

Tanım 3.3.3. $X$ bir Banach bikompleks dizi uzayı olsun. Eğer $\zeta^{(n)} \to \zeta$ $\left(n \to \infty\right)$ iken her $l \in \mathbb{N}$ için $\zeta_l^{(n)} \to \zeta_l$ $\left(n \to \infty\right)$ oluyorsa $X$ dizi uzayına bikompleks $BK-$uzay denir.

Tanım 3.3.4. $X$ bir dizi uzayı ve $\pi := \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ birebir ve örten} \}$ olsun. Eğer $(s_n) \in X$ ve $\sigma \in \pi$ iken $s_\sigma = \left( s_{\sigma(n)} \right) \in X$ oluyorsa $X$ dizi uzayına bikompleks simetrik uzay denir.

Teorem 3.3.5. $l_\infty(\mathbb{BC})$ bir solid (normal) uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n) \in \tilde{l_\infty}(\mathbb{BC})$ alınsın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\|s_n\|_{\mathbb{BC}} \le \|t_n\|_{\mathbb{BC}}$ olacak şekilde $(t_n) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ vardır. Bu durumda $\sup\{\|t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}$ sonlu olduğundan $\sup\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}$ sonlu olup $(s_n) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ elde edilir. Böylece $\tilde{l_\infty}(\mathbb{BC}) \subset l_\infty(\mathbb{BC})$ olup $l_\infty(\mathbb{BC})$ solid uzaydır.

Teorem 3.3.6. $l_\infty(\mathbb{BC})$ bir monoton uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(\zeta_n) \in M_0 l_\infty(\mathbb{BC})$ alınsın. O halde $(\zeta_n) = (s_n t_n)$ olacak şekilde $(s_n) \in M_0$ ve $(t_n) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ dizileri vardır. Bu durumda $\sup\{\|t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}$ sonludur ve $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olduğundan $\sup\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}$ sayısı sonludur. Dolayısıyla Önerme 2.2.6 iii) ile elde edilen

$$\begin{aligned}\sup\{\|s_n t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\} &\le \sup\left\{\sqrt{2}\,\|s_n\|_{\mathbb{BC}}\,\|t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \sqrt{2}\sup\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}\sup\{\|t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

eşitliği gereği $\sup\{\|s_n t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\}$ sonludur. Bu ise $(\zeta_n) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.7. $l_\infty(\mathbb{BC})$ bir $BK-$uzaydır.

*İspat:* $n \to \infty$ için $\zeta^{(n)} \to \zeta$ olacak şekilde herhangi bir $\left(\zeta^{(n)}\right) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ alınsın. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \ge n_0$ için $\left\|\zeta^{(n)} - \zeta\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \ge n_0$ için $\sup\left\{\left\|\zeta_l^{(n)} - \zeta_l\right\|_{\mathbb{BC}} : l \in \mathbb{N}\right\} < \varepsilon$ olur. Buradan herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \ge n_0$ ve her $l \in \mathbb{N}$ için $\left\|\zeta_l^{(n)} - \zeta_l\right\|_{\mathbb{BC}} < \varepsilon$ yazılır. Bu ise her $l \in \mathbb{N}$ için $\left(\zeta_l^{(n)}\right)$

bikompleks sayı dizisinin $\zeta_l$ bikompleks sayısına yakınsadığını gösterir. Böylece koordinat fonksiyonlarının sürekliliği elde edilir.

Teorem 3.3.8. $l_\infty(\mathbb{BC})$ bir simetrik uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ ve $\sigma \in \pi$ alınsın. Bu durumda $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ birebir örten bir dönüşüm olduğundan $\left\{\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ dir. Buradan $\sup\left\{\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ eşitliği yazılır. Dolayısıyla $\sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sonlu olduğundan $\sup\left\{\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sonludur. O halde $\left(s_{\sigma(n)}\right) \in l_\infty(\mathbb{BC})$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.9. $0 < p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ bir solid (normal) uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n) \in l_p(\tilde{\mathbb{BC}})$ alınsın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\|s_n\|_{\mathbb{BC}} \leq \|t_n\|_{\mathbb{BC}}$ olacak şekilde $(t_n) \in l_p(\mathbb{BC})$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p \leq \|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ yazılır. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} \|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma tesi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsak olup $(s_n) \in l_p(\mathbb{BC})$ elde edilir. Böylece $l_p(\tilde{\mathbb{BC}}) \subset l_p(\mathbb{BC})$ olup $l_p(\mathbb{BC})$ solid uzaydır.

Teorem 3.3.10. $0 < p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ bir monoton uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(\zeta_n) \in M_0 l_p(\mathbb{BC})$ alınsın. O halde $(\zeta_n) = (s_n t_n)$ olacak şekilde $(s_n) \in M_0$ ve $(t_n) \in l_p(\mathbb{BC})$ dizileri vardır. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsak ve $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olduğu için $\sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve dolayısıyla $\sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p : n \in \mathbb{N}\right\}$ sayısı sonludur. Buradan Önerme 2.2.6 iii) gereği

$$\|s_n t_n\|_{\mathbb{BC}}^p \leq \sqrt{2}\, \|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p \|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p \leq \sqrt{2} \sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p : n \in \mathbb{N}\right\} \|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$$

olup karşılaştırma testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsaktır. Bu ise $(\zeta_n)=(s_n t_n)\in l_p(\mathbb{BC})$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.11. $1\leq p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ bir $BK-$uzaydır.

*İspat:* $n\to\infty$ için $\zeta^{(n)}\to\zeta$ olacak şekilde herhangi bir $\left(\zeta^{(n)}\right)\in l_p(\mathbb{BC})$ alınsın. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde her $n\geq n_0$ için $\left\|\zeta^{(n)}-\zeta\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde her $n\geq n_0$ için $\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left\|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right\|_{\mathbb{BC}}^p\right)^{1/p}<\varepsilon$ olur. Buradan herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde her $n\geq n_0$ ve her $l\in\mathbb{N}$ için $\left\|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right\|_{\mathbb{BC}}^p<\varepsilon^p$ ve dolayısıyla $\left\|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right\|_{\mathbb{BC}}<\varepsilon$ yazılır. Bu ise her $l\in\mathbb{N}$ için $\left(\zeta_l^{(n)}\right)$ bikompleks sayı dizisinin $\zeta_l$ bikompleks sayısına yakınsadığını gösterir. Böylece koordinat fonksiyonlarının sürekliliği elde edilir.

Teorem 3.3.12. $0<p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ bir simetrik uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n)\in l_p(\mathbb{BC})$ ve $\sigma\in\pi$ alınsın. Bu durumda $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ birebir örten bir dönüşüm olduğundan $\left\{\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}$ ve dolayısıyla $\left\{\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}}^p:n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p:n\in\mathbb{N}\right\}$ dir. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}}^p=\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ eşitliği yazılır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|s_{\sigma(n)}\right\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi de yakınsaktır. O halde $\left(s_{\sigma(n)}\right)\in l_p(\mathbb{BC})$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.13. $l_\infty(\mathbb{BC})$ ayrılabilir uzay değildir.

*İspat:* $s=(s_n)$, terimleri 0 veya $j$ olan bir dizi ise $(s_n)\in l_\infty(\mathbb{BC})$ olur. $E=\{s=(s_n):(s_n)$ dizisinin terimleri 0 veya $j\}$ olsun. $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesinin alt kümelerinin kümesine $\Lambda$ denilirse; $\Lambda$ kümesinin kuvveti $\mathbb{Z}^+$ nın kuvvetinden, yani $\aleph_0$ dan büyüktür. Dolayısıyla $\Lambda$ ile $\mathbb{Z}^+$ denk olamaz, yani $\Lambda$ sayılabilir değildir.

Şimdi $\Lambda$ ile $E$ kümesinin denk olduğu gösterilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = \begin{cases} 0, & n \in A \\ j, & n \in \mathbb{Z}^+ - A \end{cases}$ olmak üzere $f : \Lambda \to E,\ A \to f(A) = (s_n)$ fonksiyonu tanımlansın. $f$ fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek için herhangi iki $A, B \in \Lambda$ alınsın ve $f(A) = f(B)$ olduğu kabul edilsin. $f(A) = (s_n)$ ve $f(B) = (t_n)$ denilirse; her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = t_n$ olur. O zaman tanım gereği $A = B$ olmak zorundadır, çünkü bir $n_0 \in A$ için $n_0 \notin B$ olsaydı $x_{n_0} = 0$ ve $t_{n_0} = j$ olurdu. Bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = t_n$ kabulü ile çelişirdi. Dolayısıyla $A = B$ dir. Şimdi ise $f$ fonksiyonunun örten olduğunu göstermek için herhangi bir $(s_n) \in E$ alınsın. $(s_n)$ dizisinin $0$ olan terimlerinin indislerinin oluşturduğu kümeye $I$ denilirse; $I \in \Lambda$ ve $f(I) = (s_n)$ olur. Buradan $f$ fonksiyonunun örten olduğu elde edilir. Böylece aralarında birebir örten bir fonksiyon bulunabildiği için $\Lambda$ ile $E$ denktir ve kuvvetleri eşittir. Bu halde $E$ kümesinin kuvveti de $\aleph_0$ dan büyüktür. Dolayısıyla $E$ ile $\mathbb{Z}^+$ kümeleri de denk olamaz, yani $E$ sayılabilir değildir.

Şimdi birbirinden farklı iki $s = (s_n), t = (t_n) \in E$ dizisi alınsın. Bu durumda $d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t) = \sup\left\{\|s_n - t_n\|_{\mathbb{BC}} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$ olmak zorundadır. Herhangi bir $s \in E$ için $B\left(s, \frac{1}{2}\right)$ açık yuvarı ele alınırsa;

$$B\left(s,\frac{1}{2}\right) = \left\{t \in l_\infty(\mathbb{BC}) : d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t) < \frac{1}{2}\right\} = \left\{t \in l_\infty(\mathbb{BC}) : d_{l_\infty(\mathbb{BC})}(s,t) = 0\right\} = \{s\}$$

olduğundan $\bigcup_{s \in E} B\left(s, \frac{1}{2}\right) = E$ ve $s \neq t$ için $B\left(s, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(t, \frac{1}{2}\right) = \varnothing$ dir. Dolayısıyla $E$ kümesi ayrık açık yuvarların sayılabilir olmayan sonsuz birleşimi olarak yazılabilir.

Şimdi $M$ kümesi $l_\infty(\mathbb{BC})$ uzayının her yerde yoğun bir alt kümesi, yani $\overline{M} = l_\infty(\mathbb{BC})$ olsun. Bu durumda her $s \in E$ için $s \in l_\infty(\mathbb{BC})$ olduğundan $s = (s_n) \in \overline{M}$ dır. Burada kapanış tanımı kullanılırsa her $\varepsilon > 0$ için $B(s, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ olduğu söylenir. Bu ifade $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için de doğrudur. $B\left(s, \frac{1}{2}\right) = \{s\}$ olduğundan $s \in M$ olmak zorundadır. Bu durumda $E \subset M$ elde edilir. $E$ kümesi sayılabilir olmadığından $M$ kümesi de sayılabilir değildir. Dolayısıyla $l_\infty(\mathbb{BC})$ uzayının her yerde yoğun olan hiçbir alt kümesi sayılabilir olamaz. Sonuç olarak $l_\infty(\mathbb{BC})$ ayrılabilir değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.14. $2 \le p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ ayrılabilir uzaydır.

*İspat:* $2 \le p < \infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ uzayının ayrılabilir uzay olduğunun gösterilmesi için her yerde yoğun olan sayılabilir bir alt kümesi bulunmalıdır. Bu kümenin, $S = \{z = a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olmak üzere

$$M = \left\{\zeta \in l_p(\mathbb{BC}) : \zeta = (\zeta_n) = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n, 0, 0, ...), \zeta_l = a_l e_1 + b_l e_2,\ a_l, b_l \in S, l = 1, 2, ..., n\right\}$$

kümesi olduğu iddia edilsin. Bir

$$\begin{aligned} &f : S^2 \times S^2 \times ... \times S^2 \to M, \\ &(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) \to \\ &f(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) = (a_1 e_1 + b_1 e_2, a_2 e_1 + b_2 e_2, ..., a_n e_1 + b_n e_2, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. $f$ fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek için herhangi iki $(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n), (c_1, d_1, c_2, d_2, ..., c_n, d_n) \in S^2 \times S^2 \times ... \times S^2$ alınsın ve $f(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) = f(c_1, d_1, c_2, d_2, ..., c_n, d_n)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $(a_1 e_1 + b_1 e_2, a_2 e_1 + b_2 e_2, ..., a_n e_1 + b_n e_2, 0, 0, ...) = (c_1 e_1 + d_1 e_2, c_2 e_1 + d_2 e_2, ..., c_n e_1 + d_n e_2, 0, 0, ...)$ ve dolayısıyla her $l \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_l e_1 + b_l e_2 = c_l e_1 + d_l e_2$ olur. Bu ise Teorem 2.2.15 xi) gereği her $l \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_l = c_l$ ve $b_l = d_l$ eşitliklerini gerektirir. O zaman $(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) = (c_1, d_1, c_2, d_2, ..., c_n, d_n)$ olmak zorundadır.

Şimdi ise $f$ fonksiyonunun örten olduğunu göstermek için herhangi bir $(a_1 e_1 + b_1 e_2, a_2 e_1 + b_2 e_2, ..., a_n e_1 + b_n e_2, 0, 0, ...) \in M$ alınsın. Her $l \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_l, b_l \in S$ olduğundan $(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) \in S^2 \times S^2 \times ... \times S^2$ için $f(a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) = (a_1 e_1 + b_1 e_2, a_2 e_1 + b_2 e_2, ..., a_n e_1 + b_n e_2, 0, 0, ...)$ olup $f$ fonksiyonu örtendir. Böylece $S^2 \times S^2 \times ... \times S^2$ ile $M$ kümeleri denktir. $S$ kümesi sayılabilir olduğundan $S^{2n}$ yani $S^2 \times S^2 \times ... \times S^2$ kümesinin de sayılabilir olduğu biliniyor. Bu durumda $M$ kümesi sayılabilirdir.

Şimdi de $\overline{M} = l_p(\mathbb{BC})$ olduğu ispatlansın. Bunun için herhangi bir $\zeta = (\zeta_n) \in l_p(\mathbb{BC})$ alınsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisi yakınsaktır ve dolayısıyla $R_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} \|\zeta_l\|_{\mathbb{BC}}^p$ olmak üzere $n \to \infty$ için $R_n \to 0$ dır. Buradan her $\varepsilon > 0$ için her $n \geq n_0$ olduğunda $\|R_n - 0\|_{\mathbb{BC}} = \sum_{l=n+1}^{\infty} \|\zeta_l\|_{\mathbb{BC}}^p = \sum_{l=n+1}^{\infty} \|a_l e_1 + b_l e_2\|_{\mathbb{BC}}^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısının var olduğu söylenir.

Diğer yandan her $l \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_l, b_l \in \mathbb{C} = \overline{S}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $B(a_l, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing$ ve $B(b_l, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing$ dur. Yani her $\varepsilon > 0$ için $c_l \in B(a_l, \varepsilon)$ ve $d_l \in B(b_l, \varepsilon)$ olacak şekilde $c_l, d_l \in S$ vardır. Buradan da her $\varepsilon > 0$ için $|a_l - c_l| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n_0}}$ ve $|b_l - d_l| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n_0}}$ yazılabilir. O halde

$$\sum_{l=1}^{n_0} |a_l - c_l|^p < \sum_{l=1}^{n_0} \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n_0}} \right)^p = \sum_{l=1}^{n_0} \frac{\varepsilon^p}{2n_0} = \frac{\varepsilon^p}{2}$$

ve

$$\sum_{l=1}^{n_0} |b_l - d_l|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

dir. Böylece $\psi = \left(c_1 e_1 + d_1 e_2, c_2 e_1 + d_2 e_2, ..., c_{n_0} e_1 + d_{n_0} e_2, 0, 0, ...\right) \in M$ için Önerme 2.2.15 ii) ve (2.4) eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}
\|\zeta - \psi\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \|\zeta_n - \psi_n\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \|\zeta_n - \psi_n\|_{\mathbb{BC}}^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\zeta_n - \psi_n\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \|\zeta_n - \psi_n\|_{\mathbb{BC}}^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathbb{BC}}^p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left\| \zeta_n - \psi_n \right\|_{\mathbb{BC}}^p + R_{n_0} \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left\| \left( a_n e_1 + b_n e_2 \right) - \left( c_n e_1 + d_n e_2 \right) \right\|_{\mathbb{BC}}^p + R_{n_0} \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left\| \left( a_n - c_n \right) e_1 + \left( b_n - d_n \right) e_2 \right\|_{\mathbb{BC}}^p + R_{n_0} \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left| a_n - c_n \right|^2 + \left| b_n - d_n \right|^2} \right)^p + R_{n_0} \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\left( \sqrt{2} \right)^p} 2^{\frac{p-2}{2}} \left( \left| a_n - c_n \right|^p + \left| b_n - d_n \right|^p \right) + R_{n_0} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \left( \left| a_n - c_n \right|^p + \left| b_n - d_n \right|^p \right) + R_{n_0} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \left| a_n - c_n \right|^p + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \left| b_n - d_n \right|^p + R_{n_0} \\
&< \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \\
&= \varepsilon^p
\end{aligned}
$$

olup $\left\| \zeta - \psi \right\|_{l_p(\mathbb{BC})} < \varepsilon$ elde edilir. Böylece $M$ kümesi $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ nin her yerde yoğun sayılabilir bir alt kümesidir. O halde $2 \leq p < \infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ ayrılabilirdir.

### 3.4. $\left\| \cdot \right\|_{\mathbb{BC}}$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Geometrik Özellikleri

Bu kesimde, bikompleks sayılar kümesinin, $0 < p < \infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $l_\infty\left(\mathbb{BC}\right)$ kümelerinin üçü de birer geometrik özellik olan konvekslik, kesin konvekslik ve düzgün konvekslik şartlarını sağlayıp sağlamadıkları gösterilmiştir.

Teorem 3.4.1. $\mathbb{BC}$ ve $w\left(\mathbb{BC}\right)$ kümeleri konvekstir.

*İspat:* $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi konveks olduğundan her $s = s_1 + js_2, t = t_1 + jt_2 \in \mathbb{BC}$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\lambda s + (1-\lambda) t &= \lambda \left( s_1 + js_2 \right) + (1-\lambda)\left( t_1 + jt_2 \right) \\
&= \left( \lambda s_1 + (1-\lambda) t_1 \right) + j \left( \lambda s_2 + (1-\lambda) t_2 \right)
\end{aligned}
$$

ve $\lambda s_1+(1-\lambda)t_1, \lambda s_2+(1-\lambda)t_2 \in \mathbb{C}$ olup $\lambda s+(1-\lambda)t \in \mathbb{BC}$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{BC}$ bikompleks sayılar kümesi konvekstir.

Her $s=(s_n)=s_1+js_2=(s_{1n}+js_{2n}), t=(t_n)=t_1+jt_2=(t_{1n}+jt_{2n}) \in w(\mathbb{BC})$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}\lambda s+(1-\lambda)t &= \lambda(s_1+js_2)+(1-\lambda)(t_1+jt_2)\\ &=(\lambda s_1+(1-\lambda)t_1)+j(\lambda s_2+(1-\lambda)t_2)\\ &=(\lambda(s_{1n})+(1-\lambda)(t_{1n}))+j(\lambda(s_{2n})+(1-\lambda)(t_{2n}))\\ &=(\lambda s_{1n}+(1-\lambda)t_{1n})+j(\lambda s_{2n}+(1-\lambda)t_{2n})\end{aligned}$$

ve $\lambda s_{1n}+(1-\lambda)t_{1n}, \lambda s_{2n}+(1-\lambda)t_{2n} \in \mathbb{C}$ olduğundan $\lambda s+(1-\lambda)t \in w(\mathbb{BC})$ dir. Dolayısıyla $w(\mathbb{BC})$ bikompleks sayılar kümesi konvekstir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2. $\mathbb{BC}$ kümesi düzgün ve kesin konvekstir.

*İspat:* $s,t \in \mathbb{BC}$, $\varepsilon \in (0,2]$, $\|s\|_{\mathbb{BC}} \le 1$, $\|s\|_{\mathbb{BC}} \le 1$ ve $\varepsilon \le \|s-t\|_{\mathbb{BC}}$ olsun. O halde Lemma 3.1.5 gereği

$$\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^2 = 2\left(\|s\|_{\mathbb{BC}}^2+\|t\|_{\mathbb{BC}}^2\right)-\|s-t\|_{\mathbb{BC}}^2 \le 4-\varepsilon^2$$

ve böylece

$$\left\|\frac{s+t}{2}\right\|_{\mathbb{BC}} = \left[\frac{1}{2^2}\|s+t\|_{\mathbb{BC}}^2\right]^{1/2} \le \left[\frac{1}{2^2}(4-\varepsilon^2)\right]^{1/2} \le \left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

olur. Burada $\delta(\varepsilon)=1-\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right]^{1/2}$ alınırsa; $\mathbb{BC}$ kümesi düzgün konveks ve dolayısıyla Teorem 2.1.12 gereği kesin konvekstir.

Lemma 3.4.3. $1<p<\infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$, her $\lambda \in (0,1)$ ve $s \ne t$ olan her $s,t \in \mathbb{BC}$ için

$$\|\lambda s+(1-\lambda)t\|_{\mathbb{BC}}^p < \lambda\|s\|_{\mathbb{BC}}^p+(1-\lambda)\|t\|_{\mathbb{BC}}^p$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* Önerme 2.1.11 ve Torem 3.4.2 gereği ispat açıktır.

Teorem 3.4.4. $0<p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ ve $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümeleri konvekstir.

*İspat:* $s=(s_k), t=(t_k)\in l_p(\mathbb{BC})$ ve $\lambda\in[0,1]$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serileri yakınsaktır. Böylece Lemma 2.2.6 i) şıkkından elde edilen

$$\begin{aligned}\|\lambda s_n+(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}^p &\le \left(\|\lambda s_n\|_{\mathbb{BC}}+\|(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}\right)^p\\ &\le \left(2\max\left\{\|\lambda s_n\|_{\mathbb{BC}},\|(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}\right\}\right)^p\\ &= 2^p\max\left\{\|\lambda s_n\|_{\mathbb{BC}}^p,\|(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}^p\right\}\\ &\le 2^p\left(\|\lambda s_n\|_{\mathbb{BC}}^p+\|(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}^p\right)\end{aligned}$$

ifadesi ve karşılaştırma testi kullanılırsa $\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda s_n+(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}^p$ serisinin yakınsaklığı elde edilir. O halde $\lambda s+(1-\lambda)t\in l_p(\mathbb{BC})$ olup $0<p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümesi konvekstir.

Şimdi de $s=(s_k)$, $t=(t_k)\in l_\infty(\mathbb{BC})$ ve $\lambda\in[0,1]$ olsun. Bu durumda $\sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}$ ve $\sup\left\{\|t_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}$ sayıları sonludur. Böylece

$$\begin{aligned}\sup\left\{\|\lambda s_n+(1-\lambda)t_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\} &\le \sup\left\{\lambda\|s_n\|_{\mathbb{BC}}+(1-\lambda)\|t_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}\\ &= \lambda\sup\left\{\|s_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}+(1-\lambda)\sup\left\{\|t_n\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lambda s+(1-\lambda)t\in l_\infty(\mathbb{BC})$ elde edilir. Böylece $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesi konvekstir.

Teorem 3.4.5. $1<p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümesi kesin konvekstir.

*İspat:* $s=(s_n)$, $t=(t_n)\in S_{l_p(\mathbb{BC})}$, $s\neq t$ ve $\lambda\in(0,1)$ olsun. O halde Lemma 3.4.3 gereği

$$
\begin{aligned}
\left\|\lambda s+(1-\lambda)t\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\lambda s_n+(1-\lambda)t_n\right\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&< \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\left\|s_n\right\|_{\mathbb{BC}}^p+(1-\lambda)\left\|t_n\right\|_{\mathbb{BC}}^p\right] \\
&= \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left\|s_n\right\|_{\mathbb{BC}}^p+(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\left\|t_n\right\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&= \lambda\left\|s\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p+(1-\lambda)\left\|t\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p=1
\end{aligned}
$$

olup $1<p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümesi kesin konvekstir.

*Örnek 3.4.6.* $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesi kesin konveks değildir.

*Çözüm:* $s=(s_n)=(1,j,0,0,...)$ ve $t=(t_n)=(-1,j,0,0,...)$ olsun. Bu durumda $\|s\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}=\|t\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}=1$ ve her $\lambda\in(0,1)$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|\lambda s+(1-\lambda)t\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} &= \sup\left\{\left\|\lambda s_n+(1-\lambda)t_n\right\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\} \\
&= \sup\left\{\left\|(2\lambda-1,j,0,0,...)\right\|_{\mathbb{BC}}:n\in\mathbb{N}\right\} \\
&= \sup\left\{|2\lambda-1|,1\right\}=1
\end{aligned}
$$

dir. Bu ise $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesinin kesin konveks olmadığını gösterir.

*Örnek 3.4.7.* $l_1(\mathbb{BC})$ kümesi kesin konveks değildir.

*Çözüm:* $s=(s_n)=(i,0,0,...)$ ve $t=(t_n)=(0,-i,0,0,...)$ olsun. Bu durumda $\|s\|_{l_1(\mathbb{BC})}=\|t\|_{l_1(\mathbb{BC})}=1$ ve her $\lambda\in(0,1)$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|\lambda s+(1-\lambda)t\right\|_{l_1(\mathbb{BC})} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\lambda s_n+(1-\lambda)t_n\right\|_{\mathbb{BC}} \\
&= \left\|\lambda i\right\|_{\mathbb{BC}}+\left\|(1-\lambda)(-i)\right\|_{\mathbb{BC}} \\
&= \lambda+(1-\lambda)=1
\end{aligned}
$$

dir. Bu ise $l_1(\mathbb{BC})$ kümesi kesin konveks olmadığını gösterir.

Teorem 3.4.8. $2\le p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümesi düzgün konvekstir.

*İspat:* $s=(s_k), t=(t_k)\in l_p(\mathbb{BC})$, $\varepsilon\in(0,2]$, $\|s\|_{l_p(\mathbb{BC})}\le 1$, $\|t\|_{l_p(\mathbb{BC})}\le 1$ ve $\varepsilon\le\|s-t\|_{l_p(\mathbb{BC})}$ olsun. O halde Lemma 3.1.6 gereği

$$\begin{aligned}
\|s+t\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p+\|s-t\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\|s_n+t_n\|_{\mathbb{BC}}^p+\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n-t_n\|_{\mathbb{BC}}^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\|s_n+t_n\|_{\mathbb{BC}}^p+\|s_n-t_n\|_{\mathbb{BC}}^p\right) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}2^{p-1}\left(\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p+\|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p\right) \\
&= 2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n\|_{\mathbb{BC}}^p+\sum_{n=1}^{\infty}\|t_n\|_{\mathbb{BC}}^p\right) \\
&= 2^{p-1}\left(\|s\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p+\|t\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p\right)\le 2^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|s+t\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p\le 2^p-\|s-t\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p\le 2^p-\varepsilon^p$$

ve dolayısıyla

$$\left\|\frac{s+t}{2}\right\|_{l_p(\mathbb{BC})}=\left[\frac{1}{2^p}\|s+t\|_{l_p(\mathbb{BC})}^p\right]^{1/p}\le\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}$$

yazılır. $\delta(\varepsilon)=1-\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}$ alınırsa; $2\le p<\infty$ için $l_p(\mathbb{BC})$ kümesinin düzgün konveks olduğu elde edilir.

*Örnek 3.4.9.* $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesi düzgün konveks değildir.

*Çözüm:* $s=(s_n)=(i,j,i,0,0,...)$ ve $t=(t_n)=(i,j,-i,0,0,...)$ olsun. Bu durumda $\|s\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}=\|t\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}=1$,

$$\begin{aligned}
\|s-t\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} &= \sup\left\{\|s_n-t_n\|_{\mathbb{BC}} : n\in\mathbb{N}\right\} \\
&= \sup\left\{\|(0,0,2i,0,0,...)\|_{\mathbb{BC}} : n\in\mathbb{N}\right\} \\
&= \sup\{0,2\}=2
\end{aligned}$$

ve $\varepsilon\le\|s-t\|_{l_\infty(\mathbb{BC})}=2$ dir. Diğer yandan

$$\left\|\frac{s+t}{2}\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} = \sup\left\{\left\|\frac{s_n+t_n}{2}\right\|_{\mathbb{BC}} : n\in\mathbb{N}\right\}$$
$$= \sup\left\{\left\|\left(i, j, 0, 0, ...\right)\right\|\right\} = 1$$

olduğundan $\left\|\frac{s+t}{2}\right\|_{l_\infty(\mathbb{BC})} \leq 1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ bulunamaz. Bu ise $l_\infty(\mathbb{BC})$ kümesinin kesin konveks olmadığını gösterir.

*Örnek 3.4.10.* $l_1(\mathbb{BC})$ kümesi düzgün konveks değildir.

*Çözüm:* $s=(s_n)=(i,0,0,...)$ ve $t=(t_n)=(0,-j,0,0,...)$ olsun. Bu durumda $\|s\|_{l_1(\mathbb{BC})} = \|t\|_{l_1(\mathbb{BC})} = 1$ ,

$$\|s-t\|_{l_1(\mathbb{BC})} = \sum_{n=1}^{\infty}\|s_n-t_n\|_{\mathbb{BC}} = \|i\|_{\mathbb{BC}} + \|-j\|_{\mathbb{BC}} = 2$$

ve $\varepsilon \leq \|s-t\|_{l_1(\mathbb{BC})} = 2$ dir. Diğer yandan

$$\left\|\frac{s+t}{2}\right\|_{l_1(\mathbb{BC})} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{s_n+t_n}{2}\right\|_{\mathbb{BC}} = \left\|\frac{i}{2}\right\|_{\mathbb{BC}} + \left\|\frac{-j}{2}\right\|_{\mathbb{BC}} = 1$$

olduğundan $\left\|\frac{s+t}{2}\right\|_{l_1(\mathbb{BC})} \leq 1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ bulunamaz. Bu ise $l_1(\mathbb{BC})$ kümesi düzgün konveks olmadığını gösterir.

# 4. HİPERBOLİK DEĞERLİ $|.|_k$ NORMUNA GÖRE BİKOMPLEKS DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, birinci kesimde, bir bikompleks sayının bikompleks kuvveti tanımlanarak başta Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri olmak üzere kompleks sayıların modülünü içeren bazı eşitsizliklerin bikompleks anlamda hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre geçerliliği araştırılmıştır. İkinci kesimde, $|.|_k$ normuna göre bikompleks dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların metrik ve norm yapısı incelenmiş ve tamlık özelliği irdelenmiştir. Ayrıca bu uzayların hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D},.}$ normuna göre $\mathbb{D}-$ normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modül olup olmadıkları araştırılmıştır. Üçüncü kesimde, solid uzay, monoton uzay, $BK-$uzay ve simetrik uzay kavramları hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre yeniden tanımlanıp $|.|_k$ normuna göre bikompleks dizi uzaylarında bu özelliklerin sağlanıp sağlanmadığı tartışılmıştır. Dördüncü kesimde, Kumar ve Saini (2016) tarafından verilen $\mathbb{BC}-$konveks küme tanımına dayanılarak $\mathbb{BC}-$kesin konveks ve $\mathbb{BC}-$düzgün konveks küme kavramları tanımlanmış ve $|.|_k$ normuna göre bikompleks dizi uzaylarının $\mathbb{BC}-$konveks, $\mathbb{BC}-$kesin konveks ve $\mathbb{BC}-$düzgün konveks küme olup olmadıkları ispatlanmıştır. Beşinci ve son kesimde ise, $\mathbb{D}-$topolojik dual kavramı tanımlanmış ve buna göre bikompleks dizi uzaylarının $\mathbb{D}-$topolojik dualleri bulunmuştur.

## 4.1. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bazı Bikompleks Eşitsizlikler

Bu kesimde, ilk olarak bir kompleks sayının kompleks kuvveti tanımından yola çıkılarak bir bikompleks sayının bikompleks kuvveti tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1. $z,\alpha \in \mathbb{BC}$ ve $z \neq 0$ olsun. O halde $z^\alpha$ bikompleks kuvveti $z^\alpha = e^{\alpha Lnz}$ ile tanımlanır. $Lnz$ bikompleks logaritması çok değerli olduğundan $z^\alpha$ sonsuz değerli bir kümedir. $Lnz$ yerine, bikompleks logaritmanın esas değeri $lnz$ kullanılarak $z^\alpha$ bikompleks kuvvetine tek bir değer karşılık getirilebilir. Bikompleks kuvvetin bu özel değerine $z^\alpha$ nın esas değeri denir. O halde $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ ile tanımlı fonksiyona $z^\alpha$ bikompleks kuvvetin esas değeri denir.

Not 4.1.2. $z,\alpha \in \mathbb{BC}$ ve $z \neq 0$ olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ ve $z = z_1 e_1 + z_2 e_2$ için

$$
\begin{aligned}
z^{\alpha} &= e^{\alpha Lnz} = e^{(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2)(Ln(z_1)e_1+Ln(z_2)e_2)} \\
&= e^{\alpha_1 Ln(z_1)e_1+\alpha_2 Ln(z_2)e_2} \\
&= e^{\alpha_1 Ln(z_1)}e_1+e^{\alpha_2 Ln(z_2)}e_2 \\
&= z_1^{\alpha_1}e_1+z_2^{\alpha_2}e_2
\end{aligned}
$$

ve özel olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $z^{\alpha}=z_1^{\alpha}e_1+z_2^{\alpha}e_2$ dir.

Bu kesimin devamında, ikinci bölümün birinci kesiminde verilen kompleks sayıları ve kompleks sayıların modülünü içeren bazı eşitsizlikler hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bikompleks sayılara genelleştirilmiştir.

Lemma 4.1.3. Her $s,t \in \mathbb{BC}$ için

$$
\frac{|s+t|_k}{1+|s+t|_k} \precsim \frac{|s|_k}{1+|s|_k}+\frac{|t|_k}{1+|t|_k}
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $s_1,t_1,s_2,t_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $s=s_1e_1+s_2e_2$, $t=t_1e_1+t_2e_2$ için Teorem 2.2.15 ix), ii), x) şıkları ve (2.5) eşitsizliği gereği

$$
\begin{aligned}
\frac{|s+t|_k}{1+|s+t|_k} &= \frac{|(s_1+t_1)e_1+(s_2+t_2)e_2|_k}{1+|(s_1+t_1)e_1+(s_2+t_2)e_2|_k} = \frac{|s_1+t_1|e_1+|s_2+t_2|e_2}{e_1+e_2+|s_1+t_1|e_1+|s_2+t_2|e_2} \\
&= \frac{|s_1+t_1|e_1+|s_2+t_2|e_2}{(1+|s_1+t_1|)e_1+(1+|s_2+t_2|)e_2} = \frac{|s_1+t_1|}{1+|s_1+t_1|}e_1+\frac{|s_2+t_2|}{1+|s_2+t_2|}e_2 \\
&\precsim \left(\frac{|s_1|}{1+|s_1|}+\frac{|t_1|}{1+|t_1|}\right)e_1+\left(\frac{|s_2|}{1+|s_2|}+\frac{|t_2|}{1+|t_2|}\right)e_2 \\
&= \left(\frac{|s_1|}{1+|s_1|}e_1+\frac{|s_2|}{1+|s_2|}e_2\right)+\left(\frac{|t_1|}{1+|t_1|}e_1+\frac{|t_2|}{1+|t_2|}e_2\right) \\
&= \frac{|s_1|e_1+|s_2|e_2}{(1+|s_1|)e_1+(1+|s_2|)e_2}+\frac{|t_1|e_1+|t_2|e_2}{(1+|t_1|)e_1+(1+|t_2|)e_2} \\
&= \frac{|s_1|e_1+|s_2|e_2}{e_1+e_2+|s_1|e_1+|s_2|e_2}+\frac{|t_1|e_1+|t_2|e_2}{e_1+e_2+|t_1|e_1+|t_2|e_2} \\
&= \frac{|s_1e_1+s_2e_2|_k}{1+|s_1e_1+s_2e_2|_k}+\frac{|t_1e_1+t_2e_2|_k}{1+|t_1e_1+t_2e_2|_k} \\
&= \frac{|s|_k}{1+|s|_k}+\frac{|t|_k}{1+|t|_k}
\end{aligned}
$$

olup $\dfrac{|s+t|_k}{1+|s+t|_k} \precsim \dfrac{|s|_k}{1+|s|_k} + \dfrac{|t|_k}{1+|t|_k}$ eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 4.1.4. Her $s,t,u \in \mathbb{BC}$ için $|s|_k \precsim |t+u|_k$ iken $\dfrac{|s|_k}{1+|s|_k} \precsim \dfrac{|t+u|_k}{1+|t+u|_k}$ eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $s_1,t_1,u_1,s_2,t_2,u_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $s=s_1e_1+s_2e_2$, $t=t_1e_1+t_2e_2$ ve $u=u_1e_1+u_2e_2$ için $|s|_k \precsim |t+u|_k$ olduğundan $\precsim$ bağıntısının tanımı gereği $|s_1| \le |t_1+u_1|$ ve $|s_2| \le |t_2+u_2|$ yazılır. Böylece Teorem 2.2.15 ii), x) şıkları ve Teorem 3.1.1 in ispatındaki $f$ fonksiyonunun artanlığı gereği

$$\begin{aligned}
\frac{|s|_k}{1+|s|_k} &= \frac{|s_1|e_1+|s_2|e_2}{(1+|s_1|)e_1+(1+|s_2|)e_2} \\
&= \frac{|s_1|}{1+|s_1|}e_1 + \frac{|s_2|}{1+|s_2|}e_2 \\
&\precsim \frac{|t_1+u_1|}{1+|t_1+u_1|}e_1 + \frac{|t_2+u_2|}{1+|t_2+u_2|}e_2 \\
&= \frac{|t_1+u_1|e_1+|t_2+u_2|e_2}{(1+|t_1+u_1|)e_1+(1+|t_2+u_2|)e_2} \\
&= \frac{|t+u|_k}{1+|t+u|_k}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden istenen elde edilir.

Lemma 4.1.5 (Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Hölder Eşitsizliği). $1<p<\infty$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olacak şekildeki her $p,q \in \mathbb{R}$ ve $m \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_m,t_m \in \mathbb{BC}$ için

$$\sum_{m=1}^{n} |s_m t_m|_k \precsim \left(\sum_{m=1}^{n} |s_m|_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} |t_m|_k^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekildeki her $p,q\in\mathbb{R}$ ve $m\in\{1,2,...,n\}$, $s_m=s_{m1}e_1+s_{m2}e_2$, $t_m=t_{m1}e_1+t_{m2}e_2$ olmak üzere her $s_m,t_m\in\mathbb{BC}$ için Teorem 2.2.15 i), ii), ix) şıkları, (2.6) eşitsizliği ve Not 4.1.2 gereği

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}|s_mt_m|_k &= \sum_{m=1}^{n}|s_m|_k\,|t_m|_k = \sum_{m=1}^{n}|s_{m1}e_1+s_{m2}e_2|_k\,|t_{m1}e_1+t_{m2}e_2|_k \\
&= \sum_{m=1}^{n}\left(|s_{m1}|e_1+|s_{m2}|e_2\right)\left(|t_{m1}|e_1+|t_{m2}|e_2\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n}\left(|s_{m1}||t_{m1}|e_1+|s_{m2}||t_{m2}|e_2\right) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}||t_{m1}|\right)e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}||t_{m2}|\right)e_2 \\
&\precsim \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}|^q\right)^{1/q}\right]e_1 \\
&\quad +\left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m2}|^q\right)^{1/q}\right]e_2 \\
&= \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}|^p\right)^{1/p}e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}|^p\right)^{1/p}e_2\right]\left[\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}|^q\right)^{1/q}e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m2}|^q\right)^{1/q}e_2\right] \\
&= \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}|^p\right)e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}|^p\right)e_2\right]^{1/p}\left[\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}|^q\right)e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m2}|^q\right)e_2\right]^{1/q} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}\left(|s_{m1}|^p e_1+|s_{m2}|^p e_2\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}\left(|t_{m1}|^q e_1+|t_{m2}|^q e_2\right)\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}\left(|s_{m1}|e_1+|s_{m2}|e_2\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}\left(|t_{m1}|e_1+|t_{m2}|e_2\right)^q\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}e_1+s_{m2}e_2|_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}e_1+t_{m2}e_2|_k^q\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}|s_m|_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|t_m|_k^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

olup $\sum_{m=1}^{n}|s_mt_m|_k \precsim \left(\sum_{m=1}^{n}|s_m|_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|t_m|_k^q\right)^{1/q}$ eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 4.1.6 (Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Minkowski Eşitsizliği). $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$ ve $m\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_m,t_m\in\mathbb{BC}$ için

$$\left(\sum_{m=1}^{n}|s_m+t_m|_k^p\right)^{1/p}\precsim\left(\sum_{m=1}^{n}|s_m|_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_m|_k^p\right)^{1/p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$ ve $m\in\{1,2,...,n\}$, $s_m=s_{m1}e_1+s_{m2}e_2$, $t_m=t_{m1}e_1+t_{m2}e_2$ olmak üzere her $s_m,t_m\in\mathbb{BC}$ için Teorem 2.2.15 ix), ii) şıkları, Not 4.1.2 ve (2.7) eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=1}^{n}|s_m+t_m|_k^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{m=1}^{n}\left|(s_{m1}e_1+s_{m2}e_2)+(t_{m1}e_1+t_{m2}e_2)\right|_k^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}\left|(s_{m1}+t_{m1})e_1+(s_{m2}+t_{m2})e_2\right|_k^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}\left(|s_{m1}+t_{m1}|e_1+|s_{m2}+t_{m2}|e_2\right)^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}\left(|s_{m1}+t_{m1}|^p e_1+|s_{m2}+t_{m2}|^p e_2\right)\right)^{1/p}\\
&= \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}+t_{m1}|^p\right)e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}+t_{m2}|^p\right)e_2\right]^{1/p}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}+t_{m1}|^p\right)^{1/p}e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}+t_{m2}|^p\right)^{1/p}e_2\\
&\precsim \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}|^p\right)^{1/p}\right]e_1\\
&\quad+\left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m2}|^p\right)^{1/p}\right]e_2\\
&= \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}|^p\right)^{1/p}e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}|^p\right)^{1/p}e_2\right]\\
&\quad+\left[\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}|^p\right)^{1/p}e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m2}|^p\right)^{1/p}e_2\right]\\
&= \left[\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m1}|^p\right)e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|s_{m2}|^p\right)e_2\right]^{1/p}\\
&\quad+\left[\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m1}|^p\right)e_1+\left(\sum_{m=1}^{n}|t_{m2}|^p\right)e_2\right]^{1/p}
\end{aligned}$$

$$=\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\left|s_{m1}\right|^{p}e_1+\left|s_{m2}\right|^{p}e_2\right)\right]^{1/p}+\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\left|t_{m1}\right|^{p}e_1+\left|t_{m2}\right|^{p}e_2\right)\right]^{1/p}$$

$$=\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\left|s_{m1}\right|e_1+\left|s_{m2}\right|e_2\right)^{p}\right]^{1/p}+\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\left|t_{m1}\right|e_1+\left|t_{m2}\right|e_2\right)^{p}\right]^{1/p}$$

$$=\left(\sum_{m=1}^{n}\left|s_{m1}e_1+s_{m2}e_2\right|_k^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}\left|t_{m1}e_1+t_{m2}e_2\right|_k^{p}\right)^{1/p}$$

$$=\left(\sum_{m=1}^{n}\left|s_m\right|_k^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}\left|t_m\right|_k^{p}\right)^{1/p}$$

olup $\left(\sum_{m=1}^{n}\left|s_m+t_m\right|_k^{p}\right)^{1/p}\precsim\left(\sum_{m=1}^{n}\left|s_m\right|_k^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}\left|t_m\right|_k^{p}\right)^{1/p}$ eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 4.1.7. Her $p\in(0,1)$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için $\left|s+t\right|_k^{p}\precsim\left|s\right|_k^{p}+\left|t\right|_k^{p}$ eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca $\left|s+t\right|_k^{p}=\left|s\right|_k^{p}+\left|t\right|_k^{p}$ olması için gerekli ve yeterli şart $s=s_1e_1+s_2e_2,\ t=t_1e_1+t_2e_2$ olmak üzere $s=0,\ t=0,\ s_1=t_2=0$ veya $t_1=s_2=0$ olmasıdır.

*İspat:* Her $p\in(0,1)$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için $s=s_1e_1+s_2e_2,\ t=t_1e_1+t_2e_2$ olmak üzere Teorem 2.2.15 ix), ii) şıkları, Not 4.1.2 ve (2.10) eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}
\left|s+t\right|_k^{p}&=\left|\left(s_1e_1+s_2e_2\right)+\left(t_1e_1+t_2e_2\right)\right|_k^{p}\\
&=\left|\left(s_1+t_1\right)e_1+\left(s_2+t_2\right)e_2\right|_k^{p}\\
&=\left(\left|s_1+t_1\right|e_1+\left|s_2+t_2\right|e_2\right)^{p}\\
&=\left|s_1+t_1\right|^{p}e_1+\left|s_2+t_2\right|^{p}e_2\\
&\precsim\left(\left|s_1\right|^{p}+\left|t_1\right|^{p}\right)e_1+\left(\left|s_2\right|^{p}+\left|t_2\right|^{p}\right)e_2\\
&=\left(\left|s_1\right|^{p}e_1+\left|s_2\right|^{p}e_2\right)+\left(\left|t_1\right|^{p}e_1+\left|t_2\right|^{p}e_2\right)\\
&=\left(\left|s_1\right|e_1+\left|s_2\right|e_2\right)^{p}+\left(\left|t_1\right|e_1+\left|t_2\right|e_2\right)^{p}\\
&=\left|s\right|_k^{p}+\left|t\right|_k^{p}
\end{aligned}$$

olup $\left|s+t\right|_k^{p}\precsim\left|s\right|_k^{p}+\left|t\right|_k^{p}$ eşitsizliği gerçeklenir.

Diğer yandan Teorem 2.2.15 xi) ve (2.10) eşitsizliğinde eşitlik olma durumundan

$$
\begin{aligned}
\left|s+t\right|_k^p=\left|s\right|_k^p+\left|t\right|_k^p &\Leftrightarrow \left|s_1+t_1\right|^p e_1+\left|s_2+t_2\right|^p e_2=\left(\left|s_1\right|^p+\left|t_1\right|^p\right)e_1+\left(\left|s_2\right|^p+\left|t_2\right|^p\right)e_2\\
&\Leftrightarrow \left|s_1+t_1\right|^p=\left|s_1\right|^p+\left|t_1\right|^p \text{ ve } \left|s_2+t_2\right|^p=\left|s_2\right|^p+\left|t_2\right|^p\\
&\Leftrightarrow \left(s_1=0 \text{ veya } t_1=0\right) \text{ ve } \left(s_2=0 \text{ veya } t_2=0\right)\\
&\Leftrightarrow s_1=s_2=0 \text{ veya } t_1=t_2=0 \text{ veya } s_1=t_2=0 \text{ veya } t_1=s_2=0
\end{aligned}
$$

olduğundan $\left|s+t\right|_k^p=\left|s\right|_k^p+\left|t\right|_k^p$ olması için gerekli ve yeterli şart $s=0,\ t=0,\ s_1=t_2=0$ veya $t_1=s_2=0$ olmasıdır.

Lemma 4.1.8. $2\le p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için

$$\left|s+t\right|_k^p+\left|s-t\right|_k^p \precsim 2^{p-1}\left(\left|s\right|_k^p+\left|t\right|_k^p\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $2\le p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için $s=s_1e_1+s_2e_2$ ve $t=t_1e_1+t_2e_2$ olmak üzere Teorem 2.2.15 ix), ii) şıkları, Not 4.1.2 ve (2.8) eşitsizliği gereği

$$
\begin{aligned}
\left|s+t\right|_k^p+\left|s-t\right|_k^p &=\left|\left(s_1+t_1\right)e_1+\left(s_2+t_2\right)e_2\right|_k^p+\left|\left(s_1-t_1\right)e_1+\left(s_2-t_2\right)e_2\right|_k^p\\
&=\left(\left|s_1+t_1\right|^p e_1+\left|s_2+t_2\right|^p e_2\right)+\left(\left|s_1-t_1\right|^p e_1+\left|s_2-t_2\right|^p e_2\right)\\
&=\left(\left|s_1+t_1\right|^p+\left|s_1-t_1\right|^p\right)e_1+\left(\left|s_2+t_2\right|^p+\left|s_2-t_2\right|^p\right)e_2\\
&\precsim 2^{p-1}\left(\left|s_1\right|^p+\left|t_1\right|^p\right)e_1+2^{p-1}\left(\left|s_2\right|^p+\left|t_2\right|^p\right)e_2\\
&=2^{p-1}\left[\left(\left|s_1\right|^p e_1+\left|s_2\right|^p e_2\right)+\left(\left|t_1\right|^p e_1+\left|t_2\right|^p e_2\right)\right]\\
&=2^{p-1}\left[\left(\left|s_1\right|e_1+\left|s_2\right|e_2\right)^p+\left(\left|t_1\right|e_1+\left|t_2\right|e_2\right)^p\right]\\
&=2^{p-1}\left(\left|s\right|_k^p+\left|t\right|_k^p\right)
\end{aligned}
$$

olup $\left|s+t\right|_k^p+\left|s-t\right|_k^p \precsim 2^{p-1}\left(\left|s\right|_k^p+\left|t\right|_k^p\right)$ eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 4.1.9. $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$, $0\precsim\lambda\precsim 1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^+$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için

$$\left|\lambda s+\left(1-\lambda\right)t\right|_k^p \precsim \lambda\left|s\right|_k^p+\left(1-\lambda\right)\left|t\right|_k^p$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$, $0\precsim\lambda\precsim 1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^{+}$ ve her $s,t\in\mathbb{BC}$ için $q=\dfrac{p}{p-1}$ alınırsa; Teorem 2.2.15 i), iii) şıkları ve Lemma 4.1.5 gereği

$$\begin{aligned}
\left|\lambda s+(1-\lambda)t\right|_k^p &\precsim \left(\lambda|s|_k+(1-\lambda)|t|_k\right)^p \\
&=\left(\lambda^{1/p+1/q}|s|_k+(1-\lambda)^{1/p+1/q}|t|_k\right)^p \\
&=\left(\left(\lambda^{1/p}|s|_k\right)\lambda^{1/q}+\left((1-\lambda)^{1/p}|t|_k\right)(1-\lambda)^{1/q}\right)^p \\
&\precsim\left[\left[\left(\lambda^{1/p}|s|_k\right)^p+\left((1-\lambda)^{1/p}|t|_k\right)^p\right]^{1/p}\left[\left(\lambda^{1/q}\right)^q+\left((1-\lambda)^{1/q}\right)^q\right]^{1/q}\right]^p \\
&=\left[\left(\lambda|s|_k^p+(1-\lambda)|t|_k^p\right)^{1/p}\right]^p \\
&=\lambda|s|_k^p+(1-\lambda)|t|_k^p
\end{aligned}$$

olup Teorem 2.2.15 viii) gereği $\left|\lambda s+(1-\lambda)t\right|_k^p\precsim\lambda|s|_k^p+(1-\lambda)|t|_k^p$ eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 4.1.10. $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$, $0\prec\lambda\prec 1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^{+}$ ve $s\neq t$ olan her $s,t\in\mathbb{BC}$ için

$$\left|\lambda s+(1-\lambda)t\right|_k^p\underset{\neq}{\prec}\lambda|s|_k^p+(1-\lambda)|t|_k^p$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1<p<\infty$ olan her $p\in\mathbb{R}$, $0\prec\lambda\prec 1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^{+}$ ve $s\neq t$ olan her $s,t\in\mathbb{BC}$ için $\lambda=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$, $s=s_1e_1+s_2e_2$, $t=t_1e_1+t_2e_2$ olmak üzere Teorem 2.2.15 ix), ii), xi) şıkları ve (2.9) eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda s+(1-\lambda)t\right|_k^p=\lambda|s|_k^p+(1-\lambda)|t|_k^p \\
&\Leftrightarrow\left|(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)(s_1e_1+s_2e_2)+\left(1-(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)\right)(t_1e_1+t_2e_2)\right|_k^p \\
&\quad=(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)\left|s_1e_1+s_2e_2\right|_k^p+\left(1-(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)\right)\left|t_1e_1+t_2e_2\right|_k^p \\
&\Leftrightarrow\left|\lambda_1s_1+(1-\lambda_1)t_1\right|^pe_1+\left|\lambda_2s_2+(1-\lambda_2)t_2\right|^pe_2 \\
&\quad=\left(\lambda_1|s_1|^p+(1-\lambda_1)|t_1|^p\right)e_1+\left(\lambda_2|s_2|^p+(1-\lambda_2)|t_2|^p\right)e_2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left|\lambda_1 s_1 + (1-\lambda_1)t_1\right|^p = \lambda_1 |s_1|^p + (1-\lambda_1)|t_1|^p$$
$$\text{ve } \left|\lambda_2 s_2 + (1-\lambda_2)t_2\right|^p = \lambda_2 |s_2|^p + (1-\lambda_2)|t_2|^p$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 = 0 \text{ veya } \lambda_1 = 1 \text{ veya } s_1 = t_1) \text{ ve } (\lambda_2 = 0 \text{ veya } \lambda_2 = 1 \text{ veya } s_2 = t_2)$$
$$\Leftrightarrow s = t \text{ ya da } \lambda = 0 \text{ ya da } \lambda = 1 \text{ ya da } \lambda = e_1 \text{ ya da } \lambda = e_2$$
$$\text{ya da } (\lambda = \lambda_1 e_1 \text{ ve } s_1 = t_1) \text{ ya da } (\lambda = \lambda_2 e_2 \text{ ve } s_2 = t_2)$$
$$\text{ya da } (\lambda = \lambda_1 e_1 + e_2 \text{ ve } s_1 = t_1) \text{ ya da } (\lambda = e_1 + \lambda_2 e_2 \text{ ve } s_2 = t_2)$$

elde edilir. Ancak $s \neq t$ ve $0 \prec \lambda \prec 1$ olduğundan yukarıdaki dokuz ihtimalin hiçbiri sağlanmaz. Böylece $\left|\lambda s + (1-\lambda)t\right|_k^p \underset{\neq}{\prec} \lambda |s|_k^p + (1-\lambda)|t|_k^p$ eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 4.1.11. $1 < p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{BC}$ için

$$\left|\frac{s+t}{2}\right|_k^p \precsim \frac{|s|_k^p + |t|_k^p}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $1 < p < \infty$ olan her $p \in \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{BC}$ için Lemma 4.1.9 gereği $\lambda = \dfrac{1}{2}$ için

$$\left|\frac{s+t}{2}\right|_k^p = \left|\frac{1}{2}s + \left(1-\frac{1}{2}\right)t\right|_k^p \precsim \frac{1}{2}|s|_k^p + \left(1-\frac{1}{2}\right)|t|_k^p = \frac{|s|_k^p + |t|_k^p}{2}$$

elde edilir. Böylece $\left|\dfrac{s+t}{2}\right|_k^p \precsim \dfrac{|s|_k^p + |t|_k^p}{2}$ eşitsizliği gerçeklenir.

### 4.2. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzayları

Bu kesimde, ilk olarak ikinci bölümün birinci kesiminde $A$ cebiri, $M$ lineer uzayı ve reel değerli norm için verilen $A-$modül, normlu $A-$modül ve Banach $A-$modül tanımları $A$ cebirinin bikompleks cebir, $M$ uzayının bir modül ve normun hiperbolik değerli olma durumuna genelleştirilmiştir.

Tanım 4.2.1. $A$ bir bikompleks cebir ve $M$, $\mathbb{BC}$ üzerinde bir modül olsun. Bir $A \times M \to M$, $(a,m) \to am$ ($M \times A \to M$, $(m,a) \to ma$) dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa $M$ modülüne bir sol (sağ) bikompleks $A-$modül,

$A\times M \to M$, $(a,m)\to am$ ($M\times A\to M$, $(m,a)\to ma$) dönüşümüne de bikompleks modül çarpımı denir.

(i) Her bir sabitlenmiş $a\in A$ için $m\to am$ ($m\to ma$) dönüşümü $M$ üzerinde lineerdir.

(ii) Her bir sabitlenmiş $m\in M$ için $a\to am$ ($a\to ma$) dönüşümü $A$ üzerinde lineerdir.

(iii) Her $a_1,a_2\in A$ ve her $m\in M$ için $a_1(a_2m)=(a_1a_2)m$ $\left((ma_1)a_2=m(a_1a_2)\right)$ dir.

$M$, hem sol bikompleks $A-$modül hem de sağ bikompleks $A-$modül ise $M$ modülüne bir bikompleks $A-$bimodül ya da bikompleks $A-$modül denir. Burada bikompleks modül çarpımı her $a,b\in A$ ve her $m\in M$ için $a(mb)=(am)b$ şeklindedir. Ayrıca $M$ bir bikompleks $A-$modül, $N$, $M$ nin $\mathbb{BC}$ üzerinde bir altmodülü ve her $n\in N$ ve her $a\in A$ için $an,na\in N$ oluyorsa $N$ altmodülüne $M$ nin bir bikompleks $A-$altmodülü denir.

Tanım 4.2.2. $A$ bir $\mathbb{D}-$normlu bikompleks cebir ve $M$ bir hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D},M}$ normuna göre hiperbolik değerli normlu uzay olsun. Eğer $M$ bir sol (sağ) bikompleks $A-$modül ve her $a\in A$, $m\in M$ için $\|am\|_{\mathbb{D},M}\precsim K\|a\|_{\mathbb{D},A}\|m\|_{\mathbb{D},M}$ $\left(\|ma\|_{\mathbb{D},M}\precsim K\|m\|_{\mathbb{D},M}\|a\|_{\mathbb{D},A}\right)$ olacak şekilde sıfırdan farklı pozitif hiperbolik bir $K$ sabiti varsa $M$ hiperbolik değerli normlu lineer uzayına bir $\mathbb{D}-$normlu sol (sağ) bikompleks $A-$modül denir. $M$, hem $\mathbb{D}-$ normlu sol bikompleks $A-$modül hem de $\mathbb{D}-$normlu sağ bikompleks $A-$modül ise $M$ hiperbolik değerli normlu lineer uzayına bir $\mathbb{D}-$normlu bikompleks $A-$bimodül ya da $\mathbb{D}-$normlu bikompleks $A-$modül denir.

Bir $\mathbb{D}-$normlu sol (sağ) bikompleks $A-$modül bir $\mathbb{D}-$normlu lineer uzay olarak tam ise bu modüle bir $\mathbb{D}-$normlu Banach sol (sağ) bikompleks $A-$modül denir. $M$, hem $\mathbb{D}-$normlu Banach sol bikompleks $A-$modül hem de $\mathbb{D}-$normlu Banach sağ bikompleks $A-$modül ise $M$ lineer uzayına bir $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $A-$bimodül ya da $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $A-$modül denir.

Tanım 4.2.3. $X$ bir $\mathbb{BC}-$modül olsun. $0<p\leq 1$ olmak üzere eğer bir $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}:X\to\mathbb{D}^{+}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $X$ üzerinde bir hiperbolik değerli $p-$norm ya da $p_{\mathbb{D}}-$norm diye isimlendirilir. $X$ $\mathbb{BC}-$modülüne de hiperbolik değerli $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}$ $p-$normuna göre hiperbolik değerli $p-$normlu uzay ya da $p_{\mathbb{D}}-$normlu uzay denir.

(i) $\|\|x\|\|_{\mathbb{D}}=0$ ise $x=0$ dır.

(ii) Her $x\in X,\mu\in\mathbb{BC}$ için $\|\|\mu x\|\|_{\mathbb{D}}=|\mu|_k^p.\|\|x\|\|_{\mathbb{D}}$ dir.

(iii) Her $x,y\in X$ için $\|\|x+y\|\|_{\mathbb{D}}\precsim\|\|x\|\|_{\mathbb{D}}+\|\|y\|\|_{\mathbb{D}}$ dir.

$X$ bir $\mathbb{BC}-$modül, $(x_n)\subset\mathbb{BC}$ ve $x_0\in X$ olsun. Eğer her $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ için her $n\geq n_0$ olduğunda $\|\|x_n-x_0\|\|_{\mathbb{D}}\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisi $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}$ $p_{\mathbb{D}}-$normuna göre $x_0$ noktasına yakınsar denir.

Eğer her $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ için her $n,m\geq n_0$ olduğunda $\|\|x_n-x_m\|\|_{\mathbb{D}}\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisi $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}$ $p_{\mathbb{D}}-$normuna göre Cauchy dizisidir denir.

Eğer $X$ de $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}$ $p_{\mathbb{D}}-$normuna göre her Cauchy dizisi $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}$ $p_{\mathbb{D}}-$normuna göre bir $x_0\in X$ noktasına yakınsar ise $X$ $\|\|.\|\|_{\mathbb{D}}$ $p_{\mathbb{D}}-$normuna göre tamdır denir.

Tanım 4.2.4. $A$ bir $\mathbb{D}-$normlu bikompleks cebir ve $M$ bir $\|\|.\|\|_{\mathbb{D},M}$ $p_{\mathbb{D}}-$normuna göre $p_{\mathbb{D}}-$normlu uzay olsun. Eğer $M$ bir sol (sağ) bikompleks $A-$modül ve her $a\in A, m\in M$ için $\|\|am\|\|_{\mathbb{D},M}\precsim K\|a\|_{\mathbb{D},A}^{p}\|\|m\|\|_{\mathbb{D},M}$ $\left(\|ma\|_{\mathbb{D},M}\precsim K\|m\|_{\mathbb{D},M}\|a\|_{\mathbb{D},A}^{p}\right)$ olacak şekilde sıfırdan farklı pozitif hiperbolik bir $K$ sabiti varsa $M$ $p_{\mathbb{D}}-$normlu uzayına bir $p_{\mathbb{D}}-$normlu sol (sağ) bikompleks $A-$modül denir. $M$, hem $p_{\mathbb{D}}-$normlu sol $A-$modül hem de $p_{\mathbb{D}}-$normlu sağ $A-$modül ise $M$ $p_{\mathbb{D}}-$normlu uzayına bir $p_{\mathbb{D}}-$normlu $A-$bimodül ya da $p_{\mathbb{D}}-$normlu $A-$modül denir.

Bir $p_{\mathbb{D}}-$normlu sol (sağ) bikompleks $A-$modül bir $p_{\mathbb{D}}-$normlu uzay olarak tam ise bu modüle bir $p_{\mathbb{D}}-$normlu Banach sol (sağ) bikompleks $A-$modül denir. $M$, hem

$p_{\mathbb{D}}-$normlu Banach sol bikompleks $A-$modül hem de $p_{\mathbb{D}}-$normlu Banach sağ bikompleks $A-$modül ise $M$ $p_{\mathbb{D}}-$normlu uzayına bir $p_{\mathbb{D}}-$normlu Banach bikompleks $A-$bimodül ya da $p_{\mathbb{D}}-$normlu Banach bikompleks $A-$modül denir.

Tanım 4.2.5. $X$ bir $\mathbb{D}-$normlu bikompleks $\mathbb{BC}-$modül ve $(x_l)$, $X$ de bir dizi olsun. Eğer her $x \in X$ için $x=\sum_{l=1}^{\infty}\zeta_l x_l$, yani $\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{l=1}^{n}\zeta_l x_l\right\|_{\mathbb{D},X}=0$ olacak şekilde bir tek $(\zeta_l)\subset\mathbb{BC}$ dizisi varsa $(x_l)$ dizisine $X$ $\mathbb{BC}-$modülünün $\mathbb{D}-$Schauder bazı denir.

Bu kesimin devamında, hiperbolik değerli $|.|_k$ normu kullanılarak bikompleks terimli dizilerden oluşan $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve $0<p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ kümeleri tanımlanmıştır. Bu kümelerin birer $\mathbb{BC}-$modül olduğu gösterilmiş ve bu kesimin başında verilen yapılara uyup uymadıkları araştırılmıştır.

Tanım 4.2.6. Hiperbolik değerli $|.|_k$ normu kullanılarak $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve $0<p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ kümeleri;

$$l_\infty^k(\mathbb{BC}):=\left\{\zeta=(\zeta_n)\in w(\mathbb{BC}):\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|\zeta_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\text{ sonludur}\right\},$$
$$l_p^k(\mathbb{BC}):=\left\{\zeta=(\zeta_n)\in w(\mathbb{BC}):\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^p\text{ yakınsaktır}\right\}\quad(0<p<\infty\text{ için})$$

ile tanımlanır.

Burada, $\zeta_n=\zeta_{n1}e_1+\zeta_{n2}e_2$ ve $\zeta_{n1},\zeta_{n2}\in\mathbb{C}$ olmak üzere Teorem 2.2.15 ii) ve (2.14) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|\zeta_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}&=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|\zeta_{n1}e_1+\zeta_{n2}e_2|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|\zeta_{n1}|e_1+|\zeta_{n2}|e_2:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sup\left\{|\zeta_{n1}|:n\in\mathbb{N}\right\}e_1+\sup\left\{|\zeta_{n2}|:n\in\mathbb{N}\right\}e_2\end{aligned}$$

olduğundan

$$\zeta=(\zeta_n)\in l_\infty^k(\mathbb{BC})\Leftrightarrow\sup\left\{|\zeta_{n1}|:n\in\mathbb{N}\right\}<\infty,\ \sup\left\{|\zeta_{n2}|:n\in\mathbb{N}\right\}<\infty$$

dur. Yine Teorem 2.2.15 ii), Not 4.1.2 ve Lemma 2.2.25 gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_{n1}e_1+\zeta_{n2}e_2|_k^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\zeta_{n1}|e_1+|\zeta_{n2}|e_2\right)^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\zeta_{n1}|^p e_1+|\zeta_{n2}|^p e_2\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_{n1}|^p\right)e_1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_{n2}|^p\right)e_2\end{aligned}$$

olduğundan

$$\zeta=(\zeta_n)\in l_p^k(\mathbb{BC}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_{n1}|^p<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_{n2}|^p<\infty$$

dur.

Teorem 4.2.7. $0<p<q<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})\subset l_q^k(\mathbb{BC})$ kapsaması gerçeklenir. $1\leq p<q<\infty$ için bu kapsama kesindir.

*İspat:* Herhangi bir $\zeta=(\zeta_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ dizisi alınsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^p$ serisi yakınsak olup her $n\geq n_0$ için $|\zeta_n|_k \underset{\neq}{\prec} 1$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Buradan $0<q-p$ olduğundan her $n\geq n_0$ için $|\zeta_n|_k^{q-p} \underset{\neq}{\prec} 1$ yazılır. Böylece $M=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|\zeta_1|_k^{q-p},|\zeta_2|_k^{q-p},\dots,|\zeta_{n_0}|_k^{q-p},1\right\}$ alınırsa; Teorem 2.2.15 iv) gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^q=\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^{q-p}|\zeta_n|_k^p \precsim \sum_{n=1}^{\infty}M|\zeta_n|_k^p=M\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^p$$

olup $l_p^k(\mathbb{BC})\subset l_q^k(\mathbb{BC})$ kapsaması elde edilir.

Şimdi $1\leq p<q<\infty$ için kapsamanın kesin olduğu gösterilsin. Bunun için her $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_n=\frac{1}{n^{1/p}}e_1+\frac{i}{n^{1/p}}e_2$ genel terimli $\zeta=(\zeta_n)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.2.15 ii), Not 4.1.2 ve Lemma 2.2.25 gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\zeta_n\right|_k^q=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{1/p}}e_1+\frac{i}{n^{1/p}}e_2\right|_k^q$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{n^{1/p}}\right|e_1+\left|\frac{i}{n^{1/p}}\right|e_2\right)^q$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1/p}}e_1+\frac{1}{n^{1/p}}e_2\right)^q$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{q/p}}e_1+\frac{1}{n^{q/p}}e_2\right)$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q/p}}\right)e_1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q/p}}\right)e_2$$

ve $\frac{q}{p}>1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q/p}}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\zeta_n\right|_k^q$ serisi yakınsak olup $\zeta=(\zeta_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ dir. Diğer yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\zeta_n\right|_k^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{1/p}}e_1+\frac{i}{n^{1/p}}e_2\right|_k^p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)e_1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)e_2$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\zeta_n\right|_k^p$ serisi ıraksak olup $\zeta=(\zeta_n)\notin l_p^k(\mathbb{BC})$ dir. Sonuç olarak $1\le p<q<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})\subset l_q^k(\mathbb{BC})$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.8. $0<p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})\subset l_\infty^k(\mathbb{BC})$ kapsaması gerçeklenir. $1\le p<\infty$ için bu kapsama kesindir.

*İspat:* Herhangi bir $\zeta=(\zeta_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ dizisi alınsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\zeta_n\right|_k^p$ serisi yakınsak olup her $n\ge n_0$ için $\left|\zeta_n\right|_k \precnsim 1$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Burada $M=\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|\zeta_1\right|_k,\left|\zeta_2\right|_k,\ldots,\left|\zeta_{n_0}\right|_k,1\right\}$ alınırsa;

$$\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|\zeta_n\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\precsim\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|\zeta_1\right|_k,\left|\zeta_2\right|_k,\ldots,\left|\zeta_{n_0}\right|_k,1\right\}=M$$

olup $l_p^k(\mathbb{BC})\subset l_\infty^k(\mathbb{BC})$ kapsaması elde edilir.

Şimdi $1 \le p < \infty$ için kapsamanın kesin olduğu gösterilsin. Bunun için her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_n = \frac{1}{n^{1/p}} e_1 + \frac{i}{n^{1/p}} e_2$ genel terimli $\zeta = (\zeta_n)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.2.15 ii) ve (2.14) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{D}} \left\{ |\zeta_n|_k : n \in \mathbb{N} \right\} &= \sup_{\mathbb{D}} \left\{ \left| \frac{1}{n^{1/p}} e_1 + \frac{i}{n^{1/p}} e_2 \right|_k : n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \sup_{\mathbb{D}} \left\{ \left| \frac{1}{n^{1/p}} \right| e_1 + \left| \frac{i}{n^{1/p}} \right| e_2 : n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \sup_{\mathbb{D}} \left\{ \frac{1}{n^{1/p}} e_1 + \frac{1}{n^{1/p}} e_2 : n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \sup \left\{ \frac{1}{n^{1/p}} : n \in \mathbb{N} \right\} e_1 + \sup \left\{ \frac{1}{n^{1/p}} : n \in \mathbb{N} \right\} e_2
\end{aligned}$$

ve $\sup \left\{ \frac{1}{n^{1/p}} : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$ olduğundan $\zeta = (\zeta_n) \in l_p^k(\mathbb{BC})$ dir. Diğer yandan $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|_k^p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) e_1 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) e_2$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|_k^p$ serisi ıraksak olup $\zeta = (\zeta_n) \notin l_p^k(\mathbb{BC})$ dir. Sonuç olarak $1 \le p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC}) \subset l_\infty^k(\mathbb{BC})$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.9. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \prec \mu_n$ olmak üzere yakınsak bir $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ serisi verilsin. O halde her $s = (s_n)$, $t = (t_n) \in w(\mathbb{BC})$ için

$$d_{\mathbb{D}, w(\mathbb{BC})} : w(\mathbb{BC}) \times w(\mathbb{BC}) \to \mathbb{D}^+, (s,t) \to d_{\mathbb{D}, w(\mathbb{BC})}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{|s_n - t_n|_k}{1 + |s_n - t_n|_k}$$

ile tanımlı $d_{\mathbb{D}, w(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $w(\mathbb{BC})$ üzerinde bir hiperbolik değerli metrik belirtir ve dolayısıyla $\left( w(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D}, w(\mathbb{BC})} \right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır.

*İspat:* Bikompleks sayılar kümesinin $|.|_k$ normuna göre bir hiperbolik değerli normlu uzay olduğu biliniyor. Bu bilgi kullanılarak $d_{\mathbb{D}, w(\mathbb{BC})}$ fonksiyonunun $w(\mathbb{BC})$ üzerinde hiperbolik değerli metrik aksiyomlarını sağladığı gösterilsin. Her

$s=(s_n)$, $t=(t_n)\in w(\mathbb{BC})$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $0\precsim|s_n-t_n|_k$ ve $0\prec\mu_n$ olduğundan $d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}\in\mathbb{D}^+$ dır. Ayrıca her $s=(s_n)$, $t=(t_n)\in w(\mathbb{BC})$ için

$$d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\frac{|s_n-t_n|_k}{1+|s_n-t_n|_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\frac{|t_n-s_n|_k}{1+|t_n-s_n|_k}=d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(t,s)$$

olur. Yine Teorem 2.2.15 ii), ix), x) ve xi) gereği

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(s,t)=0 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\frac{|s_n-t_n|_k}{1+|s_n-t_n|_k}=0\\
&\Leftrightarrow \mu_n\frac{|s_n-t_n|_k}{1+|s_n-t_n|_k}=0,\forall n\in\mathbb{N}\\
&\overset{0\prec\mu_n,\forall n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \frac{|s_n-t_n|_k}{1+|s_n-t_n|_k}=0,\forall n\in\mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow \frac{|s_{n1}-t_{n1}|}{1+|s_{n1}-t_{n1}|}e_1+\frac{|s_{n2}-t_{n2}|}{1+|s_{n2}-t_{n2}|}e_2=0,\forall n\in\mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow \frac{|s_{n1}-t_{n1}|}{1+|s_{n1}-t_{n1}|}=\frac{|s_{n2}-t_{n2}|}{1+|s_{n2}-t_{n2}|}=0,\forall n\in\mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow s_{n1}=t_{n1},s_{n2}=t_{n2},\forall n\in\mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow s_{n1}e_1+s_{n2}e_2=t_{n1}e_1+t_{n2}e_2,\forall n\in\mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow s_n=t_n,\forall n\in\mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow s=t
\end{aligned}$$

dir. Şimdi de her $s=(s_n)$, $t=(t_n)$, $u=(u_n)\in w(\mathbb{BC})$ için $d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(s,u)\precsim d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(s,t)+d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(t,u)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. Lemma 4.1.3 gereği her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\mu_m\frac{|s_m-u_m|_k}{1+|s_m-u_m|_k} &=\sum_{m=1}^{n}\mu_m\frac{|(s_m-t_m)+(t_m-u_m)|_k}{1+|(s_m-t_m)+(t_m-u_m)|_k}\\
&\precsim\sum_{m=1}^{n}\mu_m\left(\frac{|s_m-t_m|_k}{1+|s_m-t_m|_k}+\frac{|t_m-u_m|_k}{1+|t_m-u_m|_k}\right)\\
&=\sum_{m=1}^{n}\mu_m\frac{|s_m-t_m|_k}{1+|s_m-t_m|_k}+\sum_{m=1}^{n}\mu_m\frac{|t_m-u_m|_k}{1+|t_m-u_m|_k}
\end{aligned}\qquad\textbf{(4.1)}$$

dir. Ayrıca her $m\in\mathbb{N}$ için

$$\mu_m \frac{|s_m - t_m|_k}{1+|s_m - t_m|_k} \precsim \mu_m,\ \mu_m \frac{|t_m - u_m|_k}{1+|t_m - u_m|_k} \precsim \mu_m,\ \mu_m \frac{|s_m - u_m|_k}{1+|s_m - u_m|_k} \precsim \mu_m$$

ve $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \frac{|s_m - t_m|_k}{1+|s_m - t_m|_k},\ \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \frac{|t_m - u_m|_k}{1+|t_m - u_m|_k},\ \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \frac{|s_m - u_m|_k}{1+|s_m - u_m|_k}$$

serileri de yakınsaktır. Böylece (4.1) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(s,u) \precsim d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(s,t) + d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}(t,u)$ elde edilir. Böylece $d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $w(\mathbb{BC})$ üzerinde bir hiperbolik değerli metrik ve $\left(w(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},w(\mathbb{BC})}\right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Teorem 4.2.10. $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ kümesi, $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

*İspat:* $l_\infty^k(\mathbb{BC}) \subset w(\mathbb{BC})$ olduğu tanımdan açıktır. Herhangi iki $s = (s_n) = (s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2)$, $t = (t_n) = (t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ dizisi ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{BC} - \{0\}$ bikompleks sayısı alınsın. Bu durumda $\sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\sup_{\mathbb{D}}\{|t_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ sonludur. Böylece Teorem 2.2.15 ix), ii) ve (2.14) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{D}}\{|s_n + t_n|_k : n \in \mathbb{N}\} &= \sup_{\mathbb{D}}\{|(s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2) + (t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2)|_k : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup_{\mathbb{D}}\{|s_{n1} + t_{n1}|e_1 + |s_{n2} + t_{n2}|e_2 : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{|s_{n1} + t_{n1}| : n \in \mathbb{N}\}e_1 + \sup\{|s_{n2} + t_{n2}| : n \in \mathbb{N}\}e_2 \\
&\precsim \left(\sup\{|s_{n1}| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|t_{n1}| : n \in \mathbb{N}\}\right)e_1 \\
&\quad + \left(\sup\{|s_{n2}| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|t_{n2}| : n \in \mathbb{N}\}\right)e_2 \\
&= \left(\sup\{|s_{n1}| : n \in \mathbb{N}\}e_1 + \sup\{|s_{n2}| : n \in \mathbb{N}\}e_2\right) \\
&\quad + \left(\sup\{|t_{n1}| : n \in \mathbb{N}\}e_1 + \sup\{|t_{n2}| : n \in \mathbb{N}\}e_2\right) \\
&= \sup\{|s_{n1}|e_1 + |s_{n2}|e_2 : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|t_{n1}|e_1 + |t_{n2}|e_2 : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\} + \sup_{\mathbb{D}}\{|t_n|_k : n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

ve Teorem 2.2.15 i) ve Teorem 2.3.5 iv) gereği

$$\sup_{\mathbb{D}}\{|\alpha.s_n|_k : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{\mathbb{D}}\{|\alpha|_k |s_n|_k : n \in \mathbb{N}\} = |\alpha|_k \sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$$

olup $s+t\in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve $\alpha s\in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ elde edilir, $\alpha=0$ ispat açıktır. Bu ise $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ kümesinin $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülü olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.11. Her $s=(s_k),t=(t_k)\in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ için

$$d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}:l_\infty^k(\mathbb{BC})\times l_\infty^k(\mathbb{BC})\to\mathbb{D}^+,\ (s,t)\to d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s,t)=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n-t_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}$$

ile tanımlı $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ üzerinde bir hiperbolik değerli metrik belirtir ve dolayısıyla $\left(l_\infty^k(\mathbb{BC}),d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır. Üstelik $\left(l_\infty^k(\mathbb{BC}),d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

*İspat:* Her $s=(s_n),\ t=(t_n)\in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $0\precsim|s_n-t_n|_k$ olduğundan $0\precsim d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s,t)$ ve

$$d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s,t)=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n-t_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|t_n-s_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}=d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(t,s)$$

dir. Yine $\mathbb{D}-$supremum tanımı ve Örnek 2.3.3 i) gereği

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s,t)=0&\Leftrightarrow\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n-t_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}=0\\&\Leftrightarrow|s_n-t_n|_k=0,\forall n\in\mathbb{N}\\&\Leftrightarrow s_n=t_n,\forall n\in\mathbb{N}\\&\Leftrightarrow s=t\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan her $s=(s_n),\ t=(t_n),\ u=(u_n)\in w(\mathbb{BC})$ için Teorem 2.2.15 i) ve Teorem 2.3.5 ii) gereği

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s,u)&=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n-u_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|(s_n-t_n)+(t_n-u_n)|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&\precsim\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n-t_n|_k+|t_n-u_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n-t_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}+\sup_{\mathbb{D}}\left\{|t_n-u_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s,t)+d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(t,u)\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ üzerinde hiperbolik değerli metrik aksiyomlarını gerçekler, yani $\left(l_\infty^k(\mathbb{BC}),d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Şimdi $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ metriğine göre tam olduğu gösterilsin. $s_m=\left(s_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi, $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünde $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ metriğine göre herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ sayısı verildiğinde her $m,r\geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s_m,s_r)=\sup\left\{\left|s_n^m-s_n^r\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ ve her $m,r\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left|s_n^m-s_n^r\right|_k\underset{\neq}{\prec}\varepsilon \tag{4.2}$$

olur. Buradan $\left(s_n^m\right)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\mathbb{BC}$, $|.|_k$ normuna göre tam olduğundan bu dizi bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir $s_n^*\in\mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^*=\left(s_n^*\right)=\left(s_1^*,s_2^*,...,s_l^*,...\right)$ dizisi tanımlansın. (4.2) eşitsizliğinde $r\to\infty$ için limit alınırsa; her $m\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left|s_n^m-s_n^*\right|_k\precsim\varepsilon \tag{4.3}$$

elde edilir. Buradan da her $m\geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}(s_m,s^*)=\sup\left\{\left|s_n^m-s_n^*\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\precsim\varepsilon$ olur. Bu ise $(s_m)\subset l_\infty^k(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Ayrıca her $m\in\mathbb{N}$ için $\left(s_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}\in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $\left|s_n^m\right|_k\precsim t_m$ olacak şekilde $t_m\in\mathbb{D}^+-\{0\}$ vardır. Böylece (4.3) kullanılırsa her $n\in\mathbb{N}$ ve her $m\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left|s_n^*\right|_k\precsim\left|s_n^*-s_n^m\right|_k+\left|s_n^m\right|_k\precsim\varepsilon+t_m$$

olup Teorem 2.2.15 viii) gereği $s^* = \left(s_n^*\right) = \left(s_1^*, s_2^*, ..., s_l^*, ...\right) \in l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ dir. Sonuç olarak $\left(l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right), d_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Sonuç 4.2.12. $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülü; her $s = \left(s_n\right) \in l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ için

$$\left\|s\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})} = \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|s_n\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$$

ile tanımlı $\left\|\cdot\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir hiperbolik değerli normlu uzay ve bu norma göre Banach uzaydır.

Teorem 4.2.13. $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ hiperbolik değerli normlu uzayı, $\left\|\cdot\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli normuna göre $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ uzayı bir $\mathbb{BC}-$modül olduğundan $\mathbb{BC}$ bikompleks cebiri için bikompleks $\mathbb{BC}-$modül tanımındaki şartları sağlayacağı açıktır. Her $\lambda \in \mathbb{BC}-\{0\}$ ve $s = \left(s_n\right) \in l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ için Teorem 2.2.15 ii) ve Teorem 2.3.5 iv) gereği

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda s\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})} &= \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|\lambda s_n\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|\lambda\right|_k \left|s_n\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \left|\lambda\right|_k \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|s_n\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \left|\lambda\right|_k \left\|s\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})}
\end{aligned}$$

olur, $\lambda = 0$ için ispat açıktır. Böylece $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ hiperbolik değerli normlu uzayı $\mathbb{D}-$normlu bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür. Diğer yandan $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left\|\cdot\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli normuna göre bir Banach uzay olduğu için $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ $\left\|\cdot\right\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli normuna göre $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

Teorem 4.2.14. $0 < p < \infty$ için $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ kümesi $w\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

*İspat:* $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right) \subset w\left(\mathbb{BC}\right)$ olduğu tanımdan açıktır. Şimdi $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ kümesinin $w\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülü olduğu göstermek için herhangi iki

$s=(s_n)$, $t=(t_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ dizisi ve herhangi bir $\alpha\in\mathbb{BC}$ sayısı alınsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|_k^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|_k^p$ serileri yakınsaktır.

Teorem 2.2.15 i) ve viii) ile elde edilen

$$|s_m+t_m|_k \precsim |s_m|_k+|t_m|_k \precsim 2\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|s_m|_k,|t_m|_k\right\}$$

ve

$$|s_m+t_m|_k^p \precsim 2^p\left(\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|s_m|_k,|t_m|_k\right\}\right)^p = 2^p\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|s_m|_k^p,|t_m|_k^p\right\} \precsim 2^p\left(|s_m|_k^p+|t_m|_k^p\right)$$

eşitsizlikleri gereği yine Teorem 2.2.15 viii) den

$$\sum_{m=1}^{\infty}|s_m+t_m|_k^p \precsim \sum_{m=1}^{\infty}2^p\left(|s_m|_k^p+|t_m|_k^p\right)=2^p\left[\sum_{m=1}^{\infty}|s_m|_k^p+\sum_{m=1}^{\infty}|t_m|_k^p\right]$$

elde edilir. Böylece karşılaştırma testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n+t_n|_k^p$ serisi yakınsaktır, yani $s+t\in l_p^k(\mathbb{BC})$ dir.

Diğer yandan $\alpha=0$ için $\alpha s\in l_p^k(\mathbb{BC})$ olduğu açıktır. Şimdi $\alpha\in\mathbb{BC}-\{0\}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda Teorem 2.2.15 ii) gereği

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha\cdot s_m|_k^p=\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha|_k^p|s_m|_k^p=|\alpha|_k^p\sum_{m=1}^{\infty}|s_m|_k^p$$

olur. Bu ise $\alpha s\in l_p^k(\mathbb{BC})$ anlamına gelir. Böylece $l_p^k(\mathbb{BC})$ kümesinin $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$ modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülü olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.15. Her $s=(s_n),t=(t_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için

$$d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}:l_p^k(\mathbb{BC})\times l_p^k(\mathbb{BC})\to\mathbb{D}^+,$$

$$(s,t)\to d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}|s_n-t_n|_k^p, & 0<p\le 1\\[2ex] \left(\sum_{k=1}^{\infty}|s_n-t_n|_k^p\right)^{1/p}, & 1<p<\infty\end{cases}$$

ile tanımlı $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_p^k(\mathbb{BC})$ üzerinde bir hiperbolik değerli metrik belirtir ve dolayısıyla $\left(l_p^k(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır. Üstelik $\left(l_p^k(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

*İspat:* İlk olarak $1 < p < \infty$ durumunu incelensin. Her $s=(s_n),\ t=(t_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $0 \precsim |s_n - t_n|_k$ olduğundan $0 \precsim d_{l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t)$ ve

$$d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|s_n-t_n|_k^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|t_n-s_n|_k^p\right)^{1/p}=d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(t,s)$$

dir. Yine Örnek 2.3.3 gereği

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t)=0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty}|s_n-t_n|_k^p\right)^{1/p}=0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|s_n-t_n|_k^p=0\\ &\Leftrightarrow |s_n-t_n|_k^p=0, \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow |s_n-t_n|_k=0, \forall n\in\mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow s_n=t_n, \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow s=t \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan her $s=(s_n), t=(t_n), u=(u_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için Lemma 4.1.6 gereği

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|s_n-t_n|_k^p\right)^{1/p}\\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(s_n-u_n)+(u_n-t_n)|_k^p\right)^{1/p}\\ &\precsim \left(\sum_{n=1}^{\infty}|s_n-u_n|_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n-t_n|_k^p\right)^{1/p}\\ &= d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s,u)+d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(u,t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_p^k(\mathbb{BC})$ üzerinde bir hiperbolik değerli metrik ve $\left(l_p^k(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Şimdi $\left(l_p^k(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ hiperbolik değerli metrik uzayının tam olduğu gösterilsin. $s_m=\left(s_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi, $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünde hiperbolik değerli $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ metriğine göre herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ sayısı verildiğinde her $m,r \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s_m, s_r) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|s_n^m - s_n^r\right|_k^p\right)^{1/p} \underset{\neq}{\prec} \varepsilon \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ve her $m,r \geq n_0(\varepsilon)$ için $\left|s_n^m - s_n^r\right|_k \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ olur. Buradan $(s_n^m)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\mathbb{BC}$, $|.|_k$ normuna göre tam olduğundan bu dizi bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir $s_n^* \in \mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^* = (s_n^*) = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*, ...)$ dizisi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m,r \geq n_0(\varepsilon)$ için (4.4) gereği $\left(\sum_{l=1}^{n} \left|s_l^m - s_l^r\right|_k^p\right)^{1/p} \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ olduğundan $r \to \infty$ için limit alınırsa; her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $\left(\sum_{l=1}^{n} \left|s_l^m - s_l^*\right|_k^p\right)^{1/p} \precsim \varepsilon$ dur. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s_m, s^*) = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left|s_l^m - s_l^*\right|_k^p\right)^{1/p} \precsim \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $(s_m) \subset l_p^k(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin hiperbolik değerli $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ metriğine göre $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Ayrıca her $m \in \mathbb{N}$ için $(s_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^k(\mathbb{BC})$ olduğundan $\sum_{l=1}^{\infty} \left|s_l^m\right|_k^p$ serisi yakınsaktır. Böylece her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için Teorem 2.2.15 i) ve $\mathbb{D}-$supremum tanımı gereği

$$\begin{aligned}
\left|s_l^*\right|_k^p = \left|s_l^m + (s_l^* - s_l^m)\right|_k^p &\precsim \left(\left|s_l^m\right|_k + \left|s_l^* - s_l^m\right|_k\right)^p \\
&\precsim \left(2\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_l^m\right|_k, \left|s_l^* - s_l^m\right|_k\right\}\right)^p \\
&= 2^p \sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_l^m\right|_k^p, \left|s_l^* - s_l^m\right|_k^p\right\} \\
&= 2^p \left(\left|s_l^m\right|_k^p + \left|s_l^* - s_l^m\right|_k^p\right)
\end{aligned}$$

olup Teorem 2.2.15 viii) ve karşılaştırma testi gereği $s^* = \left(s_n^*\right) = \left(s_1^*, s_2^*, ..., s_l^*, ...\right) \in l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ dir. Sonuç olarak $\left(l_p^k\left(\mathbb{BC}\right), d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Şimdi de $0 < p \leq 1$ durumu ele alınsın. Her $s = (s_n)$, $t = (t_n) \in l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \precsim |s_n - t_n|_k$ olduğundan $0 \precsim d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t)$ ve

$$d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - t_n|_k^p = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n - s_n|_k^p = d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(t,s)$$

dir. Yine Örnek 2.3.3 gereği

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - t_n|_k^p = 0 \\ &\Leftrightarrow |s_n - t_n|_k^p = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow |s_n - t_n|_k = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow s_n = t_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow s = t \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan her $s = (s_n)$, $t = (t_n)$, $u = (u_n) \in l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ için Lemma 4.1.7 den

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - t_n|_k^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(s_n - u_n) + (u_n - t_n)\right|_k^p \\ &\precsim \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - u_n|_k^p + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n - t_n|_k^p \\ &= d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(s,u) + d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}(u,t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonu $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ üzerinde bir hiperbolik değerli metrik ve $\left(l_p^k\left(\mathbb{BC}\right), d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Şimdi $\left(l_p^k\left(\mathbb{BC}\right), d_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ hiperbolik değerli metrik uzayının tam olduğu gösterilsin. $s_m = \left(s_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ olmak üzere $(s_m)$ dizisi, $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülünde hiperbolik değerli $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ metriğine göre herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $0 \precneqq \varepsilon$ sayısı verildiğinde her $m,r \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s_m, s_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left|s_n^m - s_n^r\right|_k^p \precneqq \varepsilon^p \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ve her $m,r \geq n_0(\varepsilon)$ için $\left|s_n^m - s_n^r\right|_k \precneqq \varepsilon$ olur. Buradan $(s_n^m)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\mathbb{BC}$, $|.|_k$ normuna göre tam olduğundan bu dizi bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir $s_n^* \in \mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^* = (s_n^*) = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*, ...)$ dizisi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m,r \geq n_0(\varepsilon)$ için (4.5) gereği $\sum_{l=1}^{n} \left|s_l^m - s_l^r\right|_k^p \precneqq \varepsilon^p$ olduğundan $r \to \infty$ için limit alınırsa; her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $\sum_{l=1}^{n} \left|s_l^m - s_l^*\right|_k^p \precsim \varepsilon^p$ dur. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa; her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}(s_m, s^*) = \sum_{l=1}^{\infty} \left|s_l^m - s_l^*\right|_k^p \precsim \varepsilon^p$ elde edilir. Bu ise $(s_m) \subset l_p^k(\mathbb{BC})$ Cauchy dizisinin hiperbolik değerli $d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ metriğine göre $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Ayrıca her $m \in \mathbb{N}$ için $(s_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^k(\mathbb{BC})$ olduğundan $\sum_{l=1}^{\infty} \left|s_l^m\right|_k^p$ serisi yakınsaktır. Böylece her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için Teorem 2.2.15 i) ve Lemma 4.1.7 gereği

$$\left|s_l^*\right|_k^p = \left|s_l^m + (s_l^* - s_l^m)\right|_k^p \precsim \left|s_l^m\right|_k^p + \left|s_l^* - s_l^m\right|_k^p$$

olup karşılaştırma testinden $s^* = (s_n^*) = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*, ...) \in l_p^k(\mathbb{BC})$ dir. Sonuç olarak $\left(l_p^k(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Sonuç 4.2.16. $0 < p < 1$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülü; her $s = (s_n) \in l_p^k(\mathbb{BC})$ için

$$\|s\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|s_n\right|_k^p$$

ile tanımlı hiperbolik değerli $\|\cdot\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir hiperbolik değerli norm değildir, hiperbolik değerli $p-$normdur ve dolayısıyla hiperbolik değerli $p-$Banach uzaydır.

*İspat:* $0<p<1$ olmak üzere her $\lambda\in\mathbb{BC}-\{0\}$ ve $s=(s_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için Teorem 2.2.15 ii) gereği

$$\begin{aligned}\|\lambda s\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})} &= \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda s_n|_k^p = \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|_k^p|s_n|_k^p\\ &= |\lambda|_k^p\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|_k^p = |\lambda|_k^p\|s\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\\ &\neq |\lambda|_k\|s\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

olduğundan $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülü, $\|\cdot\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ normuna göre bir hiperbolik değerli norm değildir, hiperbolik değerli $p-$normdur. Böylece Teorem 4.2.15 gereği $l_p^k(\mathbb{BC})$ hiperbolik değerli $p-$Banach uzaydır.

Teorem 4.2.17. $0<p<1$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ hiperbolik değerli $p-$normlu uzayı, $\|\cdot\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli $p-$normuna göre $\mathbb{D}-$normlu $p-$Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* $0<p<1$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ uzayı bir $\mathbb{BC}-$modül olduğundan $\mathbb{BC}$ bikompleks cebiri için bikompleks $\mathbb{BC}-$modül tanımındaki şartları sağlayacağı açıktır. Ayrıca her $\lambda\in\mathbb{BC}-\{0\}$ ve $s=(s_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için Teorem 2.2.15 ii) gereği

$$\begin{aligned}\|\lambda s\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})} &= \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda s_n|_k^p = \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|_k^p|s_n|_k^p\\ &= |\lambda|_k^p\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|_k^p = |\lambda|_k^p\|s\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

olur, $\lambda=0$ için ispat açıktır. Böylece $l_p^k(\mathbb{BC})$ hiperbolik değerli $p-$normlu uzayı hiperbolik değerli $p-$normlu bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür. Diğer yandan $l_p^k(\mathbb{BC})$, $\|\cdot\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli $p-$normuna göre bir $p-$Banach uzay olduğu için $l_p^k(\mathbb{BC})$, $\|\cdot\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli $p-$normuna göre hiperbolik değerli $p-$normlu $p-$Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

Sonuç 4.2.18. $1 \leq p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülü; her $s=(s_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için

$$\|s\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|_k^p\right)^{1/p}$$

ile tanımlı $\|.\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir hiperbolik değerli normlu uzay ve hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}$ normuna göre Banach uzaydır.

Teorem 4.2.19. $1 \leq p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ hiperbolik değerli normlu uzayı, $\|.\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli normuna göre $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

*İspat:* $1 \leq p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ uzayı bir $\mathbb{BC}-$modül olduğundan $\mathbb{BC}$ bikompleks cebiri için bikompleks $\mathbb{BC}-$modül tanımındaki şartları sağlayacağı açıktır. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{BC}-\{0\}$ ve $s=(s_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için Teorem 2.2.15 ii) gereği

$$\begin{aligned}
\|\lambda s\|_{\mathbb{D}, l_\infty^k(\mathbb{BC})} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda s_n|_k^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|_k^p\, |s_n|_k^p\right)^{1/p} \\
&= \left(|\lambda|_k^p \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|_k^p\right)^{1/p} = |\lambda|_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|_k^p\right)^{1/p} \\
&= |\lambda|_k\, \|s\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}
\end{aligned}$$

olur, $\lambda = 0$ için ispat açıktır. Böylece $l_p^k(\mathbb{BC})$ hiperbolik değerli normlu uzayı $\mathbb{D}-$normlu bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür. Diğer yandan $l_p^k(\mathbb{BC})$, $\|.\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli normuna göre bir Banach uzay olduğu için $l_p^k(\mathbb{BC})$, $\|.\|_{\mathbb{D}, l_p^k(\mathbb{BC})}$ hiperbolik değerli normuna göre $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

Bu kesimin devamında, hiperbolik değerli $|.|_k$ normu kullanılarak bikompleks terimli dizilerden oluşan $c^k(\mathbb{BC})$ ve $c_0^k(\mathbb{BC})$ kümeleri tanımlanmış ve tamlık özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.2.20. Hiperbolik değerli $|.|_k$ normu kullanılarak $c^k(\mathbb{BC})$ ve $c_0^k(\mathbb{BC})$ kümeleri;

$$c^k(\mathbb{BC}) := \left\{ \zeta = (\zeta_n) \in w(\mathbb{BC}) : (\zeta_n), |.|_k \text{ normuna göre } l^* \in \mathbb{BC} \text{ noktasına yakınsar} \right\},$$
$$c_0^k(\mathbb{BC}) := \left\{ \zeta = (\zeta_n) \in w(\mathbb{BC}) : (\zeta_n), |.|_k \text{ normuna göre 0 noktasına yakınsar} \right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.2.21. $c^k(\mathbb{BC})$ ve $c_0^k(\mathbb{BC})$ kümeleri, $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün birer $\mathbb{BC}-$altmodülüdür.

*İspat:* $c^k(\mathbb{BC}) \subset w(\mathbb{BC})$ ve $c_0^k(\mathbb{BC}) \subset w(\mathbb{BC})$ olduğu tanımdan açıktır. İlk olarak $c^k(\mathbb{BC})$ kümesinin $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülü olduğu gösterilsin. Herhangi iki $s=(s_n), t=(t_n) \in c^k(\mathbb{BC})$ dizisi ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{BC}$ sayısı alınsın. Bu durumda herhangi bir $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ verildiğinde her $n \geq n_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$|s_n - l_1^*|_k \underset{\neq}{\prec} \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her $n \geq n_2(\varepsilon)$ olduğunda

$$|t_n - l_2^*|_k \underset{\neq}{\prec} \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)$ doğal sayıları ve $l_1^*, l_2^*$ bikompleks sayıları vardır. $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ seçilirse; her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için Teorem 2.2.15 i) gereği

$$\left|(s_n+t_n)-(l_1^*+l_2^*)\right|_k = \left|(s_n-l_1^*)+(t_n-l_2^*)\right|_k \precsim |s_n-l_1^*|_k + |t_n-l_2^*|_k \underset{\neq}{\prec} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılır. Buradan Teorem 2.2.15 viii) den $(s_n+t_n)$ dizisinin hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre $l_1^*+l_2^*$ bikompleks sayısına yakınsadığı elde edilir. Bu ise $s+t \in c^k(\mathbb{BC})$ anlamına gelir.

Diğer yandan $\alpha = 0$ için $\alpha s = 0 \in c^k(\mathbb{BC})$ olduğu açıktır. Şimdi $\alpha \in \mathbb{BC}-\{0\}$ ve $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ olduğu kabul edilsin. $\alpha_1 \neq 0$ ve $\alpha_2 \neq 0$ ise $\left||\alpha|_k\right|_i \neq 0$ olup $|\alpha|_k$ hiperbolik sayısı terslenebilirdir. O halde herhangi bir $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ verildiğinde her $n \geq n_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left|s_n - l_1^*\right|_k \underset{\neq}{\prec} \frac{\varepsilon}{|\alpha|_k}$$

olacak şekilde $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $n\geq n_1(\varepsilon)$ için Teorem 2.2.15 i) ve v) gereği

$$\left|(\alpha s_n)-(\alpha l_1^*)\right|_k = \left|\alpha\left(s_n - l_1^*\right)\right|_k = |\alpha|_k \left|s_n - l_1^*\right|_k \underset{\neq}{\prec} |\alpha|_k \frac{\varepsilon}{|\alpha|_k} = \varepsilon$$

yazılır. Buradan $(\alpha s_n)$ dizisinin hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre $\alpha l_1^*$ bikompleks sayısına yakınsadığı elde edilir. Bu ise $\alpha s\in c^k(\mathbb{BC})$ anlamına gelir.

$s_n = s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2$ ve $l_1^* = l_{11}^*e_1 + l_{12}^*e_2$ olsun. $\alpha_1\neq 0$ ve $\alpha_2 = 0$ ise $\|\alpha_1\|_i \neq 0$ olup $|\alpha_1|$ reel sayısı terslenebilirdir. O halde herhangi bir $0<\varepsilon_1$ verildiğinde her $n\geq n_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left|s_{n1} - l_{11}^*\right| < \frac{\varepsilon_1}{|\alpha_1|}$$

olacak şekilde $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $n\geq n_1(\varepsilon)$ için Teorem 2.2.15 i) ve v) gereği

$$\left|(\alpha_1 s_{n1})-(\alpha_1 l_{11}^*)\right| = \left|\alpha_1\left(s_{n1} - l_{11}^*\right)\right| = |\alpha_1|\left|s_{n1} - l_{11}^*\right| < |\alpha_1| \frac{\varepsilon}{|\alpha_1|} = \varepsilon$$

yazılır. Bu ise $(\alpha s_n) = \left((\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2)\right) = (\alpha_1 s_{n1} e_1)$ dizisinin $\alpha l_1^* = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\left(l_{11}^* e_1 + l_{12}^* e_2\right) = \alpha_1 l_{11}^* e_1$ sayısına yakınsadığı anlamına gelir. $\alpha_1 = 0$ ve $\alpha_2 \neq 0$ durumu da benzer şekilde ispatlanır.

Böylece $c^k(\mathbb{BC})$ kümesi $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülüdür. Bu ispatta $l_1^* = l_2^* = 0$ alınırsa; $c_0^k(\mathbb{BC})$ kümesinin de $w(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülünün bir $\mathbb{BC}-$altmodülü olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.22. $c^k(\mathbb{BC})$ ve $c_0^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülleri $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre birer tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

*İspat:* $s_m=\left(s_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $\left(s_m\right)$ dizisi, $c^k\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$modülünde herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ sayısı verildiğinde her $m,r\geq n_0\left(\varepsilon\right)$ için $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\left(s_m,s_r\right)=\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_n^m-s_n^r\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\underset{\neq}{\prec}\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $n_0\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda sabitlenmiş herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ ve her $m,r\geq n_0\left(\varepsilon\right)$ için

$$\left|s_n^m-s_n^r\right|_k\underset{\neq}{\prec}\frac{\varepsilon}{3}\tag{4.6}$$

olur. Buradan $\left(s_n^m\right)$ dizisinin bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir Cauchy dizisi olduğu söylenir. $\mathbb{BC},\ |.|_k$ normuna göre tam olduğundan bu dizi bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir $s_n^*\in\mathbb{BC}$ noktasına yakınsar. Bu noktalardan oluşan bir $s^*=\left(s_n^*\right)=\left(s_1^*,s_2^*,...,s_n^*,...\right)$ dizisi tanımlansın. (4.6) eşitsizliğinde $r\to\infty$ için limit alınırsa; her $m\geq n_0\left(\varepsilon\right)$ için $\left|s_n^m-s_n^*\right|_k\precsim\frac{\varepsilon}{3}$ elde edilir. Buradan da her $m\geq n_0\left(\varepsilon\right)$ için $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\left(s_m,s^*\right)=\sup\left\{\left|s_n^m-s_n^*\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\precsim\varepsilon$ olur. Bu ise $\left(s_m\right)\subset c^k\left(\mathbb{BC}\right)$ Cauchy dizisinin $s^*$ dizisine yakınsadığını gösterir. Diğer yandan $\left(s_n^{n_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in c^k\left(\mathbb{BC}\right)$ olduğundan hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir Cauchy dizisidir ve herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ sayısı verildiğinde her $n,m\geq k_0\left(\varepsilon\right)$ için $\left|s_n^{n_n}-s_m^{n_0}\right|_k\underset{\neq}{\prec}\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $k_0\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ sayısı verildiğinde her $n,m\geq k_0\left(\varepsilon\right)$ için Teorem 2.2.15 i) gereği

$$\begin{aligned}\left|s_n^*-s_m^*\right|_k&=\left|s_n^*-s_n^{n_0}+s_n^{n_0}-s_m^{n_0}+s_m^{n_0}-s_m^*\right|_k\\&\precsim\left|s_n^*-s_n^{n_0}\right|_k+\left|s_n^{n_0}-s_m^{n_0}\right|_k+\left|s_m^{n_0}-s_m^*\right|_k\\&\underset{\neq}{\prec}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

olup Teorem 2.2.15 viii) gereği $s^*=\left(s_n^*\right)$ dizisi $\mathbb{BC}$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{BC},\ |.|_k$ normuna göre tam olduğundan bu dizi bikompleks sayılar kümesinde hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre yakınsaktır, yani $s^* = (s_n^*) \in c^k(\mathbb{BC})$ olur. Sonuç olarak $\left(c^k(\mathbb{BC}), d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\right)$ bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Benzer şekilde $c_0^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülü de $d_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ fonksiyonuna göre bir tam hiperbolik değerli metrik uzaydır.

Sonuç 4.2.23. $c^k(\mathbb{BC})$ ve $c_0^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülleri, hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ normuna göre birer $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüldür.

## 4.3. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri

Bu kesimde, ilk olarak dizi uzayları için literatürde var olan solid uzay, monoton uzay, $BK-$uzay ve simetrik uzay kavramları hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bikompleks dizi uzayları için yeniden tanımlanmıştır.

Tanım 4.3.1. $X$ hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir bikompleks dizi uzayı ve

$$\tilde{X} := \left\{(s_n) \in w(\mathbb{BC}) : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } |s_n|_k \precsim |t_n|_k \text{ olacak şekilde } (t_n) \in X \text{ vardır}\right\}$$

olsun. Eğer $\tilde{X} \subset X$ ise $X$ dizi uzayına $\mathbb{D}-$solid ya da $\mathbb{D}-$normal uzay denir.

Tanım 4.3.2. $X$ hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir bikompleks dizi uzayı, $A := \left\{(s_n) \in w(\mathbb{BC}) : s_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $M_0 = sp\{A\}$ olsun. Eğer $M_0 X \subset X$ ise $X$ dizi uzayına $\mathbb{D}-$monoton uzay denir.

Tanım 4.3.3. $X$ hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir bikompleks dizi uzayı ve $\|.\|_{\mathbb{D},X}$ normuna göre $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modül olsun. Eğer $\|.\|_{\mathbb{D},X}$ normuna göre $\zeta^{(n)} \to \zeta$ $(n \to \infty)$ iken her $l \in \mathbb{N}$ için $|.|_k$ normuna göre $\zeta_l^{(n)} \to \zeta_l$ $(n \to \infty)$ oluyorsa $X$ dizi uzayına $\mathbb{D}-$normlu $BK-$uzay denir.

Tanım 4.3.4. $X$ hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bir bikompleks dizi uzayı ve $\pi := \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ birebir ve örten} \}$ olsun. Eğer $(s_n) \in X$ ve $\sigma \in \pi$ iken $s_\sigma = \left(s_{\sigma(n)}\right) \in X$ oluyorsa $X$ dizi uzayına $\mathbb{D}-$simetrik uzay denir.

Bu kesimin devamında, $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve $0 < p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ bikompleks dizi uzaylarının $\mathbb{D}-$solid uzay, $\mathbb{D}-$monoton uzay, $\mathbb{D}-$normlu $BK-$uzay ve $\mathbb{D}-$simetrik uzay olup olmadıkları incelenmiştir.

Teorem 4.3.5. $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$solid (normal) uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n) \in \widetilde{l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ alınsın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n|_k \precsim |t_n|_k$ olacak şekilde $(t_n) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ vardır. Bu durumda $\sup_{\mathbb{D}}\{|t_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ sonlu olduğundan $\sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ sonlu olup $(s_n) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ elde edilir. Böylece $\widetilde{l_\infty^k(\mathbb{BC})} \subset l_\infty^k(\mathbb{BC})$ olup $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{D}-$solid uzaydır.

Teorem 4.3.6. $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$monoton uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(\zeta_n) \in M_0 l_\infty^k(\mathbb{BC})$ alınsın. O halde $(\zeta_n) = (s_n t_n)$ olacak şekilde $(s_n) \in M_0$ ve $(t_n) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ dizileri vardır. Bu durumda $\sup_{\mathbb{D}}\{|t_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ sonludur ve $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olduğundan $\sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ hiperbolik sayısı sonludur. Dolayısıyla Teorem 2.2.15 ii) ve Teorem 2.3.5 iv) ile elde edilen

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{D}}\{|s_n t_n|_k : n \in \mathbb{N}\} &= \sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k |t_n|_k : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup_{\mathbb{D}}\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\} \sup_{\mathbb{D}}\{|t_n|_k : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

eşitliği gereği $\sup_{\mathbb{D}}\{|s_n t_n|_k : n \in \mathbb{N}\}$ sonludur. Bu ise $(\zeta_n) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.7. $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$normlu $BK-$uzaydır.

*İspat:* $n \to \infty$ için $\zeta^{(n)} \to \zeta$ olacak şekilde herhangi bir $\left(\zeta^{(n)}\right) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ alınsın. Bu durumda herhangi bir $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için

$\left\|\zeta^{(n)}-\zeta\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})} \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right|_k : l \in \mathbb{N}\right\} \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ olur. Buradan herhangi bir $0 \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ verildiğinde her $n \geq n_0$ ve her $l \in \mathbb{N}$ için $\left|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right|_k \underset{\neq}{\prec} \varepsilon$ yazılır. Bu ise her $l \in \mathbb{N}$ için $\left(\zeta_l^{(n)}\right)$ bikompleks sayı dizisinin $\zeta_l$ bikompleks sayısına yakınsadığını gösterir. Böylece koordinat fonksiyonlarının sürekliliği elde edilir.

Teorem 4.3.8. $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$simetrik uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve $\sigma \in \pi$ alınsın. Bu durumda $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ birebir örten bir dönüşüm olduğundan $\left\{\left|s_{\sigma(n)}\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ dir. Buradan $\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_{\sigma(n)}\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\} = \sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ eşitliği yazılır. Dolayısıyla $\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ sonlu olduğundan $\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_{\sigma(n)}\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ sonludur. O halde $\left(s_{\sigma(n)}\right) \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.9. $0 < p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$solid (normal) uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n) \in l_p^k(\widetilde{\mathbb{BC}})$ alınsın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n|_k \precsim |t_n|_k$ olacak şekilde $(t_n) \in l_p^k(\mathbb{BC})$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n|_k^p \precsim |t_n|_k^p$ yazılır. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|_k^p$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma tesi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|_k^p$ serisi yakınsak olup $(s_n) \in l_p^k(\mathbb{BC})$ elde edilir. Böylece $l_p^k(\widetilde{\mathbb{BC}}) \subset l_p^k(\mathbb{BC})$ olup $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{D}-$solid uzaydır.

Teorem 4.3.10. $0 < p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$monoton uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(\zeta_n) \in M_0 l_p^k(\mathbb{BC})$ alınsın. O halde $(\zeta_n) = (s_n t_n)$ olacak şekilde $(s_n) \in M_0$ ve $(t_n) \in l_p^k(\mathbb{BC})$ dizileri vardır. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|_k^p$ serisi yakınsak ve $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olduğu için $\sup_{\mathbb{D}}\left\{|s_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve dolayısıyla

$\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_n\right|_k^p : n\in\mathbb{N}\right\}$ hiperbolik sayısı sonludur. Burada Teorem 2.2.15 ii), iv) ve $\mathbb{D}-$ supremum tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|s_n t_n\right|_k^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|s_n\right|_k^p \left|t_n\right|_k^p \\ &\precsim \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_n\right|_k^p : n\in\mathbb{N}\right\}\left|t_n\right|_k^p \\ &= \sup_{\mathbb{D}}\left\{\left|s_n\right|_k^p : n\in\mathbb{N}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\left|t_n\right|_k^p\end{aligned}$$

ifadesi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\left|s_n t_n\right|_k^p$ serisi yakınsaktır. Bu ise $(\zeta_n)=(s_n t_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.11. $1\le p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$normlu $BK-$uzaydır.

*İspat:* $n\to\infty$ için $\zeta^{(n)}\to\zeta$ olacak şekilde herhangi bir $\left(\zeta^{(n)}\right)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ alınsın. Bu durumda herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ verildiğinde her $n\ge n_0$ için $\left\|\zeta^{(n)}-\zeta\right\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ verildiğinde her $n\ge n_0$ için $\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right|_k^p\right)^{1/p}\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ olur. Buradan herhangi bir $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ verildiğinde her $n\ge n_0$ ve her $l\in\mathbb{N}$ için $\left|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right|_k^p\underset{\neq}{\prec}\varepsilon^p$ ve dolayısıyla $\left|\zeta_l^{(n)}-\zeta_l\right|_k\underset{\neq}{\prec}\varepsilon$ yazılır. Bu ise her $l\in\mathbb{N}$ için $\left(\zeta_l^{(n)}\right)$ bikompleks sayı dizisinin $\zeta_l$ bikompleks sayısına yakınsadığını gösterir. Böylece koordinat fonksiyonlarının sürekliliği elde edilir.

Teorem 4.3.12. $l_p^k(\mathbb{BC})$ bir $\mathbb{D}-$simetrik uzaydır.

*İspat:* Herhangi bir $(s_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ ve $\sigma\in\pi$ alınsın. Bu durumda $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ birebir örten bir dönüşüm olduğundan $\left\{\left|s_{\sigma(n)}\right|_k : n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\left|s_n\right|_k : n\in\mathbb{N}\right\}$ ve dolayısıyla $\left\{\left|s_{\sigma(n)}\right|_k^p : n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\left|s_n\right|_k^p : n\in\mathbb{N}\right\}$ dir. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty}\left|s_{\sigma(n)}\right|_k^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left|s_n\right|_k^p$ eşitliği yazılır.

Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|_k^p$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}|s_{\sigma(n)}|_k^p$ serisi de yakınsaktır. O halde $\left(s_{\sigma(n)}\right)\in l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

### 4.4. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının Bazı Geometrik Özellikleri

Bu kesimde, ilk olarak Banach uzaylar için bilinen kesin konveks ve düzgün konveks küme kavramları, (Kumar and Saini, 2016) çalışmasında $\mathbb{BC}-$modüller için tanımlanan $\mathbb{BC}-$konveks küme tanımına dayanılarak bu bölümün ikinci kesiminde kurulan $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modül yapılarına göre genişletilmiştir.

Tanım 4.4.1. $X$ bir $\mathbb{BC}-$modül ve $B\subset X$ olsun. Eğer her $x,y\in B$ ve $0\precsim\lambda\precsim 1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^+$ için $\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in B$ ise $B$ kümesine bir $\mathbb{BC}-$konveks küme denir (Kumar and Saini, 2016).

Tanım 4.4.2. $X$ bir $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modül ve $S_X=\left\{x\in X:\|x\|_{\mathbb{D},X}=1\right\}$ olsun. Eğer $x\neq y$ olan her $x,y\in S_X$ ve $0\prec\lambda\prec 1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^+$ için $\left\|\left(1-\lambda\right)x+\lambda y\right\|_{\mathbb{D},X}\precneqq 1$ ise $X$ kümesine bir $\mathbb{BC}-$kesin konveks küme denir.

Tanım 4.4.3. $X$ bir $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modül olsun. Eğer $0\precneqq\varepsilon\precsim 2$ olan her $\varepsilon\in\mathbb{D}^+$ için $\|x\|_{\mathbb{D},X}\precsim 1,\|y\|_{\mathbb{D},X}\precsim 1$ ve $\varepsilon\precsim\|x-y\|_{\mathbb{D},X}$ olduğunda $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbb{D},X}\precsim 1-\delta$ olacak şekilde $\delta\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{D}^+-\left\{0\right\}$ hiperbolik sayısı varsa $X$ kümesine bir $\mathbb{BC}-$düzgün konveks küme denir.

Bu kesimin devamında, hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ normuna göre $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$, hiperbolik değerli $\|.\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ normuna göre $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{D}-$normlu Banach bikompleks $\mathbb{BC}-$modüllerinin konvekslik yapıları bikompleks anlamda incelenmiştir. Böylece yukarıda yapılan tanımların anlamlı olduğu da elde edilmiştir.

Teorem 4.4.4. $0<p<\infty$ için $l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ $\mathbb{BC}-$konvekstir.

*İspat:* $x, y \in l_p^k(\mathbb{BC})$ ve $0 \precsim \lambda \precsim 1$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{D}^+$ olsun. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|_k^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|_k^p$ serileri yakınsaktır.

Eğer $1 < p < \infty$ ise Teorem 2.2.15 i) ve $\mathbb{D}-$supremum tanımı gereği

$$\begin{aligned} \left|\lambda x_n + (1-\lambda) y_n\right|_k^p &\precsim \left(\left|\lambda x_n\right|_k + \left|(1-\lambda) y_n\right|_k\right)^p \\ &= \left(2\sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|\lambda x_n\right|_k, \left|(1-\lambda) y_n\right|_k\right\}\right)^p \\ &= 2^p \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|\lambda x_n\right|_k^p, \left|(1-\lambda) y_n\right|_k^p\right\} \\ &\precsim 2^p \left(\left|\lambda x_n\right|_k^p + \left|(1-\lambda) y_n\right|_k^p\right) \\ &= 2^p \left(\lambda^p \left|x_n\right|_k^p + (1-\lambda)^p \left|y_n\right|_k^p\right) \end{aligned}$$

olup Teorem 2.2.15 viii) ve karşılaştırma testi gereği $\lambda x + (1-\lambda) y \in l_p^k(\mathbb{BC})$ dir.

Eğer $0 < p \leq 1$ ise Lemma 4.1.7 ve Teorem 2.2.15 iii) gereği

$$\left|\lambda x_n + (1-\lambda) y_n\right|_k^p \precsim \left|\lambda x_n\right|_k^p + \left|(1-\lambda) y_n\right|_k^p = \lambda^p \left|x_n\right|_k^p + (1-\lambda)^p \left|y_n\right|_k^p$$

olup karşılaştırma testinden $\lambda x + (1-\lambda) y \in l_p^k(\mathbb{BC})$ dir.

$x, y \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ ve $0 \precsim \lambda \precsim 1$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{D}^+$ olsun. O halde $\sup_{\mathbb{D}} \left\{|x_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $\sup_{\mathbb{D}} \left\{|y_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\}$ sonludur. Bu durumda Teorem 2.2.15 i), iii) ve Teorem 2.3.5 ii), iv) gereği

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\left|\lambda x_n + (1-\lambda) y_n\right|_k : n \in \mathbb{N}\right\} &\precsim \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{\lambda |x_n|_k + (1-\lambda)|y_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \lambda \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{|x_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\} + (1-\lambda) \sup\nolimits_{\mathbb{D}} \left\{|y_n|_k : n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

olup $\lambda x + (1-\lambda) y \in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ dir. Sonuç olarak $0 < p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ ve $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$konvekstir.

Teorem 4.4.5. $1 < p < \infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$kesin konvekstir.

*İspat:* $x \neq y$ ve $0 \prec \lambda \prec 1$ olmak üzere $x, y \in S_{l_p^k(\mathbb{BC})}$ ve $\lambda \in \mathbb{D}^+$ olsun. O halde Lemma 4.1.10 gereği

$$\left\|\lambda x+(1-\lambda)y\right\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})} = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\right|_k^p \underset{\neq}{\prec} \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left|x_n\right|_k^p+(1-\lambda)\left|y_n\right|_k^p$$
$$=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|_k^p+(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_n\right|_k^p$$
$$=\lambda\left\|x\right\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}+(1-\lambda)\left\|y\right\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}=1$$

olduğundan $1<p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$kesin konvekstir.

*Örnek 4.4.6.* $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$kesin konveks değildir.

*Çözüm:*

$$x=(x_n)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,\ldots\right),$$
$$y=(y_n)=\left(0,\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,\ldots\right)$$

olsun. Bu durumda $\left\|x\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}=\left\|y\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}=1$ ve $\lambda=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2\in\mathbb{D}^+$ için

$$\left\|\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2\right)x+\left(1-\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2\right)\right)y\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$$
$$=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2\right)x_n+\left(1-\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2\right)\right)y_n\right|_k : n\in\mathbb{N}\right\}$$
$$=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)e_2\right|_k,\left|\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2\right|_k\right\}$$
$$=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\frac{1}{2},1\right\}=1$$

dir. Böylece $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$kesin konveks olamaz.

*Örnek 4.4.7.* $l_1^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$kesin konveks değildir.

*Çözüm:*

$$x=(x_n)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,\ldots\right),$$
$$y=(y_n)=\left(0,\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,\ldots\right)$$

olsun. Bu durumda $\left\|x\right\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=\left\|y\right\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=1$ ve $0\prec\lambda\prec1$ olan her $\lambda\in\mathbb{D}^+$ için

$$\left\|\lambda x+(1-\lambda)y\right\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\right|_k$$
$$=\left|\lambda x_1\right|_k+\left|(1-\lambda)y_2\right|_k=\lambda\left|x_1\right|_k+(1-\lambda)\left|y_2\right|_k$$
$$=\lambda+(1-\lambda)\ =1$$

dir. Böylece $l_1^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$kesin konveks değildir.

Teorem 4.4.8. $2\leq p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$düzgün konvekstir.

*İspat:* $x,y\in l_p^k(\mathbb{BC})$, $0\underset{\neq}{\prec}\varepsilon\precsim 2$ olmak üzere $\varepsilon\in\mathbb{D}^+$, $\|x\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\precsim 1$, $\|y\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\precsim 1$ ve $\varepsilon\precsim\|x-y\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$ olsun. Bu durumda Lemma 4.1.8 ve Teorem 2.2.15 vii) gereği

$$\|x+y\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}+\|x-y\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n+y_n\right|_k^p+\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-y_n\right|_k^p$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|x_n+y_n\right|_k^p+\left|x_n-y_n\right|_k^p\right)$$
$$\precsim\sum_{n=1}^{\infty}2^{p-1}\left(\left|x_n\right|_k^p+\left|y_n\right|_k^p\right)$$
$$=2^{p-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|_k^p+\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_n\right|_k^p\right]$$
$$=2^{p-1}\left[\|x\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}+\|y\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right]\precsim 2^p$$

olur. Buradan $\|x+y\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\precsim 2^p-\|x-y\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\precsim 2^p-\varepsilon^p$ yazılabilir. Böylece Teorem 2.2.15 viii) den

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}=\left[\frac{1}{2^p}\|x+y\|^p_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\right]^{1/p}\precsim\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}$$

olup $\delta(\varepsilon)=1-\left[1-\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}$ alınırsa; istenen elde edilir, yani $2\leq p<\infty$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$düzgün konvekstir.

*Örnek 4.4.9.* $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$düzgün konveks değildir.

*Çözüm:*

$$x=(x_n)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,...\right),$$
$$y=(y_n)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,...\right)$$

olsun. Bu durumda $\|x\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}=\|y\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}=1$,

$$\begin{aligned}\|x-y\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}&=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|x_n-y_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{2}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}i\right)e_2\right|_k\right\}=2\end{aligned}$$

ve $\varepsilon\precsim\|x-y\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}=2$ olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}&=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\\&=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(1-\sqrt{3}i\right)e_2\right|_k\right\}=1\end{aligned}$$

dir. Böylece $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\precsim 1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)\in\mathbb{D}^+-\{0\}$ yoktur. Sonuç olarak $l_\infty^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$düzgün konveks değildir.

*Örnek 4.4.10.* $l_1^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$düzgün konveks değildir.

*Çözüm:*

$$x=(x_n)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,...\right),$$
$$y=(y_n)=\left(0,\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2,0,0,...\right)$$

olsun. Bu durumda $\|x\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=\|y\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=1$,

$$\|x-y\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|_k=2\left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e_2\right|_k=2$$

ve $\varepsilon \underset{\sim}{\prec} \|x-y\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=2$ olur. Diğer yandan

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|_k=2\left|\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i\right)e_1+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)e_2\right|_k=1$$

dir. Böylece $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}\underset{\sim}{\prec}1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)\in\mathbb{D}^+-\{0\}$ yoktur. Sonuç olarak $l_1^k(\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$düzgün konveks olamaz.

## 4.5. Hiperbolik Değerli $|.|_k$ Normuna Göre Bikompleks Dizi Uzaylarının $\mathbb{D}-$Topolojik Dualleri

Bu kesimde, ilk olarak $\|.\|_{\mathbb{D},.}$ hiperbolik değerli normuna sahip bir $\mathbb{BC}-$modülün $\mathbb{D}-$topolojik dual tanımı yapılmıştır ve $\mathbb{BC}^n$ kümesinin bu tanımın şartlarını sağladığı ispatlanarak $\mathbb{D}-$topolojik duali bulunmuştur.

Tanım 4.5.1. $X$ bir $\mathbb{BC}-$modül ve $\|.\|_{\mathbb{D},X}$ hiperbolik değerli norma sahip olsun. $B_{\mathbb{BC}}(X,\mathbb{BC})$ $\mathbb{BC}-$modülüne $X$ $\mathbb{BC}-$modülünün $\mathbb{D}-$topolojik duali denir ve $X^{*_{\mathbb{D}}}$ ile gösterilir.

Tanım 4.5.2. $\mathbb{BC}^n$ kümesi üzerinde, her $s=(s_1,...,s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{BC}^n$ ve her $\alpha\in\mathbb{BC}$ için toplama işlemi

$$+_n:\mathbb{BC}^n\times\mathbb{BC}^n\to\mathbb{BC}^n,(s,t)\to s+_n t=(s_1+t_1,...,s_n+t_n)$$

ile, skalerle çarpma işlemi

$$\cdot_n:\mathbb{BC}\times\mathbb{BC}^n\to\mathbb{BC}^n,(\alpha,s)\to\alpha\cdot_n s=(\alpha\cdot s_1,...,\alpha\cdot s_n)$$

ile tanımlıdır.

Teorem 4.5.3. $\mathbb{BC}^n$ kümesi, üzerinde tanımlı toplama ve bikompleks skalerle çarpma işlemlerine göre bir $\mathbb{BC}-$ modüldür.

*İspat:* İlk olarak $\mathbb{BC}^n$ kümesinin toplama işlemine göre bir değişmeli grup olduğu gösterilsin. Her $s=(s_1,...,s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{BC}^n$ için

$$s+_n t=(s_1,...,s_n)+_n(t_1,...,t_n)=(s_1+t_1,...,s_n+t_n)\in\mathbb{BC}^n$$

olduğundan kapalılık özelliği sağlanır. Her $s=(s_1,...,s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)$, $u=(u_1,...,u_n)\in\mathbb{BC}^n$ için

$$\begin{aligned}(s+_n t)+_n u&=\big((s_1,...,s_n)+_n(t_1,...,t_n)\big)+_n(u_1,...,u_n)\\&=(s_1+t_1,...,s_n+t_n)+_n(u_1,...,u_n)\\&=\big((s_1+t_1)+u_1,...,(s_n+t_n)+u_n\big)\\&=\big(s_1+(t_1+u_1),...,s_n+(t_n+u_n)\big)\\&=(s_1,...,s_n)+_n(t_1+u_1,...,t_n+u_n)\\&=s+_n(t+_n u)\end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır. Her $s=(s_1,...,s_n)\in\mathbb{BC}^n$ için

$$s+_n 0=(s_1,...,s_n)+_n(0,0,...,0)=(s_1,...,s_n)=s$$

ve benzer şekilde $0+_n s=s$ olduğundan $0=(0,0,...,0)$, $\mathbb{BC}^n$ kümesi için toplama işlemine göre birim elemandır. Her $s=(s_1,...,s_n)\in\mathbb{BC}^n$ için $t=-s=(-s_1,...,-s_n)\in\mathbb{BC}^n$ için

$$s+_n t=(s_1,...,s_n)+_n(-s_1,...,-s_n)=(0,0,...,0)=0$$

ve benzer şekilde $t+_n s=0$ olduğundan $\mathbb{BC}^n$ kümesinde her elemanın toplamaya göre tersi vardır. Yine her $s=(s_1,...,s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{BC}^n$ için $s+_n t=t+_n s$ olduğundan $\mathbb{BC}^n$ kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

Diğer yandan her $s=(s_1,...,s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{BC}^n$ ve her $\alpha,\beta\in\mathbb{BC}$ için

$$\begin{aligned}\alpha\cdot_n(s+t)&=\big(\alpha(s_1+t_1),...,\alpha(s_n+t_n)\big)\\&=\alpha\cdot_n(s_1,...,s_n)+_n\alpha\cdot_n(t_1,...,t_n)\\&=\alpha\cdot_n s+_n\alpha\cdot_n t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot_n s&=\big((\alpha+\beta)s_1,...,(\alpha+\beta)s_n\big)\\&=\alpha\cdot_n(s_1,...,s_n)+_n\beta\cdot_n(s_1,...,s_n)\\&=\alpha\cdot_n s+_n\beta\cdot_n s\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)\cdot_n s &= \left((\alpha\beta)s_1,\ldots,(\alpha\beta)s_n\right)\\
&= \left(\alpha(\beta s_1),\ldots,\alpha(\beta s_n)\right)\\
&= \alpha\cdot_n\left(\beta\cdot_n(s_1,\ldots,s_n)\right)\\
&= \alpha\cdot_n\left(\beta\cdot_n s\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathbb{BC}^n$ bir sol $\mathbb{BC}-$modüldür. Ayrıca $\mathbb{BC}$, üzerindeki çarpma işlemine göre değişmeli olduğu için aynı zamanda bir sağ $\mathbb{BC}-$modüldür. Sonuç olarak $\mathbb{BC}^n$ kümesi bir $\mathbb{BC}-$modüldür.

Teorem 4.5.4. $\|.\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}:\mathbb{BC}^n\to\mathbb{D}^+,\ s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)\to\|s\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}=\left(\sum_{l=1}^{n}|s_l|_k^2\right)^{1/2}$ fonksiyonu $\mathbb{BC}^n$ üzerinde bir hiperbolik değerli norm tanımlar.

*İspat:* $s\in\mathbb{BC}^n$ alınsın. Örnek 2.3.3 gereği

$$
\begin{aligned}
\|s\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}=0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{l=1}^{n}|s_l|_k^2\right)^{1/2}=0\\
&\Leftrightarrow \sum_{l=1}^{n}|s_l|_k^2=0\\
&\Leftrightarrow \forall l\in\mathbb{N},\ |s_l|_k=0\\
&\Leftrightarrow \forall l\in\mathbb{N}, s_l=0\\
&\Leftrightarrow s=0
\end{aligned}
$$

olup norm olmanın ilk koşulu sağlanır. Her $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n),\ t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\mathbb{BC}^n$ ve $\alpha\in\mathbb{BC}$ için Teorem 2.2.15 i) gereği

$$
\begin{aligned}
\|\alpha\cdot_n s\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n} &= \|(\alpha s_1,\ldots,\alpha s_n)\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}=\left(\sum_{l=1}^{n}|\alpha s_l|_k^2\right)^{1/2}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n}|\alpha|_k^2|s_l|_k^2\right)^{1/2}=|\alpha|_k\left(\sum_{l=1}^{n}|s_l|_k^2\right)^{1/2}\\
&= |\alpha|_k\|s\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}
\end{aligned}
$$

ve Lemma 4.1.6 gereği

$$
\begin{aligned}
\|s+_n t\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n} &= \|(s_1+t_1,\ldots,s_n+t_n)\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}=\left(\sum_{l=1}^{n}|s_l+t_l|_k^2\right)^{1/2}\\
&\precsim \left(\sum_{l=1}^{n}|s_l|_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{l=1}^{n}|t_l|_k^2\right)^{1/2}=\|s\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}+\|t\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}
\end{aligned}
$$

olduğundan $\|.\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}$ fonksiyonu $\mathbb{BC}^n$ üzerinde bir hiperbolik değerli normdur.

Teorem 4.5.5. $\mathbb{BC}^n$ $\mathbb{BC}-$modülünün $\mathbb{D}-$topolojik duali kendisidir, yani $\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}=\mathbb{BC}^n$ dir.

*İspat:* $e_1=(1,0,...,0)$, $e_2=(0,1,0,...,0),...,e_n=(0,0,...,0,1)$ olmak üzere $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ kümesi $\mathbb{BC}^n$ için bir $\mathbb{D}-$Schauder bazı oluşturmakta ve dolayısıyla her $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)\in\mathbb{BC}^n$ elemanı $\zeta=\sum_{l=1}^{n}\zeta_l e_l$ biçiminde tek türlü yazılabilmektedir.

Herhangi bir $f\in\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ alınsın. Bu durumda $f$, $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyonel olduğundan $f(\zeta)=\sum_{l=1}^{n}\zeta_l f(e_l)$ eşitliği yazılır.

Hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bikompleks Hölder eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}
|f(\zeta)|_k &= \left|\sum_{l=1}^{n}\zeta_l f(e_l)\right|_k = \sum_{l=1}^{n}|\zeta_l f(e_l)|_k \\
&\precsim \left(\sum_{l=1}^{n}|\zeta_l|_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{n}|f(e_l)|_k^2\right)^{1/2} \\
&= \|\zeta\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}\,\|f(e_l)\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}
\end{aligned}$$

yazılır. Son ifadede $\|\zeta\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}=1$ olan $\zeta$ elemanları üzerinden $\mathbb{D}-$supremum alınırsa; $\|f\|_{\mathbb{D}}\precsim\|f(e_m)\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}$ olduğu elde edilir.

Şimdi bir $(\bar{\zeta})=(\bar{\zeta}_1,\bar{\zeta}_2,...,\bar{\zeta}_n)\in\mathbb{BC}^n$ elemanı

$$\bar{\zeta}_l=\begin{cases}\dfrac{|f(e_l)|_k^2}{f(e_l)}, & |f(e_l)|_i\neq 0\\ 0, & |f(e_l)|_i=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.3.11 i) gereği

$$f\left(\bar{\zeta}\right)=f\left(\sum_{l=1}^{n}\bar{\zeta}_l e_l\right)=\sum_{l=1}^{n}\bar{\zeta}_l f\left(e_l\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left|f\left(e_l\right)\right|_k^2}{f\left(e_l\right)}f\left(e_l\right)=\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(e_l\right)\right|_k^2=\left|f\left(\zeta\right)\right|_k$$

$$\precsim \|f\|_{\mathbb{D}}\left\|\bar{\zeta}\right\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\bar{\zeta}_l\right|_k^2\right)^{1/2}=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\left|f\left(e_l\right)\right|_k^2}{f\left(e_l\right)}\right|_k^2\right)^{1/2}$$

$$=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(e_l\right)\right|_k^2\right)^{1/2}=\|f\|_{\mathbb{D}}\left\|f\left(e_l\right)\right\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}$$

yani, $\left\|f\left(e_l\right)\right\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}\precsim\|f\|_{\mathbb{D}}$ elde edilir. O halde $\|f\|_{\mathbb{D}}=\left\|f\left(e_l\right)\right\|_{\mathbb{D},\mathbb{BC}^n}$ dir.

Şimdi $T:\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}\to\mathbb{BC}^n,\ f\to Tf=\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right),...,f\left(e_n\right)\right)$ operatörü tanımlansın. $T$ operatörünün izometri olduğu yukarıdaki sonuçlardan elde edilir.

Ayrıca her $f,g\in\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}},\alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$\begin{aligned}T\left(f+\alpha g\right)&=\left(\left(f+\alpha g\right)\left(e_1\right),\left(f+\alpha g\right)\left(e_2\right),...,\left(f+\alpha g\right)\left(e_n\right)\right)\\&=\left(f\left(e_1\right)+\alpha g\left(e_1\right),f\left(e_2\right)+\alpha g\left(e_2\right),...,f\left(e_n\right)+\alpha g\left(e_n\right)\right)\\&=\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right),...,f\left(e_n\right)\right)+\alpha\left(g\left(e_1\right),g\left(e_2\right),...,g\left(e_n\right)\right)\\&=Tf+\alpha Tg\end{aligned}$$

olup $T$, $\mathbb{BC}-$lineer operatördür.

Herhangi bir $\zeta=\left(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n\right)\in\mathbb{BC}^n$ için $\zeta=\sum_{l=1}^{n}\zeta_l e_l$ olmak üzere $f_l\left(\zeta\right)=\zeta_l$ ve $f_l\left(e_m\right)=\begin{cases}1, & l=m\\0, & l\neq m\end{cases}$ olacak şekilde $f_l:\mathbb{BC}^n\to\mathbb{BC}$ dönüşümleri tanımlansın. $l\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere $f_l:\mathbb{BC}^n\to\mathbb{BC}$ $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyoneldir. Böylece $f:\mathbb{BC}^n\to\mathbb{BC}$ operatörü $f=\zeta_1 f_1+...+\zeta_n f_n$ olarak alınırsa; $f\in\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ olur. O halde bu $f\in\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ için $T:\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}\to\mathbb{BC}^n,Tf=\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right),...,f\left(e_n\right)\right)=\zeta$ yazılır. Gerçekten

$$\begin{aligned}&f\left(e_1\right)=\zeta_1 f_1\left(e_1\right)+\zeta_2 f_2\left(e_1\right)+...+\zeta_n f_n\left(e_1\right)=\zeta_1,\\&f\left(e_2\right)=\zeta_1 f_1\left(e_2\right)+\zeta_2 f_2\left(e_2\right)+...+\zeta_n f_n\left(e_2\right)=\zeta_2,\\&\vdots\\&f\left(e_n\right)=\zeta_1 f_1\left(e_n\right)+\zeta_2 f_2\left(e_n\right)+...+\zeta_n f_n\left(e_n\right)=\zeta_n\end{aligned}$$

olup $Tf=\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right),...,f\left(e_n\right)\right)=\left(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n\right)=\zeta$ elde edilir. Yani her $\zeta=\left(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n\right)\in\mathbb{BC}^n$ için $Tf=\zeta$ olacak şekilde bir $f\in\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ bulunmuş olur. Dolayısıyla $T$ örtendir. Sonuç olarak $T$ örten izometrik bir $\mathbb{BC}-$modül izomorfizmidir. O halde $\left[\mathbb{BC}^n\right]^{*_{\mathbb{D}}}=\mathbb{BC}^n$ dir.

Bu kesimin devamında, $\left[l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$, $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $\left[l_p^k\left(\mathbb{BC}\right)\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_q^k\left(\mathbb{BC}\right)$, $\left[c_0^k\left(\mathbb{BC}\right)\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $\left[c^k\left(\mathbb{BC}\right)\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)$ eşitliklerinin gerçeklendiği gösterilmiştir.

Teorem 4.5.6. $l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)$ modülünün $\mathbb{D}-$topolojik duali $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ dir, yani $\left[l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ dir.

*İspat:* $e_1=\left(1,0,0,...\right),e_2=\left(0,1,0,0,...\right),...,e_n=\left(0,0,...,0,1,0,0,...\right),...$ olmak üzere $\left(e_n\right)$ dizisi $l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)$ modülü için bir $\mathbb{D}-$Schauder bazı oluşturmakta ve dolayısıyla her $\zeta=\left(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n,...\right)\in l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)$ elemanı $\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n e_n$ biçiminde tek türlü yazılabilmektedir.

Herhangi bir $f\in\left[l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ alınsın. Bu durumda $f$, $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyonel olduğundan

$$f\left(\zeta\right)=f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n e_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n f\left(e_n\right)$$

yazılabilir. Ayrıca $f$, $\mathbb{D}-$sınırlı, her $n\in\mathbb{N}$ için $e_n\in l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)$ ve $\left\|e_n\right\|_{\mathbb{D},l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)}=1$ olduğundan Teorem 2.3.11 i) gereği

$$\left|f\left(e_n\right)\right|_k\precsim\left\|f\right\|_{\mathbb{D}}\left\|e_n\right\|_{\mathbb{D},l_1^k\left(\mathbb{BC}\right)}=\left\|f\right\|_{\mathbb{D}}$$

ve dolayısıyla $\mathbb{D}-$supremum tanımından

$$\left\|f\left(e_n\right)\right\|_{\mathbb{D},l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)}=\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|f\left(e_n\right)\right|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\precsim\left\|f\right\|_{\mathbb{D}}$$

yazılır. Buradan $\left(f\left(e_n\right)\right)$ dizisinin $l_\infty^k\left(\mathbb{BC}\right)$ modülüne ait olduğu söylenir.

Tersine, herhangi bir $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n,...)\in l_\infty^k(\mathbb{BC})$ için $l_1^k(\mathbb{BC})$ modülü üzerinde bir $g$ fonksiyoneli her $\rho=(\rho_n)\in l_1^k(\mathbb{BC})$ için $g(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\upsilon_n$ ile tanımlansın. Her $\rho=(\rho_n)$, $\sigma=(\sigma_n)\in l_1^k(\mathbb{BC})$, $\alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$g(\rho+\alpha\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n+\alpha\sigma_n)\upsilon_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n\upsilon_n+\alpha\sigma_n\upsilon_n)=g(\rho)+\alpha g(\sigma)$$

ve Teorem 2.2.15 i), iv) ve $\mathbb{D}-$supremum tanımı gereği

$$\begin{aligned}|g(\rho)|_k&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\upsilon_n\right|_k\precsim\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n\upsilon_n|_k=\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n|_k|\upsilon_n|_k\\&\precsim\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\{|\upsilon_n|_k:n\in\mathbb{N}\}\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n|_k=\|\upsilon\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\|\rho\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.2.15 viii) gereği $g$, bir $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyoneldir, yani $g\in\left[l_1^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ dir.

Diğer yandan yine Teorem 2.2.15 i), iv) ve $\mathbb{D}-$supremum tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}|f(\zeta)|_k&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n f(e_n)\right|_k\precsim\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k|f(e_n)|_k\\&\precsim\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\{|f(e_n)|_k:n\in\mathbb{N}\}\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k\\&=\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\|\zeta\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

ifadesinde $\|\zeta\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=1$ olan $\zeta$ dizileri üzerinden $\mathbb{D}-$supremum alınırsa; Teorem 2.2.15 viii) gereği

$$\|f\|_{\mathbb{D}}\precsim\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$$

elde edilir. O halde $\|f\|_{\mathbb{D}}=\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}$ dir.

Şimdi $T:\left[l_1^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}\to l_\infty^k(\mathbb{BC}),\ f\to Tf=(f(e_1),f(e_2),...,f(e_n),...)$ operatörü tanımlansın. $T$ operatörünün izometri ve örten olduğu yukarıdaki sonuçlardan elde edilir. Ayrıca her $f,g\in\left[l_1^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$, $\alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$
\begin{aligned}
T(f+\alpha g) &= \left((f+\alpha g)(e_1),(f+\alpha g)(e_2),\dots,(f+\alpha g)(e_n),\dots\right)\\
&= \left(f(e_1)+\alpha g(e_1), f(e_2)+\alpha g(e_2),\dots, f(e_n)+\alpha g(e_n),\dots\right)\\
&= \left(f(e_1), f(e_2),\dots, f(e_n),\dots\right)+\alpha\left(g(e_1), g(e_2),\dots, g(e_n),\dots\right)\\
&= Tf+\alpha Tg
\end{aligned}
$$

olup $T$, $\mathbb{BC}-$lineer operatördür. Sonuç olarak $T$ örten izometrik bir $\mathbb{BC}-$modül izomorfizmidir. O halde $\left[l_1^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_\infty^k(\mathbb{BC})$ dir.

Teorem 4.5.7. $1<p<\infty$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olmak üzere $l_p^k(\mathbb{BC})$ modülünün $\mathbb{D}-$topolojik duali $l_q^k(\mathbb{BC})$ dir, yani $\left[l_p^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_q^k(\mathbb{BC})$ dir.

*İspat:* $e_1=(1,0,0,\dots)$, $e_2=(0,1,0,0,\dots),\dots,e_n=(0,0,\dots,0,1,0,0,\dots),\dots$ olmak üzere $(e_n)$ dizisi $l_p^k(\mathbb{BC})$ modülü için bir $\mathbb{D}-$Schauder bazı oluşturmakta ve dolayısıyla her $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n,\dots)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ elemanı $\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n e_n$ biçiminde tek türlü yazılabilmektedir.

Herhangi bir $f\in\left[l_p^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ alınsın. Bu durumda $f$, $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyonel olduğundan $f(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n f(e_n)$ eşitliği yazılır.

Şimdi bir $(\zeta_n)=\left(\zeta_1^{(n)},\zeta_2^{(n)},\dots,\zeta_l^{(n)},\dots\right)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ elemanı

$$
\zeta_l^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{\left|f(e_l)\right|_k^q}{f(e_l)}, & l\le n \; ve \; \left|f(e_l)\right|_i\neq 0\\[2ex] 0, & l>n \; ve \; \left|f(e_l)\right|_i=0\end{cases}
$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$
f(\zeta_n)=\sum_{l=1}^{\infty}\zeta_l^{(n)}f(e_l)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left|f(e_l)\right|_k^q}{f(e_l)}f(e_l)=\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q
$$

olur. Buradan $f$ fonksiyonunun $\mathbb{D}-$sınırlılığı gereği

$$\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q=\left|\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q\right|_k=\left|f(\zeta_n)\right|_k \precsim \|f\|_{\mathbb{D}}\|\zeta_n\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}$$

$$=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left|\zeta_l^{(n)}\right|_k^p\right)^{1/p}=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\left|f(e_l)\right|_k^q}{f(e_l)}\right|_k^p\right)^{1/p}$$

$$=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^{(q-1)p}\right)^{1/p}=\|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q\right)^{1/p}$$

ifadesinden $\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q \precsim \|f\|_{\mathbb{D}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q\right)^{1/p}$ elde edilir. Burada her iki taraf $\left(\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q\right)^{-1/p}\in\mathbb{D}^+-\{0\}$ ile çarpılırsa; Teorem 2.2.15 iv) gereği $\left(\sum_{l=1}^{n}\left|f(e_l)\right|_k^q\right)^{1/q}\precsim\|f\|_{\mathbb{D}}$ bulunur. Son ifadede $n\to\infty$ için limit alınırsa; $\|f(e_l)\|_{\mathbb{D},l_q^k(\mathbb{BC})}=\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left|f(e_l)\right|_k^q\right)^{1/q}\precsim\|f\|_{\mathbb{D}}$ gelir. Bu ise $(f(e_l))$ dizisinin $l_q^k(\mathbb{BC})$ modülüne ait olduğunu gösterir.

Tersine, herhangi bir $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n,...)\in l_q^k(\mathbb{BC})$ için $l_p^k(\mathbb{BC})$ modülü üzerinde bir $g$ fonksiyoneli her $\rho=(\rho_n)\in l_p^k(\mathbb{BC})$ için $g(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\upsilon_n$ ile tanımlansın. Her $\rho=(\rho_n),\ \sigma=(\sigma_n)\in l_p^k(\mathbb{BC}),\ \alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$g(\rho+\alpha\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n+\alpha\sigma_n)\upsilon_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n\upsilon_n+\alpha\sigma_n\upsilon_n)=g(\rho)+\alpha g(\sigma)$$

ve hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bikompleks Hölder eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}\left|g(\rho)\right|_k=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\upsilon_n\right|_k&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\rho_n\upsilon_n\right|_k\\&\precsim\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\rho_n\right|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\upsilon_n\right|_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\|\rho\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\|\upsilon\|_{\mathbb{D},l_q^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

olduğundan $g$, bir $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyoneldir, yani $g\in\left[l_p^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ dir. Diğer yandan yine hiperbolik değerli $|.|_k$ normuna göre bikompleks Hölder eşitsizliğinden elde edilen

$$\begin{aligned}|f(\zeta)|_k=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n f(e_n)\right|_k &\precsim \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n f(e_n)|_k\\ &\precsim\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f(e_n)|_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &=\|\zeta\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_q^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

ifadesinde $\|\zeta\|_{\mathbb{D},l_p^k(\mathbb{BC})}=1$ olan $\zeta=(\zeta_n)$ dizileri üzerinden $\mathbb{D}-$supremum alınırsa; Teorem 2.2.15 viii) gereği

$$\|f\|_{\mathbb{D}}\precsim\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_q^k(\mathbb{BC})}$$

elde edilir. O halde $\|f\|_{\mathbb{D}}=\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_q^k(\mathbb{BC})}$ dir.

Şimdi $\quad T:\left[l_p^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}\to l_q^k(\mathbb{BC}),\ f\to Tf=\left(f(e_1),f(e_2),...,f(e_n),...\right)$

operatörü tanımlansın. $T$ operatörünün izometri ve örten olduğu yukarıdaki sonuçlardan elde edilir. Ayrıca her $f,g\in\left[l_p^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$, $\alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$\begin{aligned}T(f+\alpha g)&=\left((f+\alpha g)(e_1),(f+\alpha g)(e_2),...,(f+\alpha g)(e_n),...\right)\\ &=\left(f(e_1)+\alpha g(e_1),f(e_2)+\alpha g(e_2),...,f(e_n)+\alpha g(e_n),...\right)\\ &=\left(f(e_1),f(e_2),...,f(e_n),...\right)+\alpha\left(g(e_1),g(e_2),...,g(e_n),...\right)\\ &=Tf+\alpha Tg\end{aligned}$$

olup $T$, $\mathbb{BC}-$ lineer operatördür. Sonuç olarak $T$ örten izometrik bir $\mathbb{BC}-$modül izomorfizmidir. O halde $\left[l_p^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_q^k(\mathbb{BC})$ dir.

Teorem 4.5.8. $c_0^k(\mathbb{BC})$ dizi modülünün $\mathbb{D}-$topolojik duali $l_1^k(\mathbb{BC})$ dir, yani $\left[c_0^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}=l_1^k(\mathbb{BC})$ dir.

*İspat:* $e_1=(1,0,0,...),e_2=(0,1,0,0,...),...,e_n=(0,0,...,0,1,0,0,...),...$ olmak üzere $(e_n)$ dizisi $c_0^k(\mathbb{BC})$ dizi modülü için bir $\mathbb{D}-$Schauder bazı oluşturmakta ve dolayısıyla her $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n,...)\in c_0^k(\mathbb{BC})$ elemanı $\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n e_n$ biçiminde tek türlü yazılabilmektedir.

Herhangi bir $f\in\left[c_0^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ alınsın. Bu durumda $f$, $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyonel olduğundan $f(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n f(e_n)$ eşitliği yazılır.

Şimdi bir $(\zeta_n)=\left(\zeta_1^{(n)},\zeta_2^{(n)},...,\zeta_l^{(n)},...\right)$ dizisi

$$\zeta_l^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{|f(e_l)|_k}{f(e_l)}, & l\le n \ ve \ |f(e_l)|_i\neq 0\\ 0, & l>n \ ve \ |f(e_l)|_i=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\left(\zeta_l^{(n)}\right)$ dizisi $|.|_k$ normuna göre 0 bikompleks sayısına yakınsar, yani $\left(\zeta_l^{(n)}\right)\in c_0^k(\mathbb{BC})$ dir. O halde

$$f(\zeta_n)=\sum_{l=1}^{\infty}\zeta_l^{(n)}f(e_l)=\sum_{l=1}^{n}\frac{|f(e_l)|_k}{f(e_l)}f(e_l)=\sum_{l=1}^{n}|f(e_l)|_k$$

olur. Buradan $f$ fonksiyonunun $\mathbb{D}-$sınırlılığı gereği

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}|f(e_l)|_k&=\left|\sum_{l=1}^{n}|f(e_l)|_k\right|_k=|f(\zeta_n)|_k\precsim\|f\|_{\mathbb{D}}\|\zeta_n\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\\&=\|f\|_{\mathbb{D}}\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\zeta_l^{(n)}\right|_k:l\in\mathbb{N}\right\}\\&=\|f\|_{\mathbb{D}}\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{\left|\frac{|f(e_l)|_k}{f(e_l)}\right|_k:1\le l\le n\right\}=\|f\|_{\mathbb{D}}\end{aligned}$$

ifadesinden $\sum_{l=1}^{n}|f(e_l)|_k\precsim\|f\|_{\mathbb{D}}$ elde edilir. Son ifadede $n\to\infty$ için limit alınırsa; $\|f(e_l)\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}=\sum_{l=1}^{\infty}|f(e_l)|_k\precsim\|f\|_{\mathbb{D}}$ gelir. Bu ise $(f(e_l))$ dizisinin $l_1^k(\mathbb{BC})$ modülüne ait olduğunu gösterir.

Tersine, herhangi bir $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n,...)\in l_1^k(\mathbb{BC})$ için $c_0^k(\mathbb{BC})$ dizi modülü üzerinde bir $g$ fonksiyoneli her $\rho=(\rho_n)\in c_0^k(\mathbb{BC})$ için $g(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\upsilon_n$ ile tanımlansın. Her $\rho=(\rho_n)$, $\sigma=(\sigma_n)\in c_0^k(\mathbb{BC})$, $\alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$g(\rho+\alpha\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n+\alpha\sigma_n)\upsilon_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n\upsilon_n+\alpha\sigma_n\upsilon_n)=g(\rho)+\alpha g(\sigma)$$

ve Teorem 2.2.15 i), iv) ve $\mathbb{D}-$supremum tanımı gereği

$$\begin{aligned}|g(\rho)|_k&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\upsilon_n\right|_k\precsim\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n\upsilon_n|_k=\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n|_k\,|\upsilon_n|_k\\&\precsim\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|\rho_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}|\upsilon_n|_k=\|\rho\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\|\upsilon\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.2.15 viii) gereği $g$, bir $\mathbb{D}-$sınırlı $\mathbb{BC}-$lineer fonksiyoneldir, yani $g\in\left[c_0^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$ dir.

Diğer yandan yine Teorem 2.2.15 i), iv) ve $\mathbb{D}-$supremum tanımından elde edilen

$$\begin{aligned}|f(\zeta)|_k&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n f(e_n)\right|_k\precsim\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|_k\,|f(e_n)|_k\\&\precsim\sup\nolimits_{\mathbb{D}}\left\{|\zeta_n|_k:n\in\mathbb{N}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}|f(e_n)|_k=\|\zeta\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}\end{aligned}$$

ifadesinde $\|\zeta\|_{\mathbb{D},l_\infty^k(\mathbb{BC})}=1$ olan $\zeta=(\zeta_n)$ dizileri üzerinden supremum alınırsa; Teorem 2.2.15 viii) gereği

$$\|f\|_{\mathbb{D}}\precsim\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}$$

elde edilir. O halde $\|f\|_{\mathbb{D}}=\|f(e_n)\|_{\mathbb{D},l_1^k(\mathbb{BC})}$ dir.

Şimdi $T:\left[c_0^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}\to l_1^k(\mathbb{BC}),\ f\to Tf=(f(e_1),f(e_2),...,f(e_n),...)$ operatörü tanımlansın. $T$ operatörünün izometri ve örten olduğu yukarıdaki sonuçlardan elde edilir. Ayrıca her $f,g\in\left[c_0^k(\mathbb{BC})\right]^{*_{\mathbb{D}}}$, $\alpha\in\mathbb{BC}$ için

$$
\begin{aligned}
T(f+\alpha g) &= \left((f+\alpha g)(e_1),(f+\alpha g)(e_2),\ldots,(f+\alpha g)(e_n),\ldots\right) \\
&= \left(f(e_1)+\alpha g(e_1), f(e_2)+\alpha g(e_2),\ldots, f(e_n)+\alpha g(e_n),\ldots\right) \\
&= \left(f(e_1), f(e_2),\ldots, f(e_n),\ldots\right)+\alpha\left(g(e_1), g(e_2),\ldots, g(e_n),\ldots\right) \\
&= Tf+\alpha Tg
\end{aligned}
$$

olup $T$ , $\mathbb{BC}-$ lineer operatördür. Sonuç olarak $T$ örten izometrik bir $\mathbb{BC}-$modül izomorfizmidir. O halde $\left[c_0^k(\mathbb{BC})\right]^{*_\mathbb{D}} = l_1^k(\mathbb{BC})$ dir.

Teorem 4.5.9. $c^k(\mathbb{BC})$ dizi modülünün $\mathbb{D}-$topolojik duali $l_1^k(\mathbb{BC})$ dir, yani $\left[c^k(\mathbb{BC})\right]^{*_\mathbb{D}} = l_1^k(\mathbb{BC})$ dir.

*İspat:* Teorem 4.5.8 in ispatına benzer şekilde istenen elde edilir.

# 5. $\mathbb{BC}(N)$ QUASİ-BANACH CEBİRİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümün ana amacı; hem bikompleks analizi hem de Newtonyen olmayan kalkülüsü kapsayan Newtonyen olmayan bikompleks analizi kurmaktır. Birinci kesimde, Newtonyen olmayan kalkülüse göre bikompleks sayılar ve bikompleks diziler tanımlanmış ve $\mathbb{BC}(N)$ Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kümesinin $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ $*-$normuna göre bir Banach uzay olduğu gösterilmiştir. İkinci kesimde, öncelikle $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ $*-$normuna göre bazı eşitlik ve eşitsizlikler ispatlanmış ve bu sonuçlar kullanılarak $\left(\mathbb{BC}(N),\oplus_2,\odot_2,\ddot{\|}.\ddot{\|}_2,\otimes_2\right)$ sisteminin bir quasi-Banach cebiri olduğu elde edilmiştir. Üçüncü kesimde ise, bilinen $l_p$ dizi uzayları $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ $*-$normu kullanılarak $\left(\mathbb{BC}(N),\oplus_2,\odot_2,\ddot{\|}.\ddot{\|}_2,\otimes_2\right)$ quasi-Banach cebiri yapısı üzerine taşınmıştır.

## 5.1. $*-$Bikompleks Sayılar (Newtonyen Olmayan Bikompleks Sayılar)

Bu kesimde, ilk olarak hem bikompleks sayıların hem de ikinci bölüm yedinci kesimde tanımı verilen Newtonyen olmayan kompleks sayıların bir genellemesi olan Newtonyen olmayan bikompleks sayılar tanımlanmıştır. Daha sonra Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kümesindeki metrik, norm, dizi ve seri kavramları tanıtılmış ve bu kümenin, üzerindeki norma göre Banach uzay olduğu elde edilmiştir.

Tanım 5.1.1. $\dot{a},\dot{c}\in\left(A,\dot{+},\dot{-},\dot{\times},\dot{/},\dot{\leq}\right)$ ve $\ddot{b},\ddot{d}\in\left(B,\ddot{+},\ddot{-},\ddot{\times},\ddot{/},\ddot{\leq}\right)$ olsun. Bu durumda $\left(\dot{a},\ddot{b},\dot{c},\ddot{d}\right)$ dörtlüsüne $*-$bikompleks nokta denir. Tüm $*-$bikompleks noktaların oluşturduğu kümeye $*-$bikompleks sayılar (Newtonyen olmayan bikompleks sayılar) kümesi denir ve $\mathbb{BC}^*$ ya da $\mathbb{BC}(N)$ ile gösterilir, yani

$$\begin{aligned}\mathbb{BC}(N)&=\left\{\left(\dot{a},\ddot{b},\dot{c},\ddot{d}\right)\ :\ \dot{a},\dot{c}\in A\subseteq\mathbb{R},\ddot{b},\ddot{d}\in B\subseteq\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{\left(z^*,w^*\right)\ :\ z^*=\left(\dot{a},\ddot{b}\right),w^*=\left(\dot{c},\ddot{d}\right),\dot{a},\dot{c}\in A\subseteq\mathbb{R},\ddot{b},\ddot{d}\in B\subseteq\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

dir. $\mathbb{BC}(N)$ üzerinde toplama $\oplus_2$, çarpma $\otimes_2$ ve Newtonyen olmayan kompleks skalerle çarpma $\odot_2$ işlemleri, $\zeta_1^* = (z_1^*, w_1^*)$, $\zeta_2^* = (z_2^*, w_2^*) \in \mathbb{BC}(N)$ ve $z^* \in \mathbb{C}(N)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\oplus_2 : \mathbb{BC}(N) \times \mathbb{BC}(N) \to \mathbb{BC}(N),\\
&(\zeta_1^*, \zeta_2^*) \to \zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^* = (z_1^*, w_1^*) \oplus_2 (z_2^*, w_2^*) = (z_1^* \oplus_1 z_2^*, w_1^* \oplus_1 w_2^*),\\
&\otimes_2 : \mathbb{BC}(N) \times \mathbb{BC}(N) \to \mathbb{BC}(N),\\
&(\zeta_1^*, \zeta_2^*) \to \zeta_1^* \otimes_2 \zeta_2^* = (z_1^*, w_1^*) \otimes_2 (z_2^*, w_2^*)\\
&\qquad = \left( (z_1^* \otimes_1 z_2^*) \Theta_1 (w_1^* \otimes_1 w_2^*), (z_1^* \otimes_1 w_2^*) \oplus_1 (z_2^* \otimes_1 w_1^*) \right),\\
&\odot_2 : \mathbb{C}(N) \times \mathbb{BC}(N) \to \mathbb{BC}(N),\\
&(z^*, \zeta_1^*) \to z^* \odot_2 \zeta_1^* = z^* \odot_2 (z_1^*, w_1^*) = (z^* \otimes_1 z_1^*, z^* \otimes_1 w_1^*)
\end{aligned}$$

ile tanımlıdır.

Bu işlemlere göre $\mathbb{BC}(N)$ kümesi $\mathbb{C}(N)$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Not 5.1.2. Her $\zeta_1^* \in \mathbb{C}(N)$ için $\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^* = \zeta_2^* \oplus_2 \zeta_1^* = 0^*$ olacak şekildeki $\zeta_2^*$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısına $\zeta_1^*$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısının toplama işlemine göre tersi denir ve $\Theta_2 \zeta_1^*$ ile gösterilir.

Not 5.1.3. $z^* = \left(\dot{a}, \ddot{b}\right)$ Newtonyen olmayan kompleks sayısı $i^* = \left(\dot{0}, \ddot{1}\right) = \left(\dot{0}, \dot{1}, \dot{0}, \ddot{0}\right), \left(i^*\right)^2 = \Theta_1 1^*$ olmak üzere $\left(\dot{a}, \ddot{0}\right) \oplus_1 i^* \otimes_1 \left(\dot{0}, \ddot{b}\right) = \dot{a} \oplus_1 i^* \otimes_1 \ddot{b}$ ile, $\zeta^* = (z^*, w^*)$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısı $z^* = \left(\dot{a}, \ddot{b}\right), w^* = \left(\dot{c}, \ddot{d}\right)$, $j^* = \left(\dot{0}, \ddot{0}, \dot{1}, \ddot{0}\right) = (0^*, 1^*), \left(j^*\right)^2 = \Theta_2 1^*$ olmak üzere $(z^*, 0^*) \oplus_2 j^* \otimes_2 (w^*, 0^*) = z^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w^* = \left(\dot{a}, \ddot{b}\right) \oplus_2 j^* \otimes_2 \left(\dot{c}, \ddot{d}\right)$ ile gösterilebilir. Ayrıca $z^*$ ve $w^*$ Newtonyen olmayan kompleks sayılarına $\zeta^*$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısının sırasıyla reel ve sanal kısmı denir ve sırasıyla $\operatorname{Re} \zeta^*$ ve $\operatorname{Im} \zeta^*$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.4. $\mathbb{BC}(N)$ kümesinin keyfi iki $\zeta_1^* = z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*$, $\zeta_2^* = z_2^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_2^*$ elemanı arasındaki $*-$uzaklığı $d_{\mathbb{BC}(N)}$

$$d_{\mathbb{BC}(N)} : \mathbb{BC}(N) \times \mathbb{BC}(N) \to [\ddot{0}, \ddot{+}\ddot{\infty}) \subset B,$$

$$\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) \to d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) = \ddot{\sqrt{\| z_1^* \Theta_1 z_2^* \|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \| w_1^* \Theta_1 w_2^* \|_1^{\ddot{2}}}}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 5.1.5. $d_{\mathbb{BC}(N)}$ $*-$uzaklığı $\mathbb{BC}(N)$ üzerinde bir Newtonyen olmayan metriktir.

*İspat:* $d_{\mathbb{BC}(N)}$ fonksiyonunun $\mathbb{BC}(N)$ üzerinde Newtonyen olmayan metrik aksiyomlarını sağladığı açıktır. Burada yalnızca her $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^* \in \mathbb{BC}(N)$ için $d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) \ddot{\le} d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_1^*, \zeta_3^*\right) \ddot{+} d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_3^*, \zeta_2^*\right)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir. $\zeta_1^* = z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*$, $\zeta_2^* = z_2^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_2^*$ ve $\zeta_3^* = z_3^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_3^*$ olsun. O halde (Tekin ve Başar, 2013) çalışmasındaki Lemma 2 ve (Çakmak ve Başar, 2012) çalışmasındaki Minkowski eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) &\ddot{\le} \ddot{\sqrt{\| z_1^* \Theta_1 z_2^* \|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \| w_1^* \Theta_1 w_2^* \|_1^{\ddot{2}}}} \\
&= \ddot{\sqrt{\left\| \left(z_1^* \Theta_1 z_3^*\right) \oplus_1 \left(z_3^* \Theta_1 z_2^*\right) \right\|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \left\| \left(w_1^* \Theta_1 w_3^*\right) \oplus_1 \left(w_3^* \Theta_1 w_2^*\right) \right\|_1^{\ddot{2}}}} \\
&\ddot{\le} \ddot{\sqrt{\left( \| z_1^* \Theta_1 z_3^* \|_1 \ddot{+} \| z_3^* \Theta_1 z_2^* \|_1 \right)^{\ddot{2}} \ddot{+} \left( \| w_1^* \Theta_1 w_3^* \|_1 \ddot{+} \| w_3^* \Theta_1 w_2^* \|_1 \right)^{\ddot{2}}}} \\
&\ddot{\le} \ddot{\sqrt{\left\| \left(z_1^* \Theta_1 z_3^*\right) \right\|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \left\| \left(w_1^* \Theta_1 w_3^*\right) \right\|_1^{\ddot{2}}}} \ddot{+} \ddot{\sqrt{\left\| \left(z_3^* \Theta_1 z_2^*\right) \right\|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \left\| \left(w_3^* \Theta_1 w_2^*\right) \right\|_1^{\ddot{2}}}} \\
&= d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_1^*, \zeta_3^*\right) \ddot{+} d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta_3^*, \zeta_2^*\right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $d_{\mathbb{BC}(N)}$, $\mathbb{BC}(N)$ üzerinde bir Newtonyen olmayan metrik ve $\left(\mathbb{BC}(N), d_{\mathbb{BC}(N)}\right)$ bir Newtonyen olmayan metrik uzaydır.

**Sonuç 5.1.6.** Her $\zeta^* = z^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w^* \in \mathbb{BC}(N)$ için $\ddot{\|}\zeta^*\ddot{\|}_2 = d_{\mathbb{BC}(N)}\left(\zeta^*, 0^*\right) = \ddot{\sqrt{\ddot{\|}z^*\ddot{\|}_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \ddot{\|}w^*\ddot{\|}_1^{\ddot{2}}}}$ ile tanımlı $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ fonksiyonu $\mathbb{BC}(N)$ üzerinde bir $*-$norm tanımlar.

Tanım 5.1.7. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{BC}(N), n \to s_n^*$ olmak üzere $\left(s_n^*\right)$, $\mathbb{BC}(N)$ de bir dizi veya bir Newtonyen olmayan bikompleks dizi ya da $*-$bikompleks dizi olarak adlandırılır.

Eğer herhangi bir $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ verildiğinde her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\mathbb{BC}(N)}\left(s_n^*, s^*\right) \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\left(s_n^*\right)$ dizisi $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre $s^* \in \mathbb{BC}(N)$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısına yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty}^* s_n^* = s^*$ ile gösterilir.

Eğer herhangi bir $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ verildiğinde her $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\mathbb{BC}(N)}\left(s_n^*, s_m^*\right) \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\left(s_n^*\right)$ dizisi $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre bir $*-$bikompleks Cauchy dizisidir denir.

Teorem 5.1.8. $s_n^* = z_n^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_n^*$ olmak üzere $\left(s_n^*\right)$ bir $*-$bikompleks dizi, $s^* = z^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}^* s_n^* = \lim_{n\to\infty}^* \left(z_n^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_n^*\right) = s^*$ olması için gerekli ve yeterli şart $\lim_{n\to\infty}^* z_n^* = z^*$, $\lim_{n\to\infty}^* w_n^* = w^*$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

*İspat:* $*-$Bikompleks dizilerin yakınsaklık tanımından ispat açıktır.

Tanım 5.1.9. $\left(s_n^*\right)$ herhangi bir $*-$bikompleks dizi olmak üzere

$$_{\oplus_2}\sum_{k=1}^{\infty} s_k^* = s_1^* \oplus_2 s_2^* \oplus_2 \ldots \oplus_2 s_n^* \oplus_2 \ldots \qquad \textbf{(5.1)}$$

sonsuz toplamına bir Newtonyen olmayan bikompleks seri ya da $*-$bikompleks seri denir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n^* =_{\oplus_2} \sum_{k=1}^{n} s_k^*$ olmak üzere bir $S : \mathbb{N} \to \mathbb{BC}(N), n \to S_n^*$ $*-$bikompleks dizisi tanımlansın. Bu diziye (5.1) $*-$bikompleks serisinin $*-$bikompleks kısmi toplamlar dizisi denir.

(5.1) $*-$bikompleks serisinin $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre bir $l^* \in \mathbb{BC}(N)$ sayısına yakınsaması; $(S_n^*)$ $*-$bikompleks kısmi toplamlar dizisinin $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre bir $l^* \in \mathbb{BC}(N)$ sayısına yakınsaması anlamına gelir. Bu durumda $l^*$ sayısına $*-$bikompleks serinin toplamı denir ve $_{\oplus_2}\sum_{k=1}^{\infty} s_k^* = l^*$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.10. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{BC}(N)$, $n \to s_n^* = z_n^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_n^*$ ve $l^* = z^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. Bu durumda (5.1) $*-$bikompleks serisinin $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre bir $l^* \in \mathbb{BC}(N)$ sayısına yakınsaması için gerekli ve yeterli şart $_{\oplus_1}\sum_{k=1}^{\infty} z_k^* = z^*$, $_{\oplus_1}\sum_{k=1}^{\infty} w_k^* = w^*$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

*İspat:* $*-$Bikompleks serilerin yakınsaklık tanımından ispat açıktır.

Teorem 5.1.11. $\mathbb{BC}(N)$, $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre Newtonyen olmayan tamdır.

*İspat:* $(s_n^*) = (z_n^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_n^*)$, $d_{\mathbb{BC}(N)}$ Newtonyen olmayan metriğine göre herhangi bir $*-$bikompleks Cauchy dizisi olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ verildiğinde her $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\mathbb{BC}(N)}(s_n^*, s_m^*) = \beta\left(\sqrt{|z_1^n - z_1^m|^2 + |w_1^n - w_1^m|^2}\right) \ddot{<} \varepsilon = \beta(\varepsilon')$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\sqrt{|z_1^n - z_1^m|^2 + |w_1^n - w_1^m|^2} < \varepsilon'$ eşitsizliği ve dolayısıyla $|z_1^n - z_1^m| < \varepsilon'$ ve $|w_1^n - w_1^m| < \varepsilon'$ eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $(z_1^n)$ ve $(w_1^n)$ dizileri kompleks Cauchy dizileridir. $\mathbb{C}$, $|.|$ normuna göre tam olduğundan her $\varepsilon' > 0$ için her $n \geq n_1(\varepsilon)$ olduğunda $|z_1^n - z| < \frac{\varepsilon'}{2}$ ve her $n \geq n_2(\varepsilon)$ olduğunda $|w_1^n - w| < \frac{\varepsilon'}{2}$ olacak şekilde

$n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayıları ve $z, w \in \mathbb{C}$ sayıları vardır.

Şimdi $z^*, w^* \in \mathbb{C}(N)$ olmak üzere $s^* = z^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w^*$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısı tanımlansın. Bu durumda

$$d_{\mathbb{BC}(N)}(s_n^*, s^*) = \beta\left(\sqrt{|z_1^n - z|^2 + |w_1^n - w|^2}\right) \ddot{\leq} \beta\left(\sqrt{|z_1^n - z|^2} + \sqrt{|w_1^n - w|^2}\right)$$
$$= \beta\left(|z_1^n - z| + |w_1^n - w|\right) \ddot{\leq} \beta\left(\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2}\right) = \beta(\varepsilon') = \varepsilon$$

olup $(s_n^*)$ dizisi $s^* \in \mathbb{BC}(N)$ Newtonyen olmayan bikompleks sayısına yakınsar. Böylece $\left(\mathbb{BC}(N), d_{\mathbb{BC}(N)}\right)$ bir Newtonyen olmayan tam metrik uzaydır.

Sonuç 5.1.12. $\mathbb{BC}(N)$, $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ $*-$normuna göre bir Banach uzaydır.

## 5.2. $\mathbb{BC}(N)$ de $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ $*-$Normuna Göre Bazı Eşitsizlikler

Bu kesimde, Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kümesinin üzerindeki norma göre sağladığı bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Lemma 5.2.1. $\zeta_1^*, \zeta_2^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

(i) $\ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^* \ddot{\|}_2 \ddot{\leq} \ddot{\|}\zeta_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_2^* \ddot{\|}_2$ dir.

(ii) $\ddot{\|}\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^* \ddot{\|}_2 \ddot{\leq} \ddot{\|}\zeta_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_2^* \ddot{\|}_2$ dir.

(iii) $\ddot{|}\ddot{\|}\zeta_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{-} \ddot{\|}\zeta_2^* \ddot{\|}_2 \ddot{|} \ddot{\leq} \ddot{\|}\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^* \ddot{\|}_2$ dir.

(iv) $\ddot{|}\ddot{\|}\zeta_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{-} \ddot{\|}\zeta_2^* \ddot{\|}_2 \ddot{|} \ddot{\leq} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^* \ddot{\|}_2$ dir.

(v) $\dfrac{\ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^* \ddot{\|}_2}{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^* \ddot{\|}_2} \ddot{\leq} \dfrac{\ddot{\|}\zeta_1^* \ddot{\|}_2}{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_1^* \ddot{\|}_2} \ddot{+} \dfrac{\ddot{\|}\zeta_2^* \ddot{\|}_2}{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_2^* \ddot{\|}_2}$ dir.

*İspat:* i) $\zeta_1^* = z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*$, $\zeta_2^* = z_2^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_2^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. (Tekin ve Başar, 2013) çalışmasındaki Lemma 2 ve (Çakmak ve Başar, 2012) çalışmasındaki Minkowski eşitsizliği gereği

$$
\begin{aligned}
\|\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\|_2 &= \sqrt{\|z_1^* \oplus_1 z_2^*\|_1^2 + \|w_1^* \oplus_1 w_2^*\|_1^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\|z_1^*\|_1 + \|z_2^*\|_1\right)^2 + \left(\|w_1^*\|_1 + \|w_2^*\|_1\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\|z_1^*\|_1^2 + \|w_1^*\|_1^2} + \sqrt{\|z_2^*\|_1^2 + \|w_2^*\|_1^2} \\
&= \|\zeta_1^*\|_2 + \|\zeta_2^*\|_2
\end{aligned}
$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

ii) $\zeta_1^* = z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*,\ \zeta_2^* = z_2^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_2^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. (Tekin ve Başar, 2013) çalışmasındaki Lemma 2 ve (Çakmak ve Başar, 2012) çalışmasındaki Minkowski eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
\|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2 &= \sqrt{\|z_1^* \Theta_1 z_2^*\|_1^2 + \|w_1^* \Theta_1 w_2^*\|_1^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\|z_1^*\|_1 + \|z_2^*\|_1\right)^2 + \left(\|w_1^*\|_1 + \|w_2^*\|_1\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\|z_1^*\|_1^2 + \|w_1^*\|_1^2} + \sqrt{\|z_2^*\|_1^2 + \|w_2^*\|_1^2} \\
&= \|\zeta_1^*\|_2 + \|\zeta_2^*\|_2
\end{aligned}
$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

iii) i) şıkkı gereği

$$
\|\zeta_1^*\|_2 = \|\zeta_1^* \oplus_2 \left(\zeta_2^* \Theta_2 \zeta_2^*\right)\|_2 = \|\left(\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\right) \oplus_2 \zeta_2^*\|_2 \leq \|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2 + \|\zeta_2^*\|_2
$$

ve

$$
\|\zeta_2^*\|_2 = \|\zeta_2^* \oplus_2 \left(\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_1^*\right)\|_2 = \|\left(\zeta_2^* \Theta_2 \zeta_1^*\right) \oplus_2 \zeta_1^*\|_2 \leq \|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2 + \|\zeta_1^*\|_2
$$

olduğundan $\|\zeta_1^*\|_2 - \|\zeta_2^*\|_2 \leq \|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2$ ve $-\|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2 \leq \|\zeta_1^*\|_2 - \|\zeta_2^*\|_2$ eşitsizlikleri yazılır. Buradan $-\|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2 \leq \|\zeta_1^*\|_2 - \|\zeta_2^*\|_2 \leq \|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2$ ve dolayısıyla $\left|\|\zeta_1^*\|_2 - \|\zeta_2^*\|_2\right| \leq \|\zeta_1^* \Theta_2 \zeta_2^*\|_2$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

iv) ii) şıkkı gereği

$$\ddot{\|}\zeta_1^*\|_2 = \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \left(\zeta_2^*\Theta_2\zeta_2^*\right)\|_2 = \ddot{\|}\left(\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\right)\Theta_2\zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2$$

ve

$$\ddot{\|}\zeta_2^*\|_2 = \ddot{\|}\zeta_2^* \oplus_2 \left(\zeta_1^*\Theta_2\zeta_1^*\right)\|_2 = \ddot{\|}\left(\zeta_2^* \oplus_2 \zeta_1^*\right)\Theta_2\zeta_1^*\ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2$$

olduğundan $\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2 \ddot{-} \ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2$ ve $\ddot{-}\ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2 \ddot{-} \ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2$ eşitsizlikleri yazılır. Buradan $\ddot{-}\ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2 \ddot{-} \ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2$ ve dolayısıyla $\ddot{|}\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2 \ddot{-} \ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\ddot{|} \ddot{\le} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

v) $\zeta_1^* = \left(\dot{a}_1, \ddot{b}_1\right) \oplus_2 j^* \otimes_2 \left(\dot{c}_1, \ddot{d}_1\right)$ ve $\zeta_2^* = \left(\dot{a}_2, \ddot{b}_2\right) \oplus_2 j^* \otimes_2 \left(\dot{c}_2, \ddot{d}_2\right)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{\|}\zeta_1^* \oplus_2 \zeta_2^*\ddot{\|}_2} = \frac{\beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]}{\ddot{1} \ddot{+} \beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]}{}^{\beta}$$

$$= \beta\left[\frac{\beta^{-1}\left(\beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]\right)}{\beta^{-1}\left(\ddot{1} \ddot{+} \beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]\right)}\right]$$

$$= \beta\left[\frac{\beta^{-1}\left(\beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]\right)}{\beta^{-1}\left(\beta(1) \ddot{+} \beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]\right)}\right]$$

$$= \beta\left[\frac{\beta^{-1}\left(\beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]\right)}{\beta^{-1}\left(\beta\left[\beta^{-1}\left(\beta(1)\right)+\beta^{-1}\left(\beta\left[\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}\right]\right)\right]\right)}\right]$$

$$= \beta\left[\frac{\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}}{1+\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2+\left(d_1+d_2\right)^2}}\right]$$

$$\ddot{\le} \beta\left[\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}}{1+\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}}+\frac{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2}}{1+\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2}}\right]$$

$$=\beta\left\{\frac{\beta^{-1}\left[\beta\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}\right)\right]}{\beta^{-1}\left(\beta(1)\right)+\beta^{-1}\left(\beta\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}\right)\right)}+\frac{\beta^{-1}\left[\beta\left(\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2}\right)\right]}{\beta^{-1}\left(\beta(1)\right)+\beta^{-1}\left(\beta\left(\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2}\right)\right)}\right\}$$

$$=\beta\left\{\frac{\beta^{-1}\left[\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2\right]}{\beta^{-1}\left(\ddot{1}\right)+\beta^{-1}\left(\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2\right)}+\frac{\beta^{-1}\left[\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\right]}{\beta^{-1}\left(\ddot{1}\right)+\beta^{-1}\left(\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\right)}\right\}$$

$$=\beta\left\{\frac{\beta^{-1}\left[\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2\right]}{\beta^{-1}\left[\beta\left[\beta^{-1}\left(\ddot{1}\right)+\beta^{-1}\left(\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2\right)\right]\right]}+\frac{\beta^{-1}\left[\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\right]}{\beta^{-1}\left[\beta\left[\beta^{-1}\left(\ddot{1}\right)+\beta^{-1}\left(\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\right)\right]\right]}\right\}$$

$$=\beta\left\{\beta^{-1}\left\{\beta\left[\frac{\beta^{-1}\left[\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2\right]}{\beta^{-1}\left[\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2\right]}\right]\right\}+\beta^{-1}\left\{\beta\left[\frac{\beta^{-1}\left[\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\right]}{\beta^{-1}\left[\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2\right]}\right]\right\}\right\}$$

$$=\beta\left\{\beta^{-1}\left[\frac{\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}\right]+\beta^{-1}\left[\frac{\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}\right]\right\}$$

$$=\frac{\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}\ddot{+}\frac{\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}$$

olur. Buradan $\frac{\ddot{\|}\zeta_1^*\oplus_2\zeta_2^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_1^*\oplus_2\zeta_2^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}\ddot{\leq}\frac{\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}\ddot{+}\frac{\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2}{\ddot{1}\ddot{+}\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2}\,_{\beta}$ eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 5.2.2** $\left(\mathbb{BC}(N)\text{ de }\ddot{\|}.\ddot{\|}_2\ *-\text{normuna göre Schwarz eşitsizliği}\right)$. $k\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere her $s_k^*,t_k^*\in\mathbb{BC}(N)$ için

$$\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\left(\ddot{\|}s_k^*\ddot{\|}_2\ddot{\times}\ddot{\|}t_k^*\ddot{\|}_2\right)\right)^{\ddot{2}}\ddot{\leq}\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{2}}\right)\ddot{\times}\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{2}}\right)$$ eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $s_k^*,t_k^*\in\mathbb{BC}(N)$ için $\ddot{\|}s_k^*\ddot{\|}_2,\ddot{\|}t_k^*\ddot{\|}_2\in\mathbb{R}_\beta^+$ olduğundan $\alpha-$aritmetik yerine $\beta-$aritmetik alınırsa ve (Güngör, 2020) çalışmasındaki Newtonyen olmayan Hölder eşitsizliğinde $p=q=\ddot{2}$ seçilirse, istenen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Lemma 5.2.3. $\zeta_1^*, \zeta_2^* \in \mathbb{BC}(N)$ ve $z^* \in \mathbb{C}(N)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler gerçeklenir:

(i) $\|z^* \odot_2 \zeta_1^*\|_2 = \|z^*\|_1 \times \|\zeta_1^*\|_2$ dir.

(ii) $\|\zeta_1^* \otimes_2 \zeta_2^*\|_2 \le \sqrt{2} \times \|\zeta_1^*\|_2 \times \|\zeta_2^*\|_2$ dir.

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\left(\zeta_1^*\right)^n\|_2 \le \left(2\right)^{(n-1)/2} \times \left(\|\zeta_1^*\|_2\right)^n$ dir.

*İspat:* $\zeta_1^* = z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*$, $\zeta_2^* = z_2^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_2^* \in \mathbb{BC}(N)$ ve $z^* \in \mathbb{C}(N)$ olsun.

i) (Tekin ve Başar, 2013) çalışmasındaki Lemma 3 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\|z^* \odot_2 \zeta_1^*\|_2 &= \|z^* \odot_2 \left(z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*\right)\|_2 \\
&= \|\left(z^* \otimes_1 z_1^*\right) \oplus_2 j^* \otimes_2 \left(z^* \otimes_1 w_1^*\right)\|_2 \\
&= \sqrt{\|z^* \otimes_1 z_1^*\|_1^2 + \|z^* \otimes_1 w_1^*\|_1^2} \\
&= \sqrt{\left(\|z^*\|_1^2 \times \|z_1^*\|_1^2\right) + \left(\|z^*\|_1^2 \times \|w_1^*\|_1^2\right)} \\
&= \sqrt{\|z^*\|_1^2 \times \left(\|z_1^*\|_1^2 + \|w_1^*\|_1^2\right)} \\
&= \|z^*\|_1 \times \sqrt{\|z_1^*\|_1^2 + \|w_1^*\|_1^2} \\
&= \|z^*\|_1 \times \|\zeta_1^*\|_2
\end{aligned}
$$

olduğundan $\|z^* \odot_2 \zeta_1^*\|_2 = \|z^*\|_1 \times \|\zeta_1^*\|_2$ eşitliği gerçeklenir.

ii) Lemma 5.2.1 i), Lemma 5.2.3 i) ve $\mathbb{BC}(N)$ de $\|.\|_2$ $*-$normuna göre Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\|\zeta_1^* \otimes_2 \zeta_2^*\|_2 &= \|\left(z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^*\right) \otimes_2 \zeta_2^*\|_2 \\
&= \|\left(z_1^* \odot_2 \zeta_2^*\right) \oplus_2 \left(j^* \otimes_2 \left(w_1^* \odot_2 \zeta_2^*\right)\right)\|_2 \\
&\le \|z_1^* \odot_2 \zeta_2^*\|_2 + \|j^* \otimes_2 \left(w_1^* \odot_2 \zeta_2^*\right)\|_2
\end{aligned}
$$

$$= \left( \ddot{\|} z_1^* \ddot{\|}_1 \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_2^* \ddot{\|}_2 \right) \ddot{+} \left( \ddot{\|} w_1^* \ddot{\|}_1 \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_2^* \ddot{\|}_2 \right)$$

$$= \left( \ddot{\|} z_1^* \ddot{\|}_1 \ddot{+} \ddot{\|} w_1^* \ddot{\|}_1 \right) \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_2^* \ddot{\|}_2$$

$$\ddot{\leq} \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \ddot{\sqrt{\ddot{\|} z_1^* \ddot{\|}_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \ddot{\|} w_1^* \ddot{\|}_1^{\ddot{2}}}} \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_2^* \ddot{\|}_2$$

$$= \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \ddot{\|} z_1^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_2^* \ddot{\|}_2$$

$$= \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_2^* \ddot{\|}_2$$

elde edilir.

iii) $n = 1$ ve $n = 2$ için ispat açıktır. $n = k$ için eşitsizliğin gerçeklendiği, yani $\ddot{\|} \left( \zeta_1^* \right)^k \ddot{\|}_2 \ddot{\leq} \left( \ddot{2} \right)^{\left( \ddot{k} \ddot{-} \ddot{1} \right) \ddot{/} \ddot{2}} \ddot{\times} \left( \ddot{\|} \zeta_1^* \ddot{\|}_2 \right)^{\ddot{k}}$ olduğu kabul edilsin. Şimdi $n = k + 1$ için eşitsizliğin sağlandığı gösterilsin. Burada ii) kullanılırsa

$$\ddot{\|} \left( \zeta_1^* \right)^{k+1} \ddot{\|}_2 = \ddot{\|} \left( \zeta_1^* \right)^k \ddot{\times} \zeta_1^* \ddot{\|}_2 \ddot{\leq} \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \ddot{\|} \left( \zeta_1^* \right)^k \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_1^* \ddot{\|}_2$$

$$\ddot{\leq} \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \left( \ddot{2} \right)^{\left( \ddot{k} \ddot{-} \ddot{1} \right) \ddot{/} \ddot{2}} \ddot{\times} \left( \ddot{\|} \zeta_1^* \ddot{\|}_2 \right)^{\ddot{k}} \ddot{\times} \ddot{\|} \zeta_1^* \ddot{\|}_2$$

$$= \left( \ddot{2} \right)^{\left( \left( \ddot{k} \ddot{+} \ddot{1} \right) \ddot{-} \ddot{1} \right) \ddot{/} \ddot{2}} \ddot{\times} \left( \ddot{\|} \zeta_1^* \ddot{\|}_2 \right)^{\ddot{k} \ddot{+} \ddot{1}}$$

olup verilen eşitsizlik $n = k + 1$ için de sağlanır. Böylece tümevarım prensibi ile ispat tamamlanır.

**Sonuç 5.2.4.** $\left( \mathbb{BC}(N), \oplus_2, \odot_2, \ddot{\|} . \ddot{\|}_2, \otimes_2 \right)$ bir quasi-Banach cebiridir.

**Teorem 5.2.5** (Newtonyen olmayan Young eşitsizliği). $\dfrac{\dot{1}}{\dot{p}}{}_{\alpha} \dot{+} \dfrac{\dot{1}}{\dot{q}}{}_{\alpha} = \dot{1}$ olmak üzere $\dot{1} \dot{<} \dot{p} \dot{<} \dot{q} \dot{<} \dot{+} \dot{\infty}$ olsun. Bu durumda $a$ ve $b$ pozitif Newtonyen olmayan reel sayıları için $a \dot{\times} b \dot{\leq} \dfrac{a^{\dot{p}}}{\dot{p}}{}_{\alpha} \dot{+} \dfrac{b^{\dot{q}}}{\dot{q}}{}_{\alpha}$ eşitsizliği gerçeklenir. Burada $a^{\dot{p}} = b^{\dot{q}}$ ise eşitlik sağlanır.

*İspat:* Reel sayılar için geçerli Young eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
a\dot{\times}b &= \alpha\left\{\alpha^{-1}(a)\times\alpha^{-1}(b)\right\}\\
&\dot{\leq}\alpha\left\{\frac{\alpha^{-1}(a)^{p}}{p}+\frac{\alpha^{-1}(b)^{q}}{q}\right\}\\
&=\alpha\left\{\frac{\alpha^{-1}\left(a^{\dot{p}}\right)}{p}+\frac{\alpha^{-1}\left(b^{\dot{q}}\right)}{q}\right\}\\
&=\alpha\left\{\alpha^{-1}\left[\alpha\left(\frac{\alpha^{-1}\left(a^{\dot{p}}\right)}{\alpha^{-1}\left(\alpha(p)\right)}\right)\right]+\alpha^{-1}\left[\alpha\left(\frac{\alpha^{-1}\left(b^{\dot{q}}\right)}{\alpha^{-1}\left(\alpha(q)\right)}\right)\right]\right\}\\
&=\alpha\left\{\alpha^{-1}\left(\frac{a^{\dot{p}}}{\dot{p}}\alpha\right)+\alpha^{-1}\left(\frac{b^{\dot{q}}}{\dot{q}}\alpha\right)\right\}\\
&=\frac{a^{\dot{p}}}{\dot{p}}\alpha\dot{+}\frac{b^{\dot{q}}}{\dot{q}}\alpha
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $a^{\dot{p}}=b^{\dot{q}}$ ise $a=b^{\dot{q}\dot{-}\dot{1}}$ dir. Böylece

$$
a\dot{\times}b=b^{\dot{q}\dot{-}\dot{1}}\dot{\times}b=b^{\dot{q}}=b^{\dot{q}}\dot{\times}\left(\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\alpha\dot{+}\frac{\dot{1}}{\dot{q}}\alpha\right)=\frac{a^{\dot{p}}}{\dot{p}}\alpha\dot{+}\frac{b^{\dot{q}}}{\dot{q}}\alpha
$$

olup ispat tamamlanır.

**Lemma 5.2.6** $\left(\mathbb{BC}(N)\text{ de } \ddot{\|.\|}_2\ \ast\text{–normuna göre Hölder eşitsizliği}\right)$.

$\ddot{1}\ddot{<}p\ddot{<}\ddot{+}\infty$ ve $\frac{\ddot{1}}{p}\beta\ddot{+}\frac{\ddot{1}}{q}\beta=\ddot{1}$ olmak üzere $p$ ve $q$ Newtonyen olmayan reel sayılar ve $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ için $s_k^*,t_k^*\in\mathbb{BC}(N)$ olsun. Bu durumda

$$
\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\|s_k^*\otimes_2 t_k^*\ddot{\|}_2\ddot{\leq}\ddot{\sqrt{2}}\ddot{\times}\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\|s_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta}\ddot{\times}\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\|t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{q}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{q}\beta}
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ ve $\frac{\ddot{1}}{p}_{\beta} \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{q}_{\beta} = \ddot{1}$ olmak üzere $p$ ve $q$ Newtonyen olmayan reel sayılar ve $k \in \{1,2,...,n\}$ için $s_k^*, t_k^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. Eğer her $k \in \{1,2,...,n\}$ için

$\ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 = 0$ veya $\ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2 = 0$ ise $\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \otimes_2 t_k^* \ddot{\|}_2 = \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_{\beta}} \ddot{\times} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_{\beta}} = 0$

olup eşitlik sağlanır. Diğer yandan $\ddot{\|} s_{k_1}^* \ddot{\|}_2 \neq 0$ ve $\ddot{\|} t_{k_2}^* \ddot{\|}_2 \neq 0$ olacak şekilde

$k_1, k_2 \in \{1,2,...,n\}$ olduğu kabul edilirse $\left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_{\beta}} \neq 0$ ve $\left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_{\beta}} \neq 0$ olur.

Böylece $\theta = \frac{\ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2}{\left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_{\beta}}}_{\beta}$, $\vartheta = \frac{\ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2}{\left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_{\beta}}}_{\beta}$ seçilirse Newtonyen olmayan Young

eşitsizliği gereği

$$\theta \ddot{\times} \vartheta = \frac{\ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2}{\left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_{\beta}} \ddot{\times} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_{\beta}}}_{\beta} \ddot{\leq} \frac{\ddot{1}}{p}_{\beta} \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}}}{\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}}}_{\beta} \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{q}_{\beta} \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}}}{\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}}}_{\beta}$$

elde edilir. Burada terim terim toplama işlemi yapılırsa

$$\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \frac{\ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2}{\left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}} \ddot{\times} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{q}}}_{\beta} \ddot{\leq} \frac{\ddot{1}}{p}_{\beta} \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{q}_{\beta} = \ddot{1}$$

ve buradan da Lemma 5.2.3 ii) gereği

$$\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \left( \ddot{\|} s_k^* \otimes_2 t_k^* \ddot{\|}_2 \right) \ddot{\leq} \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2 = \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{\times} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2$$

$$\ddot{\leq} \ddot{\sqrt{2}} \ddot{\times} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_{\beta}} \ddot{\times} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{q}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_{\beta}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.2.7 $\left(\mathbb{BC}(N) \text{ de } \ddot{\|.\|}_2\ *\text{–normuna göre Minkowski eşitsizliği}\right)$.

$\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ olmak üzere $p$ herhangi bir Newtonyen olmayan reel sayı ve $k \in \{1,2,...,n\}$ için $s_k^*, t_k^* \in \mathbb{BC}(N)$ olsun. O halde

$$\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{\le} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^*\|_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{+} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|t_k^*\|_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

*İspat:* $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ olmak üzere herhangi bir $p$ Newtonyen olmayan reel sayısı için Lemma 5.2.1 i) gereği

$$\begin{aligned}
\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p}} &= \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p \ddot{-} \ddot{1}}} \ddot{\times} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2 \\
&\ddot{\le} \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p \ddot{-} \ddot{1}}} \ddot{\times} \left(\|s_k^*\|_2 \ddot{+} \|t_k^*\|_2\right) \\
&= \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^*\|_2 \ddot{\times} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p \ddot{-} \ddot{1}}} \ddot{+} \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|t_k^*\|_2 \ddot{\times} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p \ddot{-} \ddot{1}}}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $q = \frac{p}{p \ddot{-} \ddot{1}}_\beta$ seçilirse; $\frac{\ddot{1}}{p}_\beta \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{q}_\beta = \ddot{1}$ olup (Güngör, 2020) çalışmasındaki Newtonyen olmayan Hölder eşitsizliğinden

$$\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^*\|_2 \ddot{\times} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p \ddot{-} \ddot{1}}} \ddot{\le} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^*\|_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{\times} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{(p \ddot{-} \ddot{1}) \ddot{\times} q}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_\beta},$$

$$\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|t_k^*\|_2 \ddot{\times} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{p \ddot{-} \ddot{1}}} \ddot{\le} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|t_k^*\|_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{\times} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \|s_k^* \oplus_2 t_k^*\|_2^{\ddot{(p \ddot{-} \ddot{1}) \ddot{\times} q}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_\beta}$$

yazılır. Ayrıca son iki eşitsizliğin toplanması ile

$$\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^* \oplus_2 t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \ddot{\le} \left[\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{+} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta}\right] \ddot{\times} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^* \oplus_2 t_k^*\ddot{\|}_2^{\left(p\ddot{-}\ddot{1}\right)\ddot{\times}q}\right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_\beta}$$

elde edilir. Burada $\left(p\ddot{-}\ddot{1}\right)\ddot{\times}q = p$ eşitliği kullanılırsa

$$\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^* \oplus_2 t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \ddot{\le} \left[\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{+} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta}\right] \ddot{\times} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^* \oplus_2 t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{q}_\beta}$$

olur ve dolayısıyla

$$\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^* \oplus_2 t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} = \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^* \oplus_2 t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\ddot{1}\ddot{-}\frac{\ddot{1}}{q}_\beta} \ddot{\le} \left[\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}s_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta} \ddot{+} \left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}t_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\frac{\ddot{1}}{p}_\beta}\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir.

### 5.3. $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ $*-$Normuna Göre $*-$Bikompleks Dizi Uzayları

Bu kesimde, $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ $*-$normu kullanılarak $*-$bikompleks dizilerden oluşan $l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ ve $\ddot{0}\ddot{<}p\ddot{<}\ddot{+}\infty,\ p\in\mathbb{R}_\beta$ için $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ kümeleri tanımlanmıştır. Bu kümelerin kapsama özellikleri irdelenmiş, birer $*-$bikompleks dizi uzayı olduğu gösterilmiş ve tamlık özelliği incelenmiştir.

Tanım 5.3.1. Newtonyen olmayan reel değerli $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ $*-$normu kullanılarak $l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ ve $\ddot{0}\ddot{<}p\ddot{<}\ddot{+}\infty,\ p\in\mathbb{R}_\beta$ olmak üzere $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ kümeleri;

$$w\left(\mathbb{BC}(N)\right) := \left\{\zeta = \left(\zeta_n^*\right)\ :\ \text{Her } n\in\mathbb{N} \text{ için } \zeta_n^*\in\mathbb{BC}(N)\right\},$$

$$l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right) := \left\{\zeta = \left(\zeta_n^*\right)\in w\left(\mathbb{BC}(N)\right)\ :\ \sup_{n\in\mathrm{N}}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2 \ddot{<}\ddot{+}\infty\right\},$$

$$l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right) := \left\{\zeta = \left(\zeta_n^*\right)\in w\left(\mathbb{BC}(N)\right)\ :\ \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \ddot{<}\ddot{+}\infty\right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 5.3.2. $w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ kümesi

$$\oplus : w\left(\mathbb{BC}(N)\right)\times w\left(\mathbb{BC}(N)\right)\to w\left(\mathbb{BC}(N)\right),(s,t)\to s\oplus t=\left(s_n^*\oplus_2 t_n^*\right)$$

ile tanımlı toplama ve

$$\odot : \mathbb{C}(N)\times w\left(\mathbb{BC}(N)\right)\to w\left(\mathbb{BC}(N)\right),\left(z^*,s\right)\to z^*\odot s=\left(z^*\odot_2 s_n^*\right)$$

ile tanımlı Newtonyen olmayan kompleks skaler ile çarpma işlemlerine göre $\mathbb{C}(N)$ Newtonyen olmayan kompleks cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

*İspat:* Bu teoremin ispatı $*-$bikompleks dizilerin ve $w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ deki işlemlerin tanımından açıktır.

Teorem 5.3.3. $\ddot{0}\ddot{<}\ddot{p}\ddot{<}\ddot{q}\ddot{<}\ddot{+}\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)\subset l_q\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ kapsaması gerçeklenir. $\ddot{1}\ddot{\le}\ddot{p}\ddot{<}\ddot{q}\ddot{<}\ddot{+}\infty$ için kapsama kesindir.

*İspat:* Herhangi bir $\zeta=\left(\zeta_n^*\right)\in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ $*-$bikompleks dizisi alınsın. O halde $\ddot{\sum}_{n=1}^{\infty}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\ddot{<}\ddot{+}\infty$ dur. Bu durumda Lemma 2.4.14 ii) gereği her $n\ge n_0$ için $\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2\ddot{<}\ddot{1}$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece $\ddot{0}\ddot{<}q\ddot{-}p$ ve her $n\ge n_0$ için $\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{q\ddot{-}p}\ddot{<}\ddot{1}$ olduğundan $\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{q}}\ddot{<}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}$ elde edilir. $M=\ddot{\max}\left\{\ddot{\|}\zeta_1^*\ddot{\|}_2^{q\ddot{-}p},\ddot{\|}\zeta_2^*\ddot{\|}_2^{q\ddot{-}p},\ldots,\ddot{\|}\zeta_{n_0}^*\ddot{\|}_2^{q\ddot{-}p},\ddot{1}\right\}$ alınırsa;

$$\ddot{\sum}_{n=1}^{\infty}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{q}}=\ddot{\sum}_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\ddot{\times}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{q\ddot{-}p}\right)\ddot{<}M\ddot{\times}\ddot{\sum}_{n=1}^{\infty}\ddot{\|}\zeta_n^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\ddot{<}\ddot{+}\infty$$

olup $\zeta=\left(\zeta_n^*\right)\in l_q\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ ve dolayısıyla $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)\subset l_q\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ elde edilir.

Şimdi $\ddot{1}\ddot{\le}\ddot{p}\ddot{<}\ddot{q}\ddot{<}\ddot{+}\infty$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_n^*=z_n^*\oplus_2 j^*\otimes_2 w_n^*=\left(\ddot{0},\ddot{0}\right)\oplus_2 j^*\otimes_2\left(\frac{\dot{1}}{\dot{n}^{\frac{\dot{2}}{\beta^{-1}(p)}}}{}_{\alpha},\ddot{0}\right)$ ile $\zeta=\left(\zeta_n^*\right)$ $*-$bikompleks dizisi tanımlansın. Bu durumda

$$\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\|\zeta_n^*\|_2^{\ddot{q}} = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\left(\ddot{\sqrt{\|\left(\dot{0},\ddot{0}\right)\|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \|\left(\frac{\dot{1}}{\dot{n}^{\frac{\dot{2}}{\beta^{-1}(p)}\alpha}}\alpha,\ddot{0}\right)\|_1^{\ddot{2}}}}\right)^{q} = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{\ddot{1}}{n^{\ddot{\frac{q}{p}}\beta}}\beta$$

elde edilir. $p \ddot{<} q$ ve $\ddot{1} \ddot{<} \frac{q}{p}\beta$ olduğundan Lemma 2.4.14 vi) gereği $\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{\ddot{1}}{n^{\ddot{\frac{q}{p}}\beta}}\beta$ $\beta-$serisi $\beta-$ yakınsaktır ve dolayısıyla $\zeta = \left(\zeta_n^*\right) \in l_q\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ dir. Diğer yandan

$$\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\|\zeta_n^*\|_2^{\ddot{p}} = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\left(\ddot{\sqrt{\|\left(\dot{0},\ddot{0}\right)\|_1^{\ddot{2}} \ddot{+} \|\left(\frac{\dot{1}}{\dot{n}^{\frac{\dot{2}}{\beta^{-1}(p)}\alpha}}\alpha,\ddot{0}\right)\|_1^{\ddot{2}}}}\right)^{p} = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{\ddot{1}}{n}\beta$$

ve Lemma 2.4.14 i) gereği $\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{\ddot{1}}{\ddot{n}}\beta$ $\beta-$serisi $\beta-$yakınsak değildir. Bu ise $\zeta = \left(\zeta_n^*\right) \notin l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ anlamına gelir. Sonuç olarak $\ddot{1} \ddot{\le} p \ddot{<} q \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right) \subset l_q\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 5.3.4.** $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right) \subset l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ kapsaması gerçeklenir. $\ddot{1} \ddot{\le} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için kapsama kesindir.

*İspat:* Herhangi bir $\zeta = \left(\zeta_n^*\right) \in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ $*-$bikompleks dizisi alınsın. O halde $\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\|\zeta_n^*\|_2^{\ddot{p}} \ddot{<} \ddot{+}\infty$ dur. Bu durumda Lemma 2.4.14 ii) gereği her $n \ge n_0$ için $\|\zeta_n^*\|_2 \ddot{<} \ddot{1}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $M = \ddot{\max}\left\{\|\zeta_1^*\|_2, \|\zeta_2^*\|_2, \ldots, \|\zeta_{n_0}^*\|_2, \ddot{1}\right\}$ alınırsa;

$$\ddot{\sup}\|\zeta_n^*\|_2 = \ddot{\sup}\left\{\|\zeta_1^*\|_2, \|\zeta_2^*\|_2, \ldots, \|\zeta_{n_0}^*\|_2, \ddot{1}\right\} \ddot{<} \ddot{+}\infty$$

olup $\zeta = \left(\zeta_n^*\right) \in l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ ve dolayısıyla $l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right) \subset l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ elde edilir.

Şimdi $\ddot{1}\ddot{\leq} p\ddot{<}\ddot{+}\infty$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_n^* = z_n^* \oplus_2 j^* \otimes_2 w_n^* = \left(\dot{0},\ddot{0}\right) \oplus_2 j^* \otimes_2 \left( \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{\frac{\dot{2}}{\beta^{-1}(p)}\alpha}} \alpha, \ddot{0} \right)$ ile $\zeta = \left(\zeta_n^*\right)$ $*-$bikompleks dizisi tanımlansın. Bu durumda

$$\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} \zeta_n^* \ddot{\|}_2 = \ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} \left(\dot{0},\ddot{0}\right) \oplus_2 j^* \otimes_2 \left( \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{\frac{\dot{2}}{\beta^{-1}(p)}\alpha}} \alpha, \ddot{0} \right) \ddot{\|}_2 = \ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \frac{\ddot{1}}{\ddot{n}^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta}} \beta \ddot{\leq} \ddot{1}$$

ve $\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} \zeta_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \frac{\ddot{1}}{\ddot{n}} \beta$ olduğundan $\zeta = \left(\zeta_n^*\right) \in l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right) \setminus l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.5. $s = \left(s_n^*\right), t = \left(t_n^*\right) \in w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ ve $\left(\mu_n\right) \subset \ddot{[}\ddot{0},\ddot{+}\infty\ddot{)}$, $\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \mu_n$ $\beta-$yakınsak olacak şekilde bir $\beta-$dizi olmak üzere

$$d_{2,w(\mathbb{BC}(N))} : w\left(\mathbb{BC}(N)\right) \times w\left(\mathbb{BC}(N)\right) \to \ddot{[}\ddot{0},\ddot{+}\infty\ddot{)} = B' \subset B,$$

$$(s,t) \to d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(s,t) = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \mu_n \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_n^* \Theta_2 t_n^* \ddot{\|}_2}{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 t_n^* \ddot{\|}_2} \beta$$

ile tanımlı $d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}$ fonksiyonu $*-$ bikompleks dizilerin $w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ uzayı üzerinde bir Newtonyen olmayan metriktir ve dolayısıyla $\left(w\left(\mathbb{BC}(N)\right), d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}\right)$ bir Newtonyen olmayan metrik uzaydır.

*İspat:* $d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}$ fonksiyonunun $w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ üzerinde Newtonyen olmayan metrik aksiyomlarını sağladığı açıktır. Burada yalnızca her $s = \left(s_n^*\right), t = \left(t_n^*\right), u = \left(u_n^*\right) \in w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ için

$$d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(s,u) \ddot{\leq} d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(s,t) \ddot{+} d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(t,u)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Her $n\in\mathbb{N}$ için Lemma 5.2.1 v) gereği

$$
\begin{aligned}
\ddot{\sum_{k=1}^{n}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta}
&= \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|}\left(s_k^*\Theta_2 t_k^*\right)\oplus_2\left(t_k^*\Theta_2 u_k^*\right)\ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|}\left(s_k^*\Theta_2 t_k^*\right)\oplus_2\left(t_k^*\Theta_2 u_k^*\right)\ddot{\|}_2}{}_{\beta} \\
&\ddot{\le} \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \mu_k \ddot{\times}\left( \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta} \ddot{+} \frac{\ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta}\right) \qquad \textbf{(5.2)} \\
&= \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta} \ddot{+} \ddot{\sum_{k=1}^{n}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$
\mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta} \ddot{\le} \mu_k,\ \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta} \ddot{\le} \mu_k,\ \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta} \ddot{\le} \mu_k
$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada Lemma 2.4.14 v) kullanılırsa

$$
\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta},\ \ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} s_k^*\Theta_2 t_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta},\ \ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \mu_k \ddot{\times} \frac{\ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{1 \ddot{+} \ddot{\|} t_k^*\Theta_2 u_k^* \ddot{\|}_2}{}_{\beta}
$$

eşitsizliklerinin yakınsaklığı elde edilir. Böylece (5.2) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(s,u) \ddot{\le} d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(s,t) \ddot{+} d_{2,w(\mathbb{BC}(N))}(t,u)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.6. $l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ kümesi bir $*-$bikompleks dizi uzayıdır.

*İspat:* $l_\infty(\mathbb{BC}(N)) \subset w(\mathbb{BC}(N))$ kapsaması tanımdan açıktır. Şimdi $l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ kümesinin $w(\mathbb{BC}(N))$ kümesinin alt uzayı olduğu ispatlansın.

i) $s=(s_n^*), t=(t_n^*) \in l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ olsun. O halde $\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2 \ddot{<} \ddot{+}\infty$ ve $\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} t_n^* \ddot{\|}_2 \ddot{<} \ddot{+}\infty$ dir. Böylece Teorem 2.4.12 gereği

$$
\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} s_n^* \oplus_2 t_n^* \ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}}\left( \ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|} t_n^* \ddot{\|}_2 \right) \ddot{\le} \ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}} \ddot{\|} t_n^* \ddot{\|}_2 \ddot{<} \ddot{+}\infty
$$

elde edilir. Bu ise $s \oplus t \in l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ anlamına gelir.

ii) $s=\left(s_n^*\right)\in l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ ve $z^*\in\mathbb{C}\left(N\right)-\left\{0^*\right\}$ olsun. O halde $\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}}\ddot{\|}s_n^*\ddot{\|}_2\ddot{<}\ddot{+}\infty$ olup Lemma 5.2.3 i) ve Teorem 2.4.12 gereği

$$\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}}\ddot{\|}z^*\odot_2 s_n^*\ddot{\|}_2=\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}}\left(\ddot{\|}z^*\ddot{\|}_1\ddot{\times}\ddot{\|}s_n^*\ddot{\|}_2\right)\ddot{\le}\ddot{\|}z^*\ddot{\|}_1\ddot{\times}\ddot{\sup_{n\in\mathbb{N}}}\ddot{\|}s_n^*\ddot{\|}_2\ddot{<}\ddot{+}\infty$$

yazılır. Bu ise $z^*\odot s\in l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ anlamına gelir. $z^*=0^*$ için ispat açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.7. $s=\left(s_n^*\right),t=\left(t_n^*\right)\in w\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ olmak üzere

$$d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}:l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)\times l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)\to\ddot{[}\ddot{0},\ddot{+}\infty\ddot{)}=B^{'}\subset B,$$

$$\left(s,t\right)\to d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}\left(s,t\right)=\ddot{\sup_{n\in\mathrm{N}}}\ddot{\|}s_n^*\Theta_2 t_n^*\ddot{\|}_2$$

şeklinde bir $d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}$ fonksiyonu tanımlansın. O halde $\left(l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right),d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}\right)$ bir tam Newtonyen olmayan metrik uzaydır.

*İspat:* $d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}$ fonksiyonunun $l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ üzerinde Newtonyen olmayan metrik aksiyomlarını sağladığı açıktır. Burada yalnızca $l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ kümesinin $d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}$ metriğine göre tam olduğu gösterilmiştir.

$\left(s_m^*\right)$, $s_m=\left(\left(s_k^*\right)^m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $l_\infty\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ de herhangi bir $*-$bikompleks Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon\ddot{>}\ddot{0}$ için $m,r\ge n_0\left(\varepsilon\right)$ olduğunda $d_{2,l_\infty\left(\mathbb{BC}(N)\right)}\left(s_m^*,s_r^*\right)=\ddot{\sup_{n\in\mathrm{N}}}\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m\Theta_2\left(s_n^*\right)^r\ddot{\|}_2\ddot{<}\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece sabitlenmiş her $n$ ve her $m,r\ge n_0\left(\varepsilon\right)$ için

$$\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m\Theta_2\left(s_n^*\right)^r\ddot{\|}_2\ddot{<}\varepsilon \qquad \textbf{(5.3)}$$

olur. Bu durumda sabitlenmiş her $n$ için $\left(\left(s_n^*\right)^1,\left(s_n^*\right)^2,...,\left(s_n^*\right)^m,...\right)$ bir $*-$bikompleks Cauchy dizisidir ve böylece $d_{\mathbb{BC}(N)}$ metriğine göre bir $s_n^{'}\in\mathbb{BC}\left(N\right)$ noktasına yakınsar. Şimdi $s_1^{'},s_2^{'},...$ $*-$limitlerinden oluşan bir $s'=\left(s_n^{'}\right)=\left(s_1^{'},s_2^{'},...\right)$ tanımlansın. (5.3) eşitsizliğinde $r \to \infty$ için limit alınırsa; her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m \Theta_2 s_n^* \ddot{\|}_2 \,\ddot{\leq}\, \varepsilon$ ve dolayısıyla $d_{2,l_\infty(\mathbb{BC}(N))}(s_m, s') = \ddot{\sup_{n\in\mathrm{N}}} \ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m \Theta_2 s_n^{'} \ddot{\|}_2 \,\ddot{\leq}\, \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $(s_m) \subset l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ dizisinin $d_{2,l_\infty(\mathbb{BC}(N))}$ metriğine göre $s' = \left(s_n^{'}\right) \in w(\mathbb{BC}(N))$ elemanına yakınsadığını gösterir.

Diğer yandan her $m \in \mathbb{N}$ için $s_m = \left(\left(s_k^*\right)^m\right)_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m \ddot{\|}_2 \,\ddot{\leq}\, t_m$ olacak şekilde $t_m \in \ddot{(}\ddot{0}, \ddot{+}\infty\ddot{)}$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2 \,\ddot{\leq}\, \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 \left(s_n^*\right)^m \ddot{\|}_2 \,\ddot{+}\, \ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m \ddot{\|}_2 \,\ddot{\leq}\, \varepsilon \,\ddot{+}\, t_m$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $s' = \left(s_n^{'}\right) \in l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ dir ve dolayısıyla $l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ tamdır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3.8. $l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ $*-$bikompleks dizi uzayı; her $s = \left(s_n^*\right) \in l_\infty(\mathbb{BC}(N))$ için

$$\ddot{\|} s \ddot{\|}_{2,l_\infty(\mathbb{BC}(N))} = \ddot{\sup_{n\in\mathrm{N}}} \ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2$$

ile tanımlı $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2,l_\infty(\mathbb{BC}(N))}$ $*-$normuna göre bir Banach uzaydır.

Teorem 5.3.9. $\ddot{0} \,\ddot{<}\, p \,\ddot{<}\, \ddot{+}\infty$ için $l_p(\mathbb{BC}(N))$ kümeleri $*-$bikompleks dizi uzayıdır.

*İspat:* $\ddot{0} \,\ddot{<}\, p \,\ddot{<}\, \ddot{+}\infty$ için $l_p(\mathbb{BC}(N)) \subset w(\mathbb{BC}(N))$ kapsamasının gerçeklendiği açıktır. Şimdi $l_p(\mathbb{BC}(N))$ kümesinin $w(\mathbb{BC}(N))$ kümesinin bir alt uzayı olduğu ispatlansın.

(i) $s = \left(s_k^*\right), t = \left(t_k^*\right) \in l_p(\mathbb{BC}(N))$ olsun. O halde $\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}}$ ve $\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}}$ $\beta-$serileri $\beta-$yakınsaktır. Bu durumda Lemma 5.2.1 i) gereği

$$\ddot{\|} s_k^* \oplus_2 t_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{\le} \ddot{2} \ddot{\times} \ddot{\max}\left\{ \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 , \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2 \right\}$$

ve

$$\begin{aligned}
\ddot{\|} s_k^* \oplus_2 t_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} &\ddot{\le} \left( \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 \ddot{+} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2 \right)^p \\
&\ddot{\le} \left( \ddot{2} \ddot{\times} \ddot{\max}\left\{ \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2 , \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2 \right\} \right)^p \\
&= \left( \ddot{2} \right)^p \ddot{\times} \ddot{\max}\left\{ \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} , \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} \right\} \\
&\ddot{\le} \left( \ddot{2} \right)^p \ddot{\times} \left( \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} \ddot{+} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_k^* \oplus_2 t_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} \ddot{\le} \left( \ddot{2} \right)^p \ddot{\times} \left[ \left( \ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} \right) \ddot{+} \left( \ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} t_k^* \ddot{\|}_2^{\,p} \right) \right]$$

elde edilir. Böylece $\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_k^* \oplus_2 t_k^* \ddot{\|}_2^{\,p}$ serisi yakınsaktır, yani $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $s \oplus t \in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ dir.

(ii) $s = \left(s_k^*\right) \in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ ve $z^* \in \mathbb{C}(N) - \left\{0^*\right\}$ olsun. $s \in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ olduğundan $\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\,p}$ $\beta-$serisi $\beta-$yakınsaktır. Böylece Lemma 5.2.3 i) gereği $\left\| z^* \odot_2 s_k^* \right\|_2^p = \ddot{\|} z^* \ddot{\|}_1^{\,p} \ddot{\times} \ddot{\|} s_k^* \ddot{\|}_2^{\,p}$ olup Lemma 2.4.14 iv) den $z^* \odot s \in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ olduğu söylenir. $z^* = 0^*$ için ispat açıktır.

Teeorem 5.3.10. $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $\left( l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right), d_{2, l_p(\mathbb{BC}(N))} \right)$ kümesi $s = \left(s_n^*\right), t = \left(t_n^*\right) \in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ olmak üzere

$$d_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}(s,t): l_p(\mathbb{BC}(N)) \times l_p(\mathbb{BC}(N)) \to \ddot{[}\ddot{0},\ddot{+}\infty\ddot{)} = B' \subset B,$$

$$(s,t) \to d_{2,lp(\mathbb{BC}(N))}(s,t) = \begin{cases} \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 t_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}}, & \ddot{0} \ddot{<} p \ddot{\leq} \ddot{1} \\ \left( \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 t_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta}, & \ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty \end{cases}$$

ile tanımlı $d_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ fonksiyonuna göre bir tam Newtonyen olmayan metrik uzaydır.

*İspat:* İlk olarak $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $l_p(\mathbb{BC}(N))$ kümesi ele alınsın. $\mathbb{BC}(N)$ de $\ddot{\|}.\ddot{\|}_2$ $*-$normuna göre Minkowski's eşitsizliğinden $s = (s_k^*), t = (t_k^*), u = (u_k^*) \in l_p(\mathbb{BC}(N))$ için

$$\begin{aligned} d_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}(s,t) &= \left( \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 t_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta} = \left[ \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \left( \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 u_n^* \right) \oplus_2 \left( u_n^* \Theta_2 t_n^* \right) \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right]^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta} \\ &\leq \left( \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_n^* \Theta_2 u_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta} \ddot{+} \left( \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} u_n^* \Theta_2 t_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta} \\ &= d_{2,lp(\mathbb{BC}(N))}(s,u) \ddot{+} d_{2,lp(\mathbb{BC}(N))}(u,t) \end{aligned}$$

elde edilir. Newtonyen olmayan metriğin diğer aksiyomları sağlandığından $d_{2,lp(\mathbb{BC}(N))}$, $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $l_p(\mathbb{BC}(N))$ üzerinde bir Newtonyen olmayan metriktir.

Şimdi $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $\left(l_p(\mathbb{BC}(N)), d_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}\right)$ nin tam olduğu gösterilsin. Bunun için $l_p(\mathbb{BC}(N))$ de $s_m = \left(\left(s_k^*\right)^m\right)_{k \in \mathbb{N}}$ olmak üzere herhangi bir $(s_m)$ $*-$bikompleks Cauchy dizisi alınsın. O halde $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ için $m, r \geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda

$$d_{2,lp(\mathbb{BC}(N))}\left(s_m,s_r\right)=\left(\ddot{\sum_{n=1}^{\infty}}\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m\Theta_2\left(s_n^*\right)^r\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\left(\frac{\ddot{1}}{p}\right)_\beta}\ddot{<}\varepsilon \qquad \textbf{(5.4)}$$

olacak şekilde $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece sabitlenmiş her $n$ ve her $m,r\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m\Theta_2\left(s_n^*\right)^r\ddot{\|}_2<\varepsilon \qquad \textbf{(5.5)}$$

dir. Bu durumda sabitlenmiş her $n$ için $\left(\left(s_n^*\right)^1,\left(s_n^*\right)^2,\ldots,\left(s_n^*\right)^m,\ldots\right)$ bir $*-$bikompleks Cauchy dizisidir ve böylece $d_{\mathbb{BC}(N)}$ metriğine göre bir $s_n^{'}\in\mathbb{BC}(N)$ noktasına yakınsar.

Şimdi $s_1^{'},s_2^{'},\ldots$ $*-$limitlerinden oluşan bir $s'=\left(s_n^{'}\right)=\left(s_1^{'},s_2^{'},\ldots\right)$ tanımlansın. Bu durumda (5.5) gereği her $m\geq n_0(\varepsilon)$ için $\ddot{\|}\left(s_n^*\right)^m\Theta_2 s_n^*\ddot{\|}_2\ddot{\leq}\varepsilon$ yazılır. Bu ise $m\rightarrow\infty$ için $s_k^m\rightarrow s_k^*$ anlamına gelir. Ayrıca (5.4) den $m,r\geq n_0(\varepsilon)$ için $\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\Theta_2\left(s_k^*\right)^r\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\left(\frac{\ddot{1}}{p}\right)_\beta}\ddot{<}\varepsilon$ ve $r\rightarrow\infty$ için limit alınırsa $\left(\ddot{\sum_{k=1}^{n}}\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\Theta_2 s_k^*\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right)^{\left(\frac{\ddot{1}}{p}\right)_\beta}\ddot{<}\varepsilon$ elde edilir. Böylece $\left(s_m\right)\subset l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$, $d_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ Newtonyen olmayan metriğine göre $s'=\left(s_n^{'}\right)\in w\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ elemanına yakınsar.

Diğer yandan $s_m=\left(\left(s_k^*\right)^m\right)_{k\in\mathrm{N}}\in l_p\left(\mathbb{BC}(N)\right)$ olduğundan Lemma 5.2.1 i) ve $\ddot{\sum_{k=1}^{\infty}}\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\Theta_2 s_k^{'}\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}$ $\beta-$serisinin $\beta-$yakınsaklığı gereği

$$\begin{aligned}
\ddot{\|}s_k^{'}\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}=\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\oplus_2\left(s_k^{'}\Theta_2\left(s_k^*\right)^m\right)\ddot{\|}_2^{\ddot{p}} &\ddot{\leq}\left[\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2\ddot{+}\ddot{\|}s_k^{'}\Theta_2\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2\right]^p\\
&\ddot{\leq}\left[2\ddot{\times}\max\left\{\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2,\ddot{\|}s_k^{'}\Theta_2\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2\right\}\right]^p\\
&=2^p\ddot{\times}\max\left\{\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2^{\ddot{p}},\ddot{\|}s_k^{'}\Theta_2\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right\}\\
&\ddot{\leq}2^p\ddot{\times}\left[\ddot{\|}\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\ddot{+}\ddot{\|}s_k^{'}\Theta_2\left(s_k^*\right)^m\ddot{\|}_2^{\ddot{p}}\right]
\end{aligned}$$

olup karşılaştırma testi gereği $s' = \left(s_n'\right) \in l_p\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ elde edilir. Sonuç olarak $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ tamdır.

Şimdi $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{\leq} \ddot{1}$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ kümesi ele alınsın. $d_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan metrik olduğunun $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{\leq} \ddot{1}$ olma durumundaki ispatı $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ durumuna benzer yolla yapılır. $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{\leq} \ddot{1}$ için tamlık ise yine $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ durumundaki tamlık ispatına benzer olarak Önerme 2.4.15 kullanılarak gösterilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3.11. $\ddot{1} \ddot{<} p \ddot{<} \ddot{+}\infty$ için $l_p\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ $*-$bikompleks dizi uzayı; her $s = \left(s_n^*\right) \in l_p\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$

$$\ddot{\|} s \ddot{\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))} = \left( \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2^{p} \right)^{\frac{\ddot{1}}{p}\beta}$$

ile tanımlı $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ $*-$normuna göre bir Banach uzaydır.

Tanım 5.3.12. $X$, $\mathbb{C}\left(N\right)$ Newtonyen olmayan kompleks cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{\leq} \ddot{1}$ için $\ddot{\|}\left|.\right|\ddot{\|} : X \rightarrow \left[\ddot{0}, \ddot{+}\infty\right) = B' \subset B$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $p,*-$ norm diye adlandırılır.

(i) $\ddot{\|}\left|x\right|\ddot{\|} = \ddot{0}$ olması için gerekli ve yeterli şart $x = 0$ olmasıdır.

(ii) Her $x \in X$ ve her $\mu^* \in \mathbb{C}\left(N\right)$ için $\ddot{\|}\left|\mu^* \odot x\right|\ddot{\|} = \ddot{\|}\left|\mu^*\right|\ddot{\|}_1^{p} \ddot{\times} \ddot{\|}\left|x\right|\ddot{\|}$ dir.

(iii) Her $x, y \in X$ için $\ddot{\|}\left|x \oplus y\right|\ddot{\|} \ddot{\leq} \ddot{\|}\left|x\right|\ddot{\|} \ddot{+} \ddot{\|}\left|y\right|\ddot{\|}$ dir.

Bu durumda $X$ vektör uzayına bir $p,*-$normlu uzay denir.

$\left(x_n\right) \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\ddot{\|}\left|x_n \Theta x\right|\ddot{\|} \ddot{<} \varepsilon$ oacak şekilde bir $n_0\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ varsa $\left(x_n\right)$ dizisi $\ddot{\|}\left|.\right|\ddot{\|}$ $p,*-$normuna göre $x$ noktasına yakınsar denir.

Eğer her $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $\ddot{\|}|x_n \Theta x_m|\ddot{\|} \ddot{<} \varepsilon$ oacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisi $\ddot{\|}|.|\ddot{\|}$ $p,*-$normuna göre Cauchy dizisidir denir.

Eğer $X$ de $\ddot{\|}|.|\ddot{\|}$ $p,*-$normuna göre her Cauchy dizisi $\ddot{\|}|.|\ddot{\|}$ $p,*-$normuna göre bir $x \in X$ noktasına yakınsar ise $X$ e $\ddot{\|}|.|\ddot{\|}$ $p,*-$normuna göre tamdır ya da $p,*-$Banach uzaydır denir.

Sonuç 5.3.13. $\ddot{0} \ddot{<} p \ddot{\leq} \ddot{1}$ için $l_p(\mathbb{BC}(N))$ $*-$bikompleks dizi uzayı; her $s = (s_n^*) \in l_p(\mathbb{BC}(N))$ için

$$\ddot{\|} s \ddot{\|}_{2, l_p(\mathbb{BC}(N))} = \ddot{\sum_{n=1}^{\infty}} \ddot{\|} s_n^* \ddot{\|}_2^{\ddot{p}}$$

ile tanımlı $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2, l_p(\mathbb{BC}(N))}$ $p,*-$normuna göre bir $p,*-$Banach uzaydır.

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dizi uzayları ile ilgili olarak yapılan çalışmalar; yeni bir dizi uzayı inşa etmek, bu uzayın, üzerinde tanımlanan bir norm veya paranorm ile tamlığını göstermek, bu uzayla, bilinen dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelemek, varsa uzayın Schauder tabanını belirlemek, uzayın $\alpha-,\beta-,\gamma-$duallerini ve topolojik dualini hesaplamak, uzayın cebirsel, topolojik ve geometrik özelliklerini araştırmak, bu uzaydan, bilinen dizi uzaylarına ve bilinen dizi uzaylarından, bu uzaya matris dönüşümlerini karakterize etmek gibi problemleri ele alarak çözüme kavuşturmayı amaçlar.

Bu tez çalışmasında, üçüncü ve dördüncü bölümde, bikompleks sayılar kullanılarak reel ve hiperbolik değerli iki norm yapısı ile bikompleks dizi uzayları tanımlanmış, bu uzayların kapsama özellikleri, tamlık, solidlik, ayrılabilirlik gibi bazı topolojik özellikleri, kesin konvekslik ve düzgün konvekslik gibi bazı geometrik özellikleri tartışılmıştır. Beşinci bölümde ise, gelecek çalışmalarda üçüncü ve dördüncü bölümdeki topolojik ve geometrik özellik problemlerinin araştırılmasına zemin hazırlayan Newtonyen olmayan bikompleks sayılar kümesi tanımlanmış, bu kümenin bir quasi-Banach cebiri olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca Newtonyen olmayan bikompleks sayılar ve Newtonyen olmayan reel değerli norm kullanılarak Lebesgue dizi uzayları inşa edilmiş ve kapsama ve tamlık özellikleri incelenmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde elde edilen sonuçlar orijinaldir ve oldukça önemlidir.

Tezin beşinci bölümünde yapılan tanımların ve araştırılan özelliklerin ışığında tezde açık problem olarak bırakılan Newtonyen olmayan bikompleks sayılardan oluşan yeni dizi uzaylarının bikompleks anlamda tanımlanan topolojik ve geometrik özellikleri tarafımızca çalışılmış ve çeşitli dergilere sunulmuştur.

Banach-Saks özelliği, $p-$tipte Banach-Saks özelliği, zayıf Banach-Saks özelliği, Gurarii konvekslik modülü, düzgün Opial özelliği, Kadec-Klee, kompleks konvekslik gibi literatürde var olan diğer geometrik özellikler bikompleks anlamda tanımlanabilir ve tezde inşa edilen yeni dizi uzaylarında sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

Yine dördüncü bölümde kurduğumuz dizi uzaylarının $\alpha-,\beta-,\gamma-$dualleri araştırılabilir ve bu uzayların hem birbirleri ile hem de bilinen diğer dizi uzayları ile aralarındaki matris dönüşümleri karakterize edilebilir.

Konveks fonksiyon kavramı bikompleks değişkenli hiperbolik değerli fonksiyonlar için hiperbolik sayılar kümesindeki sıralama bağıntısına göre yeniden tanımlanabilir ve konveks fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler dahil tüm problemler bu kavrama göre yeniden ifade edilerek geçerlilikleri incelebilir, reel değerli fonksiyonlar için elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir.

Ayrıca tezde inşa edilen bikompleks dizi uzaylarının değişken üsse göre yeni versiyonları, yani Maddox bikompleks dizi uzayları hem reel değerli hem de hiperbolik değerli norma göre tanımlanabilir, bu tezde tanımlanan uzaylarla karşılaştırılabilir ve tezde tartışılan diğer problemlerin bu uzaylarda çözümü aranabilir.

# KAYNAKLAR


Agarwal, R. P., et al. (2009). *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Volume 6*. New York: Springer.

Alpay, D., et al. (2014). *Basics of functional analysis with bicomplex scalars and bicomplex Schur analysis*. Springer Science & Business Media.

Altun, F. (2012). *Banach uzaylarında bazı geometrik kavramlar*. Basılmamış Yüksek Lisans Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, 68, İstanbul.

Banas, J. and Mursaleen, M. (2014). *Sequence spaces and measures of noncompactness with applications to differential and integral equations*. New Delhi: Springer.

Başar, F. (2012). *Summability theory and its applications*. Bentham Science Publishers.

Bonsall, F. F. and Duncan, J. (1973). *Complete normed algebras*. Springer Verlag, Berlin.

Carothers, N. L. (2005). *A short course on Banach space theory (Vol. 64)*. Cambridge University Press.

Castillo, R. E. and Rafeiro, H. (2016). *An introductory course in Lebesgue spaces*. Switzerland: Springer.

Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). ‘‘Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus’’. *Journal of Inequalities and Applications*. 2012(1):228.

Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2014). ‘‘Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers’’. *In Abstract and Applied Analysis*. 2014, Article ID 236124. 12 pages.

Duyar, C. ve Erdoğan, M. (2016). ‘‘On non-Newtonian real number series’’. *IOSR Journal of Mathematics.* 12(6). 34-48.

Duyar, C. ve Oğur, O. (2013). ‘‘On a new space $m^2\left(M, A, \phi, p\right)$ of double sequences’’. *Journal of Function Spaces and Applications*. 2013, Article ID 509613. 8 pages.

Duyar, C. ve Oğur, O. (2017). ‘‘A note on topology of non-Newtonian real numbers’’. *Journal of Mathematics*. 13(6). 11-14.

Duyar, C., Sağır, B. ve Oğur, O. (2015). ‘‘Some basic topological properties on non-newtonian real line’’. *British Journal of Mathematics & Computer Science*. 9(4). 300-307.

Grossman, M. and Katz, R. (1972). *Non - Newtonian calculus*, *1st ed*. Lee Press, Pigeon Cove Massachussets.

Grossman, M. (1979). ‘‘An introduction to non-Newtonian calculus’’. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*. 10(4). 525-528.

Grossman, M. (1983). *Bigeometric calculus: A system with a scale free derivative*, *1st ed.* Archimedes Foundation. Rockport Massachussets.

Güngör, N. (2020). ‘‘Some geometric properties of the non-Newtonian sequence spaces $l_p\left(N\right)$’’. *Mathematica Slovaca*. 70(3). 689-696.

Jarchow, H. (1981). *Locally convex spaces*. B. G. Teubner, Stuttgart.

Kadak, U. (2015). *Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları*. Basılmamış Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 100, Ankara.

Kara, E. E. (2013). ‘‘Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces’’. *Journal of Inequalities and Applications.* 2013(1): 38.

Kirişci M. (2017). ‘‘Topological structures of non-Newtonian metric spaces’’. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 5(2). 156-169.

Köthe, G. (1983). *Topological vector spaces I*. Springer-Verlag, Berlin.

Kumar, R., Kumar, R. and Rochon, D. (2011). ‘‘The fundamental theorems in the framework of bicomplex topological modules’’. *arXiv preprint arXiv:1109.3424.*

Kumar, R. and Saini, H. (2016). ‘‘Topological bicomplex modules’’. *Advanced in Applied Clifford Algebras.* 26. 217-235.

Kumar, R., and Singh, K. (2015). ‘‘Bicomplex linear operators on bicomplex Hilbert spaces and Littlewood’s subordination theorem’’. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 25(3). 591-610.

Kumar, R., Singh, K., Saini, H. and Kumar, S. (2016). ‘‘Bicomplex weighted Hardy spaces and bicomplex $C^{*}-$algebras’’. *Advanced in Applied Clifford Algebras.* 26:4. 1249 – 1270.

Luna-Elizarraras, M. E., Perez-Regalado, C. O. and Shapiro, M. (2014). ‘‘On linear functionals and Hahn-Banach theorems for hyperbolic and bicomplex modules’’. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 24(4). 1105-1129.

Luna – Elizarraras, M. E., et al. (2015). *Bicomplex holomorphic functions: The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers.* Springer International Publishing Switzerland.

Maddox, I. J. (1988). *Elements of functional analysis*. CUP Archive.

Moore, T. O. (1964). *Elementary general topology*. Prentice-Hall, Inc.

Oğur O. ve Demir S. (2019). ‘‘On non-Newtonian measure for $\alpha-$closed sets’’. *New Trends in Mathematical Sciences.* 7(2). 202-207.

Price, G. B. (1991). *An introduction to multicomplex spaces and functions.* Marcel Dekker, Inc.

Rochon, D. and Shapiro, M. (2004). ‘‘On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers’’. *Anal. Univ. Oradea Fasc. Math*. 11. 71-110.

Saini, H., Sharma, A. and Kumar, R. (2020). ‘‘Some fundamental theorems of functional analysis with bicomplex and hyperbolic scalars’’. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 30(5). 1-23.

Savaş, E., Karakaya, V. ve Şimşek, N. (2009). ‘‘Some-type new sequence spaces and their geometric properties’’. *In Abstract and Applied Analysis*. 2009, Article ID 696971. 12 pages.

Segre, C. (1892). ‘‘Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici (The real representation of complex elements and hyperalgebraic entities)’’. *Mathematische Annalen*. 40. 413-467.

Tekin, S. ve Başar, F. (2013). ‘‘Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field’’. *In Abstract and Applied Analysis*. 2013, Article ID 739319. 11 pages.

Yeh, J. (2006). *Theory of measure and integration, second edition*. World Scientific Publishing Company.

Zill, D. and Shanahan, P. (2009). *A first course in complex analysis with applications*. Jones & Bartlett Learning.

# ÖZGEÇMİŞ

Nilay Değirmen, 07.07.1990 tarihinde Bandırma'da doğdu. Bandırma Kemal Pireci Lisesi'ni bitirdikten sonra Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. 2015 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programını bitirdi. 2012 yılından bu yana Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapan Nilay Değirmen iyi derecede İngilizce bilmektedir. Temel ilgi alanları; fonksiyonel analiz, dizi uzayları ve operatör teorisidir (21.01.2021).

**İletişim Bilgileri**
E mail: nilay.sager@omu.edu.tr
Telefon: 03623121919-5039
ORCID ID: *0000-0001-8192-8473*

**Yayınlanmış Çalışmalar:**

**1.** Sager, N. ve Sağır, B. (2020). ‘‘On completeness of some bicomplex sequence spaces’’. *Palestine Journal of Mathematics*. 9(2). 891–902.

**2.** Sager, N. ve Sağır, B. (2020). ‘‘Some inequalities in quasi-Banach algebra of non-Newtonian bicomplex numbers’’. *Filomat* (kabul edildi).

**3.** Sager, N. ve Sağır, B. (2020). ‘‘Banach spaces $l_p\left(\mathbb{BC}\left(N\right)\right)$ with the $*-$norm $\ddot{\|}.\ddot{\|}_{2,l_p(\mathbb{BC}(N))}$ and some properties’’. *Tbilisi Mathematical Journal* (kabul edildi).

**4.** Sager, N. ve Sağır, B. (2020). ‘‘Common fixed, coupled coincidence and common coupled fixed point results in hyperbolic valued metric spaces’’. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* (kabul edildi).

**5.** Avcı, H. ve Sager, N. (2018). ‘‘Mappings between $C^*-$algebra that preserve the spectrum’’. *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*. 6(1). 8-11.

**6.** Sager, N. ve Avcı, H. (2015). ‘‘Some spectrum properties in $C^*-$algebras’’. *Turkish Journal of Science and Technology*. 10(1). 27-30.

**Bildiriler:**

**1.** Sager, N. ve Sağır, B. (2019, Ağustos). ‘‘Bikompleks Maddox dizi uzaylarının tamlığı üzerine’’. *32. Ulusal Matematik Sempozyumu*. Samsun, Türkiye.

**2.** Avcı, H. ve Sager, N. (2016, Temmuz). ‘‘Mappings between $C^*-$algebras that preserve the spectrum’’. *International Conference on Analysis and Its Applications* (ICAA-2016) Kırşehir, Türkiye.

**3.** Sager, N. ve Avcı, H. (2014, Haziran). ‘‘Some spectrum properties in $C^*-$ algebras’’. *International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal*. Bursa, Türkiye.

**Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar**

**1.** TÜBİTAK BİDEB 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Bursu

**2.** Ege Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Bölüm Üçüncülüğü (2012)