



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**NEWTONYEN OLMAYAN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE
UYGULAMALARI**

Yüksek Lisans Tezi

Halide YAVUZ SARI

Danışman
Prof. Dr. Cenap DUYAR

SAMSUN
2021

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



NEWTONYEN OLMAYAN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE
UYGULAMALARI

Yüksek Lisans Tezi

Halide YAVUZ SARI

Danışman
Prof. Dr. Cenap DUYAR

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Halide YAVUZ SARI tarafından, **Prof. Dr. Cenap DUYAR** danışmanlığında hazırlanan “**Newtonyen Olmayan Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 09.08.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

| | Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı | İmza | Sonuç |
|-----------------------------|--|-------------|---|
| Başkan (Danışman) | Prof. Dr. Cenap DUYAR Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı | | <input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret |
| Üye | Prof.Dr.Vedat SAĞLAM Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı | | <input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret |
| Üye | Doç. Dr. Oğuz OĞUR Giresun Üniversitesi Topoloji Anabilim Dalı | | <input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret |

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
... / ... / ...
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar 'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3.bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

09 /08 / 2021

Halide YAVUZ SARI

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Newtonyen Olmayan Üreteç Fonksiyonları Ve Uygulamaları

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 12.07.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 26

Tek kaynak oranı : % 3 çıkmıştır.

12 /07/ 2021

Prof. Dr. Cenap DUYAR

ÖZET

NEWTONYEN OLMAYAN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Halide YAVUZ SARI
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans, Ağustos/2021
Danışman: Prof. Dr. Cenap DUYAR

Bu çalışma Newtonyen olmayan kalkülüs kapsamında yer alan Geometrik, Anageometrik, Bigeometrik kalkülüs için üreteç fonksiyonlarını tanıtmak ve her bir kalkülüs içinde tanıtılan üreteç fonksiyonlarına karşılık gelen sayı dizilerini vermek amacıyla hazırlanmıştır. Bu tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde Newtonyen olmayan kalkülüs ve üreteç fonksiyonları tanıtılmıştır.

İkinci bölümünde çalışma boyunca kullanılacak olan Newtonyen olmayan kalkülüs teorisi özetlenmiştir; bazı tanım, teorem ve gösterimlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Newtonyen olmayan kalkülüste üreteç fonksiyonları tanıtılmıştır ve bazı özellikleri gösterilmiştir. Bazı dizilerin üreteç fonksiyonları Newtonyen olmayan kalkülüs kapsamında yer alan geometrik, anageometrik, bigeometrik kalkülüs için araştırılmıştır. Fibonacci ve Lucas sayıları gibi bilinen sayılara karşılık gelen üreteç fonksiyonları Newtonyen olmayan kalkülüsün bu üç sınıfında temsil edilmiştir ve bu temsiller arasındaki farklılıklar ortaya konulmuştur. Her bir kalkülüs içinde üreteç fonksiyonlarına karşılık gelen sayı dizileri gösterilmiştir. Son kısımda sonuçlara ve çeşitli önerilere yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonu, geometrik kalkülüs, anageometrik kalkülüs, bigeometrik kalkülüs.

ABSTRACT

NON-NEWTONIAN GENERATING FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Halide YAVUZ SARI
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master's Thesis, August/2021
Supervisor: Prof. Dr. Cenap DUYAR

This study has been prepared to introduce the generating functions for Geometric, anageometric and bigeometric calculus, which is within the scope of non-Newtonian calculus, and to give the number sequences corresponding to the generating functions introduced in each calculus. This thesis consists of four main parts.

In the first part of this study, non-Newtonian calculus and generating functions are introduced.

In the second part, the non-Newtonian calculus theory that will be used throughout the study is summarized; some definitions, theorems and notations are given.

In the third part, the generating functions in non-Newtonian calculus are introduced and some of their properties are shown. Generating functions of some sequences have been investigated for Geometric, anageometric and bigeometric calculus, which are included in non-Newtonian calculus. Generating functions corresponding to known numbers such as Fibonacci and Lucas numbers are represented in these three classes of non-Newtonian calculus, and the differences between these representations are revealed. The sequences of numbers corresponding to the generating functions are shown in each calculus. In the last part, the conclusions and various recommendations are given.

Keywords: non-Newtonian generating function, geometric calculus, anageometric calculus, bigeometric calculus.

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim sürecim boyunca akademik bilgi ve deneyimleri ile beni yönlendiren sayın danışman hocam Prof. Dr. Cenap DUYAR'a, bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR'a, bu zamana kadar geçmiş olduğum farklı eğitim ve öğretim aşamalarında gelişimime katkı sunan aileme, öğretmenlerime ve üniversitemizin akademisyenlerine, çalışmalarımnda ve hayatımda her zaman destekçim olan değerli eşim Mahmut SARI'ya, hayatıma anlam katan canım kızım Beril'e, bu süreçte motivasyonumu dinç tutan dostlarım Maryam BARADARAN ve Sevilay KİĞİLCİM'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|------------|
| ÖZET | iii |
| ABSTRACT | iv |
| ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR | v |
| SİMGELER | vii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. GENEL BİLGİLER | 2 |
| 2.1. Temel Kavramlar | 2 |
| 2.2.Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi ve Bazı Özellikleri | 3 |
| 2.3.* – Kalkülüs..... | 7 |
| 3. BULGULAR VE TARTIŞMA | 11 |
| 3.1. Newtonyen Olmayan Üreteç Fonksiyonları | 11 |
| 3.2. Newtonyen Olmayan Fibonacci Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri..... | 52 |
| 3.3.Newtonyen Olmayan Lucas Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri..... | 62 |
| 3.4. Newtonyen Olmayan Üreteç Fonksiyonlarının Bir Listesi | 70 |
| 4. SONUÇ VE ÖNERİLER | 73 |
| KAYNAKLAR | 74 |
| ÖZ GEÇMİŞ | 75 |

SİMGELER

| | |
|------------------------|---|
| \mathbb{N} | Doğal sayılar kümesi |
| \mathbb{R} | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}(N)_\alpha$ | Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi |
| ${}_\beta \Sigma$ | β – toplam |
| $ _\alpha$ | α – mutlak değer |
| ${}^\alpha$ – lim | α – limit |
| \leq | α – sıralama |
| *D | $*$ – türev |
| * – lim | $*$ – limit |
| ${}^*\Sigma$ | $*$ – seri |
| f^* | Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonu |
| (\dot{F}_n) | Newtonyen olmayan Fibonacci sayı dizisi |
| (\dot{L}_n) | Newtonyen olmayan Lucas sayı dizisi |

1. GİRİŞ

Newtonyen olmayan kalkülüs ilk olarak Michael Grossmann ve Robert Katz tarafından 1967-1970 yılları arasında Newton ve Leibnitz'in klasik analizine bir alternatif olarak tanıtılmıştır. 1972 yılında ise Newtonyen olmayan kalkülüsün temel çerçevesini oluşturan 'Non-newtonian calculus' isimli kitabı tamamlamışlardır. Klasik kalkülüste kullanılan tüm kavramların Newtonyen olmayan kalkülüs içinde bir karşılığı vardır. Bu ise bize günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere farklı çözüm yolları geliştirme adına fayda sağlayacaktır.

Newtonyen olmayan kalkülüs matematik, mühendislik, fen bilimleri ve diğer alanlara yararlı olan çeşitli araçlar sağlar. Üzerinde çalışılan alanlar arasında faiz oranları, ekonomide esneklik teorisi, kanın akışkanlığı, biyoloji, diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz, fraktallar, olasılık teorisi ve benzeri bulunmaktadır.

Klasik kalkülüste üreteç fonksiyonu verilen bir dizinin elemanlarının katsayı olarak kullanılması ile elde edilen bir kuvvet serisidir. Yani kabaca dizilerin fonksiyonlara dönüştürülmesidir. Üreteç fonksiyonları istatistik, olasılık teorisi, kombinatorik, uygulamalı matematik, sayılar teorisi ve fizik gibi hesaplama içeren birçok bilim alanında kullanılmaktadır.

Son yıllarda yapılan araştırmalara bakıldığında Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonları ve uygulamaları üzerinde çalışmalar bulunmamaktadır. Bu nedenle bu tezde Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonları ve bazı uygulamaları incelenmiştir.

Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde Newtonyen olmayan kalkülüste daha önceden yazılmış çalışma boyunca kullanılacak olan bazı tanım, teorem ve gösterimlere yer verilmiştir. Bulgular bölümünde ise Newtonyen olmayan kalkülüste üreteç fonksiyonu tanıtılmıştır ve bazı özellikleri gösterilmiştir. Bazı dizilerin Newtonyen olmayan kalkülüs kapsamında yer alan Geometrik, Anageometrik, Bigeometrik kalkülüs için üreteç fonksiyonları araştırılmıştır ve her bir kalkülüs içinde bulunan üreteç fonksiyonlarına karşılık gelen diziler elde edilmiştir. Yine Fibonacci ve Lucas sayılarına karşılık gelen üreteç fonksiyonları Newtonyen olmayan kalkülüsün bu üç sınıfında temsil edilmiştir ve bu temsiller arasındaki farklılıklar ortaya konulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan Newtonyen olmayan kalkülüs teorisi özetlenmekte; bazı tanım, teorem ve gösterimlere yer verilmektedir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Reel sayıların alt kümesi olan tam sıralı cisme aritmetik ve bu cisim üzerinde tanımlı cebirsel işlemler ile elde edilen yapıya aritmetik sistem denir. Aritmetik sistemleri oluşturmaya yarayan üreteç fonksiyonu, tanım kümesi reel sayılar ve görüntü kümesi de reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan birebir ve örten bir fonksiyondur. I özdeşlik fonksiyonu, $\exp(x)$ üstel fonksiyonu ve x^3 kübik fonksiyonu birer üreteç fonksiyonu örneğidir (Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.1.2. Tanım kümesi \mathbb{R} ve görüntü kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ olan bir α üreteci göz önüne alınsın. Bu üreteç $y, z \in A$ olmak üzere aşağıda verilen işlemler ve sıralama bağıntısı ile birlikte α -aritmetik olarak adlandırılır.

$$\begin{array}{ll} \alpha\text{-toplama} & y \dot{+} z = \alpha\{\alpha^{-1}(y) + \alpha^{-1}(z)\} \\ \alpha\text{-çıkarma} & y \dot{-} z = \alpha\{\alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(z)\} \\ \alpha\text{-çarpma} & y \dot{\times} z = \alpha\{\alpha^{-1}(y) \times \alpha^{-1}(z)\} \\ \alpha\text{-bölme} & y \dot{/} z = \alpha\{\alpha^{-1}(y) / \alpha^{-1}(z)\} \quad , \quad (z \neq \dot{0}) \\ \alpha\text{-sıralama} & y \dot{<} z \Leftrightarrow \alpha^{-1}(y) < \alpha^{-1}(z) \end{array}$$

Bu durumda α nın α -aritmetiğini ürettiği söylenir. Her bir üreteç tek bir aritmetiği ürettiği gibi her bir aritmetikte tek bir üreteç yardımıyla üretilebilir. Örneğin I özdeşlik fonksiyonu klasik aritmetiği, $\exp(x)$ üstel fonksiyonu da geometrik aritmetiği üretir (Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.1.3. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $-\dot{k} = \dot{0} \dot{-} \dot{k} = \alpha(-k)$ olmak üzere \mathbb{Z}_α α -tamsayılar kümesi

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_\alpha &= \{\dot{k} \mid \dot{k} = \alpha(k), k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, \dot{0} \dot{-} \dot{2}, \dot{0} \dot{-} \dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots\} = \\ &\quad \{\dots, \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $\alpha = \exp$ için

$$\mathbb{Z}_{\exp} = \{\dots, 1/e^2, 1/e, 1, e, e^2, \dots\}$$

olur. Burada e sayısı doğal logaritmik sayıdır (Grossman and Katz, 1972).

2.2. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi ve Bazı Özellikleri

Bu kesimde $\mathbb{R}(N)$ ile gösterilen Newtonyen olmayan reel sayı cismi tanımlanacak ve bazı özellikleri gösterilecektir. Ayrıca bu kesimde her $x, y \in \mathbb{R}(N)$

ve $y \neq \dot{0}$ olmak üzere x/y işlemi $\frac{x}{y}N$ biçiminde, $|x|$ α -mutlak değeri de $|x|_N$ biçiminde gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. α bir üreteç fonksiyonu olmak üzere Newtonyen olmayan reel sayı kümesi $\{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ biçiminde tanımlanır, $\mathbb{R}(N)$ veya $\mathbb{R}(N)_\alpha$ ile gösterilir. Üreteç fonksiyonunu açıkça belirtmek için $\mathbb{R}(N)$ yerine $\mathbb{R}(N)_\alpha$ yazmak yarar sağlar. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ için $x \dot{>} \dot{0}$ ise x sayısına Newtonyen olmayan pozitif reel sayı (α -pozitif sayı), $x \dot{<} \dot{0}$ ise x sayısına Newtonyen olmayan negatif reel sayı (α -negatif sayı) ve $x = \alpha(0)$ ise x sayısına işaretli Newtonyen olmayan sayı denir. $\mathbb{R}^+(N)_\alpha$ ve $\mathbb{R}^-(N)_\alpha$ kümeleri sırasıyla Newtonyen olmayan pozitif ve negatif reel sayı kümelerini gösterir.

$\mathbb{R}(N)_\alpha$ için $(+)$ toplama ve (\times) çarpma ikili işlemleri ile $\dot{\leq}$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$+ : \mathbb{R}(N)_\alpha \times \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\alpha$$

$$(x, y) \rightarrow x + y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y) \}$$

$$\times : \mathbb{R}(N)_\alpha \times \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\alpha$$

$$(x, y) \rightarrow x \times y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y) \}$$

$$\dot{\leq} : y, z \in \mathbb{R}(N)_\alpha, y \dot{\leq} z \Leftrightarrow \alpha^{-1}(y) \leq \alpha^{-1}(z).$$

Buna göre $(\mathbb{R}(N)_\alpha, +, \times, \dot{\leq})$ tam sıralı bir cisimdir (Çakmak ve Başar, 2012).

Şimdi $\mathbb{R}(N)_\alpha$ üzerinde bazı temel kavram ve gösterimler verilsin.

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesindeki bir x sayısının α -karesi x^{2N} ile gösterilir ve $x^{2N} = x \dot{\times} x$ biçiminde tanımlanır.

$\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesindeki bir x sayısının α -karekökü, α -karesi x e eşit olan α -negatif olmayan sayı olarak tanımlanır ve $\sqrt{x^N}$ ile gösterilir. Yani $t^{2N} = x \Leftrightarrow t = \sqrt{x^N}$ olur ve $t = \sqrt{x^N} = \alpha \left\{ \sqrt{\alpha^{-1}(x)} \right\}$ biçiminde yazılır.

$x \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ sayısının p . Newtonyen olmayan üssü ve q . Newtonyen olmayan kökü sırasıyla x^{pN} ve $\sqrt[q]{x^N}$ ile gösterilir. Buna göre her $x \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ için aşağıdaki işlemler geçerlidir:

$$x^{2N} = x \dot{\times} x = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x) \right\} = \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(x) \right]^2 \right\}$$

$$x^{3N} = x^{2N} \dot{\times} x = \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left\{ \alpha \left[\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x) \right] \right\} \times \alpha^{-1}(x) \right\} = \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(x) \right]^3 \right\}$$

⋮

$$x^{pN} = x^{(p-1)N} \dot{\times} x = \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(x) \right]^p \right\}$$

ve

$$\sqrt{x^N} = \alpha \left\{ \sqrt{\alpha^{-1}(x)} \right\}$$

$$\sqrt[3]{x^N} = \alpha \left\{ \sqrt[3]{\alpha^{-1}(x)} \right\}$$

⋮

$$\sqrt[q]{x^N} = \alpha \left\{ \sqrt[q]{\alpha^{-1}(x)} \right\}$$

(Grossman and Katz, 1972; Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesindeki bir t sayısının α -mutlak değeri $|t|_N$ ile gösterilir. Ve şöyle tanımlanır:

$$|t|_N = \begin{cases} t & , t \dot{>} \alpha(0) \\ \alpha(0) & , t = \alpha(0) \\ \alpha(0) \dot{-} t & , t \dot{<} \alpha(0) \end{cases} .$$

Buna göre $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesindeki her t sayısı için

$$\begin{aligned} |t|_N = \sqrt{t^{2N}} &= \alpha \left\{ \sqrt{\alpha^{-1}(t^{2N})} \right\} = \alpha \left\{ \sqrt{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(t) \right]^2 \right\} \right)} \right\} = \alpha \left\{ \sqrt{(\alpha^{-1}(t))^2} \right\} \\ &= \alpha \left\{ |\alpha^{-1}(t)| \right\} \end{aligned}$$

olur (Grossman and Katz, 1972).

Önerme 2.2.4. $a, b, c, d \in \mathbb{R}(N)_\alpha$, $p \in \mathbb{N}$ ve $b, d \neq \dot{0}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:

- 1) $\frac{a}{b} N \dot{+} \frac{c}{d} N = \frac{(a \dot{\times} d) \dot{+} (c \dot{\times} b)}{b \dot{\times} d} N$,
- 2) $\frac{a}{b} N \dot{-} \frac{c}{d} N = \frac{(a \dot{\times} d) \dot{-} (c \dot{\times} b)}{b \dot{\times} d} N$,
- 3) $\frac{a}{b} N \dot{\times} \frac{c}{d} N = \frac{(a \dot{\times} c)}{(b \dot{\times} d)} N$,
- 4) $\frac{\frac{a}{b} N}{\frac{c}{d} N} = \frac{a}{b} N \dot{\times} \frac{d}{c} N = \frac{(a \dot{\times} d)}{(b \dot{\times} c)} N$, $c \neq \dot{0}$
- 5) $\left(\frac{a}{b} N \right)^{p_N} = \frac{a^{p_N}}{b^{p_N}} N$,
- 6) $(a \dot{\times} c)^{p_N} = a^{p_N} \dot{\times} c^{p_N}$,
- 7) $a^{2N} \dot{-} c^{2N} = (a \dot{-} c) \dot{\times} (a \dot{+} c)$

(Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.2.5. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}(N)_\alpha$, $n \rightarrow f(n) = x_n$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde bir Newtonyen olmayan reel sayı dizisi veya kısaca α -dizi denir. Burada $x_n \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ dizinin genel terimidir ve kısaca dizi (x_n) biçiminde gösterilir (Alaşalvar, 2019).

Tanım 2.2.6. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olmak üzere bir (x_n) Newtonyen olmayan reel sayı dizisi verildiğinde

$$x_0 \dot{+} x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n \dot{+} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = {}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-1}(x_n) \right)$$

α -toplama Newtonyen olmayan reel sayı serisi veya α -seri denir. Burada x_n sayılarına Newtonyen olmayan serinin terimleri denir (Erdoğan M, 2016).

Örneğin $\alpha = \exp$ seçilirse, $(x_n) \in \mathbb{R}(N)_\alpha \subset \mathbb{R}^+$ olmak üzere, α -seri

$$\exp \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \exp \{ \ln(x_0) + \ln(x_1) + \dots + \ln(x_n) + \dots \} = x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_k \cdot \dots = \prod_{n=0}^{\infty} x_n$$

biçiminde sonsuz çarpıma dönüşür.

Tanım 2.2.7. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve bir $x \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ verildiğinde her $n > n_0$ için $|x_n \dot{-} x|_\alpha < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Newtonyen olmayan yakınsak dizi veya α -yakınsak dizi denir. Ayrıca x noktası (x_n) dizisinin α -limiti adını alır ve ${}^N \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = {}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \xrightarrow{N} x$ biçiminde gösterilir (Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.2.8. $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde (a, b) α -açık aralığı şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}(N)_\alpha : a \dot{<} x \dot{<} b\} = \{x \in \mathbb{R}(N)_\alpha : \alpha^{-1}(a) < \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(b)\} \\ &= \alpha \left((\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) \right) \end{aligned}$$

(Duyar ve Sağır, 2017).

Tanım 2.2.9. Bir $(r, s) \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ açık aralığı üzerinde tanımlı $g : (r, s) \rightarrow \mathbb{R}(N)_\alpha$ fonksiyonu verilsin. $x, x_0 \in (r, s)$ olmak üzere

$${}^\alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) \dot{-} g(x_0)}{x \dot{-} x_0} N$$

α -limiti varsa, g fonksiyonunun x_0 noktasında α -diferansiyellenebilir olduğu söylenir. Bu α -limit değerine g fonksiyonunun x_0 noktasındaki α -türevi denir ve $g^*_\alpha(x_0)$ ile gösterilir.

Ayrıca bu limit değeri

$$\begin{aligned}
g^*_{\alpha}(x_0) &= \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) \dot{-} g(x_0)}{x \dot{-} x_0} N = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}\{g(x)\} - \alpha^{-1}\{g(x_0)\}}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}\{g(x)\} - \alpha^{-1}\{g(x_0)\}}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha^{-1}g)(x) - (\alpha^{-1}g)(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha^{-1} \circ g)'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)} \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada g' sembolü fonksiyonun klasik türevi için kullanılmıştır (Kadak, 2015).

Tanım 2.2.10. $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ve $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ α -serileri verilsin. Genel terimi

$z_n = \alpha \sum_{i=0}^n x_i \dot{\times} y_{n-i}$ olan $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ α -serisi, $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ve $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ α -serilerinin α -cauchy

çarpımı olarak adlandırılır. Buna göre

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n \dot{\times}_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha \sum_{i=0}^n x_i \dot{\times} y_{n-i} \right) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

yazılır (Duyar ve Erdoğan, 2020).

2.3.* – Kalkülüs

Grossman ve Katz (1972) keyfi seçilmiş iki üreteç fonksiyonları yardımıyla * – kalkülüsü tanımlamışlardır. * – Kalkülüste genellikle tanım kümesi için α – aritmetik, değer kümesi için β – aritmetik kullanılır. α – aritmetik için 2.1 kısmında kullanılan tüm tanım ve özellikler bu kısımda β – aritmetik için geçerli olacaktır.

Şimdi Grossman ve Katz'ın çalışmasından yararlanarak *-kalkülüse göre bazı tanım ve kavramlar verilsin.

Tanım 2.3.1. α ve β keyfi seçilmiş üreteçler olsun ve * (yıldız) ise aritmetiklerin sıralı ikilisini (α – aritmetik, β – aritmetik) gösterecek şekilde gösterimler kullanılacaktır.

| | α -aritmetik | β -aritmetik |
|----------|---------------------|--------------------|
| Evren | A | B |
| Toplama | $\dot{+}$ | $\ddot{+}$ |
| Çıkarma | $\dot{-}$ | $\ddot{-}$ |
| Çarpma | $\dot{\times}$ | $\ddot{\times}$ |
| Bölme | $\dot{/}$ | $\ddot{/}$ |
| Sıralama | $\dot{<}$ | $\ddot{<}$ |

Fonksiyonların tanım kümesi $*$ -kalkülüse göre α -aritmetik üzerinde, değer kümesi ise β -aritmetik üzerindedir. Aşağıdaki üç özelliği sağlayan izomorfizm α -aritmetikten β -aritmetiğe giden tek bir ι (iota) fonksiyonu ile belirlidir:

1. ι birebir fonksiyondur.
2. $\iota: A \rightarrow B$ örten fonksiyondur.
3. A kümesindeki herhangi u ve v sayıları için

$$\iota(u \dot{+} v) = \iota(u) \ddot{+} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{-} v) = \iota(u) \ddot{-} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{\times} v) = \iota(u) \ddot{\times} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{/} v) = \iota(u) \ddot{/} \iota(v), v \neq \dot{0}$$

$$u \dot{<} v \Leftrightarrow \iota(u) \ddot{<} \iota(v)$$

gerçekleşir.

$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow A, \beta: \mathbb{R} \rightarrow B$ alındığına göre ι izomorfizmi her $x \in A$ için $\iota(x) = \beta\{\alpha^{-1}(x)\}$ biçimindedir ve her n tamsayısı için $\iota(\dot{n}) = \ddot{n}$ olur.

Örnek olarak $u \dot{+} v = \iota^{-1}\{\iota(u) \ddot{+} \iota(v)\}$ olduğundan α -aritmetikteki herhangi bir ifade kolaylıkla β -aritmetikteki bir ifadeye dönüştürülebilir.

Aşağıdaki gibi α ve β üreteçlerinin özel seçimlerinden $*$ -kalkülüsün dört biçimi elde edilir.

| | | |
|--------------|----------|---------|
| Kalkülüs | α | β |
| Klasik | I | I |
| Geometrik | I | exp |
| Anageometrik | exp | I |
| Bigeometrik | exp | exp |

(Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.3.2. $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ bir fonksiyon, $a \in X$ ve $b \in \mathbb{R}(N)_\beta$ olsun. Bu durumda a noktasına α -yakınsayan $X - \{a\}$ kümesindeki her x_n dizisi için $(f(x_n))$ dizisi b sayısına β -yakınsıyorsa f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki $*$ -limitinin b olduğu söylenir ve $*$ - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ yazılır (Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.3.3. Eğer $*$ - $\lim_{x \rightarrow a} \{[f(x) \dot{-} f(a)] \dot{'} [t(x) \dot{-} t(a)]\}$, $*$ -limiti varsa, f fonksiyonunun a noktasında $*$ -diferansiyellenebilir olduğu söylenir, bu $*$ -limit değerine f fonksiyonunun a noktasındaki $*$ -türevi denir ve bu türev $({}^*Df)(a)$ ile gösterilir. Eğer $({}^*Df)(a)$ varsa B kümesindedir. *D türev dönüşümü ${}^*D(f \dot{+} g) = {}^*Df \dot{+} {}^*Dg$ eşitliğini sağladığından β -toplamsallık ve $c \in B$ bir sabit sayı olmak üzere ${}^*D(c \dot{\times} f) = c \dot{\times} {}^*Df$ olduğundan β -homojenlik özelliğine sahiptir (Grossman and Katz, 1972).

Tanım 2.3.4. α ve β üreteç fonksiyonları için $t : \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olmak üzere

$${}^*\sum_{n=0}^{\infty} x_n = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} t\{x_n\} = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{\alpha^{-1}(x_n)\} = \beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}(\beta\{\alpha^{-1}(x_n)\})\right\} = \beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-1}(x_n)\right\}$$

sonsuz toplamına reel terimli yıldız seri ($*$ -seri) denir (Kadak, 2015).

Tanım 2.3.5. $a, r \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $r \neq \dot{0}$ olmak üzere

$$*\sum_{k=1}^{\infty} a \times r^{(k-1)} = \iota\{a\} \ddot{+} \iota\{a \times r\} \ddot{+} \iota\{a \times r^2\} \ddot{+} \dots \ddot{+} \iota\{a \times r^{(k-1)}\} \ddot{+} \dots$$

serisine yıldız geometrik (* – geometrik seri) seri denir (Kadak, 2015).

Tanım 2.3.6. Bir * – kuvvet serisi $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots \in \mathbb{R}(N)_{\beta}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}(N)_{\alpha}$ olmak üzere

$$*\sum_{k=0}^{\infty} a_k \times (\iota(x) \ddot{-} \iota(x_0))^{k\beta} = a_0 \ddot{+} [a_1 \times (\iota(x) \ddot{-} \iota(x_0))] \ddot{+} [a_2 \times (\iota(x) \ddot{-} \iota(x_0))^{2\beta}] \ddot{+} \dots$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $x_0 = \hat{0}$ ise * – kuvvet serisi

$$*\sum_{k=0}^{\infty} a_k \times \iota(x)^{k\beta} = a_0 \ddot{+} [a_1 \times \iota(x)] \ddot{+} [a_2 \times \iota(x)^{2\beta}] \ddot{+} \dots$$

olur (Erdoğan F, 2015).

Şimdi * – kalkülüse dair bazı kavramların klasik kalkülüs ile ilişkisi incelensin. Yani * – kalkülüste kullanılan gösterimler klasik kalkülüsteki karşılığından faydalanarak gösterilsin. Her $c \in A$ sayısı için $\bar{c} = \alpha^{-1}(c)$ olsun. Tanım kümesi A kümesinin ve değer kümesi B kümesinin alt kümesi olan bir f fonksiyonu için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\bar{f}(t) = \beta^{-1}(f(\alpha(t)))$ olsun.

1) * – $\lim_{t \rightarrow c} f(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow \bar{c}} \bar{f}(t)$ birlikte var olsun. Bu takdirde

$$*\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \beta \left(\lim_{t \rightarrow \bar{c}} \bar{f}(t) \right)$$

olur. Bu yüzden, f fonksiyonunun c noktasında * – sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul \bar{f} fonksiyonunun \bar{c} noktasında sürekli olmasıdır

2) $(^*Df)(c)$ ve $(D\bar{f})(\bar{c})$ türevleri birlikte mevcutsa

$$(^*Df)(c) = \beta \left[(D\bar{f})(\bar{c}) \right]$$

olur (Grossman and Katz, 1972).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Newtonyen Olmayan Üreteç Fonksiyonları

Klasik analizde üreteç fonksiyonu verilen bir dizinin elemanlarının katsayı olarak kullanılması ile elde edilen bir kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama olanaklarına göre çeşitli üreteç fonksiyonları vardır (Örneğin adi üreteç fonksiyonları, Bell serisi, Dirichlet serisi gibi...). Bu tezde adi üreteç fonksiyonları üzerinde durulacaktır.

Örneğin klasik analizde $a = (a_n)$ dizisi için adi üreteç fonksiyonu

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçimindedir. Şimdi Newtonyen olmayan kalkülüste üreteç fonksiyonunun tanımı verilsin.

Tanım 3.1.1. Her bir n için $a_n \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olmak üzere (a_n) bir α -dizi olsun. Katsayılar dizisi $({}_t(a_n))$ olan

$$f^*(t) = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} {}_t(a_n) \ddot{\times} t(t)^{n_\beta} \quad (3.1)$$

* – kuvvet serisine (a_n) dizisinin * – üreteç fonksiyonu ya da Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonu denir. Benzer şekilde her n için $b_n \in \mathbb{R}(N)_\beta$ olmak üzere katsayılar dizisi bir (b_n) β – dizisi olan

$$g^*(t) = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ddot{\times} t(t)^{n_\beta}$$

* – kuvvet serisi de (b_n) dizisinin * – üreteç fonksiyonu ya da Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır (Duyar ve Erdoğan, 2020).

Örnek 3.1.2. $(\dot{1})_{n=0}^{\infty} = (\dot{1}, \dot{1}, \dot{1}, \dot{1}, \dots)$ sonsuz α -dizisinin * – üreteç fonksiyonu aşağıdaki * – kuvvet serisidir:

$${}_t(\dot{1}) \ddot{+} {}_t(\dot{1}) \ddot{\times} t(t) \ddot{+} {}_t(\dot{1}) \ddot{\times} t(t)^{2_\beta} \ddot{+} {}_t(\dot{1}) \ddot{\times} t(t)^{3_\beta} \ddot{+} \dots = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} {}_t(\dot{1}) \ddot{\times} t(t)^{n_\beta} = \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \ddot{\times} t(t)} \beta.$$

Gerçekten $\iota(\ddot{\mathbb{I}}) = \ddot{\mathbb{I}}$ olmasını kullanarak

$$A^*(t) = \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t) \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{3\beta} \ddot{+} \dots$$

alınır ve eşitliğin her iki yanını $(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\div} \ddot{\iota}(t))$ ile β – çarpılırsa

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\div} \ddot{\iota}(t)) \ddot{\times} A^*(t) &= (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\div} \ddot{\iota}(t)) \ddot{\times} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t) \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{3\beta} \ddot{+} \dots) \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\div} \ddot{\iota}(t)) \times \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t) \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{3\beta} \ddot{+} \dots) \right\} \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1} (\ddot{\iota}(t)) \}) \times \beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}}) + \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)) + \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{2\beta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \ddot{\iota}(t)^{3\beta}) + \dots \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ (1 - \beta^{-1} (\beta (\alpha^{-1}(t)))) \times (1 + \beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}}) \times \beta^{-1} (\ddot{\iota}(t)) \}) + \beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}}) \times \beta^{-1} (\ddot{\iota}(t)^{2\beta}) \}) \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\mathbb{I}}) \times \beta^{-1} (\ddot{\iota}(t)^{3\beta}) \}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ (1 - \alpha^{-1}(t)) \times \left(1 + (1 \times \beta^{-1} (\beta (\alpha^{-1}(t)))) + (1 \times \beta^{-1} (\beta ([\beta^{-1} (\ddot{\iota}(t))]^2))) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 \times \beta^{-1} (\beta ([\beta^{-1} (\ddot{\iota}(t))]^3))) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ (1 - \alpha^{-1}(t)) \times \left(1 + \alpha^{-1}(t) + [\beta^{-1} (\beta (\alpha^{-1}(t)))]^2 + [\beta^{-1} (\beta (\alpha^{-1}(t)))]^3 + \dots \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ (1 - \alpha^{-1}(t)) \times (1 + \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(t)^2 + \alpha^{-1}(t)^3 + \dots) \right\} \\ &= \beta (1 - \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2 + \alpha^{-1}(t)^2 - \alpha^{-1}(t)^3 + \alpha^{-1}(t)^3 + \dots) \\ &= \beta(1) = \ddot{\mathbb{I}} \end{aligned}$$

olur, buna göre

$$(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\div} \ddot{\iota}(t)) \ddot{\times} A^*(t) = \ddot{\mathbb{I}} \Rightarrow A^*(t) = \frac{\ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\div} \ddot{\iota}(t)} \beta$$

elde edilir. Böylece

3) α -Cauchy çarpımı yardımıyla β - çarpım

$${}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \iota(a_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \ddot{\times} {}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \iota(b_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left({}_{\beta} \sum_{i=0}^k \iota(a_i) \ddot{\times} \iota(b_{k-i}) \right) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}}$$

şeklinde ifade edilir (Duyar ve Erdoğan, 2020).

İspat: 1)

$$\begin{aligned} & {}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \iota(a_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \ddot{\times} {}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \iota(b_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} = \beta \left\{ \beta^{-1} \left({}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \iota(a_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \right) + \beta^{-1} \left({}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \iota(b_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\iota(a_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right) \right) + \beta^{-1} \left(\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\iota(b_k) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right) \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1} \left(\iota(a_k) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1} \left(\iota(b_k) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\iota(a_k) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\iota(b_k) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta^{-1} \left(\iota(a_k) \right) + \beta^{-1} \left(\iota(b_k) \right) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1} \left(\iota(a_k) \right) + \beta^{-1} \left(\iota(b_k) \right) \right\} \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\iota(a_k) \ddot{\times} \iota(b_k) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1} \left(\left(\iota(a_k) \ddot{\times} \iota(b_k) \right) \right) \times \beta^{-1} \left(\iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \right) \right\} \\ & = \beta \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\left(\iota(a_k) \ddot{\times} \iota(b_k) \right) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} \right) \right\} \\ & = {}_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\iota(a_k) \ddot{\times} \iota(b_k) \right) \ddot{\times} \iota(t)^{k_{\beta}} . \end{aligned}$$

Diğer iki eşitlik benzer yolla ispatlanabilir.

Sonuç 3.1.5. Yukarıda bahsedilen işlemler ile $*$ – biçimsel kuvvet serisinin bir halka oluşturduğu kolayca görülebilir.

Önerme 3.1.6. Bir $f^*(t) = \sum_{n \geq 0} \iota(a_n) \times \iota(t)^{n\beta}$ $*$ – biçimsel kuvvet serisi β – terse (çarpımsal ters) sahiptir $\Leftrightarrow a_0 \neq \dot{0}$ dir. Ayrıca bu β – ters tektir (Duyar ve Erdoğan, 2020).

Örnek 3.1.7. $(\dot{1})$ sabit α – dizisi ve $(\ddot{1})$ sabit β – dizisinin $*$ – üreteç fonksiyonları bulunsun ve bu $*$ – üreteç fonksiyonları geometrik, anageometrik ve bigeometrik kalkülüs için incelensin.

$(\dot{1})$ sabit α – dizisinin $*$ – üreteç fonksiyonu aşağıdaki $*$ – kuvvet serisidir:

$$\iota(\dot{1}) \ddot{+} \iota(\dot{1}) \times \iota(t) \ddot{+} \iota(\dot{1}) \times \iota(t)^{2\beta} \ddot{+} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{1}) \times \iota(t)^{n\beta} .$$

Burada (3.2) eşitliğinden dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{1}) \times \iota(t)^{n\beta} = \frac{\iota(\dot{1})}{\iota(\dot{1}) \ddot{-} \iota(t)} \beta$$

olduğu biliniyor. Yine $\iota(\dot{1}) = \ddot{1}$ olduğundan $(\dot{1})$ sabit α – dizisi veya $(\ddot{1})$ sabit β – dizisinin $*$ – üreteç fonksiyonları $|\iota(t)|_{\beta} < \ddot{1}$ için aynıdır ve bu $*$ – fonksiyon

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{1}) \times \iota(t)^{n\beta} = \frac{\iota(\dot{1})}{\dot{1} \ddot{-} \iota(t)} \beta = \frac{\ddot{1}}{\dot{1} \ddot{-} \iota(t)} \beta$$

biçimindedir.

Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$, $\beta = \exp$ olduğundan $(\dot{1})$ sabit α – dizisi bilinen (1) sabit dizisidir ve bu dizi için $*$ – üreteç fonksiyonu

$$\frac{\ddot{1}}{\dot{1} \ddot{-} \iota(t)} \beta = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{\beta^{-1}(\dot{1} \ddot{-} \iota(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{\beta^{-1}(\beta \{ \beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(t)) \})} \right\}$$

$$= \beta \left\{ \frac{1}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{1-t} \right\} = e^{\frac{1}{1-t}}$$

olur. Buradan Geometrik kalkülüste (1) sabit dizisinin * – üreteç fonksiyonunun $e^{\frac{1}{1-t}}$ olduğu görülmektedir. Klasik kalkülüste (1) sabit dizisinin üreteç fonksiyonunun $\frac{1}{1-t}$ olduğu bilinmektedir.

Şimdi bu örnek anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$, $\beta = I$ olduğundan (İ) sabit α – dizisi bilinen (e) sabit dizisidir ve bu dizi için * – üreteç fonksiyonu

$$\frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \div t(t)} \beta = \beta \left\{ \frac{1}{1 - \ln t} \right\} = \frac{1}{1 - \ln t}$$

olur. Burada anageometrik kalkülüste (e) sabit dizisinin * – üreteç fonksiyonunun $\frac{1}{1 - \ln t}$ olduğu görülmektedir. Klasik kalkülüste (e) sabit dizisinin üreteç fonksiyonunun $\frac{e}{1-t}$ olduğu bilinmektedir.

Şimdi bu örnek bigeometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \beta = \exp$ olduğundan (İ) sabit α – dizisi bilinen (e) sabit dizisidir ve bu dizinin * – üreteç fonksiyonu

$$\frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \div t(t)} \beta = \beta \left\{ \frac{1}{1 - \ln t} \right\} = e^{\frac{1}{1 - \ln t}}$$

olur. Burada bigeometrik kalkülüste (e) sabit dizisinin * – üreteç fonksiyonunun $e^{\frac{1}{1 - \ln t}}$ olduğu görülür. Klasik kalkülüste (e) sabit dizisinin üreteç fonksiyonunun $\frac{e}{1-t}$ olduğu bilinmektedir.

Bu örnek aynı dizinin * – üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.8. $a, b \in \mathbb{R}(N)_\alpha$, $n \geq 0$ ve $a_n = (a \dot{\times} b^{n_\alpha})$ olmak üzere (a_n) Newtonyen olmayan geometrik dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonu bulunsun ve bu fonksiyon geometrik, anageometrik ve bigeometrik kalkülüs için incelensin.

Verilen (a_n) Newtonyen olmayan geometrik dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonu aşağıdaki $*$ - kuvvet serisidir:

$${}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a \dot{\times} b^{n_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} .$$

Bu eşitlik $A^*(t)$ ile gösterilsin ve düzenlensin:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a \dot{\times} b^{n_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} = \iota(a) \ddot{+} (\iota(a \dot{\times} b) \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{+} (\iota(a \dot{\times} b^{2_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{2_\beta}) \ddot{+} \dots \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1}(\iota(a)) + \beta^{-1}((\iota(a \dot{\times} b) \ddot{\times} \iota(t))) + \beta^{-1}((\iota(a \dot{\times} b^{2_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{2_\beta})) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(a))) + \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(a \dot{\times} b)), \beta^{-1}(\iota(t))\}) \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(a \dot{\times} b^{2_\alpha})), \beta^{-1}(\iota(t)^{2_\beta})\}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + \beta^{-1}[\beta(\alpha^{-1}(a \dot{\times} b))] \cdot \beta^{-1}[\beta(\alpha^{-1}(t))] \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-1}[\beta(\alpha^{-1}(a \dot{\times} b^{2_\alpha}))] \cdot \beta^{-1}(\iota(t)^{2_\beta}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b^{2_\alpha}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t)^{2_\beta}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b^{2_\alpha}) \cdot \beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^2)) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b^{2_\alpha}) \cdot [\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^2 + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(a \dot{\times} b^{2_\alpha}) \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha\{\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)\}) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(\alpha\{\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b^{2_\alpha})\}) \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + (\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t)) + (\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b^{2_\alpha}) \cdot \alpha^{-1}(t)^2) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + (\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t)) + \left(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1}(b)]^2 \right) \right) \right) \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) + (\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t)) + (\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)^2 \cdot \alpha^{-1}(t)^2) + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) \cdot (1 + \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(b)^2 \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + \dots) \right\} \\
&= \beta \left\{ \alpha^{-1}(a) \cdot \frac{1}{1 - \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t)} \right\} = \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(a)}{1 - \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(a)))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(b))) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(b)) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(\iota(b))) \cdot \beta^{-1}(\iota(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(b) \ddot{\times} \iota(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(b) \ddot{\times} \iota(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\ddot{1} \ddot{\div} \iota(b) \ddot{\times} \iota(t))} \right\} = \frac{\iota(a)}{\ddot{1} \ddot{\div} \iota(b) \ddot{\times} \iota(t)} \beta .
\end{aligned}$$

Buna göre

$$A^*(t) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a \dot{\times} b^{n_{\alpha}}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_{\beta}} = \frac{\iota(a)}{\ddot{1} \ddot{\div} \iota(b) \ddot{\times} \iota(t)} \beta \quad (3.3)$$

* – fonksiyonu (a_n) Newtonyen olmayan geometrik dizisi için * – üreteç fonksiyonudur.

Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$, $\beta = \exp$ olduğundan $(a_n) = (a \dot{\times} b^{n_{\alpha}})$ Newtonyen olmayan geometrik dizisi $(a_n) = (a \cdot b^n)$ dizisidir ve bu dizi için * – üreteç fonksiyonu

$$\frac{\iota(a)}{\ddot{1} \ddot{\div} \iota(b) \ddot{\times} \iota(t)} \beta = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\ddot{1} \ddot{\div} \iota(b) \ddot{\times} \iota(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(a)))}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(b) \ddot{\times} \iota(t))\})} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(a)}{1 - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(i(b)), \beta^{-1}(i(t))\})} \right\} = \beta \left\{ \frac{a}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(b))), \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{a}{1 - b.t} \right\} = e^{\frac{a}{1-b.t}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan geometrik kalkülüste (a_n) dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonunun $e^{\frac{a}{1-b.t}}$ olduğu görülmektedir. Klasik kalkülüste (a_n) dizisinin üreteç fonksiyonunun $\frac{a}{1-b.t}$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi bu örnek anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp, \beta = I$ olduğundan (a_n) dizisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
a_n &= a \times b^{n_a} = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(a) \times \alpha^{-1}(b^{n_a}) \right\} = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(a) \times \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\left[\alpha^{-1}(b) \right]^n \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(a) \times \left[\alpha^{-1}(b) \right]^n \right\} = \alpha \left\{ \ln a \times \left[\ln b \right]^n \right\} = e^{\ln a \times \left[\ln b \right]^n} = \left(e^{\ln a} \right)^{\left[\ln b \right]^n} = a^{\left[\ln b \right]^n}.
\end{aligned}$$

Bu dizinin $*$ -üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\frac{i(a)}{\ddot{I} \ddot{\div} i(b) \ddot{\times} i(t)} \beta &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(i(a))}{\beta^{-1}(\ddot{I} \ddot{\div} i(b) \ddot{\times} i(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(a)))}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{I}) - \beta^{-1}(i(b) \ddot{\times} i(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(a)}{1 - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(i(b)), \beta^{-1}(i(t))\})} \right\} = \beta \left\{ \frac{\ln a}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(b))), \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\ln a}{1 - \ln b \cdot \ln t} \right\} = \frac{\ln a}{1 - \ln b \cdot \ln t}
\end{aligned}$$

olur. Burada anageometrik kalkülüste (a_n) dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonunun $\frac{\ln a}{1 - \ln b \cdot \ln t}$ olduğu görülmektedir.

Şimdi bu örnek bigeometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \beta = \exp$ olduğundan (a_n) dizisi $\left(a^{\left[\ln b \right]^n} \right)$ dizisidir ve bu dizinin $*$ -üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\frac{\iota(a)}{\ddot{1} \dot{\iota}(b) \ddot{\iota}(t)} \beta &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(a))}{\beta^{-1}(\ddot{1} \dot{\iota}(b) \ddot{\iota}(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(a)))}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(b) \ddot{\iota}(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\ln a}{1 - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(b)) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))\})} \right\} = \beta \left\{ \frac{\ln a}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(b))) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\ln a}{1 - \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(t)} \right\} = \beta \left\{ \frac{\ln a}{1 - \ln b \cdot \ln t} \right\} = e^{\frac{\ln a}{1 - \ln b \cdot \ln t}}
\end{aligned}$$

olur. Burada bigeometrik kalkülüste (a_n) dizisi için $*$ – üreteç fonksiyonunun $e^{\frac{\ln a}{1 - \ln b \cdot \ln t}}$ olduğu görülmektedir.

Bu ise bir (a_n) α – geometrik dizisinin üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.9. Her $n \geq 0$ bir α – tamsayı ve $a_n = n + \dot{1}$ olmak üzere bir (a_n) α – pozitif tamsayı dizisinin $*$ – üreteç fonksiyonu bulunsun ve geometrik kalkülüs için incelensin.

Bu (a_n) α – pozitif tamsayı dizisinin $*$ – üreteç fonksiyonu aşağıdaki $*$ – kuvvet serisidir:

$$\iota(\dot{1}) \ddot{+} \iota(\dot{2}) \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \iota(\dot{3}) \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta} \ddot{+} \dots = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{n} + \dot{1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta}$$

Bu toplam $A^*(t)$ ile gösterilsin. Bu $A^*(t)$ $*$ – fonksiyonunun (3.2) serisinin $*$ – türevi olduğu görülmektedir. D sembolü $\alpha^{-1}(t)$ değişkenine göre türevi göstermek üzere

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \iota(\dot{1}) \ddot{+} \iota(\dot{2}) \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \iota(\dot{3}) \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta} \ddot{+} \dots \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1}(\iota(\dot{1})) + \beta^{-1}(\iota(\dot{2}) \ddot{\times} \iota(t)) + \beta^{-1}(\iota(\dot{3}) \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta}) + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{1}) + \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(\dot{2})) \times \beta^{-1}(\iota(t))\}) + \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(\dot{3})) \times \beta^{-1}(\iota(t)^{2\beta})\}) + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ 1 + \beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}[\beta(\alpha^{-1}(t))] + \beta^{-1}(\ddot{3}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t)^{2\beta}) + \dots \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ 1 + 2.\alpha^{-1}(t) + 3.\beta^{-1}(i(t)^{2\beta}) + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ 1 + 2.\alpha^{-1}(t) + 3.\beta^{-1} \left(\beta \left([\beta^{-1}(i(t))]^2 \right) \right) + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ 1 + 2.\alpha^{-1}(t) + 3. \left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right]^2 + \dots \right\} = \beta \left\{ 1 + 2.\alpha^{-1}(t) + 3.\alpha^{-1}(t)^2 + \dots \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(1 + \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(t)^2 + \alpha^{-1}(t)^3 + \dots \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\beta(1)) + \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) + \left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right]^2 + \left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right]^3 + \dots \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}(i(t)) + \left[\beta^{-1}(i(t)) \right]^2 + \left[\beta^{-1}(i(t)) \right]^3 + \dots \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}(i(t)) + \beta^{-1} \left(\beta \left([\beta^{-1}(i(t))]^2 \right) \right) + \beta^{-1} \left(\beta \left([\beta^{-1}(i(t))]^3 \right) \right) + \dots \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}(i(t)) + \beta^{-1}(i(t)^{2\beta}) + \beta^{-1}(i(t)^{3\beta}) + \dots \right\} \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1} \left(\ddot{i} + i(t) + i(t)^{2\beta} + i(t)^{3\beta} + \dots \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1} \left(\frac{\ddot{i}}{\ddot{i} + i(t)} \beta \right) \right) \right\} = {}^*D \left(\frac{\ddot{i}}{\ddot{i} + i(t)} \beta \right) = {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\beta^{-1}(\ddot{i} + i(t))} \right\} \right) \\
&= {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{1}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(i(t))\})} \right\} \right) = {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{1}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \right) \\
&= {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{1}{1 - \alpha^{-1}(t)} \right\} \right) = \beta \left[D \left(\beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{1 - \alpha^{-1}(t)} \right) \right) \right) \right] = \beta \left(D \left(\frac{1}{1 - \alpha^{-1}(t)} \right) \right) \\
&= \beta \left(\frac{1}{(1 - \alpha^{-1}(t))^2} \right) = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(1))}{\left(\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right)^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\left(\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(i(t)) \right)^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\left(\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(i(t)) \right\} \right) \right)^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\left(\beta^{-1}(\ddot{i} \div i(t)) \right)^2} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\ddot{i} \div i(t)) \right]^2 \right) \right)} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\beta^{-1} \left((\ddot{i} \div i(t))^{2\beta} \right)} \right\} = \frac{\ddot{i}}{(\ddot{i} \div i(t))^{2\beta}} \beta
\end{aligned}$$

olur ve

$$\ddot{i} \div 2 \times i(t) \div 3 \times i(t)^{2\beta} \div 4 \times i(t)^{3\beta} \div \dots = \sum_{n=0}^{\infty} i(\dot{n} \div \dot{i}) \times i(t)^{n\beta} = \frac{\ddot{i}}{(\ddot{i} \div i(t))^{2\beta}} \beta \quad (3.4)$$

*- fonksiyonu (a_n) α -pozitif tamsayı dizisi için *- üreteç fonksiyonudur.

Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olduğundan $(\dot{n} \div \dot{i})$ α -pozitif tamsayı dizisi $(n+1)$ dizisidir ve bu dizi için *- üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{i}}{(\ddot{i} \div i(t))^{2\beta}} \beta &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i})}{\beta^{-1} \left((\ddot{i} \div i(t))^{2\beta} \right)} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{\beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\ddot{i} \div i(t)) \right]^2 \right) \right)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{1}{\left[\beta^{-1}(\ddot{i} \div i(t)) \right]^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{\left[\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(i(t)) \right\} \right) \right]^2} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{1}{\left[1 - \beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(t)) \right) \right]^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{\left[1 - \alpha^{-1}(t) \right]^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{(1-t)^2} \right\} = e^{\frac{1}{(1-t)^2}}
\end{aligned}$$

olur. Burada geometrik kalkülüste $(n+1)_{n \geq 0}$ dizisi için *- üreteç fonksiyonunun

$e^{\frac{1}{(1-t)^2}}$ olduğu görüldü. Klasik kalkülüste aynı dizinin *- üreteç fonksiyonunun $\frac{1}{(1-t)^2}$ olduğu biliniyor.

Bu ise aynı dizinin *- üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüs için değişebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.10. Her $n \geq 0$ bir tamsayı ve $a_n = (n + \dot{1})^{2\alpha}$ olmak üzere (a_n) α -pozitif tamsayıların kareleri dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonu bulunsun ve bu fonksiyon geometrik kalkülüs için incelensin.

Bu (a_n) α -pozitif tamsayıların kareleri dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonu aşağıdaki $*$ -kuvvet serisidir:

$$t(\dot{1}) \ddot{+} t(\dot{2}^{2\alpha}) \ddot{\times} t(t) \ddot{+} t(\dot{3}^{2\alpha}) \ddot{\times} t(t)^{2\beta} \ddot{+} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t \left((n + \dot{1})^{2\alpha} \right) \ddot{\times} t(t)^{n\beta} .$$

Bu seri $A^*(t)$ ile gösterilsin. Eğer (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} A^*(t) &= t(\dot{1}) \ddot{+} t(\dot{2}^{2\alpha}) \ddot{\times} t(t) \ddot{+} t(\dot{3}^{2\alpha}) \ddot{\times} t(t)^{2\beta} \ddot{+} \dots \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1}(t(\dot{1})) + \beta^{-1}(t(\dot{2}^{2\alpha}) \ddot{\times} t(t)) + \beta^{-1}(t(\dot{3}^{2\alpha}) \ddot{\times} t(t)^{2\beta}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(t(\dot{2}^{2\alpha})) \cdot \beta^{-1}(t(t)) \right\} \right) + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(t(\dot{3}^{2\alpha})) \cdot \beta^{-1}(t(t)^{2\beta}) \right\} \right) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 + \beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(\dot{2}^{2\alpha})) \right) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) + \beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(\dot{3}^{2\alpha})) \right) \cdot \beta^{-1}(t(t)^{2\beta}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 + \alpha^{-1}(\dot{2}^{2\alpha}) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(\dot{3}^{2\alpha}) \cdot \beta^{-1}(t(t)^{2\beta}) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 + \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1}(\dot{2})]^2 \right) \right) \cdot \alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1}(\dot{3})]^2 \right) \right) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left([\beta^{-1}(t(t))]^2 \right) \right) + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 + 2^2 \cdot \alpha^{-1}(t) + 3^2 \cdot [\beta^{-1}(t(t))]^2 + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 + 2^2 \cdot \alpha^{-1}(t) + 3^2 \cdot [\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^2 + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 + 2^2 \cdot \alpha^{-1}(t) + 3^2 \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + \dots \right\} \\ &= \beta \left\{ D \left(\alpha^{-1}(t) + 2 \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + 3 \cdot \alpha^{-1}(t)^3 + \dots \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ D \left(\alpha^{-1}(t) \cdot (1 + 2 \cdot \alpha^{-1}(t) + 3 \cdot \alpha^{-1}(t)^2 + \dots) \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \cdot \left(\beta^{-1}(\beta(1)) + \beta^{-1}(\beta(2 \cdot \alpha^{-1}(t))) + \beta^{-1}(\beta(3 \cdot \alpha^{-1}(t)^2)) + \dots \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \left(\beta^{-1}(\ddot{\iota}) + \beta^{-1} \left(\beta \left(\beta^{-1}(\beta(2)) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right) \right) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta^{-1} \left(\beta \left(\beta^{-1}(\beta(3)) \cdot \left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right]^2 \right) \right) + \dots \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \left(\beta^{-1}(\ddot{\iota}) + \beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t)) + \beta^{-1}(\ddot{3}) \cdot \left[\beta^{-1}(\iota(t)) \right]^2 + \dots \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \left(\beta^{-1}(\ddot{\iota}) + \beta^{-1} \left(\beta \left(\beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t)) \right) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta^{-1} \left(\beta \left(\beta^{-1}(\ddot{3}) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\iota(t)) \right]^2 \right) \right) \right) \right) + \dots \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \left(\beta^{-1}(\ddot{\iota}) + \beta^{-1}(\ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) + \beta^{-1} \left(\beta \left(\beta^{-1}(\ddot{3}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t)^{2\beta}) \right) \right) + \dots \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{\iota}) + \beta^{-1}(\ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) + \beta^{-1}(\ddot{3} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta}) + \dots \right\} \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \beta^{-1} \left(\ddot{\iota} + \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t) + \ddot{3} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta} + \dots \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\iota(t)) \cdot \beta^{-1} \left(\ddot{\iota} + \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t) + \ddot{3} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta} + \dots \right) \right\} \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ D \left(\beta^{-1}(\iota(t)) \ddot{\times} \left(\ddot{\iota} + \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t) + \ddot{3} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta} + \dots \right) \right) \right\} \\
&= {}^*D \left(\iota(t) \ddot{\times} \frac{\ddot{\iota}}{\left(\ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \right)^{2\beta}} \beta \right) = {}^*D \left(\frac{\iota(t)}{\left(\ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \right)^{2\beta}} \beta \right) = {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(t))}{\beta^{-1} \left(\left(\ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \right)^{2\beta} \right)} \right\} \right) \\
&= {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{\beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t)) \right]^2 \right) \right)} \right\} \right) = {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{\left[\beta^{-1} \left(\beta \left(\beta^{-1}(\ddot{\iota}) - \beta^{-1}(\iota(t)) \right) \right) \right]^2} \right\} \right) \\
&= {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{\left[1 - \beta^{-1} \left(\beta \left(\alpha^{-1}(t) \right) \right) \right]^2} \right\} \right) = {}^*D \left(\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{\left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left(D \left(\beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} \right) \right) \right) \right) = \beta \left(D \left(\frac{\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} \right) \right) = \beta \left(\frac{1+\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^3} \right) \\
&= \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\beta(1)) + \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))}{(\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))))^3} \right) = \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}(\iota(t))}{(\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(\iota(t)))^3} \right) \\
&= \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}(\iota(t))\})}{(\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(\iota(t))\}))^3} \right) = \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))}{(\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t)))^3} \right) \\
&= \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))}{\beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))]^3))} \right) = \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))}{\beta^{-1}((\ddot{i} \ddot{\iota}(t))^{3_\beta})} \right) = \frac{\ddot{i} \ddot{\iota}(t)}{(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))^{3_\beta}} \beta
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\iota(\dot{i}) \ddot{\iota} \iota(\dot{2}^\alpha) \ddot{\iota} \iota(t) \ddot{\iota} \iota(\dot{3}^{2\alpha}) \ddot{\iota} \iota(t)^{2_\beta} \ddot{\iota} \dots &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota((\dot{n} + \dot{i})^{2_\alpha}) \ddot{\iota} \iota(t)^{n_\beta} \\
&= \frac{\ddot{i} \ddot{\iota}(t)}{(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))^{3_\beta}} \beta
\end{aligned}$$

(3.5)

* – fonksiyonu α – pozitif tamsayıların kareleri dizisinin * – üreteç fonksiyonudur.

Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelenir. Bu durumda $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olduğundan $(\dot{n} + \dot{i})^{2_\alpha}$ α – pozitif tamsayıların kareleri dizisi bilinen $(n+1)^2$ dizisidir ve bu dizi için * – üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{i} \ddot{\iota}(t)}{(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))^{3_\beta}} \beta &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))}{\beta^{-1}((\ddot{i} \ddot{\iota}(t))^{3_\beta})} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}(\iota(t))\})}{\beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\ddot{i} \ddot{\iota}(t))]^3))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{1 + \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))}{[\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(\iota(t))\})]^3} \right\} = \beta \left\{ \frac{1 + \alpha^{-1}(t)}{[1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^3} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \beta \left\{ \frac{1+t}{(1-\alpha^{-1}(t))^3} \right\} = \beta \left\{ \frac{1+t}{(1-t)^3} \right\} = e^{\frac{1+t}{(1-t)^3}}$$

olur. Buna göre geometrik kalkülüste $(n+1)_{n \geq 0}^2$ dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonunun $e^{\frac{1+t}{(1-t)^3}}$ olduğu görülmektedir. Klasik kalkülüste aynı dizinin $*$ -üreteç fonksiyonunun $\frac{1+t}{(1-t)^3}$ olduğu biliniyor.

Bu ise aynı dizinin $*$ -üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüs için farklı olabileceği anlamına gelmektedir.

2001 yılında Thomas Koshy, 'Fibonacci and Lucas number with applications' isimli kitabında klasik kalkülüs için verilen Binom katsayıları tanımı ve Pascal özdeşliği ifadesi Newtonyen olmayan kalkülüs için incelenmiştir.

Tanım 3.1.11. \dot{n} ve \dot{r} birer negatif olmayan α -tamsayı olsun. Bu durumda \dot{n} sayısının α -faktöriyeli

$$\dot{n}! = \dot{n} \times \binom{\dot{n}}{\dot{n}-1} \times \dots \times \dot{2} \times \dot{1}$$

ve $\binom{\dot{n}}{\dot{r}}$ Newtonyen olmayan binom katsayısı

$$\binom{\dot{n}}{\dot{r}} = \begin{cases} \frac{\dot{n}!}{\dot{r} \times \binom{\dot{n}}{\dot{n}-\dot{r}}} \alpha & , \quad \dot{0} \leq \dot{r} \leq \dot{n} \\ \dot{0} & , \quad \dot{r} > \dot{n} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Önerme 3.1.12 $r \leq n$, n ve r pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\alpha \left(\binom{n}{r} \right) = \binom{\dot{n}}{\dot{r}} .$$

$$\text{İspat: } \alpha \left(\binom{n}{r} \right) = \alpha \left(\frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \right) = \alpha \left(\frac{n \cdot (n-1) \dots 1}{(r \cdot (r-1) \dots 1) \cdot ((n-r) \cdot (n-r-1) \dots 1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\alpha(n)) \alpha^{-1}(\alpha(n-1)) \dots \alpha^{-1}(\alpha(1))}{(\alpha^{-1}(\alpha(r)) \alpha^{-1}(\alpha(r-1)) \dots \alpha^{-1}(\alpha(1))) (\alpha^{-1}(\alpha(n-r)) \alpha^{-1}(\alpha(n-r-1)) \dots \alpha^{-1}(\alpha(1)))} \right) \\
&= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\dot{n}) \alpha^{-1} \binom{\dot{n}-1}{\dot{r}} \dots \alpha^{-1}(\dot{1})}{\left(\alpha^{-1}(\dot{r}) \alpha^{-1} \binom{\dot{r}-1}{\dot{1}} \dots \alpha^{-1}(\dot{1}) \right) \left(\alpha^{-1} \binom{\dot{n}-r}{\dot{1}} \alpha^{-1} \binom{\dot{n}-r-1}{\dot{1}} \dots \alpha^{-1}(\dot{1}) \right)} \right) \\
&= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{n}) \alpha^{-1} \binom{\dot{n}-1}{\dot{r}} \dots \alpha^{-1}(\dot{1}) \right\} \right)}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{r}) \alpha^{-1} \binom{\dot{r}-1}{\dot{1}} \dots \alpha^{-1}(\dot{1}) \right\} \right) \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} \binom{\dot{n}-r}{\dot{1}} \alpha^{-1} \binom{\dot{n}-r-1}{\dot{1}} \dots \alpha^{-1}(\dot{1}) \right\} \right)} \right) \\
&= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1} \left(\dot{n} \dot{\times} \binom{\dot{n}-1}{\dot{r}} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{1} \right)}{\alpha^{-1} \left(\dot{r} \dot{\times} \binom{\dot{r}-1}{\dot{1}} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{1} \right) \alpha^{-1} \left(\binom{\dot{n}-r}{\dot{1}} \dot{\times} \binom{\dot{n}-r-1}{\dot{1}} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{1} \right)} \right) \\
&= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1} \left(\dot{n} \dot{\times} \binom{\dot{n}-1}{\dot{r}} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{1} \right)}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\dot{r} \dot{\times} \binom{\dot{r}-1}{\dot{1}} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{1} \right) \alpha^{-1} \left(\binom{\dot{n}-r}{\dot{1}} \dot{\times} \binom{\dot{n}-r-1}{\dot{1}} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{1} \right) \right\} \right)} \right) \\
&= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\dot{n}!)}{\alpha^{-1} \left(\dot{r} \dot{\times} \binom{\dot{n}-r}{\dot{1}} \right)} \right) = \frac{\dot{n}!}{\dot{r} \dot{\times} \binom{\dot{n}-r}{\dot{1}}} \alpha = \binom{\dot{n}}{\dot{r}}
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.13 (Pascal Özdeşliği) \dot{n} ve \dot{r} pozitif α -tamsayılar ve $\dot{1} \leq \dot{r} \leq \dot{n}$ olmak üzere

$$\binom{\dot{n}}{\dot{r}} = \binom{\dot{n}-1}{\dot{r}-1} + \binom{\dot{n}-1}{\dot{r}}$$

olur. Bu eşitlik Pascal özdeşliği olarak adlandırılır.

İspat: Eğer tanım 3.1.11 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\binom{\dot{n}}{\dot{r}} &= \frac{\dot{n}!}{\dot{r}! \times \binom{\dot{n}}{n-r}!} \alpha = \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{n}!)}{\alpha^{-1}(\dot{r}! \times \binom{\dot{n}}{n-r}!)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{n}) \times \alpha^{-1} \binom{\dot{n}}{n-1} \times \dots \times \alpha^{-1}(\dot{i}) \right\} \right)}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{r}!) \cdot \alpha^{-1} \left(\binom{\dot{n}}{n-r} \right) \right\} \right)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{r}) \times \alpha^{-1} \binom{\dot{n}}{r-1} \times \dots \times \alpha^{-1}(\dot{i}) \right\} \right) \cdot \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} \binom{\dot{n}}{n-r} \times \alpha^{-1} \binom{\dot{n}}{n-r-1} \times \dots \times \alpha^{-1}(\dot{i}) \right\} \right)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{n!}{(r \times (r-1) \times \dots \times 1) \cdot ((n-r) \times (n-r-1) \times \dots \times 1)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \right\} = \alpha \left\{ \frac{n \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} \right\} = \alpha \left\{ \frac{(n-r+r) \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{r \cdot (n-1)! + (n-r) \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{r \cdot (n-1)!}{r \cdot (r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-r) \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r) \cdot (n-r-1)!} \right\} = \alpha \left\{ \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-r-1)!} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-1-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-1-r)!} \right\} = \alpha \left\{ \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left\{ \alpha \left(\binom{n-1}{r-1} \right) \right\} + \alpha^{-1} \left\{ \alpha \left(\binom{n-1}{r} \right) \right\} \right\} = \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\binom{n-1}{r-1} \right) + \alpha^{-1} \left(\binom{n-1}{r} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \binom{\cdot}{n-1} \dot{+} \binom{\cdot}{r-1}$$

bulunur.

Örnek 3.1.14. Sonlu $S_n = \left\{ \binom{\cdot}{\dot{0}}, \binom{\cdot}{\dot{1}}, \binom{\cdot}{\dot{2}}, \dots, \binom{\cdot}{\dot{n}} \right\}$ α -dizisinin $*$ -üreteç

fonksiyonu $t \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olmak üzere aşağıdaki sonlu β -toplamdır:

$$\begin{aligned} \iota \binom{\cdot}{\dot{0}} \dot{+} \iota \binom{\cdot}{\dot{1}} \ddot{\times} \iota(t) \dot{+} \iota \binom{\cdot}{\dot{2}} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta} \dot{+} \dots \dot{+} \iota \binom{\cdot}{\dot{n}} \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} &= \sum_{r=0}^n \iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} \\ &= (\dot{\mathbf{1}} \dot{+} \iota(t))^{n\beta}. \end{aligned}$$

Eğer \dot{n} ve \dot{r} pozitif α -tamsayılar, $\dot{1} \leq \dot{r} \leq \dot{n}$ olmak üzere

$$\binom{\cdot}{\dot{r}} = \binom{\cdot}{n-1} \dot{+} \binom{\cdot}{r-1}$$

Pascal özdeşliği kullanılırsa, bu eşitliğin her iki yanının ι (iota) fonksiyonu altındaki görüntüsü alındığında

$$\iota \binom{\cdot}{\dot{r}} = \iota \left(\binom{\cdot}{n-1} \dot{+} \binom{\cdot}{r-1} \right) = \iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \dot{+} \iota \binom{\cdot}{\dot{r}}$$

bulunur. Şimdi bu eşitliğin her iki yanını $\iota(t)^{r\beta}$ ile β -çarpılsın ve her $r \geq 1$ için β -toplansın:

$$\begin{aligned} \iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} &= \left[\iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \dot{+} \iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \right] \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} \\ \sum_{r \geq 1} \iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} &= \sum_{r \geq 1} \left[\iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \dot{+} \iota \binom{\cdot}{\dot{r}} \right] \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} \end{aligned}$$

$$\beta \sum_{r \geq 1} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} = \beta \sum_{r \geq 1} \iota \left(\begin{pmatrix} n-1 \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} \ddot{+} \beta \sum_{r \geq 1} \iota \left(\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} .$$

Verilen (S_n) α -dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu

$$C_n^*(t) = \beta \sum_{r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta}$$

biçiminde tanımlansın. Bu tanım kullanılarak yukarıdaki son eşitlik düzenlensin:

$$\begin{aligned} C_n^*(t) \ddot{-} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{0} \end{pmatrix} \right) &= C_{n-1}^*(t) \ddot{-} \iota \left(\begin{pmatrix} n-1 \\ \dot{0} \end{pmatrix} \right) \ddot{+} \iota(t) \ddot{\times} C_{n-1}^*(t) \\ C_n^*(t) \ddot{-} \ddot{1} &= C_{n-1}^*(t) \ddot{-} \ddot{1} \ddot{+} \iota(t) \ddot{\times} C_{n-1}^*(t) \\ C_n^*(t) &= (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} C_{n-1}^*(t). \end{aligned}$$

Şimdi iki değişkenli $*$ - kuvvet serisi biçiminde düzenlenen

$$C^*(t, s) = \beta \sum_{n, r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(s)^{n\beta} \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta}$$

ele alınsın. Burada $\iota(s)^{n\beta}$ ifadesinin katsayısının $C_n^*(t)$ $*$ - üreteç fonksiyonu olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} C^*(t, s) &= \beta \sum_{n \geq 0} \beta \sum_{r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(s)^{n\beta} \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} = \beta \sum_{n \geq 0} C_n^*(t) \ddot{\times} \iota(s)^{n\beta} = \ddot{1} \ddot{+} \beta \sum_{n \geq 1} C_n^*(t) \ddot{\times} \iota(s)^{n\beta} \\ &= \ddot{1} \ddot{+} \beta \sum_{n \geq 1} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} C_{n-1}^*(t) \ddot{\times} \iota(s)^{(n-1)\beta} \ddot{\times} \iota(s) = \ddot{1} \ddot{+} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} \iota(s) \ddot{\times} \beta \sum_{n \geq 1} C_{n-1}^*(t) \ddot{\times} \iota(s)^{(n-1)\beta} \\ &= \ddot{1} \ddot{+} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} \iota(s) \ddot{\times} \sum_{n \geq 1} \left(\beta \sum_{r=0}^{n-1} \iota \left(\begin{pmatrix} n-1 \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} \right) \ddot{\times} \iota(s)^{(n-1)\beta} \\ &= \ddot{1} \ddot{+} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} \iota(s) \ddot{\times} \beta \sum_{n \geq 0} \beta \sum_{r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{r\beta} \ddot{\times} \iota(s)^{n\beta} = \ddot{1} \ddot{+} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} \iota(s) \ddot{\times} C^*(t, s) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$C^*(t, s) = \ddot{1} \ddot{+} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} \iota(s) \ddot{\times} C^*(t, s) \Rightarrow C^*(t, s) = \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \ddot{-} (\ddot{1} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\times} \iota(s)} \beta$$

yazılır. Yani

$$C^*(t, s) = \sum_{n, r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\iota}(s)^{n_\beta} \ddot{\iota}(t)^{r_\beta} = \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{+} (\ddot{\iota} \ddot{+} \iota(t)) \ddot{\iota}(s)} \beta \quad (3.6)$$

olur. Eğer (3.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} C^*(t, s) &= \sum_{n, r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\iota}(s)^{n_\beta} \ddot{\iota}(t)^{r_\beta} = \sum_{n \geq 0} (\ddot{\iota} \ddot{+} \iota(t))^{n_\beta} \ddot{\iota}(s)^{n_\beta} \\ &\beta \sum_{n \geq 0} \sum_{r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\iota}(t)^{r_\beta} \ddot{\iota}(s)^{n_\beta} = \sum_{n \geq 0} (\ddot{\iota} \ddot{+} \iota(t))^{n_\beta} \ddot{\iota}(s)^{n_\beta} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece *– kuvvet serilerinin eşitliği tanımı kullanılarak \dot{r} ve \dot{n} tamsayı $\dot{0} \leq \dot{r} \leq \dot{n}$ olmak üzere

$$C_n^*(t) = \sum_{r \geq 0} \iota \left(\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) \ddot{\iota}(t)^{r_\beta} = (\ddot{\iota} \ddot{+} \iota(t))^{n_\beta}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.15. $a_0 = \dot{0}$ olmak üzere her $n \geq 0$ için $a_{n+1} = (\dot{2} \dot{\times} a_n) \dot{+} \dot{1}$ tekrarlama bağıntısı ile verilen bir (a_n) α -dizisinin *– üreteç fonksiyonu ve genel terimi araştırılsın.

Önce bu dizinin *– üreteç fonksiyonu bulunsun. Bunun için tekrarlama bağıntısının her iki yanının ι (iota) fonksiyonu altındaki görüntüsü alınsın:

$$\iota(a_{n+1}) = \iota((\dot{2} \dot{\times} a_n) \dot{+} \dot{1}) = \iota(\dot{2} \dot{\times} a_n) \dot{+} \iota(\dot{1}) = \iota(\dot{2}) \ddot{\times} \iota(a_n) \dot{+} \iota(\dot{1}) = \ddot{2} \ddot{\times} \iota(a_n) \dot{+} \dot{1}.$$

Bu eşitliğin her iki yanını $\iota(t)^{n_\beta}$ ile β – çarpılsın ve her $n \geq 0$ için β – toplansın:

$$\begin{aligned} \iota(a_{n+1}) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta} &= (\ddot{2} \ddot{\times} \iota(a_n) \dot{+} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta} \\ \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+1}) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta} &= \beta \sum_{n \geq 0} (\ddot{2} \ddot{\times} \iota(a_n) \dot{+} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta} \\ \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+1}) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta} &= \ddot{2} \ddot{\times} \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_n) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta} \dot{+} \beta \sum_{n \geq 0} \dot{1} \ddot{\iota}(t)^{n_\beta}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Şimdi (a_n) α -dizi için *– üreteç fonksiyonu

$$A^*(t) = \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_n) \ddot{\iota}(t)^{n_\beta}$$

olsun. O halde (3.7) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk β – toplam $A^*(t)$, (3.2) eşitliğine göre ikinci β – toplam $\frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \div \iota(t)} \beta$ olur. Bu ifadeler (3.7) eşitliğinde yerine yazılınsın:

$$\sum_{n \geq 0} \beta \iota(a_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \ddot{2} \ddot{\times} A^*(t) \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \div \iota(t)^{n\beta}} \beta.$$

Bu eşitliğin sol yanını $A^*(t)$ * – üreteç fonksiyonuna benzetmek için her iki yan $\iota(t)$ ile β – çarpılınsın:

$$\sum_{n \geq 0} \beta \iota(a_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{(n+1)\beta} = \ddot{2} \ddot{\times} A^*(t) \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \frac{\iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t)} \beta. \quad (3.8)$$

Burada sol yandaki β – toplamın $A^*(t)$ * – üreteç fonksiyonundan tek farkı $\iota(a_0)$ teriminin olmamasıdır. Bu durumda $a_0 = \dot{0}$ ve $\iota(\dot{0}) = \ddot{0}$ olmasından (3.8) eşitliğinin sol yanı

$$A^*(t) \div \iota(a_0) = A^*(t) \div \iota(\dot{0}) = A^*(t) \div \ddot{0} = A^*(t)$$

olur. Bu ifade (3.8) eşitliğinde yerine yazılınsın ve düzenlensin:

$$A^*(t) = \ddot{2} \ddot{\times} A^*(t) \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \frac{\iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t)} \beta$$

$$A^*(t) \div \ddot{2} \ddot{\times} A^*(t) \ddot{\times} \iota(t) = \frac{\iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t)} \beta$$

$$A^*(t) \ddot{\times} (\ddot{1} \div \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) = \frac{\iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t)} \beta$$

$$A^*(t) = \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \div \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{1} \div \iota(t))} \beta$$

Şimdi (a_n) α – dizisinin genel terimini bulmak için $A^*(t)$ * – üreteç fonksiyonu düzenlensin:

$$A^*(t) = \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \div \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{1} \div \iota(t))} \beta = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(t))}{\beta^{-1}((\ddot{1} \div \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{1} \div \iota(t)))} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i} - \ddot{2}\ddot{x}_i(t))\} \cdot \beta^{-1}(\ddot{i} - i(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(\ddot{2}\ddot{x}_i(t))\}) \cdot \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(i(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{2})\} \cdot \beta^{-1}(i(t)))) \cdot (1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - 2\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))) \cdot (1 - \alpha^{-1}(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - 2\alpha^{-1}(t)) \cdot (1 - \alpha^{-1}(t))} \right\}.
\end{aligned}$$

Buradan

$$A^*(t) = \frac{i(t)}{(\ddot{i} - \ddot{2}\ddot{x}_i(t))\ddot{x}(\ddot{i} - i(t))} \beta = \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - 2\alpha^{-1}(t)) \cdot (1 - \alpha^{-1}(t))} \right\} \quad (3.9)$$

yazılır.

Şimdi bu eşitliğin sağ yanı $\alpha^{-1}(t)$ değişkenine göre basit kesirlerine ayrılırsa

$$\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - 2\alpha^{-1}(t)) \cdot (1 - \alpha^{-1}(t))} \right\} = \beta \left\{ \frac{m}{1 - 2\alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1 - \alpha^{-1}(t)} \right\}$$

yazılır ve β birebir fonksiyon olduğundan

$$\frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - 2\alpha^{-1}(t)) \cdot (1 - \alpha^{-1}(t))} = \frac{m}{1 - 2\alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1 - \alpha^{-1}(t)} \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada payda eşitlenmesi yapılarak paylar eşitliğinde

$$\alpha^{-1}(t) = m \cdot (1 - \alpha^{-1}(t)) + n \cdot (1 - 2\alpha^{-1}(t)) \Rightarrow m = 1 \text{ ve } n = -1$$

bulunur. Bu değerler (3.10) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - 2\alpha^{-1}(t)) \cdot (1 - \alpha^{-1}(t))} = \frac{1}{1 - 2\alpha^{-1}(t)} + \frac{-1}{1 - \alpha^{-1}(t)}$$

olur. Bu ifade de (3.9) eşitliğinde yerine yazılsın ve düzenlensin:

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \frac{\iota(t)}{(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t))} \beta = \beta \left\{ \frac{1}{1-2.\alpha^{-1}(t)} + \frac{-1}{1-\alpha^{-1}(t)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(1))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(2)) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} + \frac{\beta^{-1}(\beta(-1))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1}(\iota(t))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))\})} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1}(\iota(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1}(\ddot{2} \ddot{\times} \iota(t))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}}) - \beta^{-1}(\ddot{2} \ddot{\times} \iota(t))\})} + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t))} \right\} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t))} + \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t))} \right\} \right) + \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) + \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) \right\} = \frac{\ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta .
\end{aligned}$$

Buradan

$$A^*(t) = \frac{\iota(t)}{(\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t))} \beta = \frac{\ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{\times} \ddot{\mathbb{I}}}{\ddot{\mathbb{I}} \ddot{\times} \iota(t)} \beta$$

yazılır.

Bu durumda sırasıyla (3.3) ve (3.2) eşitliklerine göre $A^*(t)$ $*$ -üreteç fonksiyonu $*$ - kuvvet serisine genişletilsin:

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{\iota} \times (\ddot{2} \times \iota(t))^{n\beta} \doteq \beta \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{\iota} \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{\iota} \times \ddot{2}^{n\beta} \times \iota(t)^{n\beta} \doteq \beta \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{\iota} \times \iota(t)^{n\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{2}^{n\beta} \times \iota(t)^{n\beta} \doteq \beta \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{\iota} \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\ddot{2}^{n\beta} \doteq \ddot{\iota}) \times \iota(t)^{n\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\beta \left\{ \left[\beta^{-1}(\ddot{2}) \right]^n \right\} \doteq \iota(\dot{\mathbf{i}}) \right) \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\beta(2^n) \doteq \iota(\dot{\mathbf{i}})) \times \iota(t)^{n\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\beta(\alpha^{-1}(\alpha(2^n))) \doteq \iota(\dot{\mathbf{i}}) \right] \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\iota(\alpha(2^n)) \doteq \iota(\dot{\mathbf{i}}) \right] \times \iota(t)^{n\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\iota(\alpha([\alpha^{-1}(\dot{2})]^n)) \doteq \iota(\dot{\mathbf{i}}) \right] \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\iota(\dot{2}^{n\alpha}) \doteq \iota(\dot{\mathbf{i}}) \right] \times \iota(t)^{n\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{2}^{n\alpha} \doteq \dot{\mathbf{i}}) \times \iota(t)^{n\beta}.
\end{aligned}$$

O halde verilen (a_n) α -dizisinin genel terimi $a_n = \dot{2}^{n\alpha} \doteq \dot{\mathbf{i}}$ olur. Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$, $\beta = \exp$ olduğundan $a_n = \dot{2}^{n\alpha} \doteq \dot{\mathbf{i}}$ α -dizisi $a_n = 2^n - 1$ biçimindedir. Bu dizi için $*$ -üreteç fonksiyonu şöyledir:

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(2^n - 1) \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(2^n - 1)) \times \beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^n - 1) \times \beta([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^n - 1) \times \beta(t^n) \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1}(\beta(2^n - 1)) \times \beta^{-1}(\beta(t^n)) \right\} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ (2^n - 1) \times t^n \right\} \\
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}(\beta \left\{ (2^n - 1) \times t^n \right\}) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \times t^n \right\} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \times t^n} \\
&= e^{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^n} = e^{\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1-t}}.
\end{aligned}$$

Şimdi bu örnek anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$, $\beta = I$ olduğundan (a_n) dizisi şöyledir:

$$a_n = \dot{2}^{n\alpha} \div \dot{1} = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{2}^{n\alpha}) - \alpha^{-1}(\dot{1}) \right\} = \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left[\alpha^{-1}(\dot{2}) \right]^n \right) - 1 \right\} = \alpha \{ 2^n - 1 \} = e^{2^n - 1}.$$

Bu dizi için * – üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \times \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(e^{2^n - 1}) \times \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1}(e^{2^n - 1}) \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1}(\iota(t)) \right]^n \right) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\ln e^{2^n - 1} \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right]^n \right) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^n - 1) \times \beta([\ln t]^n) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1}(\beta(2^n - 1)) \times \beta^{-1}(\beta([\ln t]^n)) \right\} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \{ (2^n - 1) \times (\ln t)^n \} \\ &= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}(\beta \{ (2^n - 1) \times (\ln t)^n \}) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \times (\ln t)^n \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \times (\ln t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \times (\ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot \ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n = \frac{1}{1 - 2 \ln t} - \frac{1}{1 - \ln t} . \end{aligned}$$

Şimdi bu örnek bigeometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$, $\beta = \exp$ olduğundan (a_n) α - dizisi şöyledir:

$$a_n = \dot{2}^{n\alpha} \div \dot{1} = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{2}^{n\alpha}) - \alpha^{-1}(\dot{1}) \right\} = \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left[\alpha^{-1}(\dot{2}) \right]^n \right) - 1 \right\} = \alpha \{ 2^n - 1 \} = e^{2^n - 1}.$$

Bu dizi için * – üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \times \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(e^{2^n - 1}) \times \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1}(e^{2^n - 1}) \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1}(\iota(t)) \right]^n \right) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\ln e^{2^n - 1} \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) \right]^n \right) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^n - 1) \times \beta([\ln t]^n) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1}(\beta(2^n - 1)) \times \beta^{-1}(\beta([\ln t]^n)) \right\} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \{ (2^n - 1) \times (\ln t)^n \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ (2^n - 1) \times (\ln t)^n \right\} \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \times (\ln t)^n \right\} \\
&= e^{\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \times (\ln t)^n} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \times (\ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot \ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n} = e^{\frac{1}{1-2 \cdot \ln t} - \frac{1}{1-\ln t}}.
\end{aligned}$$

Bu ise aynı dizinin $*$ -üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.16. $a_0 = 1$ olmak üzere her $n \geq 0$ için $a_{n+1} = 2 \dot{\times} a_n + n$ tekrarlama bağıntısı ile verilen (a_n) α -dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonu ve genel terimi araştırılsın.

Önce bu dizinin $*$ -üreteç fonksiyonu bulunsun. Bunun için tekrarlama bağıntısının her iki yanının ι altında görüntüsü alınsın:

$$\iota(a_{n+1}) = \iota((2 \dot{\times} a_n) + n) = \iota(2 \dot{\times} a_n) + \iota(n) = \iota(2) \dot{\times} \iota(a_n) + \iota(n) = 2 \ddot{\times} \iota(a_n) + \ddot{n}.$$

Bu eşitliğin her iki yanını $\iota(t)^{n_\beta}$ ile β -çarpılsın ve her $n \geq 0$ için β -toplansın:

$$\begin{aligned}
\iota(a_{n+1}) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} &= (2 \ddot{\times} \iota(a_n) + \ddot{n}) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \\
\beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+1}) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} &= \beta \sum_{n \geq 0} (2 \ddot{\times} \iota(a_n) + \ddot{n}) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \\
\beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+1}) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} &= 2 \ddot{\times} \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_n) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} + \beta \sum_{n \geq 0} \ddot{n} \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Şimdi (a_n) α -dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonu

$$A^*(t) = \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_n) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$$

olsun. O halde (3.11) eşitliğinin sağ yanında görülen ilk β -toplam $A^*(t)$ ve (3.4)

eşitliğinden dolayı ikinci β -toplam $\frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \dot{\times} \iota(t))^{2_\beta}} \beta$ olur. Buradan

$$\beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+1}) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} = 2 \ddot{\times} A^*(t) + \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \dot{\times} \iota(t))^{2_\beta}} \beta$$

yazılır. Bu eşitliğin sol yanını $A^*(t)$ *-üreteç fonksiyonuna benzetmek için her iki yan $\iota(t)$ ile β - çarpılsın:

$$\sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{(n+1)\beta} = \ddot{\times} A^*(t) \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \frac{\iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}} \beta. \quad (3.12)$$

Burada eşitlikte sol yanın $A^*(t)$ *-üreteç fonksiyonundan tek farkı β - toplamda $\iota(a_0)$ teriminin olmamasıdır. Bu durumda $a_0 = \ddot{\ddot{I}}$ ve $\iota(\ddot{\ddot{I}}) = \ddot{\ddot{I}}$ olması da kullanılarak (3.12) eşitliğinin sol yanı

$$A^*(t) \ddot{\times} \iota(a_0) = A^*(t) \ddot{\times} \iota(\ddot{\ddot{I}}) = A^*(t) \ddot{\times} \ddot{\ddot{I}}$$

olur. Bu ifade (3.12) eşitliğinde yerine yazılsın ve düzenlensin:

$$A^*(t) \ddot{\times} \ddot{\ddot{I}} = \ddot{\times} A^*(t) \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \frac{\iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}} \beta$$

$$A^*(t) \ddot{\times} \ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} A^*(t) \ddot{\times} \iota(t) = \frac{\iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}} \beta$$

$$A^*(t) \ddot{\times} (\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)) = \ddot{\ddot{I}} \ddot{+} \frac{\iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}} \beta$$

$$A^*(t) = \frac{\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}} \beta.$$

Şimdi (a_n) α - dizisinin genel terimini bulmak için $A^*(t)$ *-üreteç fonksiyonu düzenlensin:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \frac{\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1} (\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta})}{\beta^{-1} ((\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta})} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\ddot{I}}) - \beta^{-1} (\ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)) + \beta^{-1} (\ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta}) \})}{\beta^{-1} (\beta \{ \beta^{-1} (\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \ddot{\times} \iota(t)) \cdot \beta^{-1} ((\ddot{\ddot{I}} \ddot{\times} \iota(t))^{2\beta}) \})} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \frac{1 - \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{z}) \cdot \beta^{-1}(l(t)) \right\} \right) + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{z}) \cdot \beta^{-1}(l(t)^{2\beta}) \right\} \right)}{\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(\ddot{z} \times l(t)) \right\} \right) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\ddot{i} \div l(t)) \right]^2 \right) \right)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{1 - 2\beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(t)) \right) + 2\beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(l(t)) \right]^2 \right) \right)}{\left(1 - \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{z}) \cdot \beta^{-1}(l(t)) \right\} \right) \right) \cdot \left[\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{i}) - \beta^{-1}(l(t)) \right\} \right) \right]^2} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{1 - 2\alpha^{-1}(t) - 2 \cdot \left[\beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(t)) \right) \right]^2}{\left(1 - 2\beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(t)) \right) \right) \cdot \left[1 - \beta^{-1} \left(\beta(\alpha^{-1}(t)) \right) \right]^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{1 - 2\alpha^{-1}(t) + 2 \cdot \left[\alpha^{-1}(t) \right]^2}{\left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) \cdot \left[1 - \alpha^{-1}(t) \right]^2} \right\}
\end{aligned}$$

Böylece

$$A^*(t) = \frac{\ddot{i} \div \ddot{z} \times l(t) \ddot{z} \times l(t)^{2\beta}}{\left(\ddot{i} \div \ddot{z} \times l(t) \right) \times \left(\ddot{i} \div l(t) \right)^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{1 - 2\alpha^{-1}(t) + 2 \cdot \left[\alpha^{-1}(t) \right]^2}{\left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) \cdot \left[1 - \alpha^{-1}(t) \right]^2} \right\}. \quad (3.13)$$

olur. Bu eşitliğin sol yanı basit kesirlerine ayrılısın:

$$\beta \left\{ \frac{1 - 2\alpha^{-1}(t) + 2 \cdot \left[\alpha^{-1}(t) \right]^2}{\left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) \cdot \left[1 - \alpha^{-1}(t) \right]^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{a}{1 - \alpha^{-1}(t)} + \frac{b}{\left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2} + \frac{c}{1 - 2\alpha^{-1}(t)} \right\}.$$

β birebir fonksiyon olduğundan

$$\frac{1 - 2\alpha^{-1}(t) - 2\alpha^{-1}(t)^2}{\left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) \cdot \left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2} = \frac{a}{1 - \alpha^{-1}(t)} + \frac{b}{\left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2} + \frac{c}{1 - 2\alpha^{-1}(t)} \quad (3.14)$$

yazılır ve payda eşitlemesi yapılarak paylar eşitlendiğinde

$$1 - 2\alpha^{-1}(t) + 2\alpha^{-1}(t)^2 = a \cdot \left(1 - \alpha^{-1}(t) \right) \cdot \left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) + b \cdot \left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) + c \cdot \left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2$$

$a = 0$, $b = -1$ ve $c = 2$ bulunur. Bu değerler (3.14) eşitliğinde yerlerine yazılısın ve düzenlensin:

$$\frac{1 - 2\alpha^{-1}(t) - 2\alpha^{-1}(t)^2}{\left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right) \cdot \left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2} = \frac{0}{1 - \alpha^{-1}(t)} + \frac{-1}{\left(1 - \alpha^{-1}(t) \right)^2} + \frac{2}{\left(1 - 2\alpha^{-1}(t) \right)}$$

$$= \frac{-1}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} + \frac{2}{1-2\alpha^{-1}(t)}.$$

Bulunan son ifade (3.13) eşitliğinde yerine yazılsın ve $A(t)$ *– üreteç fonksiyonu düzenlensin:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \frac{\ddot{1} \div 2 \ddot{\times} \iota(t) \ddot{+} \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)^{2\beta}}{(\ddot{1} \div \ddot{2} \ddot{\times} \iota(t)) \ddot{\times} (\ddot{1} \div \iota(t))^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{-1}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} + \frac{2}{1-2\alpha^{-1}(t)} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(-1))}{[\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^2} + \frac{\beta^{-1}(\beta(2))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(2)) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{[\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(t))]^2} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{2})}{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{[\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(t))\})]^2} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{2})}{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))\})} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{[\beta^{-1}(\ddot{1} \div \iota(t))]^2} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{2})}{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\ddot{2} \times \iota(t))} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{\beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\ddot{1} \div \iota(t))]^2))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{2})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\ddot{2} \times \iota(t))\})} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{\beta^{-1}((\ddot{1} \div \iota(t))^{2\beta})} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{2})}{\beta^{-1}(\ddot{1} \div \ddot{2} \times \iota(t))} \right\} \\ &= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{1})}{\beta^{-1}((\ddot{1} \div \iota(t))^{2\beta})} \right\} \right) + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{2})}{\beta^{-1}(\ddot{1} \div \ddot{2} \times \iota(t))} \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\dot{1}}}{(\dot{1} \ddot{\iota}(t))^{2\beta}} \beta \right) + \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{2}}{\dot{1} \ddot{2} \ddot{\iota}(t)} \beta \right) \right\} = \frac{\ddot{\dot{1}}}{(\dot{1} \ddot{\iota}(t))^{2\beta}} \beta \ddot{2} \frac{\ddot{2}}{\dot{1} \ddot{2} \ddot{\iota}(t)} \beta .$$

Burada sırasıyla (3.4) ve (3.3) eşitliklerine göre $A^*(t)$ * – üreteç fonksiyonu * – kuvvet serisine genişletilsin:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} (\ddot{n} \ddot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \ddot{2} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} (\iota(\ddot{n}) \ddot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \ddot{2} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \beta \left\{ \beta^{-1}(\ddot{2}) \cdot \beta^{-1}(\ddot{2}^{n\beta}) \right\} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \beta \left\{ 2 \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\ddot{2}) \right]^n \right) \right) \right\} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \beta (2 \cdot 2^n) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \beta (2^{n+1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \beta (\alpha^{-1}(\alpha(2^{n+1}))) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \iota(\alpha(2^{n+1})) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \iota \left(\alpha \left(\left[\alpha^{-1}(\alpha(2)) \right]^{n+1} \right) \right) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \iota \left(\alpha \left(\left[\alpha^{-1}(\dot{2}) \right]^{n+1} \right) \right) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \ddot{\beta} \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{n} \dot{1}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{2} \sum_{n \geq 0} \iota \left(\dot{2}^{(n+1)\alpha} \right) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\ddot{\iota}(\dot{n} \dot{1}) \ddot{2} \left(\dot{2}^{(n+1)\alpha} \right) \right) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\ &= \sum_{n \geq 0} \iota \left(\dot{2}^{(n+1)\alpha} \dot{2} \dot{1} \right) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} . \end{aligned}$$

Buradan $a_n = \dot{2}^{(n+1)\alpha} \div \dot{n} \div \dot{1}$ bulunur. Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelenir. Bu durumda $\alpha = I$, $\beta = \exp$ olduğundan $a_n = \dot{2}^{(n+1)\alpha} \div \dot{n} \div \dot{1}$ α -dizi $a_n = 2^{n+1} - n - 1$ dizisidir. Bu dizi için * - üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(2^{n+1} - n - 1) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(2^{n+1} - n - 1)) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^{n+1} - n - 1) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^{n+1} - n - 1) \ddot{\times} \beta(t^n) \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{\beta^{-1}(\beta(2^{n+1} - n - 1)) \times \beta^{-1}(\beta(t^n))\} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{(2^{n+1} - n - 1) \times t^n\} \\
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}(\beta\{(2^{n+1} - n - 1) \times t^n\}) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1) \times t^n \right\} \\
&= e^{\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1) \times t^n} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (2 \cdot t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^n} = e^{\frac{2}{1-2t} - \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t}} .
\end{aligned}$$

Şimdi bu dizi anageometrik kalkülüs için incelenir. Bu durumda $\alpha = \exp$, $\beta = I$ olduğundan (a_n) α -dizi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
a_n &= \dot{2}^{(n+1)\alpha} \div \dot{n} \div \dot{1} = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{2}^{(n+1)\alpha}) - \alpha^{-1}(\dot{n}) - \alpha^{-1}(\dot{1}) \right\} = \alpha \left\{ \alpha^{-1}(\alpha([\alpha^{-1}(\dot{2})]^{n+1})) - n - 1 \right\} \\
&= \alpha \{2^{n+1} - n - 1\} = e^{2^{n+1} - n - 1} .
\end{aligned}$$

Bu dizinin * - üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(e^{2^{n+1} - n - 1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(e^{2^{n+1} - n - 1})) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\ln e^{2^{n+1} - n - 1}) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(2^{n+1} - n - 1) \ddot{\times} \beta([\ln t]^n) \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{\beta^{-1}(\beta(2^{n+1} - n - 1)) \times \beta^{-1}(\beta([\ln t]^n))\} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{(2^{n+1} - n - 1) \times (\ln t)^n\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ (2^{n+1} - n - 1) \times (\ln t)^n \right\} \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1) \times (\ln t)^n \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1) \times (\ln t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (2 \cdot \ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n \\
&= \frac{2}{1 - 2 \cdot \ln t} - \frac{\ln t}{(1 - \ln t)^2} - \frac{1}{1 - \ln t}.
\end{aligned}$$

Burada $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n = \frac{1}{1 - \ln t}$ fonksiyonunda D sembolü tek başına t

değişkenine göre türevi göstermek üzere

$$Df(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^{n-1} \cdot \frac{1}{t} = D \left(\frac{1}{(1 - \ln t)} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^n \cdot \frac{1}{t \cdot \ln t} = \frac{1}{t \cdot (1 - \ln t)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^n = \frac{\ln t}{(1 - \ln t)^2}$$

olması kullanılmıştır. Şimdi bu dizi bigeometrik kalkülüs için incelenin. Bu durumda

$\alpha = \exp$ ve $\beta = \exp$ olduğundan $a_n = 2^{(n+1)\alpha} \div n \div 1$ α -dizi $a_n = e^{2^{n+1} - n - 1}$ dizisidir.

Bu (a_n) dizisinin * – üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$A^*(t) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \times \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(e^{2^{n+1} - n - 1}) \times \iota(t)^{n\beta}$$

$$= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1} \left(e^{2^{n+1} - n - 1} \right) \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1} \left(\iota(t) \right) \right]^n \right)$$

$$= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\ln e^{2^{n+1} - n - 1} \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1} \left(\beta \left(\alpha^{-1} \left(t \right) \right) \right) \right]^n \right) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(2^{n+1} - n - 1 \right) \times \beta \left(\left[\ln t \right]^n \right)$$

$$= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(2^{n+1} - n - 1 \right) \right) \times \beta^{-1} \left(\beta \left((\ln t)^n \right) \right) \right\} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ (2^{n+1} - n - 1) \times (\ln t)^n \right\}$$

$$= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ (2^{n+1} - n - 1) \cdot (\ln t)^n \right\} \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1) \cdot (\ln t)^n \right\} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1) \cdot (\ln t)^n}$$

$$= e^{\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (2 \cdot \ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n} = e^{\frac{2}{1-2 \cdot \ln t} - \frac{\ln t}{(1-\ln t)^2} - \frac{1}{1-\ln t}}$$

Bu ise aynı dizinin *–üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.17. $n \geq 1$ ve $a_n = \frac{i}{n} \alpha$ olmak üzere (a_n) dizisinin *–üreteç fonksiyonu geometrik, anageometrik, bigeometrik kalkülüs için incelensin.

Geometrik kalkülüste $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olduğundan (a_n) dizisi $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ dizisidir ve bu dizinin *–üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n_{\beta}} &= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \iota\left(\frac{1}{n}\right) \ddot{\times} \iota(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left(\alpha^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ddot{\times} \beta\left([\beta^{-1}(\iota(t))]^n\right) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left(\frac{1}{n}\right) \ddot{\times} \beta\left([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n\right) = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left(\frac{1}{n}\right) \ddot{\times} \beta\left([\alpha^{-1}(t)]^n\right) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left(\frac{1}{n}\right) \ddot{\times} \beta(t^n) = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left\{\beta^{-1}\left(\beta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \times \beta^{-1}(\beta(t^n))\right\} = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left\{\frac{1}{n} \times t^n\right\} \\ &= \beta\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{-1}\left(\beta\left\{\frac{1}{n} \times t^n\right\}\right)\right\} = \beta\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right\} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}} = e^{\left(\ln \frac{1}{1-t}\right)} = \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

olur. Burada klasik kalkülüsten bilinen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}$ olması kullanıldı.

Şimdi bu dizi anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve $\beta = I$ olduğundan (a_n) α -dizisi şöyledir:

$$a_n = \frac{i}{n} \alpha = \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(i)}{\alpha^{-1}(n)} \right\} = \alpha \left\{ \frac{1}{n} \right\} = e^{\frac{1}{n}}$$

Bu dizinin *–üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$${}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \iota\left(e^{\frac{1}{n}}\right) \ddot{\times} \iota(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta\left(\alpha^{-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)\right) \ddot{\times} \beta\left([\beta^{-1}(\iota(t))]^n\right)$$

$$\begin{aligned}
&= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left(\frac{1}{n} \right) \ddot{\times} \beta \left((\ln t)^n \right) = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{n} \right) \right) \times \beta^{-1} \left(\beta \left((\ln t)^n \right) \right) \right\} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left\{ \frac{1}{n} \times (\ln t)^n \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{n} \times (\ln t)^n \right) \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (\ln t)^n \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (\ln t)^n = -\ln(1 - \ln t)
\end{aligned}$$

Burada $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \frac{1}{1-t}$ fonksiyonunda t değişkenine göre integrali

alınırsa

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt &= \int \frac{1}{1-t} dt \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int t^n dt = -\ln(1-t) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t) \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} &= -\ln(1-t) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln t)^n}{n} = -\ln(1 - \ln t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi bu dizi bigeometrik kalkülüs için incelenir. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve $\beta = \exp$ olduğundan (a_n) α -dizisi $a_n = e^{\frac{1}{n}}$ biçimindedir. Bu dizinin $*$ -üreteç fonksiyonu şöyledir:

$$\begin{aligned}
&{}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \iota \left(e^{\frac{1}{n}} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1} \left(e^{\frac{1}{n}} \right) \right) \ddot{\times} \beta \left(\left[\beta^{-1}(\iota(t)) \right]^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left(\ln e^{\frac{1}{n}} \right) \ddot{\times} \beta \left(\left[\beta^{-1} \left(\beta \left(\alpha^{-1}(t) \right) \right) \right]^n \right) = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left(\frac{1}{n} \right) \ddot{\times} \beta \left((\alpha^{-1}(t))^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left(\frac{1}{n} \right) \ddot{\times} \beta \left((\ln t)^n \right) = {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{n} \right) \right) \times \beta^{-1} \left(\beta \left((\ln t)^n \right) \right) \right\} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left\{ \frac{1}{n} \times (\ln t)^n \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{1}{n} \times (\ln t)^n \right\} \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln t)^n}{n} \right\} \\
&= e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln t)^n}{n}} = e^{-\ln(1-\ln t)} = \frac{1}{1-\ln t}.
\end{aligned}$$

Bu ise aynı dizinin $*$ -üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

Tanım 3.1.18. Bir $f^*(t) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta}$ $*$ -biçimsel kuvvet serisinin $(a_n)_0^{\infty}$

α -dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonu olması $f^* \xleftarrow{*,\alpha} (a_n)_0^{\infty}$ sembolü ile ifade edilir.

Benzer şekilde $g^*(t) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta}$ $*$ -biçimsel kuvvet serisinin $(b_n)_0^{\infty}$ β -dizisi

için $*$ -üreteç fonksiyonu olması $g^* \xleftarrow{*,\alpha} (b_n)_0^{\infty}$ sembolü ile gösterilir (Duyar ve Erdoğan, 2020).

Önerme 3.1.19. $f^* \xleftarrow{*,\alpha} (a_n)_0^{\infty}$ olduğunda $\frac{f^*(t) \ddot{-} \iota(a_0)}{\iota(t)} \beta \xleftarrow{*,\alpha} (a_{n+1})_0^{\infty}$

olur (Duyar ve Erdoğan, 2020).

İspat:

Burada $f^* \xleftarrow{*,\alpha} (a_n)_0^{\infty}$ olduğundan $f^*(t) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta}$ yazılır. O halde

$$\begin{aligned} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} &= \frac{\iota(t)}{\iota(t)} \beta \ddot{\times}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \frac{\ddot{\iota}}{\iota(t)} \beta \ddot{\times}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{(n+1)\beta} \\ &= \frac{\ddot{\iota}}{\iota(t)} \beta \ddot{\times}_{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \iota(a_m) \ddot{\times} \iota(t)^{m\beta} = \frac{\ddot{\iota}}{\iota(t)} \beta \ddot{\times} (f^*(t) \ddot{-} \iota(a_0)) = \frac{f^*(t) \ddot{-} \iota(a_0)}{\iota(t)} \beta \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $(a_{n+2})_0^{\infty}$ α -dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_{n+2}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} &= \frac{\iota(t)^{2\beta}}{\iota(t)^{2\beta}} \beta \ddot{\times}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_{n+2}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \frac{\ddot{\iota}}{\iota(t)^{2\beta}} \beta \ddot{\times}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_{n+2}) \ddot{\times} \iota(t)^{(n+2)\beta} \\ &= \frac{\ddot{\iota}}{\iota(t)^{2\beta}} \beta \ddot{\times} (f^*(t) \ddot{-} \iota(a_0) \ddot{-} \iota(a_1) \ddot{\times} \iota(t)) = \frac{f^*(t) \ddot{-} \iota(a_0) \ddot{-} \iota(a_1) \ddot{\times} \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta. \end{aligned}$$

Bu yolla aşağıdaki genelleme yapılabilir.

Her k pozitif tamsayı için $f^* \xleftarrow{*,\alpha} (a_n)_0^{\infty}$ ise

$$(a_{n+k})_0^\infty \xleftarrow{*,\alpha} \frac{f^*(t) \ddot{\iota}(a_0) \ddot{\iota}(a_1) \ddot{\iota}(t) \ddot{\iota} \dots \ddot{\iota}(a_{k-1}) \ddot{\iota}(t)^{k-1}}{\iota(t)^k} \beta$$

olur ve doğruluğu tümevarım yöntemi ile gösterilebilir.

Örnek 3.1.20. $a_0 = \dot{0}$, $a_1 = \dot{1}$ olmak üzere her $n \geq 0$ için $a_{n+2} = \dot{2} \times a_{n+1} \dot{\div} a_n$ tekrarlama bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonu ve genel terimi araştırılsın:

Önce bu dizinin $*$ -üreteç fonksiyonu bulunsun. Bunun için tekrarlama bağıntısının her iki yanının ι altında görüntüsü alınsın:

$$\iota(a_{n+2}) = \iota(\dot{2} \times a_{n+1} \dot{\div} a_n) = \iota(\dot{2} \times a_{n+1}) \ddot{\iota}(a_n) = \iota(\dot{2}) \ddot{\iota}(a_{n+1}) \ddot{\iota}(a_n) = \dot{2} \times \ddot{\iota}(a_{n+1}) \ddot{\iota}(a_n).$$

Bu eşitliğin her iki yanını $\iota(t)^{n\beta}$ ile β -çarpılsın ve her $n \geq 0$ için β -toplansın:

$$\begin{aligned} \iota(a_{n+2}) \times \iota(t)^{n\beta} &= (\dot{2} \times \ddot{\iota}(a_{n+1}) \ddot{\iota}(a_n)) \times \iota(t)^{n\beta} \\ \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+2}) \times \iota(t)^{n\beta} &= \beta \sum_{n \geq 0} (\dot{2} \times \ddot{\iota}(a_{n+1}) \ddot{\iota}(a_n)) \times \iota(t)^{n\beta} \\ \beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+2}) \times \iota(t)^{n\beta} &= \dot{2} \times \beta \sum_{n \geq 0} \ddot{\iota}(a_{n+1}) \times \iota(t)^{n\beta} \dot{\div} \beta \sum_{n \geq 0} \ddot{\iota}(a_n) \times \iota(t)^{n\beta}. \end{aligned}$$

Şimdi (a_n) α -dizisi için $*$ -üreteç fonksiyonu

$$A^*(t) = \beta \sum_{n \geq 0} \ddot{\iota}(a_n) \times \iota(t)^{n\beta}$$

olsun. O halde

$$\beta \sum_{n \geq 0} \iota(a_{n+2}) \times \iota(t)^{n\beta} = \dot{2} \times \beta \sum_{n \geq 0} \ddot{\iota}(a_{n+1}) \times \iota(t)^{n\beta} \dot{\div} A^*(t) \quad (3.15)$$

yazılır. Burada (3.15) eşitliğindeki diğer β -toplamların $A^*(t)$ $*$ -üreteç fonksiyonu türünden ifadesi (3.1.19) önermesi ile ilişkilendirilirse $\iota(a_0) = \iota(\dot{0}) = \ddot{0}$ ve $\iota(a_1) = \iota(\dot{1}) = \ddot{1}$ olmak üzere sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\frac{A^*(t) \ddot{\iota}(a_0) \ddot{\iota}(a_1) \times \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{A^*(t) \ddot{\iota}(\dot{0}) \ddot{\iota}(\dot{1}) \times \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{A^*(t) \ddot{\iota}(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta ,$$

$$\frac{A^*(t) \ominus \iota(a_0)}{\iota(t)} \beta = \frac{A^*(t) \ominus \iota(\dot{0})}{\iota(t)} \beta = \frac{A^*(t)}{\iota(t)} \beta \quad .$$

Bu ifadeler (3.15) eşitliğinde yerlerine yazılsın ve $A^*(t)$ çözülsün:

$$\frac{A^*(t) \ominus \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = 2 \times \frac{A^*(t)}{\iota(t)} \beta \ominus A^*(t)$$

$$A^*(t) \ominus \iota(t) = \ddot{2} \times A^*(t) \times \iota(t) \ominus A^*(t) \times \iota(t)^{2\beta}$$

$$A^*(t) \ominus \ddot{2} \times A^*(t) \times \iota(t) \ddot{+} A^*(t) \times \iota(t)^{2\beta} = \iota(t)$$

$$A^*(t) \times (\ddot{1} \ominus \ddot{2} \times \iota(t) \ddot{+} \iota(t)^{2\beta}) = \iota(t)$$

$$A^*(t) = \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \ominus \ddot{2} \times \iota(t) \ddot{+} \iota(t)^{2\beta})} \beta = \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \ominus \iota(t))^{2\beta}} \beta .$$

Şimdi (a_n) dizisinin genel terimini bulmak için $A^*(t)$ * – üreteç fonksiyonu düzenlensin:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \ominus \iota(t))^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(t))}{\beta^{-1}((\ddot{1} \ominus \iota(t))^{2\beta})} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))}{\beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\ddot{1} \ominus \iota(t))]^2))} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{[\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(t))\})]^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))))^2} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - \alpha^{-1}(t))^2} \right\} . \end{aligned}$$

Buradan

$$A^*(t) = \frac{\iota(t)}{(\ddot{1} \ominus \iota(t))^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1 - \alpha^{-1}(t))^2} \right\} \quad (3.16)$$

eşitliği elde edildi. Bu eşitliğin sağ yanı $\alpha^{-1}(t)$ değişkenine göre basit kesirlerine ayrılırsa

$$\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{a}{1-\alpha^{-1}(t)} + \frac{b}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} \right\}$$

olur ve β birebir olduğundan

$$\frac{\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} = \frac{a}{1-\alpha^{-1}(t)} + \frac{b}{(1-\alpha^{-1}(t))^2}$$

yazılır. Burada payda eşitlemesi yapılarak paylar eşitlendiğinde

$$\alpha^{-1}(t) = a(1-\alpha^{-1}(t)) + b \Rightarrow a = -1 \text{ ve } b = 1$$

bulunur. Bu değerler yerlerine yazılınsın:

$$\frac{\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} = \frac{-1}{1-\alpha^{-1}(t)} + \frac{1}{(1-\alpha^{-1}(t))^2}.$$

Bu ifade (3.16) eşitliğinde yerine yazılınsın ve düzenlensin:

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \frac{\iota(t)}{(\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t))^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{-1}{1-\alpha^{-1}(t)} + \frac{1}{(1-\alpha^{-1}(t))^2} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(-1))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} + \frac{\beta^{-1}(\beta(1))}{(\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))))^2} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\iota})}{\beta^{-1}(\ddot{\iota}) - \beta^{-1}(\iota(t))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\iota})}{(\beta^{-1}(\ddot{\iota}) - \beta^{-1}(\iota(t)))^2} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\iota})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\iota}) - \beta^{-1}(\iota(t))\})} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\iota})}{(\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\iota}) - \beta^{-1}(\iota(t))\}))^2} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\iota})}{\beta^{-1}(\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\iota})}{(\beta^{-1}(\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t)))^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t))} \right\} \right) + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t)) \right]^2 \right) \right)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t)} \beta \right) + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1} \left((\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t))^{2\beta} \right)} \right\} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t)} \beta \right) + \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{(\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t))^{2\beta}} \right) \right\} \\
&= \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t)} \beta \ddot{\iota} + \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{(\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t))^{2\beta}} \beta.
\end{aligned}$$

Buradan

$$A^*(t) = \frac{\iota(t)}{(\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t))^{2\beta}} \beta = \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t)} \beta \ddot{\iota} + \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{(\dot{\mathbf{i}} \dot{\iota}(t))^{2\beta}} \beta$$

elde edildi.

Şimdi (3.2) ve (3.4) eşitliklerine göre $A^*(t)$ * – üreteç fonksiyonu * – kuvvet serisine genişletilsin:

$$\begin{aligned}
A^*(t) &= \ddot{\iota} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{\iota} + \sum_{n=0}^{\infty} (\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\
&= \ddot{\iota} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{\iota} + \sum_{n=0}^{\infty} (\dot{\mathbf{i}}(\dot{n}) \ddot{\iota}(\dot{\mathbf{i}})) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\
&= \ddot{\iota} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \ddot{\iota} + \sum_{n=0}^{\infty} (\dot{\mathbf{i}}(\dot{n} + \dot{\mathbf{i}})) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\mathbf{i}}(\dot{n} + \dot{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{i}}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\mathbf{i}}(\dot{n}) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} .
\end{aligned}$$

Buradan dizinin genel terimi $a_n = \dot{n}$ elde edilir. Şimdi bu örnek geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olduğundan (a_n) α – dizisi aşağıdaki gibidir:

$$a_n = \dot{n} = \alpha(n) = n.$$

Bu dizi için * – üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned} {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\iota}(t)^{n_{\beta}} &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(n) \ddot{\iota}(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(n)) \ddot{\beta}([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\beta}([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\beta}((\alpha^{-1}(t))^n) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\beta}(t^n) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{\beta^{-1}(\beta(n)) \times \beta^{-1}(\beta(t^n))\} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{n \times t^n\} \\ &= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}(\beta(n \times t^n)) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n t^n \right\} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} n t^n} = e^{\frac{t}{(1-t)^2}}. \end{aligned}$$

Şimdi bu dizi anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve $\beta = I$ olduğundan (a_n) dizisi aşağıdaki gibidir:

$$a_n = \dot{n} = \alpha(n) = e^n.$$

Bu dizi için * – üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned} {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\iota}(t)^{n_{\beta}} &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(e^n) \ddot{\iota}(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(e^n)) \ddot{\beta}([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\ln e^n) \ddot{\beta}([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\beta}([\alpha^{-1}(t)]^n) \\ &= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\beta}([\ln t]^n) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{\beta^{-1}(\beta(n)) \times \beta^{-1}(\beta((\ln t)^n))\} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta\{n.(\ln t)^n\} \\ &= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}(\beta(n.(\ln t)^n)) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n.(\ln t)^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} n.(\ln t)^n = \frac{\ln t}{(1-\ln t)^2}. \end{aligned}$$

Şimdi bu dizi bigeometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve $\beta = \exp$ olduğundan (a_n) dizisi aşağıdaki gibidir:

$$a_n = \dot{n} = \alpha(n) = e^n.$$

Bu dizinin * – üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned}
& {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(a_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(e^n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(e^n)) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\
& = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\ln e^n) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\times} \beta([\alpha^{-1}(t)]^n) \\
& = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \ddot{\times} \beta((\ln t)^n) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta\left\{\beta^{-1}(\beta(n)) \times \beta^{-1}(\beta((\ln t)^n))\right\} \\
& = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta\left\{n \times (\ln t)^n\right\} = \beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1}\left(\beta\left\{n \times (\ln t)^n\right\}\right)\right\} = \beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^n\right\} \\
& = e^{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (\ln t)^n} = e^{\frac{\ln t}{(1-\ln t)^2}}.
\end{aligned}$$

Bu ise aynı dizinin *–üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

3.2. Newtonyen Olmayan Fibonacci Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri

Klasik kalkülüste her bir terimi kendisinden önceki iki teriminin toplamı şeklinde yazılabilen $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ sayı dizisi Fibonacci sayı dizisi olarak bilinmektedir. Bu sayılara Fibonacci sayıları denir ve n . Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 0$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ biçiminde tanımlanır (Koshy, 2001).

Şimdi Newtonyen olmayan Fibonacci sayı dizisi tanımlansın.

Tanım 3.2.1. $\dot{F}_0 = \dot{0}$ ve $\dot{F}_1 = \dot{1}$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\dot{F}_{n+2} = \dot{F}_{n+1} \dot{+} \dot{F}_n$$

biçiminde verilen (\dot{F}_n) α -dizi α -Fibonacci sayı dizisi veya Newtonyen olmayan Fibonacci sayı dizisi olarak adlandırılır. Bu dizinin birkaç terimi

$$\dot{0}, \dot{1}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{5}, \dot{8}, \dot{13}, \dot{21}, \dots$$

şeklinde dir. Bu sayılara α -Fibonacci sayıları denir.

Örnek 3.2.2. $\dot{F}_0 = \dot{0}$ ve $\dot{F}_1 = \dot{1}$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\dot{F}_{n+2} = \dot{F}_{n+1} \dot{+} \dot{F}_n$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen (\dot{F}_n) α -Fibonacci sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu ve genel terimi araştırılsın:

Önce (\dot{F}_n) α -Fibonacci sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu bulunsun. Bunun için (\dot{F}_n) α -Fibonacci sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu

$$F^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_n) \times \iota(t)^{n\beta}$$

olsun. Verilen tekrarlama bağıntısı önerme (3.1.19) ile ilişkilendirilirse

$$\frac{F^*(t) \div \iota(\dot{F}_0) \div \iota(\dot{F}_1) \times \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{F^*(t) \div \iota(\dot{F}_0)}{\iota(t)} \beta \ddot{+} F^*(t)$$

olur ve $\iota(\dot{F}_0) = \iota(\dot{0}) = \ddot{0}$, $\iota(\dot{F}_1) = \iota(\dot{1}) = \ddot{1}$ değerleri yukarıdaki eşitlikte yazılırsa

$$\frac{F^*(t) \div \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{F^*(t)}{\iota(t)} \beta \ddot{+} F^*(t)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $F^*(t)$ çözülsün:

$$\frac{F^*(t) \div \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{F^*(t) \ddot{+} F^*(t) \times \iota(t)}{\iota(t)} \beta$$

$$F^*(t) \div \iota(t) = F^*(t) \times \iota(t) \ddot{+} F^*(t) \times \iota(t)^{2\beta}$$

$$F^*(t) \div F^*(t) \times \iota(t) \div F^*(t) \times \iota(t)^{2\beta} = \iota(t)$$

$$F^*(t) \times (\ddot{1} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta}) = \iota(t)$$

$$F^*(t) = \frac{\iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta}} \beta .$$

Şimdi (\dot{F}_n) α -Fibonacci sayı dizisinin genel terimi bulunsun. Bunun için (\dot{F}_n)

α -Fibonacci sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu düzenlensin:

$$\begin{aligned}
\frac{\iota(t)}{\ddot{\iota} - \iota(t) - \iota(t)^{2\beta}} \beta &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(t))}{\beta^{-1}(\ddot{\iota} - \iota(t) - \iota(t)^{2\beta})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\iota}) - \beta^{-1}(\iota(t)) - \beta^{-1}(\iota(t)^{2\beta})\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) - \beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^2))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - [\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^2} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - (\alpha^{-1}(t))^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Burada $1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2 = 0$ kuadratik denkleminin pozitif kökü $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ve negatif kökü $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $r_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ve $r_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ alınarak * - üreteç fonksiyonu $\alpha^{-1}(t)$ değişkenine göre basit kesirlerine ayrılımsın:

$$\beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{m}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \right\} \quad (3.17)$$

ve β birebir olduğundan

$$\frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} = \frac{m}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \quad (3.18)$$

yazılır ve payda eşitlemesi yapıldıktan sonra paylar eşitlendiğinde

$$\alpha^{-1}(t) = m \cdot (1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)) + n \cdot (1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t))$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{5}}, n = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur. Bu değerler (3.18) eşitliğinde yerlerine yazılır ve $r_+ - r_- = \sqrt{5}$ olması da kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} - \frac{1}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \right) \\ &= \frac{1}{r_+ - r_-} \cdot \left(\frac{1}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} - \frac{1}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (3.17) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{i(t)}{\ddot{i} \doteq i(t) \doteq i(t)^{2\beta}} \beta &= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} \right\} = \beta \left\{ \frac{1}{r_+ - r_-} \cdot \left(\frac{1}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} - \frac{1}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\alpha(1))}{\alpha^{-1}(\alpha(r_+)) - \alpha^{-1}(\alpha(r_-))} \cdot \left(\frac{\alpha^{-1}(\alpha(1))}{\alpha^{-1}(\alpha(1)) - \alpha^{-1}(\alpha(r_+)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(t)))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha^{-1}(\alpha(1))}{\alpha^{-1}(\alpha(1)) - \alpha^{-1}(\alpha(r_-)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(t)))} \right) \right\} \quad (3.19) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \alpha(r_+) &= \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\alpha(1)) + \alpha^{-1}(\alpha(\sqrt{5}))}{\alpha^{-1}(\alpha(2))} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\dot{1}) + \alpha^{-1}(\alpha(\sqrt{\alpha^{-1}(\alpha(5))}))}{\alpha^{-1}(\dot{2})} \right) \\ &= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{1}) + \alpha^{-1}(\alpha(\sqrt{\alpha^{-1}(\dot{5})}))}{\alpha^{-1}(\dot{2})} \right\} = \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{1}) + \alpha^{-1}(\sqrt{5}^\alpha)}{\alpha^{-1}(\dot{2})} \right\} \end{aligned}$$

$$= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}}) + \alpha^{-1}(\sqrt{5}^\alpha) \right\} \right)}{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{z}})} \right\} = \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}} + \sqrt{5}^\alpha)}{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{z}})} \right\} = \frac{\dot{\mathbf{i}} + \sqrt{5}^\alpha}{\dot{\mathbf{z}}} \alpha = \dot{\mathbf{r}}_+$$

olur ve $\alpha(r_-) = \dot{\mathbf{r}}_- = \frac{\dot{\mathbf{i}} + \sqrt{5}^\alpha}{\dot{\mathbf{z}}} \alpha$ olduğu benzer şekilde görülebilir. Bu ifadeler (3.19)

eşitliğinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\mathbf{i}} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta}}{\ddot{\mathbf{i}}} \beta &= \beta \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}})}{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_+) - \alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_-)} \cdot \left(\frac{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}})}{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}}) - \alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_+) \cdot \alpha^{-1}(t)} - \frac{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}})}{\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}}) - \alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_-) \cdot \alpha^{-1}(t)} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}})))}{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_+))) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_-)))} \cdot \left(\frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}})))}{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}}))) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_+))) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}})))}{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{i}}))) - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_-))) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{i}}))}{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_+)) - \beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_-))} \cdot \left(\frac{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{i}}))}{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{i}})) - \beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_+)) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{i}}))}{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{i}})) - \beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_-)) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_+)) - \beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_-))\})} \cdot \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}}) - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_+)) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))\})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}}) - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_-)) \cdot \beta^{-1}(\iota(t))\})} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_+) \div \iota(\dot{\mathbf{r}}_-))} \cdot \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}}) - \beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_+) \times \iota(t))} - \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}}) - \beta^{-1}(\iota(\dot{\mathbf{r}}_-) \times \iota(t))} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-))} \right\} \right) \cdot \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}}) - \beta^{-1}(\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t))\})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}}) - \beta^{-1}(\iota(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t))\})} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-)} \beta \right) \cdot \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t))} - \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t))} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-)} \beta \right) \cdot \left(\beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t))} \right\} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}})}{\beta^{-1}(\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t))} \right\} \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-)} \beta \right) \cdot \left(\beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t)} \beta \right) - \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t)} \right) \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-)} \beta \right) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t)} \beta \right) - \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t)} \beta \right) \right\} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-)} \beta \right) \cdot \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t)} \beta \ddot{\iota} \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t)} \beta \right) \right\} \\
&= \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(\dot{r}_-)} \beta \ddot{\iota} \left(\frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\iota}(t)} \beta \ddot{\iota} \frac{\ddot{\mathbf{i}}}{\ddot{\mathbf{i}} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\iota}(t)} \beta \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\dot{r}_+ = \frac{\dot{\mathbf{i}} + \sqrt{5}^\alpha}{2} \alpha$ ve $\dot{r}_- = \frac{\dot{\mathbf{i}} - \sqrt{5}^\alpha}{2} \alpha$ olması kullanılarak

$$\iota(\dot{r}_+) = \iota \left(\frac{\dot{\mathbf{i}} + \sqrt{5}^\alpha}{2} \alpha \right) = \beta \left(\alpha^{-1} \left(\frac{\dot{\mathbf{i}} + \sqrt{5}^\alpha}{2} \alpha \right) \right) = \beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\beta(1)) + \beta^{-1}(\beta(\sqrt{5}))}{\beta^{-1}(\beta(2))} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}\left(\beta\left(\sqrt{\beta^{-1}(\beta(5))}\right)\right)}{\beta^{-1}(\ddot{2})} \right) = \beta \left(\frac{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}\left(\beta\left(\sqrt{\beta^{-1}(\ddot{5})}\right)\right)}{\beta^{-1}(\ddot{2})} \right) \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}\left(\sqrt{\ddot{5}^\beta}\right)}{\beta^{-1}(\ddot{2})} \right\} = \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}\left(\beta\left\{\beta^{-1}(\ddot{i}) + \beta^{-1}\left(\sqrt{\ddot{5}^\beta}\right)\right\}\right)}{\beta^{-1}(\ddot{2})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}\left(\ddot{i} \ddot{+} \sqrt{\ddot{5}^\beta}\right)}{\beta^{-1}(\ddot{2})} \right\} = \frac{\ddot{i} \ddot{+} \sqrt{\ddot{5}^\beta}}{\ddot{2}} \beta = \ddot{r}_+
\end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde $\iota(\dot{r}_-) = \frac{\ddot{i} \ddot{-} \sqrt{\ddot{5}^\beta}}{\ddot{2}} = \dot{r}_-$ olduğu görülebilir.

Şimdi $\iota(\dot{r}_+) \ddot{-} \iota(\dot{r}_-) = \frac{\ddot{i} \ddot{+} \sqrt{\ddot{5}^\beta}}{\ddot{2}} \beta \ddot{-} \frac{\ddot{i} \ddot{-} \sqrt{\ddot{5}^\beta}}{\ddot{2}} \beta = \sqrt{\ddot{5}^\beta}$ olması da kullanılarak * –

üreteç fonksiyonu * – kuvvet serisine genişletilsin:

$$\begin{aligned}
&\frac{\ddot{i}}{\iota(\dot{r}_+) \ddot{-} \iota(\dot{r}_-)} \beta \ddot{\times} \left(\frac{\ddot{i}}{\ddot{i} \ddot{-} \iota(\dot{r}_+) \ddot{\times} \iota(t)} \beta \ddot{-} \frac{\ddot{i}}{\ddot{i} \ddot{-} \iota(\dot{r}_-) \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) \\
&= \frac{\ddot{i}}{\sqrt{\ddot{5}^\beta}} \beta \ddot{\times} \left(\beta \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{r}_+)^{n_\beta} \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \ddot{-} \beta \sum_{n \geq 0} \iota(\dot{r}_-)^{n_\beta} \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \right) \\
&= \frac{\ddot{i}}{\sqrt{\ddot{5}^\beta}} \beta \ddot{\times} \left(\beta \sum_{n \geq 0} \left(\iota(\dot{r}_+)^{n_\beta} \ddot{-} \iota(\dot{r}_-)^{n_\beta} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \right) \\
&= \iota \left(\frac{\ddot{i}}{\sqrt{\ddot{5}^\alpha}} \alpha \right) \ddot{\times} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{r}_+^{n_\alpha} \ddot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota \left(\frac{\ddot{i}}{\sqrt{\ddot{5}^\alpha}} \alpha \right) \ddot{\times} \iota(\dot{r}_+^{n_\alpha} \ddot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota \left(\frac{\ddot{i}}{\sqrt{\ddot{5}^\alpha}} \alpha \ddot{\times} (\dot{r}_+^{n_\alpha} \ddot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha}) \right) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta} .
\end{aligned}$$

Böylece (\dot{F}_n) α -Fibonacci dizisinin genel terimi

$$\dot{F}_n = \frac{\dot{1}}{\sqrt{5}^\alpha} \alpha \dot{\times} (\dot{r}_+^{n_\alpha} \dot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha})$$

olarak bulunur.

Şimdi bu dizi geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$

olduğundan $\dot{F}_n = \frac{\dot{1}}{\sqrt{5}^\alpha} \alpha \dot{\times} (\dot{r}_+^{n_\alpha} \dot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha})$ dizisi bilinen $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n)$ dizidir.

Bu dizinin $*$ - üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned} &= {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(F_n) \dot{\times} \iota(t)^{n_\beta} = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \dot{\times} \beta \left([\beta^{-1}(\iota(t))]^n \right) \\ &= {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \right) \dot{\times} \beta \left([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n \right) \\ &= {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \dot{\times} \beta(t^n) = {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \right) \times \beta^{-1}(\beta(t^n)) \right\} \\ &= {}_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \times t^n \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \times t^n \right\} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \cdot t^n \right\} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (r_+^n - r_-^n) \cdot t^n} = e^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} r_+^n \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n \cdot t^n \right\}} = e^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{1-r_+ \cdot t} - \frac{1}{1-r_- \cdot t} \right\}}. \end{aligned}$$

Şimdi bu dizi anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve

$\beta = I$ olduğundan (\dot{F}_n) α -dizi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \dot{F}_n &= \frac{\dot{1}}{\sqrt{5}^\alpha} \alpha \dot{\times} (\dot{r}_+^{n_\alpha} \dot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha}) = \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\frac{\dot{1}}{\sqrt{5}^\alpha} \alpha \right) \cdot \alpha^{-1} (\dot{r}_+^{n_\alpha} \dot{-} \dot{r}_-^{n_\alpha}) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{1})}{\alpha^{-1}(\sqrt{5}^\alpha)} \right\} \right) \cdot \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1}(\dot{r}_+^{n_\alpha}) - \alpha^{-1}(\dot{r}_-^{n_\alpha}) \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \frac{1}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left(\sqrt{\alpha^{-1}(\dot{5})} \right) \right)} \cdot \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1}(\dot{r}_+)]^n \right) \right) - \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1}(\dot{r}_-)]^n \right) \right) \right\} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right\} = e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)}.
\end{aligned}$$

Bu dizinin * – üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned}
& {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_n) \ddot{\times} l(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} l \left(e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)} \right) \ddot{\times} l(t)^{n_{\beta}} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)} \right) \right) \ddot{\times} \beta \left([\beta^{-1}(l(t))]^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\ln e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)} \right) \ddot{\times} \beta \left([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n \right) = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \ddot{\times} \beta \left((\ln t)^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \right) \times \beta^{-1} \left(\beta \left((\ln t)^n \right) \right) \right\} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \times (\ln t)^n \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \times (\ln t)^n \right\} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \times (\ln t)^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \cdot (\ln t)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} r_+^n \cdot (\ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n \cdot (\ln t)^n \right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \frac{1}{1 - r_+ \cdot \ln t} - \frac{1}{1 - r_- \cdot \ln t} \right\}.
\end{aligned}$$

Şimdi bu dizi bigeometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve

$\beta = \exp$ olduğundan (\dot{F}_n) α -dizi $F_n = e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)}$ dizisidir. Şimdi bu dizinin * –

üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned}
& {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_n) \ddot{\times} l(t)^{n_{\beta}} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} l \left(e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)} \right) \ddot{\times} l(t)^{n_{\beta}} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)} \right) \right) \ddot{\times} \beta \left([\beta^{-1}(l(t))]^n \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\ln e^{\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)} \right) \times \beta \left(\left[\beta^{-1} \left(\beta \left(\alpha^{-1}(t) \right) \right) \right]^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \times \beta \left((\ln t)^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \right) \times \beta^{-1} \left(\beta \left((\ln t)^n \right) \right) \right) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \cdot (\ln t)^n \right\} \\
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \cdot (\ln t)^n \right\} \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \cdot (\ln t)^n \right\} \\
&= e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (r_+^n - r_-^n) \cdot (\ln t)^n} = e^{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} r_+^n \cdot (\ln t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n \cdot (\ln t)^n \right\}} = e^{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \frac{1}{1 - r_+ \cdot \ln t} - \frac{1}{1 - r_- \cdot \ln t} \right\}}.
\end{aligned}$$

Bu örnek aynı dizinin *-üreteç fonksiyonunun farklı kalkülüsler için değişebileceğini göstermektedir.

Sonuç 3.2.3. (Binet formülü) $\iota(t)^{2\beta} \doteq \iota(t) \doteq \ddot{\mathbb{I}} = \ddot{\mathbb{O}}$ kuadratik denkleminin kökleri

$$\dot{r}_+ = \frac{\dot{\mathbb{I}} + \sqrt{\dot{\mathbb{I}}}}{2} \alpha \text{ ve } \dot{r}_- = \frac{\dot{\mathbb{I}} - \sqrt{\dot{\mathbb{I}}}}{2} \alpha \text{ olmak üzere}$$

$$\dot{F}_n = \frac{\dot{r}_+^{n\alpha} \doteq \dot{r}_-^{n\alpha}}{\dot{r}_+ \doteq \dot{r}_-} \alpha$$

genel terimi α - Fibonacci sayıları için Binet formülü olarak adlandırılır. $|\dot{r}_-|_{\alpha} < |\dot{r}_+|_{\alpha}$

ve $n \rightarrow \infty$ iken $\left(\frac{\dot{r}_-}{\dot{r}_+} \right)^{n\alpha} \rightarrow 0$ olacağından

$$\begin{aligned}
\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{F}_{n+1}}{\dot{F}_n} \alpha &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{r}_+^{(n+1)\alpha} \doteq \dot{r}_-^{(n+1)\alpha}}{\dot{r}_+^{n\alpha} \doteq \dot{r}_-^{n\alpha}} \alpha = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{r}_+^{(n+1)\alpha}}{\dot{r}_+^{n\alpha}} \alpha \cdot \frac{\dot{\mathbb{I}} \doteq (\dot{r}_- / \dot{r}_+)^{(n+1)\alpha}}{\dot{\mathbb{I}} \doteq (\dot{r}_- / \dot{r}_+)^{n\alpha}} \alpha \\
&= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{r}_+ \cdot \frac{\dot{\mathbb{I}} \doteq \dot{\mathbb{O}}}{\dot{\mathbb{I}} \doteq \dot{\mathbb{O}}} \alpha = \dot{r}_+
\end{aligned}$$

bulunur.

Buradaki $\alpha(r_+) = \dot{r}_+ = \frac{\dot{\mathbb{I}} + \sqrt{\dot{\mathbb{I}}}}{2} \alpha = 1,61803399$ sayısı α -‘Altın Oran’ olarak

adlandırılır. α -Altın oran denilen bu sayı; doğada, bitkilerde, çiçeklerde, ideal insan vücudunda, bazı mimari eserlerde ve birçok alanda görülebilir.

Burada özel olarak $\alpha = \exp$ alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{F}_n &= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\dot{r}_+^{n_\alpha} \dot{+} \dot{r}_-^{n_\alpha})}{\alpha^{-1}(\dot{r}_+ \dot{+} \dot{r}_-)} \right\} = \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\alpha \{ \alpha^{-1}(\dot{r}_+^{n_\alpha}) - \alpha^{-1}(\dot{r}_-^{n_\alpha}) \})}{\alpha^{-1}(\alpha \{ \alpha^{-1}(\dot{r}_+) - \alpha^{-1}(\dot{r}_-) \})} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(\alpha([\alpha^{-1}(\dot{r}_+)]^n)) - \alpha^{-1}(\alpha([\alpha^{-1}(\dot{r}_-)]^n))}{r_+ - r_-} \right\} = \alpha \left\{ \frac{r_+^n - r_-^n}{r_+ - r_-} \right\} = e^{\frac{r_+^n - r_-^n}{r_+ - r_-}}\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. Newtonyen Olmayan Lucas Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri

Fibonacci tekrarlama bağıntısını ve farklı başlangıç koşullarını kullanarak yeni sayı dizileri oluşturabiliriz. Bu sayı dizilerinden bir tanesi bu kısımda göreceğimiz Lucas sayı dizileridir.

Klasik kalkülüste her bir terimi kendisinden önceki iki teriminin toplamı şeklinde yazılabilen $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$ sayı dizisi Lucas sayı dizisi olarak bilinmektedir. Bu sayılara Lucas sayıları denir ve n . Lucas sayısı L_n ile gösterilir. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 0$ için $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ biçiminde tanımlanır (Koshy, 2001).

Şimdi Newtonyen olmayan Lucas sayı dizisi tanımlansın.

Tanım 3.3.1. Her $n \geq 0$ için dizinin n . terimi \dot{L}_n ile gösterilmek üzere başlangıç koşulları $\dot{L}_0 = \dot{2}$ ve $\dot{L}_1 = \dot{1}$ olan $\dot{L}_{n+2} = \dot{L}_{n+1} \dot{+} \dot{L}_n$ tekrarlama bağıntısı ile verilen (\dot{L}_n) α -dizisine α -Lucas sayı dizisi veya Newtonyen olmayan Lucas sayı dizisi denir. Bu dizinin birkaç terimi

$$\dot{2}, \dot{1}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{7}, \dot{11}, \dot{18}, \dots$$

biçimindedir. Bu sayılara α -Lucas sayıları denir.

Örnek 3.3.2. $\dot{L}_0 = \dot{2}$ ve $\dot{L}_1 = \dot{1}$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\dot{L}_{n+2} = \dot{L}_{n+1} \dot{+} \dot{L}_n$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen (\dot{L}_n) α -Lucas sayı dizisinin $*$ -üreteç fonksiyonunu ve genel terimi bulunsun:

Önce (\dot{L}_n) α -Lucas sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu bulunsun. Bunun için (\dot{L}_n) α -Lucas sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu

$$L^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{L}_n) \times \iota(t)^{n\beta}$$

olsun. Verilen tekraralama bağıntısı önerme (3.1.19) ile ilişkilendirilirse

$$\frac{L^*(t) \div \iota(\dot{L}_0) \div \iota(\dot{L}_1) \times \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{L^*(t) \div \iota(\dot{L}_0)}{\iota(t)} \beta \ddot{+} L^*(t)$$

yazılır. Bu eşitlikte $\iota(\dot{L}_0) = \iota(\dot{2}) = \ddot{2}$, $\iota(\dot{L}_1) = \iota(\dot{1}) = \ddot{1}$ değerleri yerlerine yazılarak

$$\frac{L^*(t) \div \ddot{2} \div \ddot{1} \times \iota(t)}{\iota(t)^{2\beta}} \beta = \frac{L^*(t) \div \ddot{2}}{\iota(t)} \beta \ddot{+} L^*(t)$$

elde edilir. Burada her iki yan $\iota(t)^{2\beta}$ ile β - çarpılsın ve düzenlensin:

$$L^*(t) \div \ddot{2} \div \ddot{1} \times \iota(t) = L^*(t) \times \iota(t) \div \ddot{2} \times \iota(t) \ddot{+} L^*(t) \times \iota(t)^{2\beta}$$

$$L^*(t) \div L^*(t) \times \iota(t) \div L^*(t) \times \iota(t)^{2\beta} = \ddot{2} \div \ddot{1} \times \iota(t)$$

$$L^*(t) \times (\ddot{1} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta}) = \ddot{2} \div \iota(t)$$

$$L^*(t) = \frac{\ddot{2} \div \iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta}} \beta .$$

Şimdi (\dot{L}_n) α -Lucas sayı dizisinin genel terimi bulunsun. Bunun için (\dot{L}_n) α -Lucas sayı dizisinin $*$ - üreteç fonksiyonu düzenlensin:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{2} \div \iota(t)}{\ddot{1} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta}} \beta &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{2} \div \iota(t))}{\beta^{-1}(\ddot{1} \div \iota(t) \div \iota(t)^{2\beta})} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{2}) - \beta^{-1}(\iota(t))\})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{1}) - \beta^{-1}(\iota(t)) - \beta^{-1}(\iota(t)^{2\beta})\})} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \frac{2 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))}{1 - \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))) - \beta^{-1}(\beta([\beta^{-1}(\iota(t))])^2)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{2 - \alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - (\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t))))^2} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{2 - \alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Böylece

$$L^*(t) = \frac{\ddot{\iota}(t)}{\dot{\iota}(t)^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{2 - \alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} \right\} \quad (3.20)$$

yazılır. Burada $1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2 = 0$ kuadratik denkleminin pozitif kökü $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

ve negatif kökü $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $r_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ve $r_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ alınarak * - üreteç fonksiyonu $\alpha^{-1}(t)$ değişkenine göre basit kesirlerine ayrılımsın:

$$\begin{aligned}
L^*(t) &= \frac{\ddot{\iota}(t)}{\dot{\iota}(t)^{2\beta}} \beta = \beta \left\{ \frac{2 - \alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{m}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \right\}.
\end{aligned} \quad (3.21)$$

β birebir fonksiyon olduğundan

$$\frac{2 - \alpha^{-1}(t)}{1 - \alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(t)^2} = \frac{m}{1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)} \quad (3.22)$$

yazılır ve payda eşitlemesi yapıldıktan sonra paylar eşitlendiğinde

$$2 - \alpha^{-1}(t) = m \cdot (1 - r_- \cdot \alpha^{-1}(t)) + n \cdot (1 - r_+ \cdot \alpha^{-1}(t))$$

$$m = 1, n = 1$$

olduğu görülür. Bu değerler (3.21) eşitliğinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
L^*(t) &= \frac{\ddot{\imath}(t)}{\ddot{\imath}(t) \imath(t)^{2\rho}} \beta = \beta \left\{ \frac{m}{1-r_+ \alpha^{-1}(t)} + \frac{n}{1-r_- \alpha^{-1}(t)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{1}{1-r_+ \alpha^{-1}(t)} + \frac{1}{1-r_- \alpha^{-1}(t)} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\beta(1))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(r_+ \alpha^{-1}(t)))} + \frac{\beta^{-1}(\beta(1))}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(r_- \alpha^{-1}(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(\beta(r_+)) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))))} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(\beta(r_-)) \cdot \beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\ddot{r}_+ \cdot \beta^{-1}(\imath(t)))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\ddot{r}_- \cdot \beta^{-1}(\imath(t)))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{r}_+) \cdot \beta^{-1}(\imath(t))\})} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{r}_-) \cdot \beta^{-1}(\imath(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\ddot{r}_+ \ddot{\imath}(t))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\ddot{r}_- \ddot{\imath}(t))} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\ddot{r}_+ \ddot{\imath}(t))\})} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\ddot{\imath}) - \beta^{-1}(\ddot{r}_- \ddot{\imath}(t))\})} \right\} \\
&= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath} \ddot{r}_+ \ddot{\imath}(t))} + \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath} \ddot{r}_- \ddot{\imath}(t))} \right\} = \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath} \ddot{r}_+ \ddot{\imath}(t))} \right\} \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(\ddot{\imath})}{\beta^{-1}(\ddot{\imath} \ddot{r}_- \ddot{\imath}(t))} \right\} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{r}_+ \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) + \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{r}_- \ddot{\times} \iota(t)} \beta \right) \right\} = \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{r}_+ \ddot{\times} \iota(t)} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{r}_- \ddot{\times} \iota(t)} \beta$$

olur. Burada $\ddot{r}_+ = \iota(\dot{r}_+)$ ve $\ddot{r}_- = \iota(\dot{r}_-)$ alınarak

$$L^*(t) = \frac{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t)}{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t) \ddot{\iota}(t)^{2\beta}} \beta = \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\times} \iota(t)} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\times} \iota(t)} \beta$$

yazılır.

Şimdi (3.3) eşitliği kullanılarak * – üreteç fonksiyonu * – kuvvet serisine genişletilsin:

$$\begin{aligned} L^*(t) &= \frac{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t)}{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(t) \ddot{\iota}(t)^{2\beta}} = \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(\dot{r}_+) \ddot{\times} \iota(t)} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \ddot{\iota}(\dot{r}_-) \ddot{\times} \iota(t)} \beta \\ &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{r}_+)^{n\beta} \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} \ddot{+} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{r}_-)^{n\beta} \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\iota(\dot{r}_+)^{n\beta} \ddot{+} \iota(\dot{r}_-)^{n\beta} \right) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} \\ &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{r}_+^{n\alpha} \ddot{+} \dot{r}_-^{n\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} . \end{aligned}$$

Böylece Newtonyen olmayan Lucas sayı dizisinin genel terimi

$$\dot{L}_n = \dot{r}_+^{n\alpha} \ddot{+} \dot{r}_-^{n\alpha}$$

biçiminde yazılır.

Şimdi bu dizinin genel terimi geometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olduğundan $\dot{L}_n = \dot{r}_+^{n\alpha} \ddot{+} \dot{r}_-^{n\alpha}$ α -dizi $L_n = r_+^n + r_-^n$ dizisidir. Bu dizinin * – üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(L_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \iota(r_+^n + r_-^n) \ddot{\times} \iota(t)^{n\beta} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\alpha^{-1}(r_+^n + r_-^n)) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\iota(t))]^n) \\ &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(r_+^n + r_-^n) \ddot{\times} \beta([\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(t)))]^n) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta(r_+^n + r_-^n) \ddot{\times} \beta(t^n) \\ &= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1}(\beta(r_+^n + r_-^n)) \cdot \beta^{-1}(\beta(t^n)) \right\} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ (r_+^n + r_-^n) \cdot t^n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ (r_+^n + r_-^n) . t^n \right\} \right) \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (r_+^n + r_-^n) . t^n \right\} \\
&= e^{\sum_{n=0}^{\infty} (r_+^n + r_-^n) . t^n} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} r_+^n . t^n + \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n . t^n} = e^{\frac{1}{1-r_+ . t} + \frac{1}{1-r_- . t}} .
\end{aligned}$$

Şimdi bu dizinin genel terimi anageometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve $\beta = I$ olduğundan $\dot{L}_n = \dot{r}_+^{n\alpha} + \dot{r}_-^{n\alpha}$ α - dizisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
L_n &= \dot{r}_+^{n\alpha} + \dot{r}_-^{n\alpha} = \alpha \left(\left[\alpha^{-1} (\dot{r}_+) \right]^n \right) + \alpha \left(\left[\alpha^{-1} (\dot{r}_-) \right]^n \right) = \alpha \left(\left[\ln \dot{r}_+ \right]^n \right) + \alpha \left(\left[\ln \dot{r}_- \right]^n \right) \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\left[\ln \dot{r}_+ \right]^n \right) \right) + \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\left[\ln \dot{r}_- \right]^n \right) \right) \right\} = \alpha \left\{ (\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right\} = e^{(\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n} .
\end{aligned}$$

Bu dizinin * - üreteç fonksiyonu bulunsun:

$$\begin{aligned}
& {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota(L_n) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} = {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \iota \left(e^{(\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n} \right) \ddot{\iota}(t)^{n\beta} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\alpha^{-1} \left(e^{(\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n} \right) \right) \ddot{\beta} \left(\left[\beta^{-1} (\iota(t)) \right]^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left(\ln e^{(\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n} \right) \ddot{\beta} \left(\left[\beta^{-1} \left(\beta \left(\alpha^{-1} (t) \right) \right) \right]^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left((\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right) \ddot{\beta} \left(\left[\ln t \right]^n \right) \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left((\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right) \right) . \beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\ln t \right]^n \right) \right) \right\} \\
&= {}_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta \left\{ \left((\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right) . (\ln t)^n \right\} = \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left\{ \left((\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right) . (\ln t)^n \right\} \right) \right\} \\
&= \beta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left((\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right) . (\ln t)^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\ln \dot{r}_+)^n + (\ln \dot{r}_-)^n \right) . (\ln t)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\ln \dot{r}_+)^n . (\ln t)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\ln \dot{r}_-)^n . (\ln t)^n = \frac{1}{1 - \ln \dot{r}_+ . (\ln t)} + \frac{1}{1 - \ln \dot{r}_- . (\ln t)} .
\end{aligned}$$

Şimdi bu dizi bigeometrik kalkülüs için incelensin. Bu durumda $\alpha = \exp$ ve $\beta = \exp$ olduğundan $\dot{L}_n = \dot{r}_+^{n\alpha} + \dot{r}_-^{n\alpha}$ α - dizi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{L}_{n+1}}{\dot{L}_n} \alpha &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{r}_+^{(n+1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n+1)\alpha}}{\dot{r}_+^{n\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{n\alpha}} \alpha = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{r}_+^{(n+1)\alpha}}{\dot{r}_+^{n\alpha}} \alpha \cdot \frac{\dot{1} \dot{\div} (\dot{r}_- / \dot{r}_+)^{(n+1)\alpha}}{\dot{1} \dot{\div} (\dot{r}_- / \dot{r}_+)^{n\alpha}} \alpha \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{r}_+ \cdot \frac{\dot{1} \dot{\div} \dot{0}}{\dot{1} \dot{\div} \dot{0}} \alpha = \dot{r}_+ \end{aligned}$$

yazılır. Burada (3.2.3) sonuçta gösterilen α -altın oran ile ilişkilendirilerek

$$\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{F}_{n+1}}{\dot{F}_n} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{L}_{n+1}}{\dot{L}_n} = \dot{r}_+$$

olduğu görülür. Bu eşitlikten dolayı Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önem kazanmıştır.

Fibonacci sayı dizileri ile Lucas sayı dizileri arasında birçok ilginç bağıntı bulunmaktadır. Aşağıdaki teorem ile klasik kalkülüsten bilinen Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisi arasındaki bir bağıntı, Newtonyen olmayan kalkülüste verilsin.

Teorem 3.3.4. $n \geq 1$ için $\dot{L}_n = \dot{F}_{n+1} \dot{+} \dot{F}_{n-1}$ olur.

İspat: Burada $r_+ \cdot r_- = -1$ olması da kullanılarak

$$\begin{aligned} \dot{F}_{n+1} \dot{+} \dot{F}_{n-1} &= \frac{\dot{r}_+^{(n+1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n+1)\alpha}}{\dot{r}_+ \dot{\div} \dot{r}_-} \alpha \dot{+} \frac{\dot{r}_+^{(n-1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n-1)\alpha}}{\dot{r}_+ \dot{\div} \dot{r}_-} \alpha \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\frac{\dot{r}_+^{(n+1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n+1)\alpha}}{\dot{r}_+ \dot{\div} \dot{r}_-} \alpha \right) \dot{+} \alpha^{-1} \left(\frac{\dot{r}_+^{(n-1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n-1)\alpha}}{\dot{r}_+ \dot{\div} \dot{r}_-} \alpha \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1} (\dot{r}_+^{(n+1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n+1)\alpha})}{\alpha^{-1} (\dot{r}_+ \dot{\div} \dot{r}_-)} \right\} \right) \dot{+} \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1} (\dot{r}_+^{(n-1)\alpha} \dot{\div} \dot{r}_-^{(n-1)\alpha})}{\alpha^{-1} (\dot{r}_+ \dot{\div} \dot{r}_-)} \right\} \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} (\dot{r}_+^{(n+1)\alpha}) - \alpha^{-1} (\dot{r}_-^{(n+1)\alpha}) \right\} \right)}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} (\dot{r}_+) - \alpha^{-1} (\dot{r}_-) \right\} \right)} \dot{+} \frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} (\dot{r}_+^{(n-1)\alpha}) - \alpha^{-1} (\dot{r}_-^{(n-1)\alpha}) \right\} \right)}{\alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \alpha^{-1} (\dot{r}_+) - \alpha^{-1} (\dot{r}_-) \right\} \right)} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1} (\dot{r}_+)]^{n+1} \right) \right) - \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1} (\dot{r}_-)]^{n+1} \right) \right)}{r_+ - r_-} \dot{+} \frac{\alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1} (\dot{r}_+)]^{n-1} \right) \right) - \alpha^{-1} \left(\alpha \left([\alpha^{-1} (\dot{r}_-)]^{n-1} \right) \right)}{r_+ - r_-} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}{r_+ - r_-} \dot{+} \frac{r_+^{n-1} - r_-^{n-1}}{r_+ - r_-} \right\} = \alpha \left\{ \frac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1} - (r_+ \cdot r_-) \cdot r_+^{n-1} + (r_+ \cdot r_-) \cdot r_-^{n-1}}{r_+ - r_-} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \frac{r_+^n \cdot (r_+ - r_-) + r_-^n \cdot (r_+ - r_-)}{r_+ - r_-} \right\} = \alpha \left\{ \frac{(r_+^n + r_-^n) \cdot (r_+ - r_-)}{(r_+ - r_-)} \right\} = \alpha \{ r_+^n + r_-^n \} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(\alpha(r_+^n)) + \alpha^{-1}(\alpha(r_-^n)) \right\} = \alpha(r_+^n) \dot{+} \alpha(r_-^n) = \alpha([\alpha^{-1}(\dot{r}_+)]^n) \dot{+} \alpha([\alpha^{-1}(\dot{r}_-)]^n) \\
&= \dot{r}_+^{n_\alpha} \dot{+} \dot{r}_-^{n_\alpha} = \dot{L}_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.4. Newtonyen Olmayan Üreteç Fonksiyonlarının Bir Listesi

1967 yılında V.E.Hoggatt, Jr. ve D.A. Lind, Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımı ve çeşitli kuvvetlerinin ürettiği 18 üreteç fonksiyonunun listesini klasik kalkülüste derlemişlerdir. Bu listedeki formüller şuna kadar kullanılan yöntemler yardımıyla Newtonyen olmayan kalkülüs için aşağıdaki gibi verilebilir:

- 1) $\frac{\iota(t)}{\ddot{\iota} \dot{+} \iota(t) \dot{+} \iota(t)^{2_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 2) $\frac{\ddot{\iota}}{\ddot{\iota} \dot{+} \iota(t) \dot{+} \iota(t)^{2_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 3) $\frac{\ddot{\iota} \dot{+} \iota(t)}{\ddot{\iota} \dot{+} \iota(t) \dot{+} \iota(t)^{2_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{L}_n) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 4) $\frac{\ddot{\iota} \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t)}{\ddot{\iota} \dot{+} \iota(t) \dot{+} \iota(t)^{2_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{L}_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 5) $\frac{\iota(t) \dot{+} \iota(t)^{2_\beta}}{\ddot{\iota} \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t)^{2_\beta} \dot{+} \iota(t)^{3_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_n^{2_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 6) $\frac{\ddot{\iota} \dot{+} \iota(t)}{\ddot{\iota} \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t)^{2_\beta} \dot{+} \iota(t)^{3_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_{n+1}^{2_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 7) $\frac{\ddot{\iota} \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \dot{+} \iota(t)^{2_\beta}}{\ddot{\iota} \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t)^{2_\beta} \dot{+} \iota(t)^{3_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_{n+2}^{2_\alpha}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$
- 8) $\frac{\iota(t)}{\ddot{\iota} \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t) \dot{+} \ddot{\iota} \ddot{\times} \iota(t)^{2_\beta} \dot{+} \iota(t)^{3_\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \iota(\dot{F}_n) \ddot{\times} \iota(\dot{F}_{n+1}) \ddot{\times} \iota(t)^{n_\beta}$

- 9)
$$\frac{\ddot{4} \doteq \ddot{7} \ddot{\times} l(t) \doteq l(t)^{2\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} l(t)^{3\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{L}_n^{2\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 10)
$$\frac{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{7} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{4} \ddot{\times} l(t)^{2\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} l(t)^{3\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{L}_{n+1}^{2\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 11)
$$\frac{\ddot{9} \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t) \doteq l(t)^{2\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} l(t)^{3\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{L}_{n+2}^{2\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 12)
$$\frac{l(t) \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \doteq l(t)^{3\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{6} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{3} \ddot{\times} l(t)^{3\beta} \ddot{+} l(t)^{4\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_n^{3\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 13)
$$\frac{l(t) \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t) \doteq l(t)^{2\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{6} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{3} \ddot{\times} l(t)^{3\beta} \ddot{+} l(t)^{4\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{n+1}^{3\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 14)
$$\frac{\ddot{1} \ddot{+} \ddot{5} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \doteq l(t)^{3\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{6} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{3} \ddot{\times} l(t)^{3\beta} \ddot{+} l(t)^{4\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{n+2}^{3\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 15)
$$\frac{\ddot{8} \ddot{+} \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{4} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \doteq l(t)^{3\beta}}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{6} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{3} \ddot{\times} l(t)^{3\beta} \ddot{+} l(t)^{4\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{n+3}^{3\alpha}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 16)
$$\frac{\ddot{2} \ddot{\times} l(t)}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \doteq \ddot{6} \ddot{\times} l(t)^{2\beta} \ddot{+} \ddot{3} \ddot{\times} l(t)^{3\beta} \ddot{+} l(t)^{4\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_n) \ddot{\times} l(\dot{F}_{n+1}) \ddot{\times} l(\dot{F}_{n+2}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 17)
$$\frac{\dot{F}_k \ddot{\times} l(t)}{\ddot{1} \doteq \dot{L}_k \ddot{\times} l(t) \doteq (\doteq \ddot{1})^{k\beta} \ddot{\times} l(t)^{2\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{kn}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta} \quad (\text{Hoggatt, 1971})$$
- 18)
$$\frac{\dot{F}_r \ddot{+} (\doteq \ddot{1})^{r\beta} \ddot{\times} \dot{F}_{k-r} \ddot{\times} l(t)}{\ddot{1} \doteq \dot{L}_k \ddot{\times} l(t) \doteq (\doteq \ddot{1})^{k\beta} \ddot{\times} (\doteq \ddot{1})^{k\beta} \ddot{\times} l(t)^{2\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{kn+r}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta} \quad .$$

Aşağıdaki Newtonyen olmayan kalkülüste verilen dört üreteç fonksiyonu 1971 yılında V.E. Hoggatt tarafından elde edildi.

- 1)
$$\frac{l(t)}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \ddot{+} l(t)^{2\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{2n}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 2)
$$\frac{\ddot{1} \doteq l(t)}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \ddot{+} l(t)^{2\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{2n+1}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$
- 3)
$$\frac{\ddot{3} \doteq \ddot{2} \ddot{\times} l(t)}{\ddot{1} \doteq \ddot{3} \ddot{\times} l(t) \ddot{+} l(t)^{2\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{L}_{2n+2}) \ddot{\times} l(t)^{n\beta}$$

$$4) \frac{l(t) \ddot{l}(t)^{2\beta}}{\ddot{l} \ddot{\ddot{l}}(t) \ddot{l}(t)^{2\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{L}_{2n+1}) \ddot{l}(t)^{(n+1)\beta}$$

$$5) \frac{\ddot{l}}{\ddot{l} \ddot{\ddot{l}}(t) \ddot{\ddot{l}}(t)^{2\beta} + l(t)^{3\beta}} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} l(\dot{F}_{n+1}) \ddot{l}(\dot{F}_{n+2}) \ddot{l}(t)^{n\beta} .$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Newtonyen olmayan kalkülüste üreteç fonksiyonu tanıtıldı ve bazı özellikleri gösterildi. Bazı dizilerin üreteç fonksiyonları Newtonyen olmayan kalkülüs kapsamında yer alan geometrik, anageometrik ve bigeometrik kalkülüs için incelendi. Fibonacci ve Lucas sayıları gibi bilinen sayılara karşılık gelen üreteç fonksiyonları Newtonyen olmayan kalkülüsün bu üç sınıfında temsil edildi ve bu temsiller arası farklılıklar belirtildi. Her bir kalkülüs içinde üreteç fonksiyonlarına karşılık gelen sayı dizileri gösterildi.

Benzer şekilde çeşitli sayı dizilerinin (Bernoulli, Stirling, Jacobsthal gibi) ve geliştirilmeleriyle oluşan sayı dizilerinin Newtonyen olmayan kalkülüste üreteç fonksiyonları araştırılabilir. Yine bu sayı dizileriyle oluşan polinom ve geliştirilmiş polinom dizilerinin Newtonyen olmayan kalkülüste üreteç fonksiyonları bulunabilir. Bulunan bu üreteç fonksiyonları Newtonyen olmayan kalkülüs kapsamında yer alan geometrik, anageometrik ve bigeometrik kalkülüs için incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Alaşalvar, İ. (2019). *Ağırlıklı Lebesgue dizi uzaylarının bazı geometrik özellikleri*. Yüksek lisans tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 79, Samsun.
- Çakmak, A.F., Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect ton on-Newtonian calculus, *Journal of Inequalities and Applications*, 228, 1-12.
- Duyar, C., Erdoğan, M. (2020). Non Newtonian generating functions. *Tbilisi Mathematical Journal*. (sunuldu)
- Duyar, C., Sağır, B. (2017). Non Newtonian comment of Lebesgue Measure in Real numbers, *Journal of Mathematics*, Article ID 6507013, 1-4.
- Erdoğan, F. (2016). *Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri*, Yüksek lisans tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 79, Samsun.
- Erdoğan, M., (2016). *Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller*. Yüksek lisans tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 89, Samsun.
- Grossmann, M., Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*, Pigeon Cove, Massachusetts.
- Kadak, U. (2015). *Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları*. Doktora tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 100, Ankara.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, A Wiley-Interscience Publications, Newyork.
- Verner E., Hoggatt Jr. (1969). Fibonacci and Lucas numbers. Houghton Mifflin Company, Boston. *Canadian Mathematical Bulletin*. 12(3). 367-367.
- Wilf, H.S. (1994). *Generatingfunctionology*. Department of Mathematics University of Pennsylvania, Philadelphia. Academic Press, Inc.

ÖZ GEÇMİŞ

Halide Yavuz Sarı, Samsun Ondokuz Mayıs Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'nden 2011 yılında mezun oldu. 2011 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi'nden Pedagojik Formasyon Sertifikası alarak 2012 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2018 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına girdi. 2012 yılından bu yana matematik öğretmeni olarak görev yapmakta olup orta derecede İngilizce bilmektedir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID: 0000-0001-8824-8243