

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**



**FONKSİYONEL DERECELİ PLAKALARIN BURKULMA
DAVRANIŞLARININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
İNCELENMESİ**

Doktora Tezi

Nihat CAN

Danışman

Prof. Dr. Naci KURGAN

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Nihat CAN tarafından, Prof. Dr. Naci KURGAN danışmanlığında hazırlanan “Fonksiyonel Dereceli Plakaların Burkulma Davranışlarının Sonlu Elemanlar Yöntemi İle İncelenmesi” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 26.4.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. İbrahim KELEŞ Samsun Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Naci KURGAN Ondokuz Mayıs Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Prof. Dr. Engin BURGAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Doç. Dr. Mevlüt GÜRBÜZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Yusuf KANCA Hitit Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

İmza

13/05/2021

Nihat CAN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Fonksiyonel Dereceli Plakaların Burkulma Davranışlarının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 13/03/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 5

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

İmza

13/05/2021

Prof. Dr. Naci KURGAN

ÖZET

FONKSİYONEL DERECELİ PLAKALARIN BURKULMA DAVRANIŞLARININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Nihat CAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Doktora, Mayıs/2021

Danışman: Prof. Dr. Naci KURGAN

Bu çalışmada, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden (FDM) yapılmış, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların (FDP) mekanik yükler etkisindeki burkulma davranışları sayısal olarak incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, yüksek mukavemet ve termal şoklara dayanıklı olma özellikleri ile ileri teknoloji malzemeleri arasında önemli bir yere sahiptirler. Fonksiyonel derecelendirilmiş plakalar günümüzde uzay ve uçak sanayi olmak üzere gemi ve inşaat gibi çok çeşitli sektörlerde kullanılmaktadır.

Gerçekleştirilen tez çalışması ile fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların aksenal bası yükleri altında tepkileri araştırılmış ve burkulma analizleri dikkate alınarak analitik denklemler çözümlenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların analizinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca ANSYS® paket programı kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş plakalarda burkulma analizleri yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların farklı sınır şartlarına bağlı olarak kritik burkulma değerleri araştırılmıştır.

Bu çalışmada, fonksiyonel dereceli malzemeyi oluşturan malzemeler olarak, alüminyum, seramik ve zirkonyum ele alınmıştır. Plakanın sonlu eleman denklemini elde etmek için ince plaka teorisi kullanılmıştır. Fonksiyonel dereceli plakanın malzeme derecelendirme fonksiyonu olarak güç yasası dikkate alınmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş plakanın derecelendirilmesi hem kalınlık, hem de uzunluğu yönünde ele alınmıştır. Daha sonra ise plakanın geometrisi değiştirilerek yamuk bir plaka için mekanik burkulma analizleri gerçekleştirilmiştir.

Gerçekleştirilen çalışmalarla, fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların en-boy oranlarının kritik burkulma değerlerinde önemli rol oynadığı, düzlem içi yükler altında plakanın kararlılığının en-boy oranı arttıkça azaldığı ve plaka kalınlığının artmasıyla kritik burkulma değerlerinin de arttığı gözlemlenmiştir. Çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar, literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Bu çalışmanın, yapı elemanı olan plakaların dizaynında, burkulma problemlerine karşı yardımcı olacağı öngörülmektedir. Çalışmada kullanılan yöntem ise farklı geometriler ve farklı malzeme bileşimleri için geniş çalışma alanı sunabilecektir.

Anahtar Sözcükler: Fonksiyonel derecelendirilmiş plaka, Mekanik burkulma, Sonlu elemanlar yöntemi, İnce plaka teorisi, Yamuk plaka.

ABSTRACT

BUCKLING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES USING FINITE ELEMENT ANALYSIS

Nihat CAN

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mechanical Engineering

Doctorate, May/2021

Supervisor: Prof. Dr. Naci KURGAN

In this study, the buckling behavior of Functionally Graded Plates (FDP) made of Functionally Graded Materials (FDM) under the influence of mechanical loads was numerically investigated. Functionally graded materials have an important place among high-tech materials with their high strength and thermal shock resistance. Functionally graded plates are used today in a wide variety of industries such as the aerospace and aircraft industry, as well as ship and construction.

With the thesis work carried out, the responses of functionally graded plates under axial compression loads were investigated and analytical equations were analyzed by considering buckling analysis. Finite element method was used in the analysis of functionally graded plates. In addition, analyzes were performed on functionally graded plates using ANSYS[®] package program. Critical buckling values of functionally graded plates have been investigated depending on different boundary conditions.

In this study, aluminum, ceramic and zirconium are considered as materials that constitute functional grade materials. Thin plate theory is used to obtain the finite element equation of the plate. The power law is taken into account as the material grading function of the functional grade plate. The grading of the functional graded plate is considered in both thickness and length direction. Then, by changing the geometry of the plate, mechanical buckling analyzes were performed for a trapezoid plate.

Studies have shown that the aspect ratios of functionally graded plates play an important role in critical buckling values, the stability of the plate under in plane loads decreases as the aspect ratio increases, and the critical buckling values increase with the increase in plate thickness. The numerical results obtained in the study have been verified by comparing with the current results in the literature. It is predicted that this study will help against buckling problems in the design of plates, which are structural elements. The method used in the study, on the other hand, will be able to offer a wide working area for different geometries and different material compositions.

Keywords: Functionally graded materials, mechanic buckling, finite elements method, thin plate theory, trapez plate.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla beni yönlendiren ve bana bilimsel çalışma yöntemlerini aktaran çok değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Naci KURGAN'a şükranlarımı sunarım. Yine tezimin ilerleyen dönemlerinde tavsiyelerini aldığım hocalarım Doç. Dr. Mevlüt GÜRBÜZ ve Prof. Dr. Engin BURGAZ'a teşekkür ederim.

Çalışmam süresince her zaman yanımda olan değerli eşim Aylin CAN'a ayrıca teşekkür ederim. Arkadaşım Ahmed HASSAN AHMED HASSAN'a teşekkür ederim. Kıymetli hocam Prof. Dr. İbrahim KELEŞ hocama teşekkür ederim.

Nihat CAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR	Vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	Viii
TABLolar DİZİNİ	X
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	6
3. KULLANILAN TEORİ VE YÖNTEM	27
3.1. Plakaların Elastik Analizi	27
3.1.1. İnce Plakalarda Eğilme	27
3.1.2. Plakalarda Eğilme ve Gerilme	31
3.1.3. Plakaların Eğilmesinde Şekil Değişirme Enerjisi	34
3.1.4. İnce Plakaların Burkulması	39
3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi	43
3.3. Plakalar için Sonlu Eleman Formülasyonu	45
3.3.1. Giriş	45
3.4. İnce Fonksiyonel Dereceli Plakaların Kararlılığı için Sonlu Elemanlar Analizi	51
3.4.1. Özelliklerin X Eksenine Boyunca Değiştiği Tek Eksenli Yüklü Fonksiyonel Dereceli Plaka	58
4. FONKSİYONEL DERECELİ PLAKALARIN ANALİZİ VE BULGULAR	63
4.1. FD Plakalarda Elastik Modülün Değişimi	63
4.1.1. Plakalarda Kritik Yük Değişimi	64
4.2. Fonksiyonel Dereceli Plakada X Eksenine Yönünde Elastik Modül Değişimi ..	64
4.2.2. Fonksiyonel Dereceli Plakada Elastisite Modülünün Kalınlık Yönünde Değişimi	70
4.3. Fonksiyonel Dereceli Yamuk Plaka	73
4.4. Elastik Modülün X Eksenine Boyunca Değişimi	76
4.5. Yamuk Plakada Elastik Modülün Plaka uzunluğu Yönünde Değişimi	80
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	90
5.1. Sonuçlar	90
5.2. Öneriler	91
KAYNAKLAR	92

SİMGELER VE KISALTMALAR

a, b	Plaka kenar uzunlukları
$\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2$	Isıl iletkenlik katsayıları
D	Plakanın eğilme rijitliği
G	Kayma modülü
m, n	X ve Y eksenini boyunca oluşan yarım sinüzoidal dalga sayısı
h, z	Plaka kalınlığı
U	Dikdörtgen plakada birim uzama enerjisi
$[D]_{fgm}$	FD Plaka rijitlik matrisi
ν	Poizson oranı
N_x	X ekseninde etkiyen kuvvet
E	Elastisite modülü
$E(x)$	Elastisite modülünün X eksenini yönündeki değişim fonksiyonu
$E(z)$	Elastisite modülünün Z eksenini yönündeki değişim fonksiyonu
$[K_F]$	Plaka katılık matrisi
$[K_F]_{fgm}$	FD Plaka katılık matrisi
M_x, M_y, M_{xy}	Eksenel moment bileşenleri
$(N_x)_{cr}$	Kritik burkulma Kuvveti
ρ_x, ρ_y	Eğri yarıçapı
w	Z eksenini yönünde deformasyon
δ	Varyasyon sembolü
λ, n	FD Plaka hacimsel oran üsteli
σ_x, σ_y	Gerilme tansörü
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Genleme tansörü
$\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2$	Isı iletim katsayıları
$\{a\}$	Yer değiştirme vektörü
b_1, L	Yamuk plaka boyutları
$[J]$	Jacobian matrisi
J_{ij}	Matrisin elemanı
$[K_{Gx}], [K_{Gy}], [K_{Gxy}]$	Plaka geometrik sertliği
$[L]$	Diferansiyel operatör
\tilde{N}	İnterpolasyon denklemi
$\tilde{N}_{,x}, \tilde{N}_{,y}, \tilde{N}_{,xy}, \tilde{N}_{,xy}, \tilde{N}_{,yy}$	İnterpolasyon denkleminin türev formları
$\tilde{N}_{,\xi}, \tilde{N}_{,\eta}, \tilde{N}_{,\xi\eta}, \tilde{N}_{,\xi\xi}, \tilde{N}_{,\eta\eta}$	İnterpolasyon denkleminin türev formları
$[T_1], [T_2]$	Sonlu elemanlar transform matrisi
θ_x	Plakanın y yönündeki açısı
θ_y	Plakanın x yönündeki açısı
θ_{xy}	Plakanın y yönündeki açısı
w	Plakanın z yönündeki yerdeğişimi
ψ	Alan değışkeni
δ	Değişim operatörü
τ	Koordinat transfer değışkeni
λ, n	Fonksiyonel dereceli plakanın değışim oranları
ξ, η	Eksen referansları
θ	Yamuk plakanın eğim açısı
$\{\psi\}$	Uzama vektörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. M_x ve M_y momentleri etkisindeki dikdörtgen plakanın eğilmesi	28
Şekil 3.2. xz ve yz düzlemlerine paralel iki çift düzlemle plakadan kesilmiş bir eleman	29
Şekil 3.3. Plakadan iki çift kesilerek küçük bir elemanda kuvvetlerin yansıtılması..	32
Şekil 3.4. Bir AB elemanı üzerindeki yer değiştirmeler	37
Şekil 3.5. Plak üzerinde alınan iki sonsuz küçük doğrusal elemanın x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri	38
Şekil 3.6. Kenarın birim uzunluğu başına basınç kuvvetinin büyüklüğü olan N_x ile sıkıştırılmış bir plaka.....	41
Şekil 3.7. Tüm kenarlar boyunca kenetlenmiş ve x yönünde sıkıştırılmış dikdörtgen bir plaka.....	43
Şekil 3.8. Köşede normalleştirilmiş bir referans ξ η olan dikdörtgen eleman	47
Şekil 3.9. 16 Serbestlik Derecesi ile Hermitian Dikdörtgen	50
Şekil 3.10. Plakadaki bir elemanın düğüm yer değiştirmeleri	52
Şekil 3.11. Düzlem içi Kenar Yükleme Dikdörtgen Plaka	55
Şekil 3.12. Gerçek bir öge ve karşılık gelen referans ögesi.	59
Şekil 3.13. Program akış şeması	62
Şekil 4.1. FD Plakada Elastik modülün k değerleri ile değişimi	63
Şekil 4.2. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile karşılaştırılmıştır. Plak boyutları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve sınır şartı ise CFFC durumu için elastic modül değişim fonksiyonu ise $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ kullanılmıştır	65
Şekil 4.3. FD plakada kritik burkulma değerinin değişen λ ile değişimi karşılaştırılmıştır. Plak boyutları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve CFFC sınır şartı için elastic modül değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ kullanılmıştır.....	66
Şekil 4.4. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile değişimi karşılaştırılmıştır. Plak boyutları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve FFFC sınır şartlarında elastic modül değişimi $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ fonksiyonu ele alınmıştır	67
Şekil 4.5. FD plakada kritik burkulma değerlerinin λ değerleri ile değişimi ele alınmıştır. Plakada boyut oranları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve FFFC sınır şartları için elastic modül değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemi ele alınmıştır.	68
Şekil 4.6. Basit mesnet ve ankastre mesnet kare plaka için burkulma değerleri karşılaştırılmıştır	69
Şekil 4.7. Dikdörtgen FDM plakada kalınlık yönünde özelliklerinin değişimi.	71
Şekil 4.8. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile değişimi incelenmiştir. Plak boyut oranları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve CFFC sınır şartı için elastic modül değişimi $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ fonksiyonu kullanılmıştır.	72
Şekil 4.9. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile değişimi ele alınmıştır. Plak boyut oranları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve FFFC sınır şartı için elastic modül değişimi $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ denklemi kullanılmıştır.	73
Şekil 4.10. Dört tarafından sabitlenmiş plakada tek yönlü kuvvet uygulanması	74
Şekil 4.11. Plakanın N_x yükü etkisinde sıkıştırılması	75
Şekil 4.12. Plaka aksenal bası yükü etkisinde parçalara bölünmüş	75
Şekil 4.13. Plakada alınan bir kesite etkileyen bası yükü	76

Şekil 4.14. Fonksiyonel Dereceli Yamuk plaka kenar-boy eşit ve elastik modül değişimi x eksen yönünde uzunluk yönünde özelliklerinin değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemi ile incelenmiştir.....	82
Şekil 4.15. Fonksiyonel Dereceli Yamuk plak kenar- boy eşit ve elastik modül değişimi x eksen yönünde uzunluk yönünde özelliklerinin değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemi ile incelenmiştir FFFC.....	83
Şekil 4.16. Fonksiyonel dereceli plakanın iki tarafı sabit diğer iki tarafı serbest durumda kritik burkulma değerlerinin X eksen boyunca $E=E_1e^{-\lambda x}$ fonksiyonu kullanılarak değişimini göstermektedir.....	84
Şekil 4.17. Fonksiyonel dereceli plakanın iki tarafı sabit diğer iki tarafı serbest durumda kritik burkulma değerlerinin X eksen boyunca $E=E_1e^{-\lambda x}$ fonksiyonu kullanılarak değişimini göstermektedir.....	85
Şekil 4.18. İki zıt kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli Fonksiyonel Dereceli plaka özellikleri için kritik burkulma yükleri	86
Şekil 4.19. İki zıt kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli FGM plakası özellikleri için kritik burkulma yükleri.....	87
Şekil 4.20. Bir kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli FGM plakası özellikleri için kritik burkulma yükler.....	88
Şekil 4.21. Bir kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli FGM plakası özellikleri için kritik burkulma yükler.....	89

TABLolar DİZİNİ

Tablo 2.1. Malzemelerin Mekanik Özellikleri.....	22
Tablo 4.1. Dört tarafından sabitlenmiş homojen seramik (Alimuna) kare plaka için kritik burkulma yüklerinin analitik ve ANSYS ile hesaplanması.....	64
Tablo 4.2. Basit mesnet FD plak için kritik burkulma kuvveti (MPa).....	68
Tablo 4.3. Ankastre FD plak için kritik burkulma kuvveti (MPa).....	69
Tablo 4.4. FD Plakada Burkulma Yüğü ile Malzeme Özelliklerinin Dügüm Noktaları ile Değişimi. Plak Sadece Bir Kenarı Ankastre Mesnet Diğer Kenarlar Serbest Mesnet (FFFC)	70



1. GİRİŞ

Günümüzde teknolojinin çok hızlı gelişimi ile birlikte araştırmacılar doğadaki mevcut malzemelerin özelliklerinin yetersizliğini fark etmişlerdir. Yapılan araştırmalar neticesinde alaşımlar akabinde kompozit malzemeler ve günümüzde ise fonksiyonel dereceli malzemeler sanayi kuruluşlarında geniş amaçlı kullanılmaktadır. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler, iki ya da daha fazla malzemedan oluşan ve bileşimin hacimsel oranlarının sürekli olarak belirli ölçülerdeki bir pozisyonun fonksiyonu olarak değiştiği ve gerekli olan bir işlevi yerine getirmek için üretilen malzemelerdir. Doğada homojen olmayan malzemeler genellikle malzeme tipleri içindeki belli nesnelere kademelendirilmesiyle, malzeme özelliklerinin kademelendirilmesi şeklinde ortaya çıkarlar. Bu kademelendirme istenen çevresel ve yükleme şartlarına en uygun malzemeyi elde etme çabasının bir sonucudur. Yapıya yük tatbik edildiğinde, iki farklı malzeme arasındaki ara yüzde yoğunlaşmış gerilmeler meydana gelmektedir. Bundan dolayı, ara yüz bölgesi çatlama ve ardından gelen kırılma için en hassas bölgedir. Homojen olmayan malzeme kullanılarak, kazançları en yüksek seviyeye çıkarmak mümkündür. Farklı malzemeler arasında keskin bir ara yüz yerine dengeli bir geçiş istenir. İki ya da daha fazla malzeme arasında bu dengeli geçişi sağlayan malzemeler Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (Functionally Graded Material, FGM) olarak adlandırılır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler kavramı ilk olarak 1984 yılında Japonya'nın Sendai bölgesindeki Ulusal Havacılık Laboratuvarlarında Niino ve arkadaşları tarafından fizyon reaktörlerinde ve uzay araçlarında ısı bariyeri olarak kullanılmak üzere önerilmiştir. Uzay gemisinin gövdesi çok yüksek sıcaklıklara (yaklaşık 1700 C^0) maruz kalmış ve uzay gemisinin içi ve dışı arasındaki sıcaklık farkı nedeniyle bu koşullara dayanabilecek bir malzeme bulunmuyordu. Araştırmacılar, düzgün bir şekilde değişen kompozisyon gösteren ve ısı dayanımı ve mekanik özellikleri iyi olan bir malzemeyi imal etmek için fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeleri tasarlamışlardır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi seramik ve yüksek ısı iletkenliğine sahip bir malzeme ile imal etmeyi düşünmüşlerdir. Seramik, yüksek sıcaklığa maruz kalan yüzeyde ısı direnç amaçlı, diğer malzeme ise iç yüzeyde kullanılacaktı. 1987'de fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme araştırmaları Eğitim ve Bilim Bakanlığı tarafından desteklenmek üzere

seçilmiştir. 1987'den 1991'e kadar araştırma projesi "Isıl gerilme analizi için Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme geliştirme araştırması" olarak isimlendirildi ve çeşitli üniversitelerden birçok araştırmacı ve araştırma enstitüleri bunda rol almıştır. Projede yoğun olarak malzeme geliştirme metotları tartışılmış ve malzeme tasarımını içeren bir işbirliği sistemi kurulmuştur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, 1992'de Japonya'daki 10 gelişmiş teknolojidenden biri olarak görülmüştür.

Seçilen üretim metotlarına göre fonksiyonel dereceli malzeme üretilmektedir. Kaplama teknolojisi, teknolojik malzemelerin kabiliyetlerinin artırılabilirdiği bir yöntem olarak değerlendirilmektedir. Kullanılan seramik malzeme ısı direnç olarak kompresör ve türbinlerde verimi artırmak amacı ile tercih edilmektedir. Takım tezgâhlarındaki kesicilerin daha uzun süre kullanmak ve kesme performansını artırmak için aşınmaya dayanıklı seramik ile kaplanır. Pratikte kullanılan bu kaplama tekniği alt tabakanın üzerine tek katmanlı homojen kaplama olarak uygulanmaktadır. Bu uygulama ısı genleşme katsayılarındaki uyumsuzluklar sebebiyle çatlamalara neden olmaktadır. Bu hataları ortadan kaldırmak amacı ile fonksiyonel dereceli malzemeler geliştirilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan üretilmiş bir malzeme formu verilebilmekte ve malzeme özellikleri, kaplamanın kalınlığı yönünde kademeli olarak sürekli değiştirilebilmektedir. Yani malzeme oranları kalınlık yönünde kademeli olarak değişmektedir. Kaplamanın en altında tamamıyla homojen bir malzeme özelliği taşırken kaplamanın üst kısmı ise farklı bir malzeme ile homojen olarak kaplıdır. Bu uyum sayesinde malzeme arasındaki ısı gerilmelerden oluşan çatlamlar önlenmiş olur. Özellikle uzay taşıtlarında istenen yüksek mukavemet ve ısı direnç fonksiyonel dereceli malzemeler sayesinde elde edilmiştir. Metalin işlenebilirliği ve elektrik geçirgenliği ile seramiğin yüksek mukavemeti ve ısı direnci ile birleşiminden oluşan malzeme yapısı bu alanda birçok ihtiyaca cevap vermektedir.

Burkulma olayına birçok makine ve yapısal elemanlarda sıkça görülmektedir. Örneğin çekme kuvvetine karşı oldukça dayanıklı olan ince plakalar basınç iletirken oldukça dayanıksızdırlar. Denizaltı gemileri, vakum tankları, yer altına döşenen borular, kafes yapıları gibi mühendislik sistemleri uygun şekilde tasarlanmazlarsa burkulur ve kullanılamaz hale gelirler. Burkulmada karşılaştırma değeri kritik burkulma yüküdür. Kritik burkulma yükü; plaka, çubuk gibi elemanların kritik dengelerinin kaybolduğu andaki yük değerine denir. Kritik yük aşıldığında şekil

değiştirmeler sonsuza gitmekte ve sistemin yeniden dengeye dönmesi mümkün olmamaktadır. Burkulmada önemli olan, bir plaka kararlı durumdan kararsız duruma geçerken her zaman nötr denge durumundan geçmesidir. Nötr denge, kararlı denge ve kararsız denge arasında bir sınır oluşturur. Elastik denge problemlerinin matematiksel denkleminde, nötr denge, deformasyonda çatallanmanın olmasıyla gösterilir. Bu denkleme göre, kritik yük denge durumlarının çatallaştığı yere göre tanımlanmaktadır veya bir başka deyişle, kritik yük hem plakanın ilk dengesini hem de çok az eğilmiş durumdaki dengesinin aynı olması için kullanılan en küçük yüküdür (Ventsel & Krauthammer, 2001).

Yapılarda çubuk, kiriş, mil, levha, plaka ve kabuklar taşıyıcı sistem olarak belirtilebilir. Bu yapıların dış etkiler altında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, güvenli tasarım oluşturmak için çok önemlidir. Bu çalışmada ele alınan yapı plakalardır. Plakalar, kalınlıkları diğer iki boyutunun yanında oldukça küçük değerler alan elemanlardır. Yani, ince plakalar hafif ağırlığı ve biçim verimliliği, yüksek yük taşıma kapasitesi, ekonomi ve teknolojik etkiler ile birleştirilmiştir (Ventsel & Krauthammer, 2001).

Plaka elemanları başta uçak sanayi olmak üzere gemi, inşaat gibi pek çok sektörlerde yapı malzemesi olarak kullanılmaktadır. Bu yapılar burkulmaya çok elverişli olduğundan kullanılmadan önce çok iyi hesaplanmalıdırlar. Bu özelliğinden dolayı: plakaları takviye elemanları ile desteklemek ve malzeme türlerini değiştirerek kullanmak gerekir. Makine ve yapı elemanlarının tasarımında üç temel karakteristik bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla gerilme (akma veya kırılma), şekil değiştirme (rijitlik) ve burkulma (stabilite) problemleridir. Eğer denge konumu kararlı olmayıp sistemde oluşabilecek en küçük bir farklılık sistemde çok büyük şekil değiştirmeye yol açabilir ve sistemin tekrar eski konumuna dönmesi imkânsızlaşır. Bu tip problemlere stabilite problemi denir.

Çok katmanlı ve fonksiyonel kademelendirilmiş plakalar genellikle seramik-metal esaslıdırlar ve yüksek sıcaklık uygulamalarında ısı bariyer olarak kullanılırlar. Çok katmanlı plakalarda kalınlık boyunca malzeme kompozisyonundaki değişim katmandan katmana kademeli olurken, fonksiyonel kademelendirilmiş plakalarda malzeme kompozisyonu kalınlık boyunca sürekli olarak değişir. Malzeme kompozisyonundaki bu sürekli değişim fonksiyonel kademelendirilmiş plakaların katmanları arasında daha düşük artık gerilmelerin oluşmasını sağlar.

İnce plakalar başlangıçta iki paralel plaka tarafından sınırlandırılan yüz adı verilen düz yapısal elemanlara ve kenar veya sınır olarak adlandırılan silindirik yüzeylere sahiptirler. Silindirik yüzeyin oluşturucuları düzlem yüzlerine diktir. Düzlem yüzleri arasındaki mesafe, plakanın kalınlığı olarak (h) olarak adlandırılır. Plaka kalınlığının diğer karakteristik uzunluklarla (uzunluk, genişlik, çap, v.s.) karşılaştırıldığında küçük olduğu varsayılır. Geometrik olarak, plakalar düz ve eğimli sınırlar tarafından sınırlandırılır.

Literatürde plakaları inceleyen pek çok çalışma görülmektedir. Bu çalışmalarda şekil değiştirmelerini hesaba katan en kolay teori birinci derece Kayma Şekil Değiştirme ifadesidir. İkinci Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi ise kayma şekil değiştirmelerini kalınlık boyunca sabit almıştır. Kayma kuvvetini elde etmek için kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç vardır.

Bu çalışmada ince plaka kullanılmıştır. Bu sebeple fonksiyonel dereceli plaka Klasik Plaka Teorisi (KPT)'ye göre düzlem içi yer değiştirmeler kalınlık boyunca lineer değiştiği ve enine yer değiştirmelerin kalınlık boyunca sabit olduğu kabul edilmiştir. Çalışmada kullanılan fonksiyonel dereceli plakanın deformasyon öncesi plaka orta yüzeye dik olan normaller, deformasyon sonrası da orta yüzeye normal ve uzamamış olarak kabul edilmektedir. Fonksiyonel dereceli plakanın yer değiştirmesi kalınlık ile karşılaştırıldığında çok küçük değer almaktadır. Bu sebeple doğrusal birim uzama-yer değiştirme denklemleri geçerlidir. Bu sebeple kalınlık yönünde olan normal gerilmeler ihmal edilmektedir. Fonksiyonel dereceli plakanın Poizon oranı ve Elastisite Modülü plakanın kalınlığı yönünde kademeli olarak değişmektedir, yani plaka homojen bir malzeme değildir.

Plakanın yük taşıma faaliyeti kesin bir ölçüye, kirişlere veya kablolarla benzerdir, bu nedenle plakalar yapının eğilme sertliğine bağlı olarak sonsuz sayıda kablunun şebeke oluşturması veya sonsuz sayıda kablunun ağ oluşturması gibi düşünülebilir. Plakaların bu iki boyutlu yapısal hareketleri gemi yapılarında meydana gelmektedir ve bu yüzden birçok ekonomik avantaj sağlamaktadır. Orijinali düz olan plaka, enine yükleri direnir, kayma kuvvetleri gelişir ve eğilme ve burulma momentlerini oluşturur. Yüklerin her iki yönde de taşınmasından ve izotropik plakalarda burulma rijitliğinin oldukça önemli olmasından dolayı plaka, karşılaştırılabilecek gerilme ve kalınlığı olan kirişten çok daha fazla rijittir.

Yapılan literatür araştırmalarında, çalışmanın temelini oluşturacak plakanın

elastik yüzeyinin diferansiyel denklemi ve plaka elemanına ait enerji denklemlerine ulaşılmıştır. Bu denklemlerden yararlanılarak burkulmanın tanımı ve analitik denklemlerin elde edilişi gözden geçirilmiştir.

Bu doktora çalışması ile fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların aksel bası yükleri altında tepkileri araştırılmış ve burkulma analizleri dikkate alınarak analitik denklemler çözümlenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların analizinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış ve karmaşık problemlerin çözümünde yaklaşık değerler elde edilmesi sağlanmıştır. Ayrıca ANSYS® paket programı kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş plakalarda burkulma analizleri yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların farklı sınır şartlarına bağlı olarak kritik burkulma değerleri araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar literatür çalışmaları ile karşılaştırılmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Günümüze kadar araştırmacılar plakalar üzerine pek çok çalışmalar yapmışlar ve günümüzde kullandığımız diferansiyel denklemlerin temelini oluşturmuşlardır. Bugün kullandığımız paket programlar ise çok hızlı veriler elde etmemizi sağlamaktadır. Bu sebeple literatür araştırması yapılarak incelenen yöntemler çalışmamızın ilerlemesinde çok ciddi yön vermiştir. Literatür taramamıza öncelikli olarak ülkemizdeki çalışmalara göz atarak başlanmıştır. Fonksiyonel dereceli malzemelerin üretiminden başlayarak kullanım alanlarına kadar birçok kaynak bulunmaktadır. Burada fonksiyonel dereceli plakalar başta olmak üzere kullanılan sayısal yöntemler ve kullanılan programlar dikkatle incelenmiştir. Yapılan çalışmalar aşağıda sıralanmıştır.

Osman v.d. dikdörtgen lamine plakaların burkulma analizini incelemişlerdir. Diferansiyel denklemlerin çözümünde sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Dikdörtgen kesit plakaların çeşitli en ve boy oranlarına göre burkulma değerlerini elde etmişlerdir. Kullanılan tekniğin doğruluğunu literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemi tek eksenli ve çift eksenli sıkıştırma için güvenilir yöntem olduğunu göstermişlerdir. En-boy oranı hem tek eksenli hem de çift eksenli yükleme için arttıkça burkulma değerlerini etkilediğini göstermişlerdir. Yüksek elastisite modülü değerleri için en boy oranı ile burkulma değerlerinin sabitlendiğini ifade etmişlerdir (Osman & Suleiman, 2017).

Girgin v.d. diferansiyel yöntemini kullanarak deformasyon ve burkulma analizi yapmışlardır. Diferansiyel kareleme yöntemi 1970'lerde Richard Bellman tarafından geliştirilmiş sayısal bir çözüm yöntemidir. Sınır koşulları ve yükleme çeşidine göre çeşitli çözümler elde etmişlerdir. Elde edilen değerleri mevcut değerler ile karşılaştırmışlardır (Girgin vd., 2000).

Doğan makalesinde basit desteklenen ince ve kalın kompozit plakaların burkulmasını incelemiştir. Hamilton prensibine dayalı ince ve kalın kompozit plakalar için denklemler türetmiştir. Düzlem içi yüklere maruz ince ve kalın kompozit dikdörtgen plakalar için hareket denklemini Hamilton prensibine dayalı oluşturmuştur. Çalışmasında plakanın kenar oranları ve anizotropinin burkulmaya etkisini araştırmıştır. Sonuçları ise Ansys paket programı ve literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırmıştır (Doğan, 2020).

Evran çalışmasında tabakalı fonksiyonel dereceli kabuk yapıların kritik burkulma yük analizini yapmıştır. Malzeme olarak silisyum nitür ve paslanmaz çelik kullanmıştır. Optimum tabaka seviyeleri sinyal gürültü analizi kullanarak elde etmiştir. Sonuçlar üzerinde önemli tabakalar ve onların yüzde katkıları varyans analizi (ANOVA) kullanarak tespit etmiştir. Maksimum burkulma yük değeri optimum tabakaların farklı sıralamasına bağlı gerçekleştirmiştir (Evran, 2018).

Civalek v.d. dikdörtgen plakalarda burkulma analizini Kirchoff teorisini kullanarak incelemiştir. Ayrık tekil yöntemi benimsemiştir. Karşılıklı iki kenarda eşit olmayan yük dağılımını dikkate almıştır. Farklı sınır koşulları ve en boy oranları için değerler elde etmiştir. Elde ettikleri değerleri daha önceki çalışmalar ve analitik çözümler ile karşılaştırmıştır. Kullanılan yöntemin doğruluğunu ve basitliğini ortaya koymuştur (Civalek vd., 2010).

Komur ve Sönmez delikli plakalarda eksenel yük altında burkulmayı incelemiştir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanarak kare ve dikdörtgen delikli plakada burkulma analizi yapmıştır. Burkulma kuvvetine etkiyen deliklerin ve plaka geometrisinin önemini ortaya koymuştur (Komur & Sonmez, 2015).

Solmaz v.d. tabakalı kompozit plakaların burkulma problemini incelemiştir. Çapraz takviyeli cam fiber ve epoksi matriksten üretilmiş tabakalı kompozit plakalar kullanmıştır. Farklı fiber takviye açılarında simetrik ve anti simetrik tabaka dizilimleri için deneysel ve sayısal analiz yapmıştır. Ansys paket programında plakaların sonlu elemanlar modellerini hazırlayarak burkulma yüklerini hesaplamıştır. Anti simetrik tabaka dizilimine göre simetrik tabaka dizilimli kompozit plakaların burkulma yüklerinin daha düşük olduğunu ortaya koymuştur (Solmaz vd., 2010).

Işıtan çalışmasında fonksiyonel dereceli malzemedeki lineer burkulma analizi çalışmıştır. Çalışmasında eksenel olarak basıya zorlanan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeyi incelemiştir. Malzeme özelliklerinin kuvvet kuralına uygun olarak genişlik boyunca sürekli değiştiğini kabul etmiştir. Ansys programı kullanarak fonksiyonel dereceli malzemenin sonlu elemanlar simülasyonunu yapmıştır. Derecelendirme, yükleme yönü ve kuvvet kuralının etkilerini ortaya koymuştur (Işıtan, 2016).

Altan ve Kartal kare delikli ortotropik plakada burkulma analizi yapmıştır.

Bir doğrultulu statik düzlemsel yükler etkisindeki basit mesnet kare delikli ortotropik dikdörtgen plakaların burkulma analizinde sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Elde edilen sonuçların kritik burkulma yükünü doğrudan etkilediğini belirtmişlerdir. Delik boyutunun büyüdükçe kritik burkulma değerinin azaldığını göstermişlerdir (Altan & Kartal, 2005).

Akhavan v.d. çalışmalarında plakaların burkulma analizinde kesin çözümler ortaya koymuşlardır. İki zıt kenarda düzgün ve doğrusal olarak dağıtılmış düzlem içi yük uygulamışlardır. Dikdörtgen plakanın denklemlerini çıkarmak için elastik temele dayanan Midlin Plaka teorisini dikkate almışlardır. Elastik temel Winkler modeline bir kesme katmanı ekleyerek Pasternak modeli oluşturmuşlardır. Ardından temel rijitlik katsayılarının ve sınır koşullarının etkisini araştırmışlardır. Düzlem içi yük burkulmasına ilişkin yükleme faktörleri kapsamlı bir şekilde tablo halinde sunmuşlardır (Akhavan vd., 2009). Tolga ve Akbulut dört bir kenarına dairesel çentik açılmış olan kompozit plakaların burkulma davranışlarını incelemiştir (Tolga & Akbulut).

Öktem A. S. fonksiyonel dereceli ileri kompozit plakaların statik analizini yapmıştır. Analitik bir çözüm tekniği kullanmıştır. Plakanın mekanik özelliklerinin kalınlık boyunca, bileşenlerin hacim oranları ölçüsünde üstel bir şekilde dağıldığı kabul etmiştir. Kısmi türevli yüksek dereceden lineer diferansiyel denklemlerin oluşturduğu sistem için farklı sınır koşullarını incelemiştir. Süreksiz fourier serileri yöntemini kullanarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kompozit plakaları incelemiştir. Elde edilen sonuçları Ansys paket program sonuçları ile karşılaştırmıştır. Sonuçların sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen değerler ile örtüşüğünü göstermiştir (Öktem, 2014).

Ülkemizde fonksiyonel dereceli malzemeler ve kullanılan metotlar üzerine birçok çalışma yapılmış ve literatürde yer almıştır. Yapılan yayınlar tez çalışmamın ilerlemesinde önemli rol oynamıştır. Daha sonrasında ise uluslararası makaleleri ve tezleri incelediğimizde önemli çalışmalar olduğunu görmekteyiz. Fonksiyonel dereceli malzemeler üzerine önemli yayınlar yapmış bilim insanları görmekteyiz. Fonksiyonel dereceli plakalar, sonlu elemanlar yöntemi ve plakaların burkulma problemi üzerine yapılan önemli uluslararası makaleler aşağıda sıralanmıştır.

Abolghasemi vd. eliptik kesim fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin burkulma analizini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Termal ve

mekanik yükler aynı anda uygulanmıştır. Malzeme özelliğinin plaka kalınlığı boyunca hacim oranına bağlı değiştiğini kabul etmişlerdir. Plaka formülasyonu Birinci Derece Kayma Deformasyon Teorisi (F.S.D.T.) ve eleman rijitlik matrislerine dayalı enerji prensibine göre incelemiştirlerdir. Sınır şartları, plaka en boy oranı ve kesme yarıçapının burkulmaya etkilerini incelemişler ve sonuçları grafikler ile sunmuşlardır (Abolghasemi vd, 2014). Alinia aksenal yüklemeli izotropik plakaların burkulma davranışlarını incelemiştir (Alinia, 2004).

Asemi v.d., halka şeklindeki plakaların üç boyutlu burkulma analizini yapmışlardır. Plaka teorisi yerine üç boyutlu elastisite yaklaşımını kabul etmişlerdir. Radyal ve çevresel kesme yükü için farklı sınır koşulları için burkulmaya etkisini incelemiştirlerdir. Burada malzeme derecesi, sektör açıları, en-boy oranı ve kalınlık oranının burkulmaya etkilerini araştırmışlardır (Asemi vd., 2015).

Bhandari ve Purohit fonksiyonel dereceli plakaları incelemiştirlerdir. Malzeme değişim oranı olarak güç, sigmoid, üstel denklemlerini kullanmışlardır. Fonksiyonel dereceli plakanın statik analizi sigmoid yasası ile yapmışlardır ve elde edilen veriler literatürdeki veriler ile karşılaştırmışlardır (Bhandari & Purohit, 2014a).

Bhandari M. Ve Purohit K. fonksiyonel dereceli plakaların farklı sınır şartları altında enine yükler etkisi altında FDM malzemelerin üç farklı durumu için inceleme yapmışlardır. Fonksiyonel dereceli malzemeler ihtiyaca göre bileşenleri değiştirilerek farklı durumlara uyum sağlaması nedeniyle çeşitli uygulamalarda en yaygın kullanılan malzemelerden biridir. Mühendislik alanında kullanılan çoğu yapısal bileşen olarak kirişler, plakalar ve kabuklar olarak sınıflandırılabilir. FDM plakaların kalınlık boyunca hacimsel oranı üç farklı yöntemle incelenmiştirlerdir. Bunlar sırasıyla üssel oran, sigmoid, kuvvet kanunu yöntemleridir. Yapılan çalışmada farklı tabaka boyutları ve ağ boyutları ile optimum değerler elde etmişlerdir(Bhandari & Purohit, 2014b).

Chen ve arkadaşları Von Karman Plaka teorisine dayanan enine kayma deformasyon etkisini dikkate alarak eliptik delemasyonlu aksi-simetrik tabakalı dairesel plakaların ön burkulma yüklerini bulmak için denklemler oluşturmuşlardır (Chen vd.,2001).

Chmielewski M. ve Pietrzak K. metal ile seramik iki malzemenin fonksiyonel dereceli malzeme üretimi, karakteri ve uygulama alanları üzerine çalışma

yapmışlardır. Fonksiyonel dereceli malzemeler özel kullanım alanları sebebiyle üretilmişlerdir. Üretim yöntemi, seçilen malzeme özellikleri ileride kullanım alanları için yön göstermeyi amaçlamıştır (Chmielewski & Pietrzak, 2016).

Daimi ve Bhalchandra, seramik-metal fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin Üçüncü Derece Kayma Deformasyon Teorisine göre termal burkulma analizini yapmışlardır (Daimi & Bhalchandra, 2014).

Daouadji H.T. ve Adim B. fonksiyonel dereceli plakaların burkulmasına analitik yaklaşım yapmışlardır. FDM plakanın hacimsel oranı olarak üssel kuvvet oranı seçmişlerdir. Toplam potansiyel enerji prensibinden gerekli denklemleri elde etmişlerdir. FDM dikdörtgen plakanın farklı kalınlık oranlarına göre kritik burkulma yükü hesaplamışlardır (Adim vd., 2016).

Dima izotropik düz plakanın merkez düzlemine etkileyen kuvvetlerin kritik değerlerini belirlemek için hızlı bir metot kullanmıştır. Sınır şartları ve yükleme türüne göre kapsamlı bir burkulma analizi amaçlamıştır. Dikdörtgen düz ince plaka için basit mesnet ve sabit mesnet sınır koşullarını dikkate almıştır. Paket program olarak Assist 6.6.2.2.0 Airbus France yazılımını tercih etmiştir. Elde ettiği değerlerin farklı iki metot ile örtüştüğünü göstermişlerdir (Dima, 2015).

Dhiraj S. V. , vd. fonksiyonel dereceli plakaların kuvvet gerilme analizlerini plakadan alınan dairesel parça için çalışma yapmışlardır. Yapılan çalışmada sonlu elemanlar yöntemi ve ANSYS APDL paket programı kullanmışlardır. Fonksiyonel dereceli perforeli plaka için kuvvet analizi yapmışlardır. FDM perforeli plakalar için uzama, gerilme konsantrasyonunun malzeme değişim oranıyla azaltılabileceğini açığa çıkarmışlardır (Jadvani vd., 2017).

Doiphode ve Patodi plakalarda burkulma analizi için sistematik bir birleştirme prosedürü kullanmışlardır. Denge denklemlerine dayalı bir yöntem önermişlerdir. Entegre kuvvet metoduna dayalı 9 bilinmeyen kuvvet ve 12 yer değiştirme serbestlik derecesine sahip plakanın analizini yapmışlardır. Burkulma analizi için gerekli olan geometrik sertlik matrisini türetmişlerdir. Matlab yazılımı ve VB.NET yazılan programlar ile tek eksenli yükleme için yedi farklı sınır koşulu altında çalışma yapmışlardır. Önerilen yöntemin geçerliliğini göstermek için klasik çözümler ile karşılaştırmışlardır (Doiphode & Patodi, 2012).

Feldman ve Aboudi fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakaların elastik

çatallanma burkulmasını incelemişlerdir. Plakanın uzunluk, genişlik ve farklı tiplerinin etkilerini ortaya koymuşlardır (Feldman & Aboudi, 1997).

Ferreira ortotropik davranışa sahip olduğu kabul edilen bir kompozit kabuğa çok katlı Marguerre kabuk eleman formülasyonu uygulamak suretiyle, kompozit kabukların lineer olmayan analizini yapmıştır. Malzemenin ortotropik bir davranışa sahip olduğunu varsaymıştır. Denge denklemlerini sonlu elemanlar yönteminin Lagrange yer değiştirme denklemini kullanarak türetmiştir. (Ferreira & Barbosa, 2000).

Hajlaoui v.d. fonksiyonel dereceli yapıların burkulma analizini incelemişlerdir. Çalışmalarında birinci derece kayma deformasyon teorisini kullanmışlardır. Malzeme özelliklerinin kalınlık yönünde değiştiğini kabul etmişlerdir. Bu sonlu elemanı fonksiyonel dereceli yapının burkulma analizi için kullanmışlardır. Elde ettikleri sonuçları daha önceki çalışmalar ile karşılaştırmışlar ve sonuçların örtüşüğünü grafikler ile göstermişlerdir (Hajlaoui vd., 2015).

Hamad ve Tarlochan, fonksiyonel derecelendirilmiş iç içe plakaların bükülme analizini diferansiyel kuadratür (GDQ) yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Literatürde elde edilen sonuçlara yakınsadığını göstermişlerdir (Hamad & Tarlochan, 2013).

Hasselmann ve Youngblood çalışmalarında kullandıkları fonksiyonel derecelendirilmiş plaka için seramik ve alüminyum seçmişlerdir. Plaka alt ve plaka üst yüzeyleri arasında kademeli geçiş düşünülerek kompozit yapılardan ayrılmıştır. Malzemede kullanılan seramik düşük ısı iletkenlik katsayısından dolayı yüksek ısıl direnç ve kullanılan metalin işlenebilirliği tasarımlarda fayda sağlamıştır (Hasselmann & Youngblood, 1978).

Hao Zuo Vd. dikdörtgen plakanın lineer olmayan zorlanmış titreşim analizi çalışma yapmışlardır. Fonksiyonel dereceli plakanın malzeme özellikleri kalınlık yönünde sürekli olarak derecelendirmişlerdir. Hareket denklemlerini Hamilton ilkesine göre elde etmişlerdir. Dalga sonlu elemanlar yöntemini kullanarak basit titreşim, burkulma, eğilme problemlerinin FDM plakalar için çözümlenmiştir. Elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlara yakın değerler bulmuşlardır (Zuo vd., 2014).

Hu vd. desteksiz plakaların lineer olmayan çözümleri için analitik bir çözüm geliştirmişlerdir. Kare plaka için yapılan analizlerde plaka boyutundan bağımsız

kenar yüklemesinin, plaka boyunda meydana gelen kısalmaya ilişkin grafikler elde etmişlerdir (C. vd., 1946).

Jaberzadeh v.d. fonksiyonel olarak derecelendirilmiş eğik ve yamuk plakaların termal burkulmasını incelemiştir. Şekil fonksiyonları en küçük kareler kullanılarak oluşturmuşlardır. Malzeme özellikleri kalınlık koordinatının bir güç formu olarak değiştiğini varsaymışlardır. Doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık artışı ile en-boy oranı gibi parametrelerin değişimini incelemiştir (Jaberzadeh vd., 2013).

Jafar v.d. fonksiyonel dereceli bimorf dairesel plakada sınır şartları olarak basit mesnet ve ankastre mesnet için kritik burkulma değerlerini ortaya koymuşlardır. Malzeme özelliklerini orta düzleme göre simetrik kabul etmişlerdir. Güç yasasına göre kalınlık yönünde malzeme değiştiğini kabul etmişlerdir. Enerji denkleminde doğrusal olmayan denge denklemlerini ifade etmişlerdir. Kararlılık denklemleri ile de kritik burkulma basınçlarını elde etmişlerdir. Plakanın kalınlık, yarıçap, elastisite oranları ve sınır koşulları ile kritik burkulma değeri arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır (Jafar & Mahmood, 2012).

Jafar E. J. vd. bimorf dairesel plakalarda burkulma analizi yapmışlardır. Fonksiyonel dereceli bimorf dairesel plakada gerçek burkulma değerleri elde etmişlerdir. Düzgün radyal klasik teori ve doğrusal olmayan Von-Karman denklemleri ile plakanın basit mesnet ve sabit mesnet sınır koşulları için burkulma yüklerinin değişimini ortaya koymuşlardır. Malzeme özelliklerinin orta yüzeye göre simetrik olduğunu kabul etmişlerdir. Orta yüzey saf metal ve iki tarafı seramik olarak almışlardır. Enerji denkleminde doğrusal olmayan denge denklemlerini türetmişlerdir. Kararlılık denklemleri dikkate alınarak kritik burkulma basıncını elde etmişler. Plakanın kalınlık, yarıçap değişim oranı olmak üzere farklı sınır şartlarının etkisini incelemiştir. Fonksiyonel dereceli bimorf dairesel plakada enerji yöntemi kullanılarak kalınlık ve daire çap değişenleriyle burkulma değerleri elde etmişlerdir ve daha önceki çalışmalar ile karşılaştırmışlardır (Jam vd., 2013).

Janghorban çalışmasında fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dikdörtgen nanoplakaları incelemiştir. Teori olarak üçüncü derece kayma deformasyon ilkesine göre denklemler türetmiştir. Sınır koşulu olarak basit mesnet plaka için değerler elde etmiştir (Janghorban, 2016).

Kianian O. vd fonksiyonel dereceli plakaların burkulma analizini sonlu şerit metodunu iki değişkenli arıtılmış plaka teorisini uygulamışlardır. Kullanılan teori ile klasik plaka teorisi benzer sonuçlar göstermiştir. FDM plakanın hacimsel oran değişiminde üssel kuvvet tercih etmişlerdir. Plaka kalınlığı, boyut oranı, uygulanan yük, farklı sınır şartları durumu için kritik burkulma değerleri için karşılaştırma yapmışlardır (Kianian vd., 2017).

Lanc v.d. fonksiyonel dereceli sandviç kirişleri incelemişlerdir. Lagrangian formülünün alt tabanlarını ortaya koymuşlardır. Basit mesnet, sabit ve serbest durumlar için inceleme yapmışlardır. Kritik burkulma ve ön burkulma değerlerini ortaya koymuşlardır. Kritik burkulma değerlerini etkileyen parametreleri ortaya koymuşlardır (Lanc vd., 2015).

Liu v.d. fonksiyonel derecelendirilmiş plakalara çatlak oluşturduktan sonra tek ve çift eksenli sıkıştırma yükleri etkisi altında burkulma analizini yapmışlardır. Method olarak genişletilmiş sonlu elemanlar yöntemini (XFEM) kullanmışlardır. Kritik burkulma katsayısının (CBC) üzerinde; malzeme derece, çatlak uzunluğu ve kalınlığının güçlü bir etkiye sahip olduğunu belirtmişlerdir (Liu vd., 2015).

Mahdavian M fonksiyonel dereceli malzemede kritik burkulma katsayılarının değişen eksenel yük ile değişimini incelemiştir. Fonksiyonel dereceli dikdörtgen plaka için denge ve kararlılık denklemlerini ortaya koymuştur. Plakaya etkileyen bası yüklerini Airy stress ve Galerkin yaklaşımları ile analizler yapmıştır. Güç kanunu indeksinin burkulma kuvvetine etkisini araştırmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde ettiği sonuçları daha önceki sonuçlar ile karşılaştırmıştır. (Mahdavian, 2009).

Mansouri ve Shariyat, negatif poizon oranlarına sahip auxetic plakaların termo-mekanik burkulma analizlerini incelemişlerdir. Burkulma analizlerini tek eksenli ve iki eksenli yüklere göre değerlendirmişlerdir ayrıca sıcaklık ve neme bağlı malzeme özelliklerinin değiştiğini kabul etmişlerdir. Sonuç olarak kullanılan auxetic malzemenin burkulma mukavemetini azalttığını hesaplamışlardır (Mansouri & Shariyat, 2015).

Martinez çalışmasında fonksiyonel dereceli malzemelerde sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır. İki en yaygın metot düğüm tabanlı derecelendirme ve Gauss uyum bazlı derecelendirmeyi uygulamıştır. Bir dizi paradigmatik sınır değeri problemini çözerek kapsamlı bir şekilde karşılaştırma yapmıştır (Martínez-Pañeda,

2019).

Millar F. Ve David M. plakaların stabilitesi üzerine bir çalışma yapmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak basit mesnet Kirchoff plakalar için burkulma analizi yapmışlardır. Elde edilen sonuçların daha önceki çalışmalar ile örtüştüğünü ifade etmişlerdir (Millar & Mora, 2015).

Mohammed E.I. vd. fonksiyonel dereceli plakanın uniform olmayan sıcaklık artışları için termal burkulmasını incelemişlerdir. Fonksiyonel dereceli plakanın özellikle seramik kaplama için kritik burkulma sıcaklıklarını araştırmışlardır. Galerkin metodu ile kritik burkulma yüklerini elde etmişlerdir. Bu çalışma FDM plakalarının kaplama kalınlığı seçiminde mühendislere yol göstermiştir (Mohamed vd., 2019).

Mohammadi vd. fonksiyonel dereceli ince plakalarda burkulma analizi yapmışlardır. Malzeme özelliklerini kalınlık yönünde güç fonksiyonu olarak kabul etmişlerdir. Klasik plaka teorisine dayalı yönetim denklemlerini oluşturmuşlardır. Fonksiyonel dereceli plakalar için farklı yüklemeler için minimum toplam potansiyel enerji denklemi çözüme ulaşmışlardır. Sınır şartı olarak iki zıt kenar basit mesnet kabul etmişlerdir. Kritik burkulma değerleri farklı sınır koşullarına göre ortaya koymuşlardır (Mohammadi vd., 2010).

Mokhtar. vd. çalışmalarında birinci dereceden kayma deformasyon teorisini kullanmışlardır. Fonksiyonel dereceli malzemenin kalınlık yönünde sigmoid dağılım yöntemi kullanılarak yapılan ısı burkulma analizinde farklı sıcaklık dağılımları altında sonuçlar elde etmişlerdir. Kritik burkulma değerinin sıcaklığın dağılımı, malzeme oranları ve geometrik parametrelerin değişimi ile ilişkisini incelemişlerdir. Elde edilen sonuçları klasik plaka teorisi ile karşılaştırmışlardır (Mokhtar vd. 2009).

Mozafari H. ve Ayob A. çalışmalarında doğrusal olarak değişen fonksiyonel dereceli malzemenin oluşan plakayı incelemişlerdir. Basit mesnet plaka için mekanik burkulma yükünü dikkate almışlardır. Mekanik yük altında plakanın ön burkulma yükleri için varsayımlar, denge, kararlılık denklemleri ve bağıntılar kullanılarak elde etmişlerdir. Kullanılan denklemler Kirchoff hipotezine ve Sanders yer değiştirme ifadelerine atıfta bulunmuşlardır. Burkulma yükü için kapalı form çözümü kullanmışlardır. Sonuçlar sabit kalınlığa sahip bir plaka ile doğrulamışlardır. Farklı fonksiyonel dereceli malzemeler ve geometrileri ve yükleme koşulları için

burkulma yükü değişimini grafikler ile ortaya koymuşlardır (Mozafari & Ayob, 2012).

Najafzadeh ve Eslami fonksiyonel dereceli dairesel plakayı incelemişlerdir. Denge ve kararlılık denklemleri kullanılarak kritik burkulma yüklerini belirlemişlerdir. Denklemler Kirchoff hipotezi ve Sanders lineer olmayan şekil değiştirme denklemlerinden esinlenmişlerdir. Elde edilen sonuçları daha önceki çalışmalar ile karşılaştırmışlardır (Najafzadeh & Eslami, 2002).

Natarajan vd. çalışmalarında fonksiyonel dereceli plakanın statik eğilme, serbest titreşim, mekanik ve termal burkulma davranışını incelemişlerdir. Mori Tanaka yöntemi ile elde edilen değerler daha önce elde edilmiş mevcut çalışmalar ile doğrulamışlardır. Parametrik ifadeler en boy oranı, plaka eğikliği ve sınır koşulları değiştirilerek sonuçlar elde etmişlerdir (Natarajan vd., 2014a).

Natarajan S. vd. fonksiyonel dereceli plakada üçgenel parçalar alınarak analiz yapmışlardır. Hücresel parça esaslı açılır kayma yöntemi kullanmışlardır. Basit eğilme, basit titreşim ve mekanik burkulma davranışları incelemişlerdir ve literatürdeki sonuçlara yakın değerler elde etmişlerdir (Natarajan vd., 2014b).

Noda yaptığı çalışmada yüksek sıcaklıkta kullanılan FDM'nin ani sıcaklık değişimlerinin olduğu alanları incelemiştir. Bu konuda daha önce Noda Termo elastik ve termo elastik olmayan problemleri içeren bir araştırma yapmıştır. Çalışmanın sonucunda malzemenin sıcaklığa bağlı değişen özelliklerinin dikkate alınmasını tavsiye etmiştir (Noda, 1999).

Pouladkhan çalışmasında ince plakalarda burkulma analizi yapmıştır. En yaygın yöntem olan denge yöntemini kullanmıştır. Dördüncü dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde denge denklemlerini kullanmıştır. Plakada sınır şartı olarak basit mesnet ve ankastre mesnet tercih etmiştir. ABAQOUS programı ile elde ettiği sonuçları her iki sınır şartı için çözmüştür. Gerçek değerler ile sonlu elemanlar yöntemi ile elde ettiği değerleri karşılaştırmıştır (Pouladkhan vd., 2011).

Praveen ve Reddy fonksiyonel derecelendirilmiş seramik ve metal plakaların tepkisini incelemişlerdir. Fonksiyonel dereceli plakaların statik ve dinamik davranışlarını araştırmışlardır. Problem olarak lineer ve lineer olmayan durum göz önüne almış ve analiz etmişlerdir. Seramik ve metalin hacim oranları değiştirilerek

değişimleri gözlemişlerdir (Praveen & Reddy, 1998a).

Przemieniecki sonlu elemanlar metodunu kullanmıştır. İnce plakaların, takviye ile güçlendirilmiş panellerin ve ince katlı plakalardan yapılmış kolonlar için burkulma ve gerilmeleri araştırmıştır (Przemieniecki, 1973).

Ramu I. ve Mohanty S.C. tek ve iki eksen yönünde etkiyen bası yükü altında dikdörtgen fonksiyonel dereceli plakada burkulma analizini incelemişlerdir. Klasik plaka teorisini kullanmışlardır. Basit mesnet fonksiyonel dereceli plakada tek eksenli ve çift eksenli sıkıştırma yüklerini araştırmışlardır. Plakanın geometrisini değiştirerek kritik burkulma yükünü belirlemişlerdir. Değişen plaka kesitleriyle burkulma yüklerini elde etmişlerdir (Ramu & Mohanty, 2014).

Rao vd. sonlu elemanlar yöntemi ile fonksiyonel dereceli plakaları incelemişlerdir. Termal ve mekanik yükler altında serbest titreşim analizi yapmışlardır. Fonksiyonel dereceli yapı için iki saf malzeme olarak seramik ve çelik seçmişlerdir. Analize dayalı olarak hem ince hem de kalın plakalar için önemli sonuçlar sunmuşlardır (Rao vd., 2012).

Reddy J. N. Fonksiyonel dereceli plakanın analizini yapmıştır. Plaka iki farklı malzemeden oluşmuştur. Fonksiyonel dereceli plakanın derecelendirilmesini kalınlık yönünde kabul etmiştir. Kalınlık yönünde elastik modülün değişimi için üssel kuvvet yöntemini seçmiştir. Method olarak üçüncü derece kayma deformasyon plaka teorisini kullanmıştır (Reddy, 2000).

Reddy fonksiyonel dereceli plakaların sıcaklığa bağlı olarak değişimini incelemiştir. Fonksiyonel dereceli plakaların kayma deformasyon teorisine dayanarak analitik ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak elde ettiği veriler daha sonraki çalışmalara önemli katkı sağlamıştır (Reddy, 2005).

Reddy Sidda B. Vd. çalışmalarında analitik denklemlerin çözümü ile basit mesnet fdm plakaların yüksek kayma deformasyon teorisi (HSBT) kayma gerilmeleri ihmal edilerek incelemişlerdir. Elde edilen sonuçlar FDM plakaların burkulma problemlerinde Navier sonuçlarına yakın sonuçlar elde etmişlerdir (Reddy vd., 2013).

Ritchie ve Rhodes çalışmalarında Rayleigh-Ritz metodunu kullanmışlardır. Perforeli plakaların uniform gerilme ve şekil değiştirmeleri ile burkulma davranışlarını Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak veriler elde etmişlerdir (Ritchie &

Rhodes, 1975).

Rivera ve Reddy fonksiyonel olarak derecelendirilmiş yapıların sonlu elemanlar yöntemi ile analizini sunmuşlardır. Yedi parametrelili çalışmada birinci derece kayma deformasyon ilkesini kullanmışlardır. Altı derece serbest domla ilave yedinci parametre olarak kalınlık gerilmesini almışlardır. Mevcut çalışmada yüklerin bazı durumlarda ANSYS ve ABAQUS paket programları ile örtüştüğünü gözlemlemişlerdir. Bu nedenle ek çalışma yapılmasının gerekliliğini ifade etmişlerdir (Rivera & Reddy, 2016).

Rohit ve Maiti çalışmalarında fonksiyonel dereceli plakayı incelemişlerdir. Fonksiyonel dereceli plakada basit mesnet sınır şartı için burkulma davranışını araştırmışlardır. Doğrusal olarak değişen yükler için klasik plaka teorisini tercih etmişlerdir. Malzeme değişimini kalınlık yönünde kabul etmişlerdir. Fonksiyonel dereceli plakada değişen parametreler ile burkulma yük oranlarını arasındaki ilişkileri geliştirmişlerdir (Saha & Maiti, 2012).

Roshan L. Ve Neha Ahlawat fonksiyonel dereceli dairesel plakaların burkulma ve titreşim analizini yapmışlardır. Temel klasik plaka teorisine göre inceleme yapmışlardır. Frekansın sifira yaklaştığı noktada kritik burkulma yüklerini hesaplamışlardır (Ahlawat & Lal, 2015).

Saidi vd. çalışmalarında fonksiyonel dereceli ince dikdörtgen plaka için termal burkulma analizi yapmışlardır. Klasik plaka teorisine dayanarak minimum toplam potansiyel enerji ve kararlılık denklemlerini elde etmişlerdir. Birleştirilmiş kararlılık denklemlerini bağımsız denklemlere dönüştürmüşlerdir. Plaka basit mesnet iki zıt kenardan desteklendiğini kabul etmişlerdir. Fonksiyonel dereceli plakada kalınlık, yükleme koşulları ve indeksin kritik burkulma sıcaklığına etkisini ayrıntılı olarak ortaya koymuşlardır (Saidi vd., 2010).

Sarrami v.d. klasik plaka teorisini kullanarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakalarda yerel burkulma analizi yapmışlardır. Analizde yöntem olarak sonlu şerit yöntemini kullanmışlardır. Plakanın sertlik ve kararlılık matrislerinin oluşumunda minimum toplam enerji denkleminde faydalanmışlardır. Plakanın en boy oranı, üssel kuvvet değeri ve yükleme türüne göre incelemeler yapmışlardır. Sonlu şerit yöntemi ile elde edilen değerleri literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırmışlardır (Sarrami-Foroushani vd, 2013).

Shclack plakalarda burkulma konusunda birçok çalışma yapmıştır. Bu çalışmada Ritz enerji yöntemini kullanmıştır. Basit mesnet merkezi delikli kare plakayı incelemiştir. Dikdörtgen plakaların stabilitesini analitik ve deneysel olarak yaptığı çalışmalarla araştırmıştır (Schlack, 1964).

Sidda Reddy vd. fonksiyonel dereceli plakanın burkulma analizini yüksek derece kayma deformasyon teorisine göre incelemiştir. Malzeme özelliği plakanın kalınlığı yönünde değişmektedir. Kullanılan yöntemin fonksiyonel dereceli plakanın burkulma analizinde verimli sonuçlar açığa çıkarmıştır. Plaka kalınlığı, elastik modül, uygulanan yük tipine göre kritik burkulma değerlerinin değiştiğini göstermişlerdir (Reddy vd., 2013).

Stavsky ve Friedland radyal yönde bası uygulanmış izotropik ve ortotropik tabakalardan oluşan ince elastik dairesel plakalar için eksenel simetrik lineer olmayan burkulma denklemleri geliştirmişlerdir. Lineer özdeğer problemlerini çevresel olarak ankastre ve basit mesnet heterojen izotropik dairesel plakalar için kapalı şekilde çözmüşlerdir. Sabit burkulma parametrelerini optimizasyon sağlayarak elde etmişlerdir (Stavsky & Friedland, 1971).

Swamy v.d. plakaların burkulmasını incelemiştir. Her bir yükleme için plakanın farklı davranışını ortaya koymuşlardır. Yazılım olarak Ansys sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Homojen ve heterojen plakaların çatlaklı ve çatlaksız durumları için çözümler üretmişlerdir. Ayrıca plakanın en boy oranı ve kalınlığı gibi parametrelerde çözüme ilave etmişlerdir (Swamy vd., 2015).

Singh S. M. Ve Thangaratnam K. sonlu elemanlar yöntemini kullanarak FDM ince kabuklarda termal ve mekanik yüklerin etkisini araştırmışlardır. COMSAP bilgisayar programı kullanarak literatürde elde edilen sonuçlar ile kendi sonuçlarını karşılaştırmışlardır (Singh & Thangaratnam, 2014).

Singh S.J. ve Harsha S.P. fonksiyonel dereceli plakaların statik analizine lineer olmayan klasik plaka teorisini Von-Karman uzaması ile incelemiştir. Sınır şartları ve hareket denklemleri temel minimum potansiyel enerji metodu kullanarak elde etmişlerdir. Plakanın malzeme özelliği kalınlık yönünde üssel kuvvet dağılımı prensibini kullanmışlardır. Elde edilen sonuçlar FDM plakanın kalınlığı yönünde kuvvet dağılımı hakkında bilgi vermiştir (Singh & Thangaratnam, 2014).

Song vd. fonksiyonel dereceli polimer kompozit ön gerilmeli plakalar ile

grafin nano plakaların eğilme ve burkulma analizlerini yapmışlardır. Basit mesnet FDM polimer plakanın eğilme ve burkulma değerlerini naviyer çözüm tekniği ile araştırmışlardır. Sayısal sonuçlar hacimsel oran, plaka boyutları ve geometrinin eğilme ve burkulma davranışlarında çok etkili olduğunu tespit etmişlerdir (Song vd, 2017).

Timoshenko çift Fourier serisini kullanarak ilk kritik burkulma gerilmesini denklemini oluşturmuştur. Plaka eğilme analizinin uygulanması için önemli katkılar sağlamıştır. Yaptığı çalışma ile elastik plak yüzeyinin şekil değiştirme enerjisi ve plaka diferansiyel denklemlerinin yapısını belirtmiştir. Timoshenko'nun önemli katkıları arasında, büyük çökmelerin gözlemlendiği dairesel plakaların çözümü ve elastik denge problemlerinin denklemlerini elde etmiştir (P. TS., 1910).

Tran v.d. isogeometrik sonlu elemanlar yöntemi ile fonksiyonel dereceli plakada termal burkulmayı incelemişlerdir. Plakanın kalınlığından geçen ısı seri ile ifade etmişlerdir. Dairesel ve dikdörtgen plaka geometrileri için sayısal sonuçlar elde etmişlerdir (Tran vd, 2013).

Valizadeh v.d. çalışmalarında izo-geometrik sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Fonksiyonel dereceli plakaların statik ve dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Malzeme özelliklerinin sadece kalınlık yönünde derecelendirildiğini varsaymışlardır. Plaka birinci derece kayma deformasyon ilkesine göre hesaplamalar yapmışlardır. Fonksiyonel dereceli plakanın statik eğilme, mekanik ve termal burkulma problemlerini titreşim ve süpersonik flutter analiz yöntemleri ile incelemişlerdir. Yapılan çalışmaların doğruluğu üç boyutlu çözümler ile göstermişlerdir (Valizadeh vd, 2013).

Ventsel and Krauthammer, 1850'de Kirchoff ince plakalar hakkında çok önemli bir tez yayınlamıştır. Bu tezde Kirchoff, plaka-eğilme teorisinde kabul edilen ve "Kirchoff'un Hipotezleri" olarak bilinen iki adet birbirinden bağımsız varsayım yayınlamıştır. Bu varsayımları kullanarak, Kirchoff, eğilen plakalar için üç boyutlu esneklik teorisinin enerji fonksiyonlarını basitleştirmiştir. Plaka kenarında sadece iki sınır şartı olduğunu da belirtmiştir. Kirchoff'un diğer önemli katkıları, plakaların frekans denkleminin keşfedilmesi ve plaka problemlerinin çözümünde sanal yer değiştirme metotlarında yapılan giriştir. Kirchoff'un teorisi plaka eğilme teorisinin duruluğuna (kanıtlanmasına, sağlamaştırılmasına) katkıda bulunmuştur ve uygulamada yaygın olarak kullanılmasını sağlamıştır (Ventsel vd, 2002).

Xieng W. Ve Yu W. İnce plakalarda tek yönlü ve çift yönlü basınç altında burkulma analizi yapmışlardır. Metot olarak diferansiyel dördütlü metodu kullanmışlardır. Burkulma değerleri mevcut analitik sonuçlar sonlu elemanlar sonuçları ile yakınsamaktadır (Wang & Wang, 2015).

Wang ve Yu Wang, dikdörtgen plakalarda diferansiyel dördün yöntemi (DQM) kullanarak burkulma yüklerini hesaplamışlar. Diferansiyel dördün sonuçları ile mevcut analitik sonuçlar ve sonlu elemanlar verileri ile karşılaştırarak doğrulamışlardır (Wang vd, 2014).

Whitney dikdörtgen plakaların eğilme, titreşim ve burkulma problemlerini incelemiştir. Analitik metotlarla plakaların burkulmasını incelemiştir. Ankastre mesnet ve basit mesnet sınır koşullarını kabul ederek çözümler türetmiştir (Whitney, 1970).

Yaghoobi ve Fereidoon fonksiyonel dereceli plakaların analizi için kesme deformasyon yöntemini kullanmışlardır. Mekanik ve termal burkulmaları n inci dereceden kayma deformasyon teorisini dikkate almışlardır. Düzlem içi ve enine yer değiştirmelerin bükme ve kesme bileşenlerinden oluştuğunu vurgulamışlardır. Yönetim denklemlerini minimum toplam potansiyel ilkesinden türetmişlerdir. Ayrıca Navier tipi kapalı form çözüm metodolojisini de önermişlerdir. Elde ettikleri sonuçları klasik plaka teorisi, birinci dereceden kayma deformasyon teorisi, yüksek dereceli kayma deformasyon teorisi ve rafine plaka teorisi ile karşılaştırmalı olarak sunmuşlardır (Yaghoobi & Fereidoon, 2014).

Yang ve Shen FD dikdörtgen plakaların dinamik davranışlarını incelemiştir. FD dikdörtgen plakaya uygulanan yanal kısmi yayılı yük etkisiyle oluşan deformasyonlar araştırılmıştır. Malzeme özellikleri ısıya bağlı ve aynı zamanda kalınlık boyunca derecelendirilmiş hacim üssü olarak ele almışlardır. Plaka karşılıklı iki uç desteklenmiş ve dönmeye karşıda sınırlandırılmış. Kullanılan denklemler ise klasik plaka teorisine göre uygulamışlardır (Yang & Shen, 2001).

Yang J. vd. fonksiyonel dereceli dirdörtgen plakaların elastik burkulmasını ele almışlardır. Fonksiyonel dereceli plakaların burkulma değerlerinin üretim metotlarından dolayı farklılıklar gösterdiğini incelemiştir. Birinci derece kayma gerilme plaka teorisi ile burkulma yük değerlerini elde etmişlerdir (Yang vd, 2005).

Zenkour A.M. Ve Aljadani M. H. Fonksiyonel dereceli plakaların mekanik

burkulmasını yüksel dereceli kayma ve plaka deformasyon teorisine göre incelemiştir. FDM plakanın hacimsel oranı için üssel kuvvet metodunu tercih etmişlerdir. Plakanın kritik burkulma değerlerini tek yönlü ve iki yönlü basınç için hesaplamışlardır. Çıkan sonuçları literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırma yapmışlardır (Zenkour & Aljadani, 2018). Zienkiewicz plakaların burkulmasını incelemiştir. Çalışmasında sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır (Zienkiewicz & Taylor, 2005).

Yang ve Shen (2001) FD dikdörtgen plakanın dinamik davranışlarını araştırmışlardır. FD dikdörtgen plakaya uygulanan yanal kısmi yayılı yük etkisiyle oluşan deformasyonlar araştırılmıştır. Malzeme özellikleri ısıya bağımlı ve aynı zamanda kalınlık boyunca derecelendirilmiş hacmin üssü olarak ele alınmış. Plaka karşılıklı iki uç desteklenmiş ve dönmeye karşı da sınırlandırılmış. Kullanılan denklemler ise klasik plaka teorisine göre uygulamışlardır (Yang & Shen, 2001). Elastik modül denklemi aşağıda yazılmıştır.

$$E = (E_s - E_m) \left[\frac{2z+h}{2h} \right]^n + E_m \quad (2.1)$$

Poison oranı plaka kalınlığına bağlı denklem ise denklem 2.2'de yazılmıştır.

$$v = (v_s - v_m) \left[\frac{2z+h}{2h} \right]^n + v_m \quad (2.2)$$

Praveen G.N. ve Reddy J.N. (1998) fonksiyonel dereceli seramik-metal plakaların Karman Plaka Teorisine göre kayma deformasyon çözümlerini sonlu elemanlar yöntemi ile elde etmişler (Praveen & Reddy, 1998b). Yer değiştirme denklemleri olarak aşağıda yazılmıştır.

$$u_1 = u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \quad (2.3)$$

$$u_2 = v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \quad (2.4)$$

$$u_3 = w(x, y, t) \quad (2.5)$$

Burada t zaman, u_1 , u_2 , ve u_3 toplam yer değiştirmeleri ve (u, v, w) ise orta eksenlerden x, y, ve z yönlerindeki yer değiştirmeler olarak düşünülmüşler. Karman Plak denklemlerini kullanarak fonksiyonel dereceli plakanın kalınlığı boyunca değişimini

$$P_{(z)} = (P_s - P_m) \left[\frac{2z+h}{2h} \right]^n + P_m \quad (2.6)$$

Denklemlerle elde edilmiştir. Burada P_s ve P_m seramik ve metalin fiziksel özellikleri; n ise hacimsel oran olarak almışlar. Burada n değerinin 0 olması fonksiyonel dereceli malzemenin seramik plaka olduğunu göstermiş. Ayrıca

yoğunluğun plaka kalınlığı ile değişimi üstel olarak değiştiğini hesaplamışlar. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak moment, kayma ve yüklerin hesaplanması için oluşturdukları matris denklemi elde etmişler.

Isıl gerilme analizlerinde sabit yüzey sıcaklıklarında seramik ve metal için sıcaklık değişimini plaka kalınlığı boyunca değiştiğini ama plaka uzunluğu boyunca sabit kabul etmişler. Isıl gerilme sonuçlarını basit sürekli ısı transferi denklemlerini kullanarak açığa çıkarmışlar.

Bu tezde fonksiyonel dereceli malzeme olarak ilk olarak alüminyum-zirkonyum daha sonra ise alüminyum-seramik (Alimuna) seçilmiş ve bu malzeme kombinasyonlarının mekanik özellikleri; elastik modül, poizon oranı, yoğunluk değerleri Tablo 2.1’de gösterilmiştir.

Tablo 2.1. Malzemelerin Mekanik Özellikleri

Malzeme	Elastik Modül (Young Modulus)	Poizon Oranı	Yoğunluk
Alüminyum (Metal)	70 GPa	0.3	2707 kg/m ³
Seramik (Alimuna)	380 GPa	0.3	3800 kg/m ³
Zirconia (Seramik)	151 GPa	0.3	3000 kg/m ³

Kabuk yapı için xy düzleminde ve xyz koordinat sisteminde kabuğun merkezinde (Anonim, 2014)

$$x = x(\alpha, \beta)$$

$$y = y(\alpha, \beta) \quad (2.7)$$

$$z = z(\alpha, \beta)$$

Plakada yer değiştirme denklemleri;

$$u^* = u(\alpha, \beta) - \zeta w_{,\alpha}$$

$$v^* = v(\alpha, \beta) - \zeta w_{,\beta} \quad (2.8)$$

$$w^* = w(\alpha, \beta)$$

Yüzey genleme denklemi olarak

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + \frac{w}{R_x} \\ v_y + \frac{1}{2} w_y^2 + \frac{w}{R_y} \\ u_y + v_x + w_x w_x + \frac{2w}{R_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Burada R_x , R_y , and R_{xy} plak yüzeyinden yarıçaplar olarak ifade edilmiştir.

Isıl gerilme analizlerinde sabit yüzey sıcaklıklarında seramik ve metal için sıcaklık değişimini plak kalınlığı boyunca değiştiğini ama plak uzunluğu boyunca sabit kabul etmişler. Isıl gerilme sonuçlarını basit sürekli ısı transferi denklemlerini kullanarak açığa çıkarmışlardır.

$$P = \sum_{j=1}^k P_j V_j$$

P_j ve V_j değerleri malzemelerin hacimsel oranlarını belirtmektedir. Uniform kalınlığa sahip plakalarda referans $h/2$ kalınlıkta hacimsel oran:

$$V_j = \left(\frac{2\zeta+h}{2h}\right)^n$$

olarak ifade edilmiştir. Burada n ise $0 \leq n \leq \infty$ değerlerini almaktadır. Elde edilen denklemlerin yardımıyla aksel kuvvet ve oluşan moment denklemi ise

$$(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, \xi) \sigma_{\alpha\beta} d\xi$$

olarak ifade edilmektedir. Plakalarda oluşan deformasyon denklemi yazılmıştır.

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_{\zeta_n}(\zeta) \sin n\pi\eta + \sum_{m=1}^{\infty} W_{\eta_m}(\eta) \sin m\pi\zeta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^* \sin m\pi\zeta \sin n\pi\eta \quad (2.10)$$

Airy's Stress denklemi olarak ifade edilmektedir ve sınır şartları ifade edilerek serinin yardımı ile çözüm yapılabilir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırıldığında doğru sonuçlar alındığı gözlenmiştir.

Elastik modül E , ısıl uzama katsayısı α , poizon oranı V kullanılmıştır.

$$E_{(z)} = E_s V_s + E_m (1 - V_s) \quad (2.11)$$

$$\alpha_{(z)} = \alpha_s V_s + \alpha_m (1 - V_s) \quad (2.12)$$

$$V_{(z)} = V_0 \quad (2.13)$$

E_m ve α_m fonksiyonel dereceli metalin elastik modül ve ısıl uzama katsayılarıdır (Mahdavian, 2010). n , E_s ve α_s ise seramik malzemenin elastik modül ve ısıl uzama katsayılarıdır. V_s ise seramiğin hacimsel oranıdır (Lanhe, 2014). Denklemi ise;

$$V_s = (z/h + 1/2)^k \quad (2.14)$$

Burada z kalınlık ekseni, h kalınlığı, k üstel değeri sıfır ya da sıfırdan büyük değeri ifade eder.

Birinci Derece Kayma Deformasyon Teorisine göre aşağıda yazılmıştır.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\phi_x, \quad \varepsilon_y = u_{,y} + z\phi_y$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x})$$

$$\gamma_{zx} = \phi_x + w_{,x}, \quad \gamma_{zy} = \phi_y + w_{,y}$$

Burada u, v ve w orta düzlemdeki bir noktanın plakanın x, y, z eksenlerine göre yer değiştirmelerini ϕ_x ve ϕ_y değerleri ise plakanın orta eksenine göre dönmeyi ifade etmektedir.

Plakalar için Hooke Kanunlarını aşağıda ifade edilmiştir;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha T] \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha T] \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}, \quad \tau_{zy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zy} \quad (2.17)$$

Etkiyen kuvvet sonucu plakada oluşan moment ve gerilme denklemleri ise

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz, \quad Q_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ij} dz$$

ifade edilmektedir. Karman Plak Teorisine göre denklemlerin açılımı yapılacak olursa aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$N_{y,y} + N_{xy,x} = 0$$

$$M_{x,x} + N_{xy,y} - Q_x = 0$$

$$M_{x,x} + M_{y,y} - Q_y = 0$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + q + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} = 0 \quad (2.18)$$

Üç boyutlu durumda plakada yer değiştirme alanı bileşenleri,

$$u(x,y,z)=z\theta_x(x,y), \quad v(x,y,z)=z\theta_y(x,y), \quad w(x,y,z)=w(x,y)$$

şeklindedir ve ayrıca referans eksene göre oluşan dönmeler θ_x and θ_y değerlerinin Reissner- Mindlin denkleminde gerilme - genleme denklemi,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{bmatrix}$$

Klasik gerilme- genleme denklemi denklem 2.19'da yazılmıştır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = zB \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Şeklindedir ve burada normal gerilmeler ve kayma gerilmelerini matris formda B ve S olarak ifade edilmiştir.

$$B = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad S = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Potansiyel enerji denklemine göre eğilme, kayma ve yükleme değerleri,

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_s + \Pi_l$$

Burada sırasıyla önce eğilme enerji denklemi açılarak aşağıdaki denklemde yazılmıştır.

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy}] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dV \quad (2.21)$$

Kayma enerji denklemi,

$$\Pi_s = \frac{k}{2} \int_V [\tau_x \tau_y] \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} dV \quad (2.22)$$

Ve son olarak yükleme enerjisi,

$$\Pi_l = \int_V qwdV$$

Burada k kayma faktörü ve q ise yük olarak ifade edilmektedir. Burada Π_b ifadesi sırasıyla elastik ve ısı denklemleri olarak açılarak ifade edilmiştir.

$$\tilde{\Pi}_b = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\theta_{x,x} \quad \theta_{y,y} \quad \theta_{x,y} + \theta_{y,x}] \int_{-h/2}^{h/2} Bz^2 \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} dz dx dy \quad (2.23)$$

$$\tilde{\Pi}_b^T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\theta_{x,x} \quad \theta_{y,y} \quad \theta_{x,y} + \theta_{y,x}] \int_{-h/2}^{h/2} Bz^2 \begin{bmatrix} \alpha(z)T(z) \\ \alpha(z)T(z) \\ 0 \end{bmatrix} dz dx dy \quad (2.24)$$

Sonuç olarak potansiyel enerji denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile fonksiyonel dereceli plakalardaki formülasyonu

$$\delta\Pi(\theta_x, \theta_y, w) = 0 \quad (2.25)$$

İfade edilmektedir.



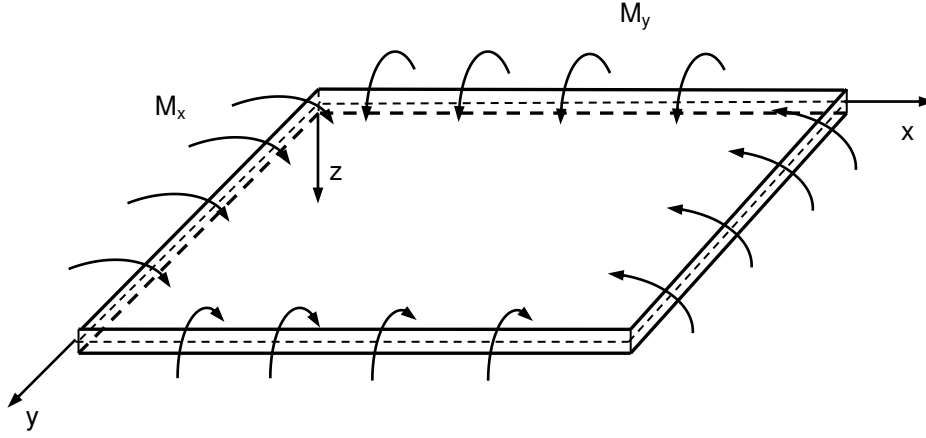
3. KULLANILAN TEORİ VE YÖNTEM

3.1. Plakaların Elastik Analizi

Farklı geometrilere sahip plaka ve kabukların elastik analizi yıllardır araştırmacılar tarafından lineer, lineer olmayan ve farklı sınır şartları altındaki davranışlarını ele almışlardır. Yüksek maliyetli ve güvenlik açısından önem arz eden plaka olarak inşası yapılan yapıların elastik analizi yapılırken her türlü dış etki göz önünde bulundurulması önem arz etmektedir. Bu tez çalışmasında plakaların elastik kararlılığı temel dayanak noktasıdır. Burada FDM plakanın analizinde plakaların elastik teorisi varsayımına dayandırılarak analizler elde edilmiştir. Yapılan analiz sonucunda enerji denklemi lineerleştirilmiştir. Burkulma probleminin incelenmesinde çözüm yöntemi olacak özdeğer problemin elde edilmesi ile çözümler yapılmıştır.

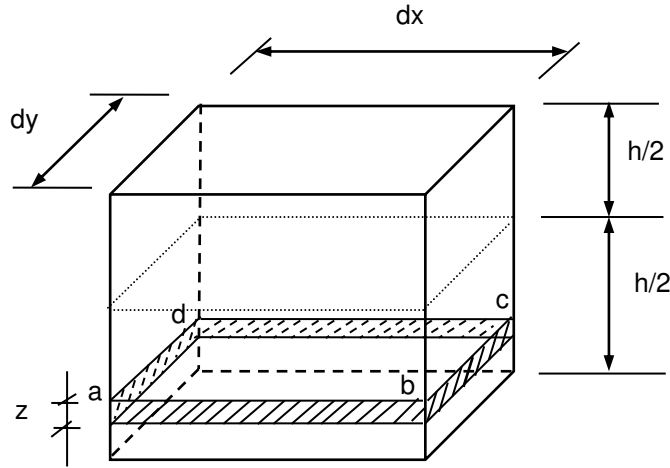
3.1.1. İnce Plakalarda Eğilme

Plakalar kalınlıkları diğer boyutları genişlik ve uzunluk değerlerinden oldukça küçük olan düz yapı elemanlarıdır. Diğer bir deyişle iki düzlem arasında kalan cisim plaka olarak tanımlanmaktadır. Düzlem yüzeyine dik olan yükler plakalar aracılığı ile taşınmaktadır. Plakalar pek çok sektörde özellikle; savunma sanayinde füze, roket rampaları olarak ve uzay-uçak sanayisinde, kıyı liman yapılarında, sıvı ve gaz iletim hatlarında kapaklar, çelik saclar, tank tabanları, medikal sektör, nükleer enerji santralleri inşasında sıklıkla kullanılmaktadır. İki plaka arasında kalan uzunluk plakanın kalınlığı olarak tanımlanmakta ve h ile gösterilir, ince plakayı tanımlamak için yapılan kabule göre, kalınlığın açıklığa oranı $1/20$ 'den az olmalıdır. Şekil 3.1'de dikdörtgen geometriye sahip bir plakanın yanları boyunca eşit olarak dağıtılmış momentler etkisi altında eğilmesini (bükülmesini) göstermektedir. Plakanın yüzleri arasındaki ortadaki düzleme plakanın orta düzlemi olarak belirtilmiştir (Chajes, 1974).



Şekil 3.1. M_x ve M_y momentleri etkisindeki dikdörtgen plakanın eğilmesi

Plakalar ile ilgili genel varsayımlarda, plak orta düzlemine dik olan doğruların deformasyondan sonra düzgün ve dik kaldığı kabul edilmiştir. Plaka orta düzlemine dik olan gerilmeler ihmal edilebilecek değerde olduğu kabul edilmiştir. Eğilme esnasında orta düzlemde herhangi bir gerilme olmadığı varsayılır. Plakanın z eksenini orta düzleme dik ve aşağı yönde pozitifdir. M_x , y eksenine paralel kenarların birim uzunluğu başına momenti ve M_y ise x eksenine paralel kenarların birim uzunluğu başına momentini temsil etmektedir. Plakanın kalınlığı h ile gösterilir ve diğer boyutlara kıyasla küçük değer alınır. Şekil 3.2'de gösterildiği gibi, xz ve yz düzlemlerine paralel iki çift düzlemlerle plakadan kesilmiş bir kesit üzerinde çalışılmıştır. Plakanın eğilmesinin, bu elemanın yanal taraflarının düzlemsel kaldığı ve sapma yüzeyine normal kalacak şekilde nötr eksenler $n-n$ etrafında döndüğü varsayıldığında, plakanın orta düzleminin eğilme sırasında herhangi bir deformasyona uğramadığı kabul edilmiştir. Sonuç olarak orta düzlem nötr bir yüzey olarak bu çalışmada kabul edilmiştir.



Şekil 3.2. xz ve yz düzlemlerine paralel iki çift düzlemlerle plakadan kesilmiş bir eleman

Pozitif eğrilik aşağı doğru dışbükey olan eğilmeye karşılık gelmesiyle $1/\rho_x$, bu nötr yüzeyin xz 'e paralel eğriliğini ve $1/\rho_y$ eğriliği xz düzlemine paralel olarak, nötr yüzeyden z mesafesindeki bir eleman olan $abcd$ 'nin x ve y yönlerindeki birim uzamaları şu şekilde yazılmıştır:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y} \quad (3.1)$$

Hooke yasasına göre bir alan elemandaki şekil değiştirmeler, gerilmeler, elastik modülü cinsinden aşağıdaki formda yazılmıştır:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (3.2)$$

Burada σ_x ve σ_y gerilmeleri, ν Poizon oranıdır. Gerekli dönüşüm ifadelerinden faydalanılarak x ve y yönlerindeki gerilme ifadelerinin eğrilik yarıçapları cinsinden ifadesi aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right), \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right) \quad (3.3)$$

Bu gerilmeler, tabakanın nötr yüzeyden uzaklığı (z) ile orantılıdır ve burkulmuş plakanın kavislerinin büyüklüklerine bağlıdır. Şekil 3.2'de elemanın yan taraflarına dağıtılan normal gerilmeler, dış momentlere eşit olması gereken çiftlere indirgenebilmektedir. Bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilmiştir:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dy dz = M_x dy \quad (3.4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dx dz = M_y dy$$

Bu gerilmelerin dağılımından oluşan çiftlerin integrali ile ve onların toplamını dışa yönelik momentlere $M_x dy$ ve $M_y dx$ eşitleyerek (burada M_x ve M_y birim uzunluktaki kenar momentleridir). Denklem (3.3)'deki σ_x ve σ_y denklem (3.4)'ün içine yazılarak x ve y yönlerindeki moment ifadeleri aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right) \\ M_y &= D \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada,

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.6)$$

Burada D , bu plakanın düşey rijitliği olarak bilinen önemli bir terimdir. Bu ifadeye homojen plakanın burkulma sertliği tanımı yapılmıştır. Plakanın yer değiştirmesi (w) ile gösterilerek kiriş teorisinde olduğu gibi plakanın eğriliği için yaklaşık formülleri şu şekildedir:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

Bu denklemler denklem (3.5)'te yerine yazılarak momentler:

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklini almıştır.

Plaka üzerindeki eğilme momenti çiftlerinin etkisi incelenmiştir; $M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right)$ olduğu gösterilmiştir. Bu kaymadan dolayı bir elemanın şekil değiştirmesinin analizini içermektedir (Timoshenko & Gere, 1961).

Bu denklemler M_x ve M_y verilmesi koşuluyla plakanın yüzeyindeki çökmeyi ifade etmektedir. Özel durum olarak $M_y = 0$ alınarak dikdörtgen plaka bir kiriş şeklinde burkulmuştur. Denklem (3.5)'in ikinci denkleminde

$\partial^2 w / \partial x^2 = -\nu \partial^2 w / \partial y^2$ şeklinde elde edilmiştir.

Plaka elastik olmayan bir yüzeyin burkulması zıt işaretlere sahip iki eğriliğe sahiptir. $M_x = M_y = M$, olduğunda sapma yüzeyinin iki dik yöndeki eğriliği eşittir ve yüzey küreseldir. Kürenin eğriliği denklem (3.5)'den $1/\rho = M/D(1 + \nu)$ şeklinde elde edilmiştir.

3.1.2. Plakalarda Eğilme ve Gerilme

Plakaların bileşik eğilmesi neticesinde oluşan gerilmelerde şu iki durum göz önünde bulundurulmalıdır.

1) Gerilmeler, kritik burkulma gerilmelerine kıyasla küçüktür ve plakanın eğilme etkileri ihmal edilir ve toplam gerilmelerin, yanal yükün oluşturduğu gerilmelerde orta düzlem ile elde edildiği varsayılmıştır.

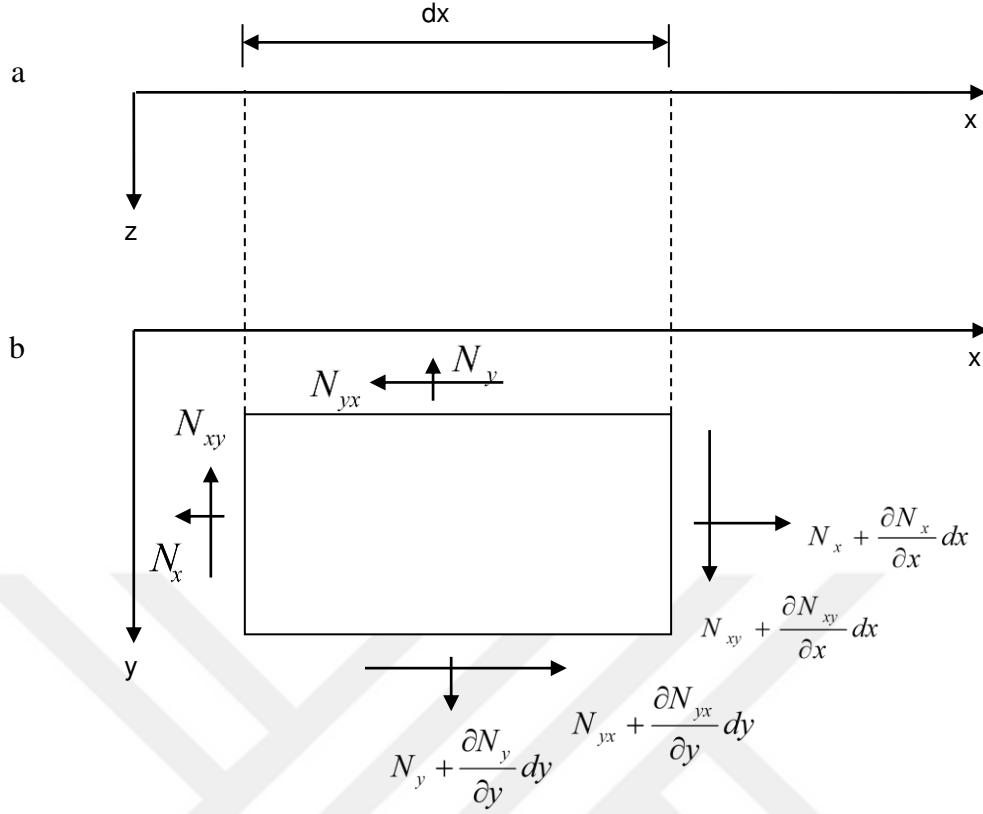
2) Plakanın orta düzlemindeki gerilmeler küçük değildir ve plakanın eğilmesine etkileri dikkate alınmalıdır.

Bu ikinci durum için çökme yüzeyine karşılık gelen diferansiyel denkleminin türetilmesinde, xz ve yz koordinat düzlemlerine paralel iki düzlem çifti tarafından plakadan kesilen küçük bir elemanın dengesi dikkate alınmıştır. Bu durumda, plakanın orta düzleminde etki eden kuvvetler bulunmaktadır. Şekil 3,3'te gösterilen kuvvetleri x ve y eksenleri üzerine yansıtılarak ve bu yönlerde hareket eden hiçbir cisim kuvvetinin olmadığını varsayarak, aşağıdaki denge denklemleri elde edilmiştir:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

(3.9)



Şekil 3.3. Plakadan iki çift kesilerek küçük bir elemenda kuvvetlerin yansıtılması

Şekil 3.3'te gösterilen kuvvetlerin z eksenini üzerindeki izdüşümü düşünüldüğünde, plakanın çökme değeri hesaba katılmaktadır. Plakanın xz düzleminde eğriligi nedeniyle, normal kuvvetlerin N_x z eksenini üzerindeki izdüşümünü vermektedir.

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (3.10)$$

Denkleminde yapılan sadeleştirmeden sonra, bu ifade

$$-N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (3.11)$$

Aynı şekilde normal kuvvetin z eksenindeki izdüşümü N_y 'yi vermektedir.

$$-N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (3.12)$$

Eğer plakanın eğilmesi q şiddetindeki uniform yayılı yatay yükler nedeniyle meydana gelmiştir ve küçük bir elemanın dengesinin incelenmesiyle, dışarıdan etkiyen yük (q) olduğunda z eksenini üzerindeki izdüşümü ve kesme kuvvetleri N_{xy} bağlı ifadenin son hali şu şekilde yazılmıştır:

$$q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{ve} \quad (3.13)$$

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy$$

Plaka üzerinde dış yük (q) ve eğilme momentleri M_x , M_y , M_{xy} etki ettiğinde plakanın eğilme için denge denklemi şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (3.14)$$

x, y ve xy 'deki moment denklemleri

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.15)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Yanal yük olmadığında ince plakaların yer değiştirmesi için diferansiyel denklemi şu şekilde yazılmıştır:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (3.16)$$

Bu bir kirişin yanal kuvvet altındaki eğilmesi için çıkarılan temel denkleme benzemektedir. Birinci ve üçüncü terimler, şerit yanal ve aksenal momentleri, ikinci terim bitişik şeritlerde sürekliliği sağlamak için gerekli olan eğilme etkisini göstermektedir. Denklem (3.16) denklem (3.14)'de yazılmıştır:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.17)$$

Eğer yanal kuvvete ilaveten plakanın yanlarında uygulanan kuvvetler var ise, plakanın eğilmesinde önemli etkisi olmaktadır. Eğer, kenar kuvvetler iki yönde (N_x ve N_y birim uzunluğu) çekme halinde ve kayma kuvvetleri (N_{xy} ve N_{yx} birim uzunluk) belirtmiştir ve denklem (3.15)'deki M_x , M_y , M_{xy} ifadeleri yukarıdaki son denklemde ifade edilmiştir:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.18)$$

Bu denklem SAINT VENANT tarafından 1883'te elde edilmiştir. Saint Venant

tarafından türetilen bu diferansiyel denklem, N_x , N_y , N_{xy} kuvvetleri, bu kuvvetlerin kritik değerlerine kıyasla küçük olmadığı durumda, bir plakanın yer değiştirmesi yüzeyini belirlemede kullanılmaktadır. Elde edilen bu denklem (3.18) plakaların kararlılıkları üzerindeki çalışmalar için bir temel teşkil etmektedir. Bununla birlikte bu denklem yüksek deplasmanlı problemler veya elastik olmayan eğilmeler içermez. Ayrıca plakaların birçok problemi enerji metodu kullanılarak çözülebilmektedir.

Plakanın orta düzleminde kuvvetler varsa, Şekil 3.3'te gösterilen elemanın diferansiyel denklemleri şu şekilde yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yz}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + Y &= 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

Denklem (3.18)'in son şekli aşağıdaki denklemde yazılmıştır.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.20)$$

3.1.3. Plakaların Eğilmesinde Şekil Değiştirme Enerjisi

3.1.3.1. Tam Eğilme

Bir plaka elemanı içinde tutulmuş şekil değiştirme enerjisi Şekil 3.1'de görüldüğü gibi eğilme momentleri tarafından yapılan işin toplamıdır. Bu daha önce olduğu gibi plakanın orta düzlemindeki burulmayı ve kayma kuvvetleri tarafından yapılan iş ihmal edilmiştir. Bu aksenal çekme ve basınçtan dolayı şekil değiştirme enerjisinin ve kayma şekil değiştirmelerin normal olarak hesaba katılmadığı yerde, kiriş teorisiyle benzerdir. Düzgün dağıtılmış eğilme momentleri M_x ve M_y ile bir plaka eğilmesi, Şekil 3.2'de gösterildiği gibi bir elemanda biriken şekil değiştirme enerjisi, plakanın eğilmesi sırasında eleman üzerinde $M_x dy$ ve $M_y dx$ momentlerinin yaptığı iş hesaplanarak elde edilmiştir. Elemanın kenarları düzlemsel kaldıkça, $M_x dy$ momentlerinin yaptığı iş, eğilme sonrası elemanın kenarları arasındaki açı ile moment çarpımının yarısı alınarak elde edilmektedir. Yaklaşık olarak xz düzlemindeki plakanın eğriliği $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ şeklinde temsil ettiğinden $M_x dy$ momentine karşılık gelen açı $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$ şeklini alır ve nihayetinde $-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$ şeklinde elde

edilmektedir.

$M_y dx$ momentleri tarafından üretilen iş için de benzer bir ifade elde edilmiştir. Eğilmeden dolayı toplam enerji şu şekilde ifade edilmiştir;

$$dU = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Bütün bu ifadeler denklem (3.15)'te yazılacak olursa şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$dU = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (3.21)$$

Plakanın toplam şekil değiştirme enerjisi, Denklem (3.21)'in aşağıdaki gibi integrali ile elde edilebilmektedir:

$$U = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (3.22)$$

Burada alınan integral plakanın tüm yüzeyini belirtmektedir. Yukarıdaki denklemde rijitliği ifade eden D integralin dışında olduğuna dikkat edilmeli, çünkü değeri plaka boyunca değişmez, yani plaka homojen plakadır. Ancak, fonksiyonel dereceli plaka düşünüldüğünde, D değeri artık plaka kalınlığı yönünde değişir ve enerji ifadesi, $D(x, y)$ fonksiyonu olarak integralin içinde değişken terim olarak belirtilmiştir. Bu bölümde sadece homojen durum ele alınmıştır. Bununla birlikte, ilerleyen bölümde D 'nin işleve göre plaka içinde değiştiği yani fonksiyonel dereceli plaka için ele alınacaktır.

$M_{xy} dy$ momentleri için şekil değiştirme enerjisi ifadelerinin türetilmesinde karşılık gelen açılı $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx$ 'dir. Dolayısı ile dy nedeniyle şekil değiştirme enerjisi şu

$$\text{şekilde elde edilmiştir:} \quad \frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{1}{2} D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy,$$

$M_{yx} dx$ tarafından aynı miktarda enerji üretilecektir, böylece şekil değiştirme enerjisi $D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$ şeklini almıştır.

Eğilme, eğilme momentleri tarafından üretilen işi etkilemediğinden, bir plakanın bir elemanının toplam şekil değiştirme enerjisi, burkulma enerjisi ve enerji burkulması birbirine eklenerek elde edilmiştir:

$$dU = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

Bu ifadenin tüm plakaya entegre edilmesi aşağıdaki enerji ifadesini vermiştir:

$$U = \frac{1}{2} D \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

Bütün bir plakadaki toplam enerji denklemi (3.22)'nin integrali alınması ile bulunmuştur. Buda Bryan'ın 1891 de bulduğu denkleme göstermiştir (H., 1891).

$$U = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3.23)$$

3.1.3.2. Bileşik Eğilme ve Gerilme

Bu durumda, ilk olarak orta düzlemdeki kuvvetlerin uygulandığı varsayılmıştır. Dolayısıyla sorun, iki boyutlu bir elastisite teorisi problemidir.

Düz şekil değiştirme durumunda, aşağıdaki denklemler iki boyutlu durum için geçerlidir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.24)$$

x, y ve xy şekil değiştirmeleri ve kayma şekil değiştirme ifadeleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{N_{xy}}{hG} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Burada kayma modülü $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Bu düzlemde uygulanan kuvvetler tarafından plakanın orta düzleminin deformasyonundan kaynaklanan enerji U :

$$U = \frac{1}{2} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy$$

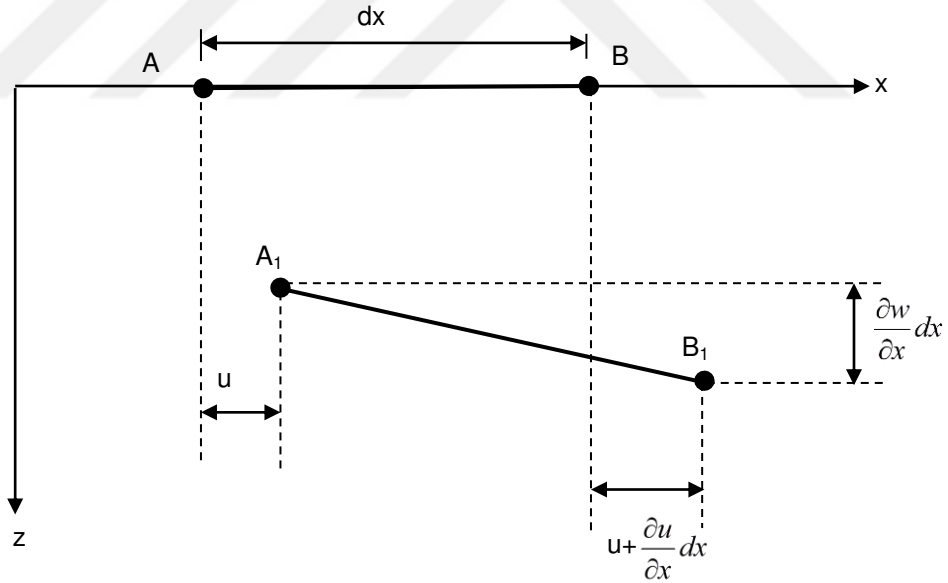
$$= \frac{1}{2hE} [N_x^2 + N_y^2 - 2\nu N_x N_y + 2(1 + \nu) N_{xy}^2] dx dy \quad (3.26)$$

Plakanın orta yüzeyindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmelerinin x , y ve z yönlerindeki üç bileşen sırasıyla u , v ve w tarafından deforme olacaktır. Bu düzlemin (bkz. Şekil 3.4) x yönündeki AB doğrusal elemanı göz önüne alındığında, u yer değiştirmesi nedeniyle elemanın uzamasının $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ 'na eşit olduğu görülebilir. Aynı elemanın yer değiştirmesi nedeniyle uzaması w ; $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$ şeklindedir. Plakanın ortasında alınan bir elemanın x yönündeki toplam birim uzaması:

$$\varepsilon_x' = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3.27)$$

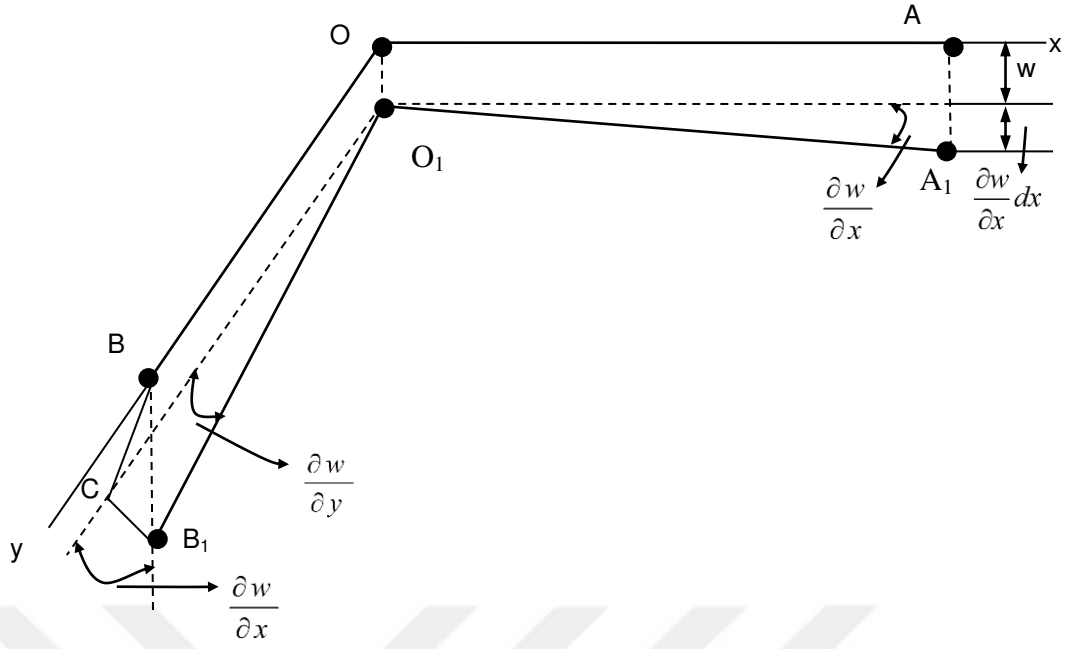
Benzer şekilde, y yönünde Şekil değiştirme:

$$\varepsilon_y' = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (3.28)$$



Şekil 3.4. Bir AB elemanı üzerindeki yer değiştirmeler

w yer değiştirmesinden kaynaklanan kesme gerilmesinin belirlenmesi için, Şekil 3.5'te gösterildiği gibi x ve y yönlerinde iki sonsuz küçük doğrusal eleman OA ve OB alınır.



Şekil 3.5. Plak üzerinde alınan iki sonsuz küçük doğrusal elemanın x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri

Yer değiştirmeler nedeniyle bu elemanlar O_1A_1 ve O_1B_1 pozisyonlarını alır. $A_1O_1B_1$ ve $\pi/2$ açıları arasındaki fark w yer değiştirmesine karşılık gelen kesme gerilmesidir. Üçgenden BCB_1 , CB_1 'nin $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$ d'ye eşit olduğu ve CO_1B_1 'ninde $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$ eşit olduğu görülmektedir. Bunu u ve v yer değiştirmelerine kaymaya eklersek aşağıdaki denklemi vermektedir:

$$\gamma_{xy}' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.29)$$

Orta düzlemdeki şekil değiştirmeler ϵ_x' , ϵ_y' , γ_{xy}' eğilme nedeniyle ϵ_x , ϵ_y , ve γ_{xy} ile kıyaslandığında küçük olduğu kabul edilmiştir. Orta düzlemin ilave gerilmesinden dolayı gerinim enerjisini bükme sırasında N_x , N_y ve N_{xy} kuvvetlerinin sabit kaldığını kabul ederek: $(N_x \epsilon_x' + N_y \epsilon_y' + N_{xy} \gamma_{xy}') dx dy$

Denklem (3.23) ile temsil edilen eğilme enerjisini toplama ve ikame edilmesiyle ϵ_x' , ϵ_y' , ve γ_{xy}' onların ifadeleri (3.27), (3.28) ve (3.29) eğilme ve basma veya çekme sırasında plakanın şekil değiştirme enerjisindeki toplam değişiklik aşağıdaki denklemde verilmiştir:

$$U = \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \\
& + \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.1.4. İnce Plakaların Burkulması

Bir plakanın orta düzlemine uygulanan kuvvetlerin kritik değerlerinin hesaplanmasında, sıkıştırılmış çubuklar durumunda olduğu gibi aynı yöntemler kullanılabilir. Orta düzlemde etkiyen kuvvetlerin kritik değerleri, başlangıçtan itibaren plakanın bir miktar başlangıç eğriliğine veya bir miktar yanal yüklemeye sahip olduğu varsayılarak elde edilmiştir. Bu durumda, çökmelerin sonsuza kadar artma eğiliminde olduğu orta düzlemdeki kuvvetlerin değerleri genellikle kritik değerlerdir. Bu tür stabilite problemlerini araştırmanın bir başka yolu, orta düzlemde uygulanan kuvvetlerin etkisi altında plakanın hafifçe büküldüğünü varsaymak ve ardından plakayı bu kadar hafif burkulmuş bir şekilde tutmak için kuvvetlerin sahip olması gereken büyüklükleri hesaplamaktır. Bu durumda çökme yüzeyinin diferansiyel denklemi, dış kuvveti sıfır olarak etkiyen aşağıdaki denklemden elde edilmiştir:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \tag{3.31}$$

En basit durum, N_x , N_y ve N_{xy} kuvvetleri plaka boyunca sabit olduğunda elde edilmiştir. Kuvvetlerin yaptığı iş, plakanın her türlü denge şekli için eğilme şekil değiştirme enerjisinden daha küçükse karardır. Aynı iş, herhangi bir yanal sapma şekli için eğilme enerjisinden daha büyük olursa, plaka kararsızdır ve burkulma meydana gelir. Dış kuvvetlerin çalışmasını eğilmenin şekil değiştirme enerjisine eşitlediğimizde, kuvvetlerin kritik değerlerini aşağıdaki denklemden bulunmuştur:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \\
& = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Kabul edilen N_x , N_y , ve N_{xy} kuvvetleri ortak faktör γ 'ye sahip belirli ifadelerle temsil edilir, böylece $N_x = \gamma N_x'$, $N_y = \gamma N_y'$, $N_{xy} = \gamma N_{xy}'$ γ artırılarak bu kuvvetlerde eşzamanlı bir artış elde edilir. γ 'nin kritik değeri denklem (3.32)'den elde edilir,

$$\gamma = \frac{D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy}{- \left[N_x' \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y' \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}' \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy} \quad (3.33)$$

γ 'nin hesaplanması için, her bir özel durumda, verilen sınır koşullarını karşılayan ve ifadeyi denklem (3.33) minimum yapan, yani fonksiyonun varyasyonu denklem (3.33) sıfır olan bir w ifadesi bulmak gerekmektedir. Payı I_1 ve paydayı I_2 ile ifade ederek, ifadenin denklem (3.33) varyasyonunu şu şekilde bulunmuştur:

$$\delta\gamma = \frac{I_2 \delta I_1 - I_1 \delta I_2}{I_2^2} \quad (3.34)$$

Varyasyon operatörü δ farklılaştırma operatör ∂ gibidir.

Denklem sıfıra eşit olduğunda $\delta\gamma$ ve $\frac{I_1}{I_2} = \gamma$ ile şu şekilde elde edilmiştir:

$$\frac{1}{I_2} (\delta I_1 - \gamma \cdot \delta I_2) = 0 \quad (3.35)$$

Enerji denkleminde kritik yüklerin yaklaşık bir hesaplaması için, bir dizi şeklinde çökme için bir w ifadesi yazılmıştır.

$$w = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots \quad (3.36)$$

$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$ fonksiyonlarının w için sınır koşullarını sağladığı ve plakanın bükülmüş yüzeyinin temsiline uygun olacak şekilde seçildiği, Dizinin a_1, a_2, \dots katsayıları, denklem (3.33) ifadesini minimum yapacak şekilde seçilmelidir. Bu minimum koşulları kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial a_1} - \gamma \frac{\partial I_2}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial I_1}{\partial a_2} - \gamma \frac{\partial I_2}{\partial a_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

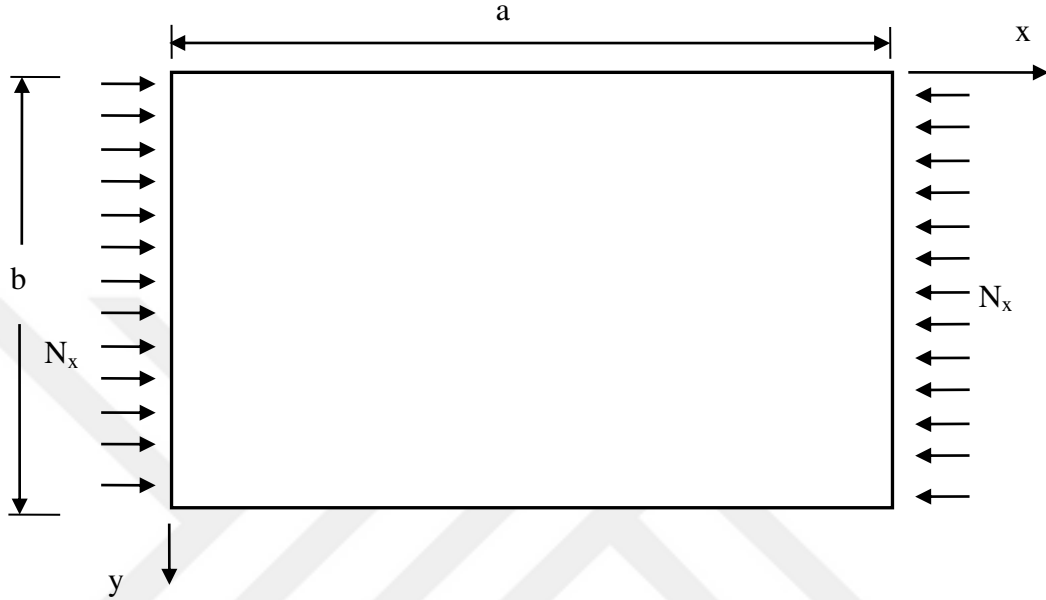
Denklemler (3.37) a_1, a_2, \dots 'deki homojen doğrusal denklemler sistemi olacaktır. Bu tür denklemler a_1, a_2, \dots sonucunu verebilmektedir. Sıfırdan farklı çözümler ancak bu denklemlerin determinanı sıfır ise "Hessian Determinant" olarak adlandırılan bu determinant sıfıra eşitlendiğinde, γ için kritik değeri belirleyen bir denklem elde edilecektir (Timoshenko & Gere, 1961).

3.1.4.1. Tek Boyutta Uniform Sıkıştırılmış Basit Mesnet Dikdörtgen Plakaların Burkulması

Bu sorunun çözümü G. H. Bryan tarafından, 1891'de verilmiştir. Dikdörtgen

bir plaka orta düzleminde N_x basınç kuvvetleriyle, $x = 0$ ve $x = a$ kenarları boyunca uniform olarak dağıtılırsa (Şekil 3.6), burkulmuş plakanın çökme yüzeyi serilerle temsil edilebilmektedir:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.38)$$



Şekil 3.6. Kenarın birim uzunluğu başına basınç kuvvetinin büyüklüğü olan N_x ile sıkıştırılmış bir plaka

Bu durumda eğilmenin gerinim enerjisi ifadeden denklem (3.39) olarak verilmiştir:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3.39)$$

w ifadesi denklem (3.38) ile ikame edilirse:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}^2 dx dy \quad (3.40)$$

Dikkatle bakıldığında;

$$U = \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} = \frac{ab}{4} \text{ şeklinde elde edilmiştir.}$$

Sonuç olarak;

$$U = \frac{ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (3.41)$$

ya da:

$$\Delta U = \frac{ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \text{ yazılmıştır.} \quad (3.42)$$

Denklem (3.32) 'den, plakanın burkulması sırasında basınç kuvvetlerinin yaptığı iş

$$\frac{\pi^2 b}{8} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2 = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (3.43)$$

Burada burkulmaya etkiyen kuvvet denklemi (3.44)'te görülmektedir.

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2} \quad (3.44)$$

N_x 'in en küçük değeri, n değerinin 1'e eşit alınmasıyla elde edilmiştir. Bunun fiziksel anlamı, bir plakanın, sıkıştırma yönünde birkaç yarım dalga olabilecek, ancak dikeyde yalnızca bir yarım dalga olacak şekilde burkulmasıdır. Basınç kuvvetlerinin kritik değeri için ise ifade şöyle yazılmıştır:

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad (3.45)$$

Bu ifadedeki ilk faktör, birim genişliğe ve a uzunluğuna sahip bir şerit için Euler yükünü temsil etmektedir, ikinci faktör kesintisiz plakanın stabilitesinin, izole edilmiş bir şeridin stabilitesinden ne oranda daha büyük olduğunu belirtmektedir. Bu faktörün büyüklüğü, a/b oranının büyüklüğüne ve ayrıca plakanın büküldüğü yarım dalga sayısını veren m sayısına bağlıdır. Eğer a uzunluğu, b'den küçükse, denklem (3.44) ifadesinin parantezindeki ikinci terim her zaman birinciden daha küçük olacaktır ve ifadenin minimum değeri, m = 1 alınarak, yani plakanın yarıdan büküldüğünü varsayarak elde edilmiştir ve çökme yüzeyinin formu

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Denklem (3.44) m = 1 olan kritik yük aşağıdaki formda gösterilmektedir;

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \quad (3.46)$$

Eğer $a = b$ ise, yani kare bir plakada kritik burkulma ifadesi, yükün kritik değeri en küçüktür. Bu durumda:

$$(N_x)_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (3.47)$$

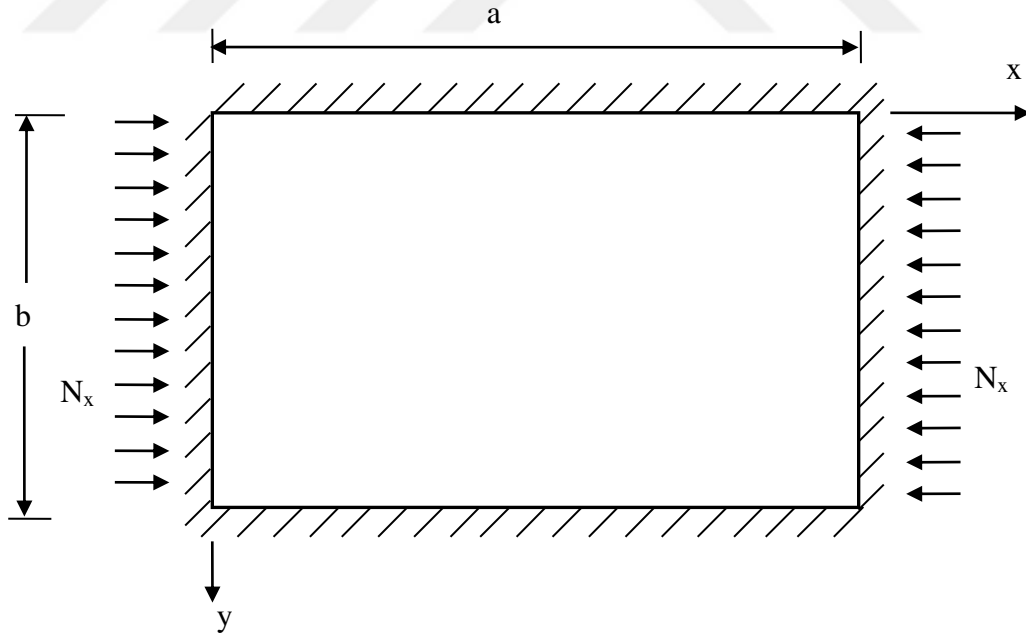
3.1.4.2. Dikdörtgen Plakanın Tek Yönlü Basınç ve Dört Kenarından Ankastre Mesnet

Şekil 3.7’de gösterildiği gibi dikdörtgen plaka için iki yönde dikey yük etkisi altında, burkulmuş plakanın çökme yüzeyi ifadesi ile temsil edilmiştir:

$$w = \frac{\delta}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (3.48)$$

Plaka sınır şartları olarak; dört kenarından sabitlenmiştir. Tek yönlü yük eylemine tabi tutulan kare plakanın özel durumunda, yükün aşağıdaki kritik değeri elde edilmiştir:

$$(N_x)_{cr} = 10.07 \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (3.49)$$



Şekil 3.7. Tüm kenarlar boyunca kenetlenmiş ve x yönünde sıkıştırılmış dikdörtgen bir plaka

3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu metotta cismin “sonlu” boyutta çok sayıda “elemana” ayrıldığı kabul edilmiştir. Metodun adı da buradan gelmektedir. Cisim uzayda ($n = 1,2,3$) boyuta

sahip, n-boyutlu sonlu elemanlar sistemine ayrılmaktadır (Zienkiewicz, 1978).

Bir boyutlu cisimler düğümlerle, iki boyutlu cisimler çizgilerle, üç boyutlu cisimler düzlemlerle sonlu elemanlara ayrılmaktadır. Bir boyutlu cisimlerde sonlu elemanlar farklı uzunlukta olabilirler. Ancak iki veya üç boyutlularda elemanlar, eşit olmayan boyutlarda olabileceği gibi farklı şekillerde olabilir. Bununla birlikte bütün durumlarda cismi temsil eden sonlu elemanlar düğümlerle bağlanacaktır. Sonlu elemanların düğümlerle bağlantı durumu en iyi şekilde anlaşılmaktadır. Burada düzgün, birim kalınlıkla biri üçgen diğeri dikdörtgen düzlem sonlu eleman vardır.

Düğümler kaldırıldığında elemanlar birbirinden ayrılacağından komşu sonlu elemanlar arasında fiziksel süreklilik yoktur.

Metodun çözümlemesinde bundan sonraki adım, cismi temsil eden elemanların her birinin “eleman rijitlik matrisi”ni (element rijitlik matris) tanımlamaktır. Daha sonra eleman rijitlik matrisleri, “parçalara ayrılmış cismin tanımına ait” tümel rijitlik matrisi’ni (overall stiffness matris) oluşturmak üzere toplanır. Bu toplamada, cismin sonlu eleman modelindeki bütün düğümlerde kuvvetlerin dengesi ve yer değiştirmelerin sürekliliği sağlanır. Buradan ifade edilen matris $[K]\{\delta\}=\{P\}$ ulaşılmıştır.

$[K]$, cismin tümel rijitlik matrisini tanımlar. Tümel kuvvet vektörü $\{P\}$, bütün düğümlere uygulanan dış kuvvetleri; $\{\delta\}$ ise, bütün düğümlerin yer değiştirmelerini göstermektedir. $[]$ işareti kare (veya dikdörtgen)matrisleri, $\{ \}$ işareti vektörü gösterecektir.

$[K]\{\delta\}=\{P\}$ incelenirse, $[K]$ nitelik bakımından, parçalara ayrılmış cisimde birim yer değiştirme oluşturacak kuvveti ifade etmektedir. Buradan cismin sonlu eleman modelini bir yaya eşdeğer olarak kabul edilerek cismin “rijitliği” $[K]$ ‘nın “yay sabitine” karşılık olacağı açıktır. Dolayısıyla sonlu elemanlar metodu, esas itibarıyla cismin “rijitlik” açısından analizinin yapıldığı bir metottur.

Cisme etkiyen belirli dış kuvvetler ve belirli bir sınır şartları takımı için, $[K]\{\delta\}=\{P\}$ denkleminde tek çözüm olarak düğüm yer değiştirmeleri $\{\delta\}$ bulunmuştur. Yer değiştirmelerden de gerilmeler ve şekil değiştirmeler hesaplanmıştır.

Özetlenirse bu problemin sonlu elemanlar metodu ile çözmek için sırası ile

aşağıdaki işlemlerin uygulanması gerekir:

- 1) Cismi bir sonlu elemanlar sistemi halinde “parçalara” bölme.
- 2) Cismi temsil eden elemanlarının her birinin “eleman rijitlik matrisi” ve diğer özelliklerinin çıkarılması. (Yük matrisi, sönüm matrisi v. B.)
- 3) “Tümel rijitlik matrisi” $[K]$, ve “tümel kuvvet vektörü” $\{P\}$ nin toplama işlemi.
- 4) $\{\delta\}$ yı tayin etmek için, belirlenmiş sınır şartlarıyla $[K]\{\delta\}=\{P\}$ 'in çözümü.
- 5) Hesaplanan düğüm yer değiştirmeleri $\{\delta\}$ 'dan elemanların şekil değiştirmelerin ve gerilmelerinin hesaplanması.

3.3. Plakalar için Sonlu Eleman Formülasyonu

3.3.1. Giriş

Bu bölüme kısa bir giriş olarak, ince plakaların sonlu eleman formülasyonu için temel olan kavramlar ve denklemler tanıtılmıştır.

Literatürde, problemlere çözüm arayan birçok mühendis ve bilim insanı tarafından geniş ölçekte kullanılan iyi bilinen bir yöntem olan sonlu elemanlar yöntemi (FEM). FEM, alanın alt bölgeleri üzerinde yaklaşımın türetilmesi için sistematik bir izleme sağlayarak geleneksel varyasyonel yöntemlerin dezavantajının üstesinden gelir. Yöntemin, diğer rakip yöntemlere göre üstünlüğü olarak kabul edilen üç temel özelliği vardır. İlk olarak, problemin geometrik olarak karmaşık bir alanı, sonlu elemanlar adı verilen geometrik olarak basit alt alanların bir koleksiyonu olarak temsil edilir. İkinci olarak, her sonlu eleman üzerinde, yaklaşım fonksiyonları, herhangi bir sürekli fonksiyonun cebirsel polinomların doğrusal bir kombinasyonu ile temsil edilebileceği temel fikri kullanılarak türetilir. Üçüncüsü, belirlenmemiş parametreler arasındaki cebirsel ilişkiler, elemanın sınırında ve içinde düğüm adı verilen sınırlı sayıda önceden seçilmiş noktalarda çözümün değerlerini temsil eder. Yaklaşım fonksiyonları, enterpolasyon teorisindeki kavramlar kullanılarak türetilir ve bu nedenle enterpolasyon fonksiyonları olarak adlandırılır. Enterpolasyon fonksiyonlarının derecesi çözülen diferansiyelin sayısına bağlıdır (Reddy, 1993).

3.3.1.1. FE Analizinde Kullanılan Temel Terimler

Sonlu eleman analizi, sonlu fark süreci gibi, kısmi diferansiyel denklemi cebirsel denklemlere dönüştürür. Aşağıdaki üç temel disiplinden büyük ölçüde yararlanılmıştır.

1. Matematiksel modellerin doğru ifadesi için süreklilik mekaniği.
2. Ayırıklaştırılmış denklemlerin algoritmik çözümlerinin detaylandırılması için sayısal analiz.
3. Büyük problem sınıflarına uygulanabilen parametreleştirilmiş kodlar üretmek için bilgisayar programı yazılımı.
4. *İterasyon Fonksiyonları*: Sonlu elemanlar yönteminin temel kavramı, sürekli bir fonksiyonun ayırık bir model kullanılarak tahmin edilebilmesidir. Ayırık model, bir veya daha fazla iterasyon polinomundan oluşur ve sürekli fonksiyon parçalara bölünür. Her öge, bir $\psi(x)$ işlevini şu şekilde açıklamak için bir enterpolasyon işlevi kullanılarak tanımlanmıştır:

$$\psi_{ex}(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + \dots + P_n(x)a_n$$

ve matris formu

$$\psi_{ex}(x) = [P_1(x) \quad P_2(x) \quad \dots \quad P_n(x)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

Burada P_1, P_2, \dots, P_n matematiksel olarak tamamlanmış bir işlev kümesinden seçilen doğrusal olarak bağımsız bilinmeyen işlevlerdir.

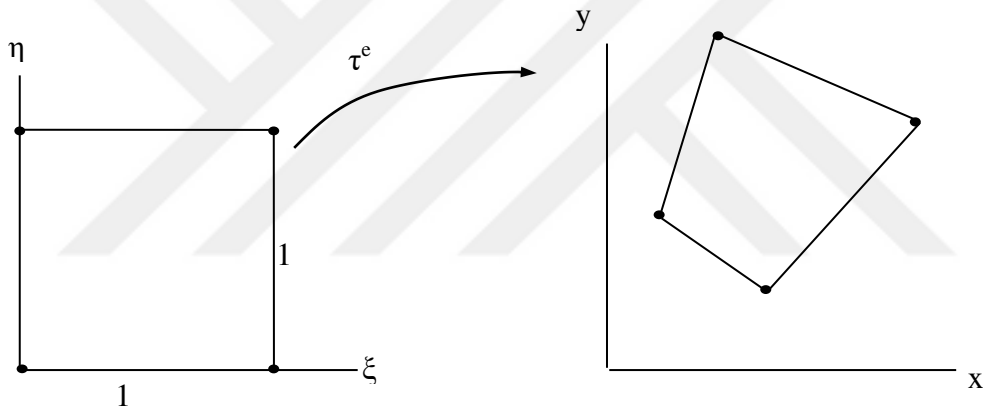
Şekil fonksiyonları: Sonlu bir elemanın her bir tekil düğümü için bir şekil fonksiyonu yazılmıştır ve bu düğümde büyüklük 1 ve 0 elemandaki diğer tüm düğümler için 0 olan özelliğe sahiptir.

Sertlik Matrisi: Sertlik matrisi terimi yapısal analizden kaynaklanmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin ilk uygulamaları, yapıların matris analizine benziyordu ve terim, kuvvet ve yer değiştirme arasındaki matris ilişkisini tanımlamak için

kullanılmıştır. Terim şimdi kuvvet ve yer değiştirme arasındaki matris ilişkisine bakılmaksızın kullanılmaktadır. Sıcaklık ve ısı akışı arasındaki matris ilişkisine sertlik matrisi de denir. Sonlu elemanlar terminolojisi iki katılık matrisini tanımlar. Yerel sertlik matrisi, tek bir elemana karşılık gelir. Global sertlik matrisi, tüm yerel sertlik matrislerinin birleşimidir ve tüm sistemin sertliğini tanımlar.

Elemanlar: FEM’de kullanılan elemanlar boyutlarına göre bir, iki ve üç boyutlu elemanlar olarak sınıflandırılmıştır.

Karmaşık şekiller unsurları için analitik ifadeleri basitleştirmek için bir referans unsuru sunulmuştur. Böyle bir V^e elemanı, basit bir geometrik şekle sahip soyut bir boyutsuz uzayda tanımlanmıştır. Referans elemanın geometrisi daha sonra geometrik dönüşüm ifadeleri kullanılarak gerçek elemanın geometrisine eşlenmiştir. Bu çalışmada şekil 3.8’te gösterilen referans unsur kullanılmıştır.



şekil 3.8. Köşede normalize edilmiş bir referans ξ η olan dikdörtgen eleman

Dönüşüm τ^e , referans öğesinin karşılık gelen noktasının ξ - η ’nin soyut koordinatlarına göre gerçek öğenin her noktasının koordinatlarını tanımlamaktadır. ξ - η , normalize edilmiş koordinatlar olarak adlandırılmıştır (Chajes, 1974).

$$\tau^e: \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi)$$

τ^e dönüşümü, gerçek elemanın şekline ve konumuna bağlıdır. Böylece, her eleman için farklı bir τ^e dönüşümü yapılmıştır.

$$\tau^e: \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots)$$

3.3.1.2 Diferansiyel Operatörlerin Dönüşümü

Fiziksel bir problemin yönetim denklemleri gerçek alanda yazılır, fonksiyonlarını ve türevlerini $\frac{\partial \psi_{ex}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_{ex}}{\partial y}$ içermiştir. Bu farklar da referans uzaya dönüştürülmüştür.

İlk türevler için, zincir kuralını kullanarak matris formunda iki boyutlu eleman için aşağıdaki ifade elde edilmiştir (Dhatt vd, 1984).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.49.a)$$

ya da

$$\{\partial_{\xi-\eta}\} = [J]\{\partial_{x-y}\} \quad (3.49.b)$$

Burada [J] geometrik dönüşümün iyi bilinen Jacobian Matrisidir, gerçek alanın türevlerini referans alanın türevleriyle değiştiren Denklem (3.49) ile benzer bir ifade bulunmaktadır:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.50.a)$$

ya da

$$\{\partial_{x-y}\} = [J]^{-1}\{\partial_{\xi-\eta}\} \quad (3.50.b)$$

Burada $[J]^{-1}$ Jacobian Matrisinin [J] tersidir. En genel olarak pratikte [J] matrisi açıkça tanımlanmıştır, matrisin tersi $[J]^{-1}$ matrisi sayısal olarak [J] 'den elde edilmiştir. Matris [J] olarak ifade eden iki boyutta

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Jacobian matrisinin tersi şu şekilde hesaplanmıştır:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Burada [J]'nin determinanı

$$\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad (3.53)$$

Böylece, değişkenlerin değişimi, gerçek geometrik V^e alanındaki bir f fonksiyonunun entegrasyonunu, referans eleman V^r uzayındaki daha basit bir entegrasyona değiştirmemize izin vermektedir. Entegrasyon için dönüşüm formülü denklem (3.54)'te verilmiştir:

$$\int_{V^e} f(x) dx dy = \int_{V^r} f(x(\xi, \eta)) \det(J) d\xi d\eta \quad (3.54)$$

İkinci türevlerin x ve y 'ye göre, ξ ve η 'ya göre türevler cinsinden ifadeleri şu şekilde yazılabilmektedir: (Dhatt and Touzot, 1984):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

[T1] ve [T2] dönüşüm matrisleridir. Jacobian Matrix'in tersini küçük [j] ile gösteren ifade aşağıda verilmiştir:

$$[J]^{-1} = [j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

ve Jacobian matrisi Denklem (3.51) 'de olduğu gibi ve bir matris [C]

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} J_{11} & \frac{\partial}{\partial \xi} J_{12} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{11} + \frac{\partial}{\partial \xi} J_{21} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{12} + \frac{\partial}{\partial \xi} J_{22} \right) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

iki boyutta ifade edilmiştir.

$$T_2 = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

ve

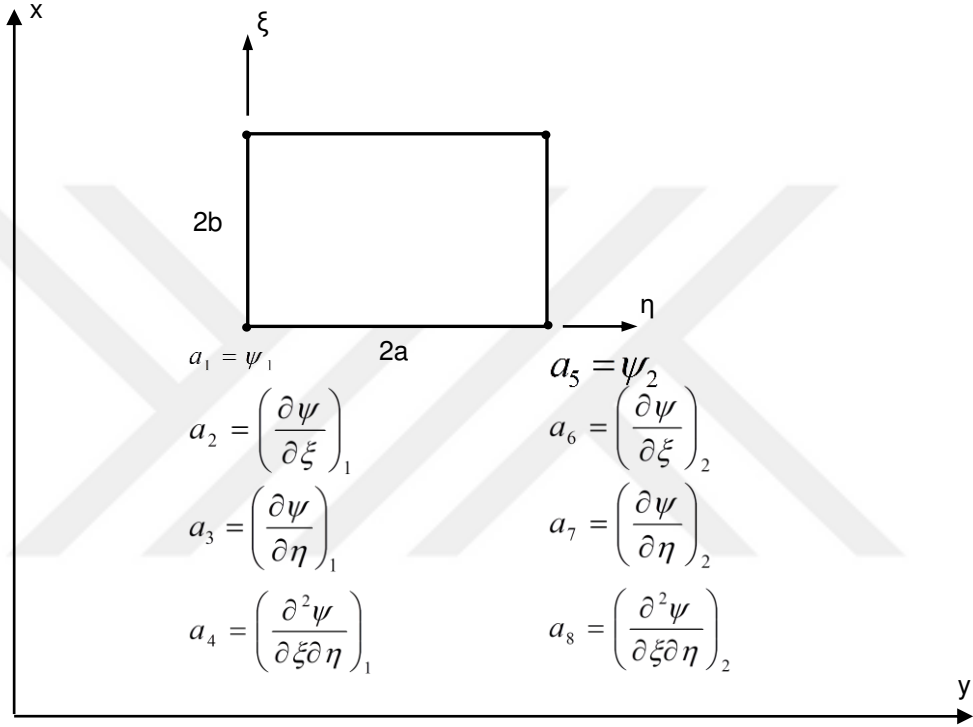
$$T_1 = -[T_2][C][j] \quad (3.59)$$

16 serbestlik derecesi ile Hermitian dikdörtgen plakanın sonlu eleman analizi için Şekil 3,9'da gösterilen 16 serbestlik derecesine sahip Hermitian Dikdörtgeni kullanılmıştır.

Birinci dereceden Hermit polinomlarını şöyle ifade edilmiştir:

$$\begin{aligned}
H_{01}^1(p) &= 1 - 3p^2 + 2p^3 \\
H_{02}^1(p) &= 3p^2 - 2p^3 \\
H_{11}^1(p) &= p - 2p^2 + p^3 \\
H_{12}^1(p) &= -p^2 + p^3
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Şekil fonksiyonları elde edilmiştir.



Şekil 3.9. 16 Serbestlik Derecesi ile Hermitian Dikdörtgen

Düğüm 1 için şekil işlevleri aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1(\xi, \eta) &= [H_{01}^1(\xi)][H_{01}^1(\eta)] \\
\tilde{N}_2(\xi, \eta) &= [H_{11}^1(\xi)][H_{01}^1(\eta)] \\
\tilde{N}_3(\xi, \eta) &= [H_{01}^1(\xi)][H_{11}^1(\eta)] \\
\tilde{N}_4(\xi, \eta) &= [H_{11}^1(\xi)][H_{11}^1(\eta)]
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Düğüm 2 için,

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_5(\xi, \eta) &= [H_{02}^1(\xi)][H_{01}^1(\eta)] \\
\tilde{N}_6(\xi, \eta) &= [H_{12}^1(\xi)][H_{01}^1(\eta)]
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\tilde{N}_7(\xi, \eta) = [H_{02}^1(\xi)][H_{11}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_8(\xi, \eta) = [H_{12}^1(\xi)][H_{11}^1(\eta)]$$

Düğüm 3 için,

$$\tilde{N}_9(\xi, \eta) = [H_{02}^1(\xi)][H_{02}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_{10}(\xi, \eta) = [H_{12}^1(\xi)][H_{02}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_{11}(\xi, \eta) = [H_{02}^1(\xi)][H_{12}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_{12}(\xi, \eta) = [H_{12}^1(\xi)][H_{12}^1(\eta)]$$

(3.63)

Düğüm 4 için,

$$\tilde{N}_{13}(\xi, \eta) = [H_{01}^1(\xi)][H_{02}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_{14}(\xi, \eta) = [H_{11}^1(\xi)][H_{02}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_{15}(\xi, \eta) = [H_{01}^1(\xi)][H_{12}^1(\eta)]$$

$$\tilde{N}_{16}(\xi, \eta) = [H_{11}^1(\xi)][H_{12}^1(\eta)]$$

(3.64)

Böylece Denklemler (3.61), (3.62), (3.63) ve (3.64) 'ten şekil fonksiyonlarını alınmıştır. Bunlardan birkaçı şu şekilde yazılmıştır.

$$N_1(\xi, \eta) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)$$

$$N_2(\xi, \eta) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(\eta - 2\eta^2 + \eta^3)$$

Diğerleri yukarıdaki denklemler kullanılarak hesaplanmıştır.

Hermit polinomları, plakaların eğilmesi ve burkulmasının incelenmesinde faydalı bir şekilde kullanılabilir (Shames, 1997). Bir elemanın değişkenleri arttıkça, yaklaşım güçlenmektedir. Bununla birlikte, işlevlerin sırasını artırmak, yani düğüm sayısını artırmak, daha fazla hesaplama süreci anlamına gelmektedir.

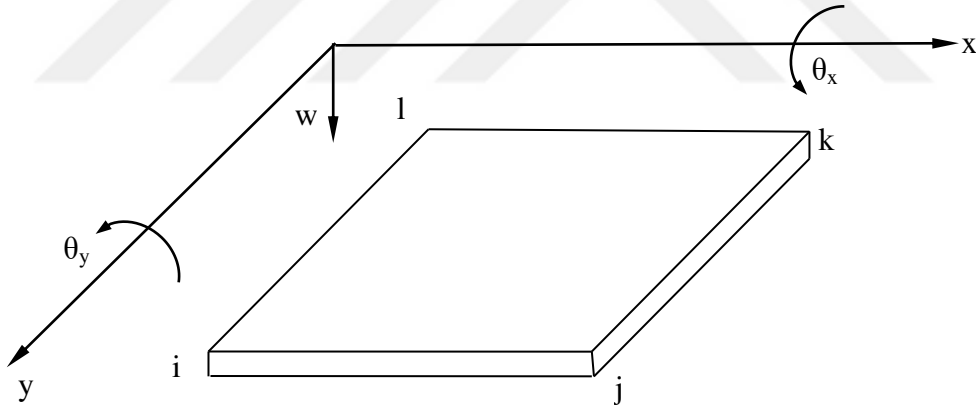
3.4. İnce Fonksiyonel Dereceli Plakaların Kararlılığı için Sonlu Elemanlar Analizi

Bu bölümde, Sonlu Elemanlar Yöntemi ile karşılaştırılan ince plaka teorisi, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir plakaya uygulanacaktır. Önce FD plakasına ait denklemler elde edilmiştir. Daha sonra esneklik modülünün değişimi iki aşamada ele alınmıştır.

1. Plakanın elastik modülü x eksenine boyunca değişmiştir.

2. Esneklik modülü, kalınlık boyunca, yani z eksenine boyunca değişiklik göstermiştir. FD plakası kavramı, plakadaki özelliklerin çeşitliliğinden kaynaklanmaktadır. Bu gerçek, rijitlik matrisini [D] etkiler ve dolayısıyla matris, plaka içinde sabit değere sahip olmayacak, ancak x eksenine boyunca plaka değişikliklerinin özellikleri dikkate alındığında her düğümde farklı bir değere sahip olmuştur. Kalınlık boyunca özelliklerin değişmesi düşünüldüğünde, [D] matrisi sabit bir değere sahip olacak, ancak homojen plakanınkine eşit olmamıştır. Bu durumda, esneklik modülü z eksenine aracılığıyla entegre edilmiştir ve plakanın rijitlik [D] matrisi bu entegrasyonla oluşturulmuştur. Homojen durum ile FD durumu arasındaki farkın [D] matrisinin çeşitliliğinden kaynaklandığı sonucuna varılmıştır. Bu gerçek, önerilen modeli doğrulamak için de kullanılmaktadır. Yani homojen duruma ait sonuçlar [D] değeri sabit tutularak elde edilmiştir.

3. Bölümde elde edilen sonuçlar, burada bahsedilen ifadeleri desteklemektedir.



Şekil 3.10. Plakadaki bir elemanın düğüm yer değiştirmeleri

Her düğümde dört değişken içeren dört düğümlü ögeyi Şekil 3.10'da ifade edilmiştir. Yani, her düğümde dört düğüm yer değiştirmesi vardır. Bunlar sırasıyla

w Dikey sapma

$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ Plakanın y yönündeki eğimi

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{x yönündeki plakanın eğimi}$$

$$\theta_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{x yönündeki eğrilik olarak ifade edilmiştir.}$$

Böylece dikdörtgen eleman için yer değiştirme vektörü elde edilmiştir.

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} \{a\}_i \\ \{a\}_j \\ \{a\}_k \\ \{a\}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (w)_i \\ (\theta_x)_i \\ (\theta_y)_i \\ (\theta_{xy})_i \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Sahip olduğumuz şekil değiştirme için

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

Stresler aşağıdaki denklem ile ifade edilmiştir,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

M_x , M_y ve M_{xy} momentleri için denklemler yazılırken ve Denklemler (3.5), (3.6) ve (3.15)'de ifade edilen plaka rijitliği D , iki tip FD plakası dikkate alınmıştır: 1. Plakanın özellikleri x - eksenini boyunca değişmiştir, yani plaka boyunca elastiklik modülü $E = E(x)$ olarak alınmıştır. 2. Plakanın özellikleri z eksenini boyunca değişmiştir, yani plaka kalınlığı yönünde elastiklik modülü $E = E(z)$ denklemini kullanılmıştır.

Poison oran sabiti olarak kabul edildiğinden, $E = E(x)$ için momentlerin yazılması,

$$M_x = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(x) z^2 dz \left[\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.68)$$

$$M_y = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(x) z^2 dz \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(x) z^2 dz \left[(1-\nu) \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

E (x) z'ye bağlı olmadığından, daha ileri işlemlerle elde edilmektedir.

$$M_x = \frac{E(x)h^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \frac{E(x)h^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.69)$$

$$M_{xy} = \frac{E(x)h^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

E = E (z) için momentler yazarsak, FDM için moment denklemleri sırasıyla ifade edecek olursak,

$$M_x = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz \left[\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$M_y = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz \left[\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (3.70)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz \left[(1-\nu) \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

ancak z'nin kalınlık yönünde bağımlılığından dolayı integral için hiçbir sadeleştirme yapılamamıştır.

Stresler şu şekilde yazılabilmektedir:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D] \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Böylece, FD plakası için rijitlik matrisi [D] olacaktır.

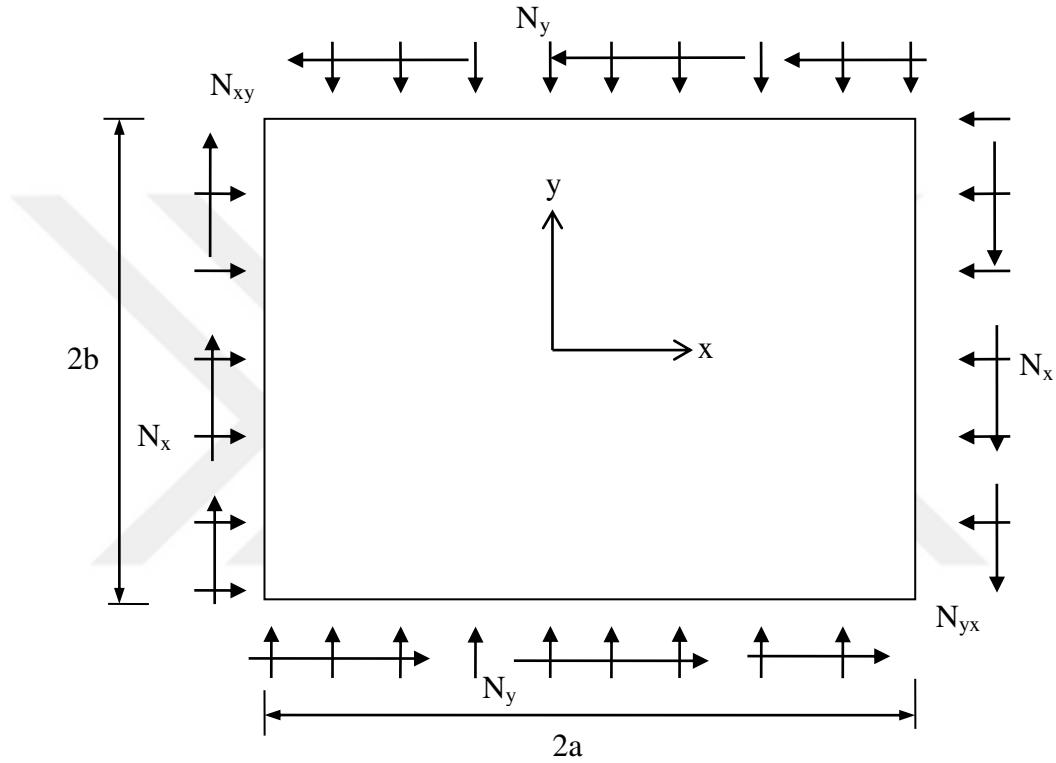
$$[D]_{fgm} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E(x) z^2 dz * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Elbette kalınlık boyunca değişen elastik modülü düşünüldüğünde E(x),E(z) olacaktır.

Matris [D], FD plakasının rijitlik matrisidir ve plakaların hem eğilmesi hem de burkulması için ortaktır.

Bu durumda Denklem (3.30) 'a geri dönerek ve kenar yüklerini tekrar N_x , N_y ve N_{xy} ile belirtecek olursak, Şekil 3.11'de gösterilen plaka için toplam potansiyel enerji ifadesi aşağıda yazılmıştır.

$$U = \frac{Dfgm}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3.73)$$



Şekil 3.11. Düzlem içi Kenar Yüklemeli Dikdörtgen Plaka

Bundan sonra, ilk varyasyonu aldıktan sonra düğüm yer değiştirmeleri açısından U ifade edilmiştir. İkinci integral Denklemdeki (3.73) ifadelerin birinci integraldeki ile aynı tarzda çökmeyi w cinsinden olduğu ifade edilmiştir. İkinci integral, her biri $\{a\} [] \{a\}^T$ integraliyle aynı biçimde olan üç ayrı ifade olarak verilmiştir. Bunu dikkate alarak, Denklem (3.30) ilk varyasyonunu alınmıştır. Mühendislik problemlerinde, toplam potansiyel enerji ifadesinin değişimi, genellikle, önce cebirsel bir denkleme dönüştürülebilir sonlu bir eleman denklemine yol açmaktadır. Bu nedenle, burada denge denkleminin zayıf formuna ihtiyacımız yoktur. Dahası, sonlu elemanlar analizinde, diferansiyel denklemlerin zayıf formu,

burada potansiyel enerji ifadesine sahip olduğumuz için en fazla ikinci türeve kadar en yüksek türevleri içermiştir.

U'nun ilk varyasyonunu alıp sıfıra eşitleyerek ve Denklem (3.6) 'yı inceleyerek,

$$\delta^{(1)}(U) = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(x)z^2 dz}{1-\nu^2} \left\{ \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \delta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} - \frac{1}{2} \left\{ N_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + N_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0 \quad (3.77)$$

Varyasyonel işlemlerden aşağıdaki ifade yazılmıştır.

$$\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right)$$

Denklem (3.77)'nin ilk bölümü

$$\frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(x)z^2 dz}{1-\nu^2} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \left[-\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \right] dx dy$$

$$+ \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(x)z^2 dz}{1-\nu^2} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \left[-\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (3.78)$$

$$(1-\nu) \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(x)z^2 dz}{1-\nu^2} 2 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \left[-\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x \partial y} \right] dx dy$$

Denklemleri göz önünde bulundurarak (3.15) ifadesinden (3.78) denklemi elde edilmiştir.

$$M_x \left[-\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \right] + M_y \left[-\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial y^2} \right] + M_{xy} \left[-\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.79)$$

Yukarıdaki denklemlerde sınır şartlarına bağlı olarak alt denklemler de mevcuttur. Şimdi formülasyonun fiziksel anlamı açık olmalıdır. Yani, M_x momenti ile x yönündeki eğrilik değişimi, potansiyel enerji U'nun artışını verir, vb. Matris gösteriminde, Denklemde (3.62) {σ} ifadesi ve plakalar için {ε} kullanılarak, yukarıdaki ifade yazılmıştır.

$$\{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy \quad (3.80)$$

Burada üst simge T, matrisin dönüşümünü belirtir. İnterpolasyon fonksiyonları ve düğüm yer değiştirmeleri açısından düğüm ifadesi

$$w = [N]\{a\} \quad (3.81)$$

Gerilme için aşağıdaki denklem yazılmıştır.

$$\{\varepsilon\} = [L]\{w\} \quad (3.82)$$

burada [L], değişkeniyle ilişkilendiren bir diferansiyel operatördür.

İfade eden

$$[B] = [L][N] \quad (3.83)$$

Buradan denklem (3.84) yazılacak olursa;

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\} \quad (3.84)$$

(3.81) ile (3.84) arasındaki denklemleri kullanarak, denklem (3.73)'deki integralin ilk bölümü elde edilmiştir.

$$\{\delta a\}^T [B]^T [D]_{fgm} [\varepsilon] dxdy \quad (3.85)$$

{ε}, Denklem (3.84) kullanılarak tekrar değiştirilir, sonra

$$\{\delta a\}^T (\{\delta a\}^T [B]^T [D]_{fgm} [B] dxdy) \{a\} \quad (3.86)$$

ifade eden

$$[K_F]_{fgm} = [B]^T [D]_{fgm} [B] dxdy \quad (3.87)$$

İfade (3.85) şu şekilde yazılabilmektedir:

$$\{\delta a\}^T [K_F]_{fgm} \{a\} \quad (3.88)$$

[K_F], Sonlu Elemanlar Analizinde plakalar için eğilme sertliği matrisi olarak adlandırılmıştır (Shames, 1997).

Denklemin (3.77) ikinci bölümü için, Denklem (3.81) ikame edilerek aşağıdaki ifade elde edilmiştir.

$$\frac{N_x}{2} \{a\}^T [K_G]_x \{a\} - \frac{N_y}{2} \{a\}^T [K_G]_y \{a\} - \frac{N_{xy}}{2} \{a\}^T [K_G]_{xy} \{a\} \quad (3.89)$$

[K_G]_x, [K_G]_y, ve [K_G]_{xy} plakaların burkulması için geometrik matrisler olarak

adlandırılmıştır. Bu ifadeler aşağıda sırasıyla belirtilmiştir:

$$\begin{aligned} [K_G]_x &= \{\tilde{N}_x\}[\tilde{N}_x] dxdy \\ [K_G]_y &= \{\tilde{N}_y\}[\tilde{N}_y] dxdy \\ [K_G]_{xy} &= \{\tilde{N}_{xy}\}[\tilde{N}_{xy}] dxdy \end{aligned} \quad (3.90)$$

Burada \tilde{N}_x interpolasyon fonksiyonlarının x'e göre kısmi türevleridir, vb. Bazı basitleştirmelerden sonra Denklem (3.77) elde edilmiştir.

$$[K_F]_{fgm}\{a\} - N_x[K_G]_x\{a\} - N_y[K_G]_y\{a\} - N_{xy}[K_G]_{xy}\{a\} = 0 \quad (3.91)$$

Yukarıdaki denklem, Şekil 3.10'da gösterildiği gibi yük uygulanan FD plakasının sonlu elemanlar denklemidir ve özdeğer problemidir. Bu denklemin çözümü sayısal bir yöntemle elde edilebilmektedir. En küçük özdeğer, FD plakasının ilk kritik burkulma yüküdür. Rijitlik ve geometrik matrislerini elde etmek için sayısal integrasyon için Simphon's Rule, Romberg Integration, Gaussian Quadrature, vb. dahil olmak üzere çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bunların arasında integral kümesi -1,1 veya 0 limitinde bir alana dönüştürüldüğü Gauss Quadrature , 1 ortak kullanıma sahiptir.

3.4.1. Özelliklerin X Eksenini Boyunca Değiştiği Tek Eksenli Yüklü Fonksiyonel Dereceli Plaka

Özelliklerin tek eksenli basınç altında x eksenini boyunca değiştiği bir Fonksiyonel Dereceli plaka için sonlu elemanlar denklemini elde etmek için $N_y = N_{xy} = 0$ Denklemi (3.91) seçilmiştir.

$$[K_F]_{fgm}\{a\} - N_x[K_G]_x\{a\} = 0 \quad (3.92)$$

Bu, plakaların global denklemdir. Şekil 3.12'de gösterildiği gibi, plakanın dört elemana bölündüğü düşünüldüğünde, bir eleman için eğilme matrisi,

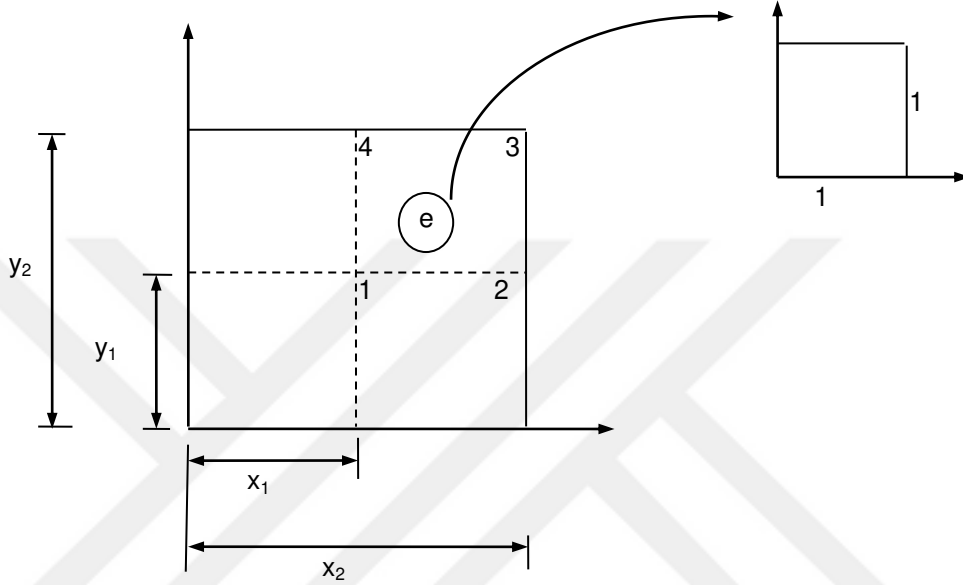
$$[K_F]_{fgm}^e = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [B]^T [D]_{fgm} [B] dxdy \quad (3.93)$$

ve geometrik sertlik matrisi

$$[K_F]_{fgm}^e = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \{\tilde{N}_x\}[\tilde{N}_x] dxdy \quad (3.94)$$

Gerçek eleman ve karşılık gelen referans eleman da Şekil 3.12'de gösterildiği

gibidir. Basit olması için, gerçek öge referans ögeye dönüştürülmüştür. Gerçek eleman arasındaki her düğümde dört değişken vardır. Bunlar 1. Düğümde $a_1=w_1$, $a_2=\theta_{x1}$, $a_3=\theta_{y1}$, $a_4=\theta_{xy1}$, düğüm 2 $a_4=\theta_{x2}$, vb. İnterpolasyon fonksiyonları için 16 serbestlik derecesi dikdörtgen plakanın eleman fonksiyonları kullanılmıştır. Bu fonksiyonlar denklemler (3.60) – (3.64) 'te verilen birinci dereceden Hermitian interpolasyon fonksiyonlarıdır.



Şekil 3.12. Gerçek bir öge ve karşılık gelen referans ögesi.

Denklem (3.54) 'deki integral dönüşümü kullanarak bir eleman için Eğilme Sertliği matrisi oluşturmak için,

$$[K_F]_{fgm}^e = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [D]_{fgm} [B] \det(J) dx dy \quad (3.95)$$

Denklem (3.95) 'deki matris $[B]$ şu şekilde elde edilmiştir:

$$[B]^{3 \times 16} = \{L\}^{3 \times 1} [\tilde{N}]^{1 \times 16} \quad (3.96)$$

bu durumda $\{L\}$ diferansiyel operatörü

$$\{L\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{(x_2-x_1)^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ -\frac{1}{(y_2-y_1)^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ -2 \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right\} \quad (3.97)$$

sonra

$$[B] = \{L\}[\tilde{N}_1(\xi, \eta) \quad \tilde{N}_2(\xi, \eta) \quad . \quad . \quad \tilde{N}_{16}(\xi, \eta)] \quad (3.98)$$

Elimizdeki Jacobian Matrisini hesaplamak için

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= (\tilde{N}_1)_\xi x_1 + (\tilde{N}_2)_\xi x_2 + (\tilde{N}_3)_\xi x_3 + (\tilde{N}_4)_\xi x_4 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= (\tilde{N}_1)_\xi y_1 + (\tilde{N}_2)_\xi y_2 + (\tilde{N}_3)_\xi y_3 + (\tilde{N}_4)_\xi y_4 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= (\tilde{N}_1)_\eta x_1 + (\tilde{N}_2)_\eta x_2 + (\tilde{N}_3)_\eta x_3 + (\tilde{N}_4)_\eta x_4 \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= (\tilde{N}_1)_\eta y_1 + (\tilde{N}_2)_\eta y_2 + (\tilde{N}_3)_\eta y_3 + (\tilde{N}_4)_\eta y_4 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Şekil 3.12'deki gerçek eleman basit bir dikdörtgen eleman olduğundan ve referans elemana çok benzediğinden, dönüşümler sadedir. Dörtgen gerçek eleman durumunda, dönüşümler karmaşık olacaktır ve denklemler (3.55) – (3.58) verilen dönüşüm matrislerini kullanmak daha pratiktir.

Geometrik sertlik matrisi elde etmek için denklem (3.100)'den faydalanılmıştır.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

Burada denklemin sağ tarafındaki ilk matris, Jacobian matrisinin tersidir. Sonra,

$$[K_{G_x}] = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 ([J]^{-1})^2 \{\tilde{N}_\xi\} [N_\xi] \det(J) d\xi d\eta \quad (3.101)$$

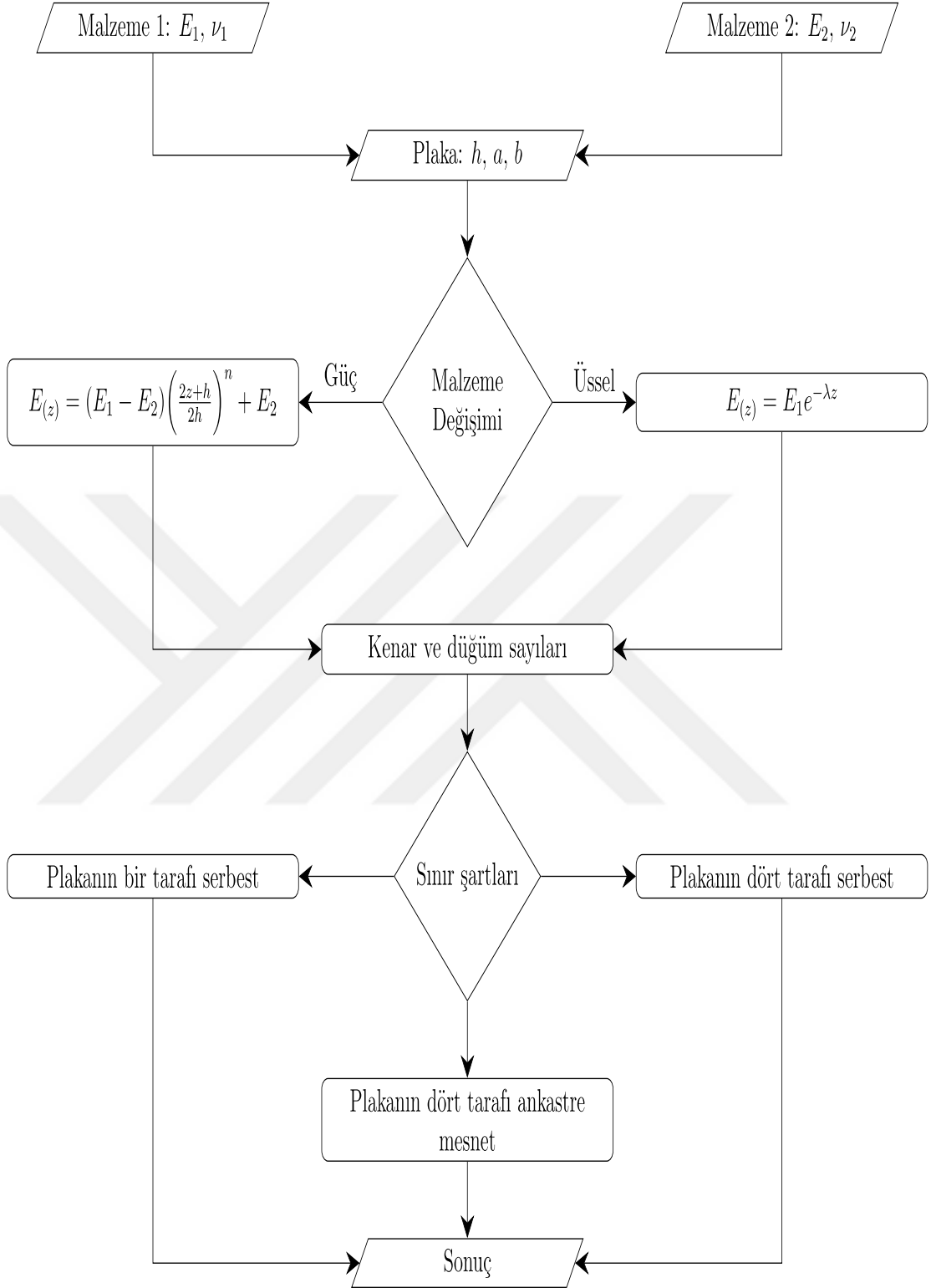
$[K_{G_x}]$ aynı zamanda bir eleman için 16x16 matris olacaktır. Geometrik matrisin esneklik modülüyle ilgili olmadığı belirtilmiştir. Dolayısıyla bu matris hem homojen hem de anizotropik plakalar için geçerlidir.

Şekil 3.12'de gösterilen bir elemana ait matrisleri birleştirmek için tüm parçaya global denklemler almak için montaj prosedürü gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla global matris, eğilme sertliği matrisi için 36x36 matris olacaktır. Küresel sonlu elemanlar matrisi, bu durumda şu şekilde olacaktır:

$$[K_F]_{fgm}^{36 \times 36} \{a\}^{36 \times 1} - (N_x) [K_G]_x^{36 \times 36} \{a\}^{36 \times 1} \quad (3.102)$$

Yukarıdaki özdeğer problemini çözerek ve en küçük özdeğer alınarak ilk burkulma yükü elde edilmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile yazılan programın akış şeması aşağıda verilmiştir. Programda ilk olarak malzemeler tayin edilmektedir. Malzemelerin elastisitesi ve poizon oranları girilmiştir. Daha sonra plakanın geometrisi tanımlanmıştır. Plakanın uzunluk, genişlik ve kalınlık değerleri girildikten sonra oluşturulacak fonksiyonel dereceli malzemenin karışım oranı belirlenmiştir. Plakanın sonlu elemanlara ayrılması yani ağ oluşturularak düğüm noktaları belirlenmiştir. Plakanın sınır koşulları her bir kenar için belirlenmiştir. Sırasıyla her bir düğümde oluşan gerilmeler birleşerek plakada oluşacak burkulma için gerekli minimum kritik burkulma kuvveti sonuç olarak vermiştir.

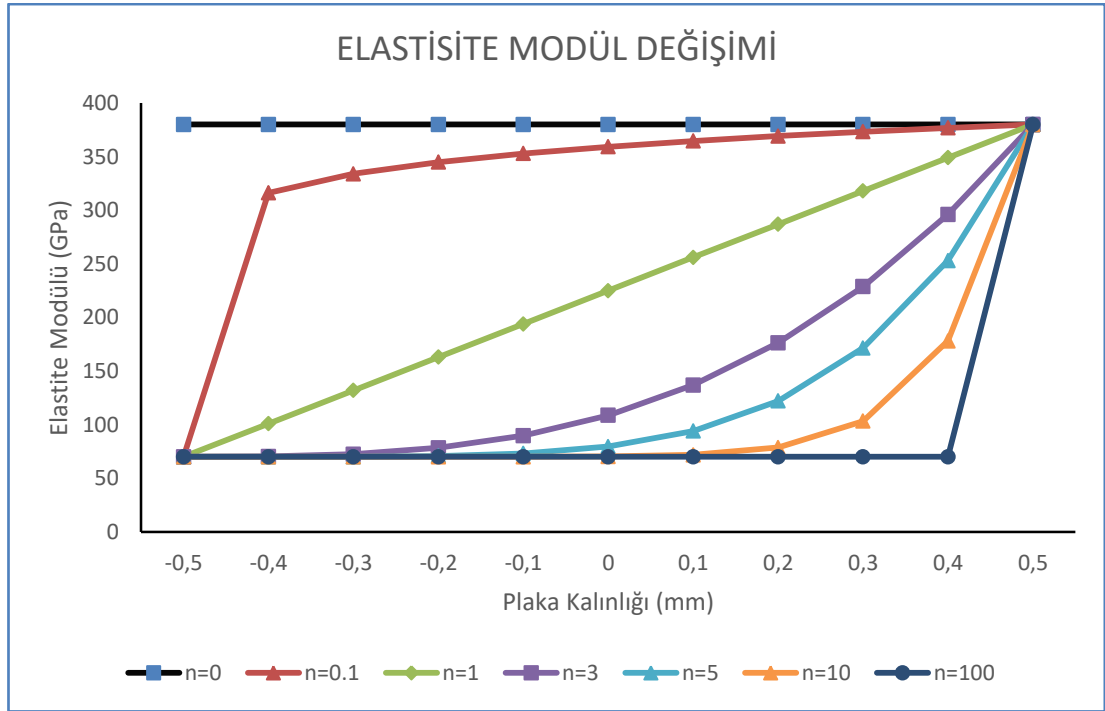


Şekil 3.13. Program akış şeması

4. FONKSİYONEL DERECELİ PLAKALARIN ANALİZİ VE BULGULAR

4.1. FD Plakalarda Elastik Modülün Değişimi

Fonksiyonel dereceli plakanın malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusunda dereceli değişimi fonksiyonel yaklaşımlar açısından da incelenmektedir. Bu amaçla Fonksiyonel dereceli plakada elastisite modülü ve Poizon oranının n değerleri ile değişimi Şekil 4.1 verilmiştir. Fonksiyonel dereceli malzeme en az iki farklı malzemeden oluşmaktadır. Burada malzeme olarak alüminyum ve seramik malzemeler seçilmiştir. Seramik (Alimuna) malzemenin elastisite modülü $E_1=380$ GPa ve poizon oranı 0.3 olarak kabul edilmiştir. Fonksiyonel dereceli plakanın kalınlık (z) yönündeki elastik modül değişimi başlangıç olarak plakanın üst yüzeyi için $E_1=380$ GPa değeri alınmıştır. Plakanın alt tabakası için ise elastisite modülü $E_2=70$ GPa ve poizon değeri 0.3 alüminyum malzeme seçilmiştir. Şekil 4.1'de görüldüğü üzere $n=0$ değerinde plakanın tamamen seramik olduğunu belirtmektedir. Devamında $n=1$ değeri ise seramik ve metal bileşiminin değişimi doğrusaldır. Buradan sonuç olarak n değeri arttıkça yapının metal özelliklerine yakınsadığı görülmüştür.



Şekil 4.1. FD Plakada Elastik modülün k değerleri ile değişimi

4.1.1. Plakalarda Kritik Yük Değişimi

FD plakalarda hacimsel oranları göz önünde bulundurularak malzemenin herhangi bir noktasındaki malzeme özellikleri denklem 3.8'den elde edilmiştir. Burada n değerinin 0 olması fonksiyonel dereceli malzemenin homojen seramik plaka olduğunu göstermiştir. Homojen plakalarda kritik burkulma yükü;

$$N_x = 10.07 \frac{\pi^2 D}{b^2} \text{ şeklindedir.}$$

Burada D plak rijitlik katsayısıdır. Homojen plakada değişen kalınlık oranına bağlı kritik burkulma yükü hesaplanmıştır. Plakanın boyutları a=0.5 m kenar uzunluğu, b=0.5 m genişliğe sahip olup, kalınlık değeri h ise 0.0005 m ile 0.005 m arasında ve elastik modülleri seramik (Alimuna) için E= 380.e+09 Paskaldır. Tablo 4.1'de kritik burkulma yüklerinin değişimlerini analitik ve sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

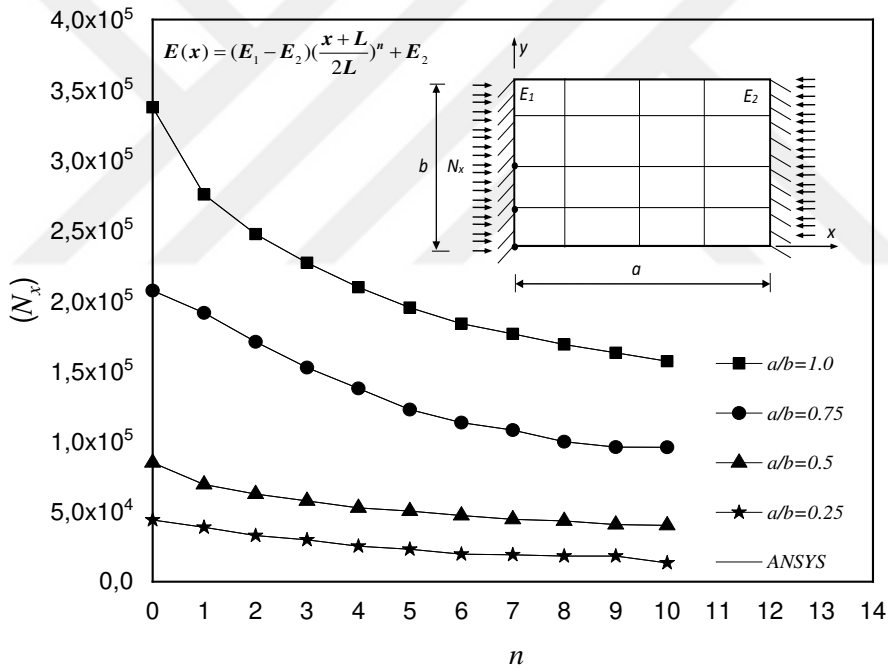
Tablo 4.1. Dört tarafından sabitlenmiş homojen seramik (Alimuna) kare plaka için kritik burkulma yüklerinin analitik ve ANSYS ile hesaplanması

h(kalınlık) (mm)	Burkulma Yükü (ANSYS) (Pa)	Burkulma Yükü (Analitik) (Pa)
0.0005	1734.4789	1730,170645
0.001	13875.8309	13841,36516
0.0015	46830.9239	46714,60742
0.002	111006.6472	110730,9213
0.0025	216809.8125	216271,3306
0.003	374647.3908	373716,8593
0.0035	594926.2204	593448,5313
0.004	888053.178	885847,3703
0.0045	1264434.748	1261294,4
0.005	1734478.5	1730170,645

4.2. Fonksiyonel Dereceli Plakada X Eksenine Yönde Elastik Modül Değişimi

Fonksiyonel dereceli plaka x eksenine boyunca değişen elastik modül değerlerine bağlı olarak değişen burkulma değerleri incelenmiştir. Bölüm 3.2'de verilen denklemlere göre plakada rijitlik matrisi elde edilmiştir. Plaka kalınlığı limit değerler arasında alınmıştır. Kullanılan denklemler klasik ince plak teorisine bağlı kalınmıştır. Plakada elastik modül değeri plaka uzunluğu boyunca üssel olarak değiştiği

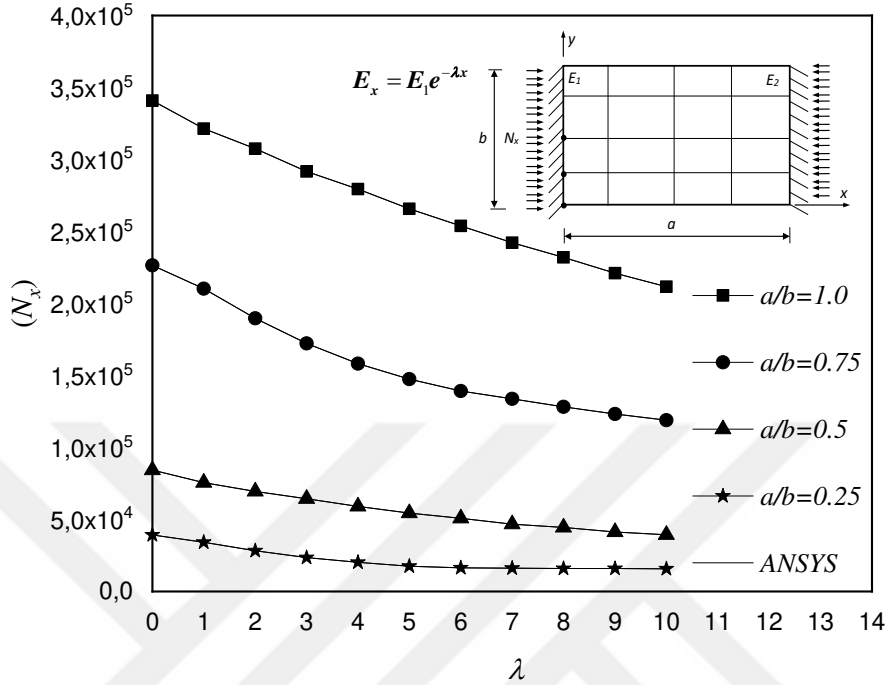
görülmüştür. Şekil 4.2 ve 4.3'te görüldüğü gibi artan n değerleri için burkulma kuvvetlerinin azaldığı görülmektedir. Daha büyük n değerleri için burkulma kuvvetinin sabit bir değere yönlendiği görülmektedir. Görüldüğü üzere burkulma kuvveti hiçbir zaman homojen plakadaki değere ulaşmamaktadır. İki farklı elastik modül değişimi için kritik burkulma değerleri incelenmiştir. Bunlar sırasıyla $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ ve diğer denklem ise $E(x) = E_1 e^{-\lambda x}$ olarak kullanılmıştır. Elde edilen değerler Ansys paket program sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile fonksiyonel dereceli plaka parçalara bölünerek her bir düğüm noktası için değişkenlerimiz w , θ_x , θ_y , θ_{xy} sınır şartlarına göre değerler atanmıştır. Ankastre mesnet plaka için çökme değeri ve dönme açıları sıfır olarak kabul edilmiştir.



Şekil 4.2. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile karşılaştırılmıştır. Plak boyutları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve sınır şartı ise CFFC durumu için elastic modül değişim fonksiyonu ise $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ kullanılmıştır

Fonksiyonel dereceli plakanın uzunluğu yönünde elastisite modülü değişimi $E(x) = E_1 e^{-\lambda x}$ denklemi kullanılarak analiz yapılmıştır. Kritik burkulma değerleri plakanın farklı boyutlarına göre araştırılmıştır. Kare plakanın diğer geometrilere göre daha dengede olduğu elde edilen sonuçlar neticesinde görülmüştür. Daha önce

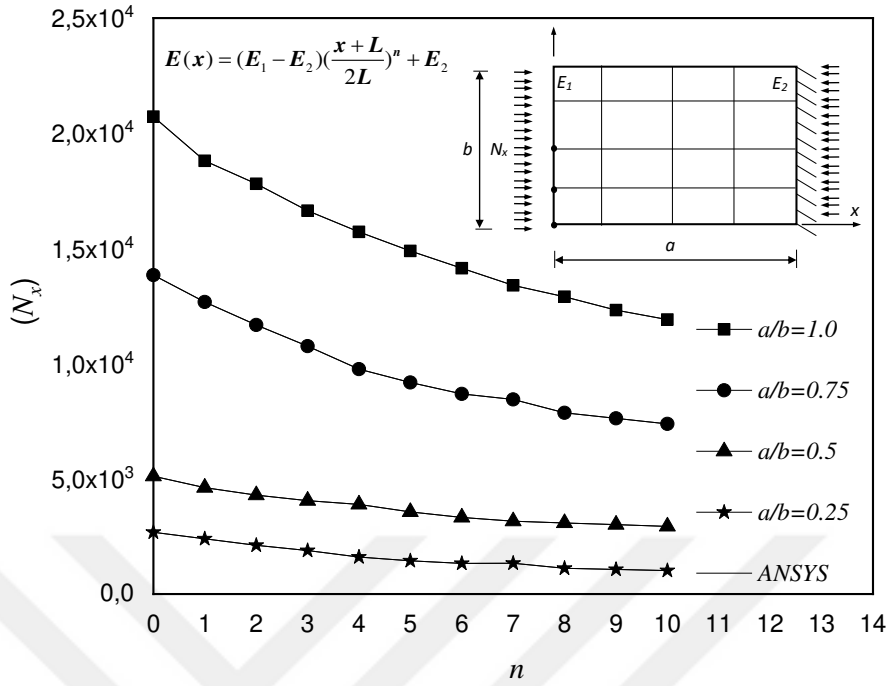
yapılan çalışmalarda da görüldüğü üzere plakanın kare ölçüleri için tek bir çökme olduğu görülmüştür. Artan λ değerleri ile kritik burkulma kuvvetleri azalmaktadır.



Şekil 4.3. FD plakada kritik burkulma değerinin değişen λ ile değişimi karşılaştırılmıştır. Plak boyutları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve CFFC sınır şartı için elastic modül değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ kullanılmıştır.

4.2.1.1. Bir Kenarı Ankastre Mesnet Diğer Kenarları Serbest Mesnet olan Fonksiyonel Dereceli Plakanın Kritik Burkulma Kuvvet Analizi

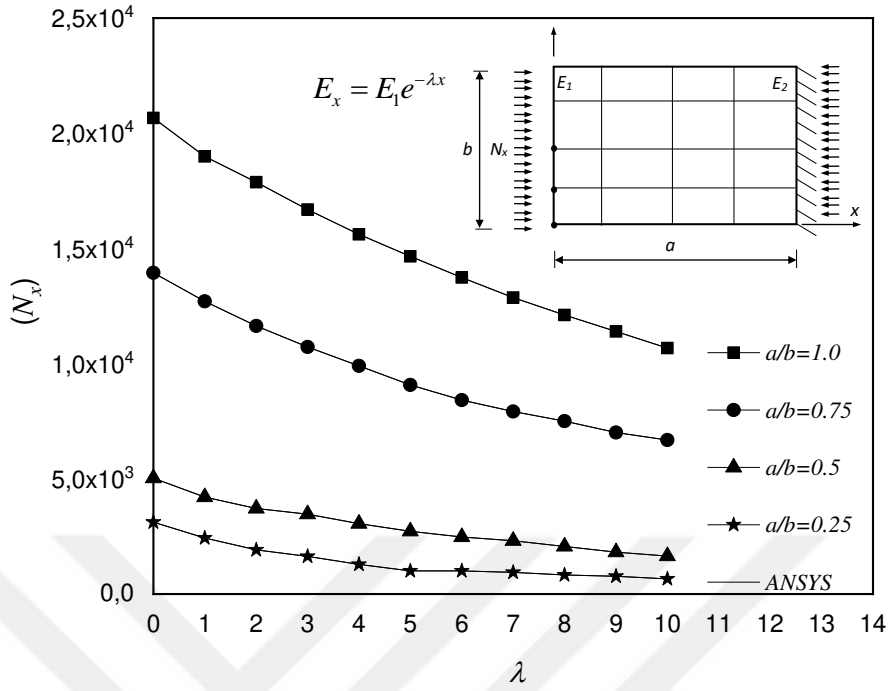
Fonksiyonel dereceli plakanın aksenal yük etkisi altında burkulma değerleri incelenmiştir. Plakanın bir kenarı ankastre mesnet ve sınır değerleri çökme ve dönme açıları sıfır olarak kabul edilerek çözümlene yapılmıştır. Elastisite modülü değişimi plak uzunluğu yönünde iki farklı denklem ile inceleme yapılmıştır. Fonksiyonel dereceli plakanın farklı kenar uzunluk (span) değerlerine karşılık gelen kritik burkulma değerleri yine artan n değerleri yani fonksiyonel dereceli plakanın hacimsel oranıyla değişimi incelenmiştir. Artan n değerleriyle ters orantılı olarak kritik burkulma yükleri azalmakta ve belli bir değere doğru sabitlendiği Şekil 4.4'te görülmektedir.



Şekil 4.4. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile değişimi karşılaştırılmıştır. Plak boyutları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve FFFC sınır şartlarında elastic modül değişimi

$$E(x) = (E_1 - E_2) \left(\frac{x+L}{2L} \right)^n + E_2 \text{ fonksiyonu ele alınmıştır}$$

Fonksiyonel dereceli plakanın bir kenarı ankastre mesnet diğer kenarlarının serbest mesnet olması durumunda kritik burkulma değerlerinin plakanın dört tarafının sabit olması durumuna göre daha düşük değerler aldığı görülmüştür. Plaka uzunluğu yönünde elastic modül değişimi için $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemi kullanılmıştır. Plakanın farklı geometrilerine göre plaka burkulma değerleri Şekil 4.5'te karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.5. FD plakada kritik burkulma değerlerinin λ değerleri ile değişimi ele alınmıştır. Plakada boyut oranları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve FFFC sınır şartları için elastic modül değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemi ele alınmıştır.

Fonksiyonel dereceli plakada seçilen iki farklı sınır şartı için burkulma etkileri incelenmiştir. Birinci durumda plakanın iki kenarı sabit tutulu diğer iki kenarın serbest durumu, ikinci durumda ise plakanın sol kenarı sabit tutulu iken diğer üç kenarı serbest bırakılmıştır. Üssel n değeri 0 ile 10 değerleri arasında alınmıştır. Buradaki sıfır değeri homojen plaka durumu için kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile incelenen kare plaka sınır şartları basit mesnet ve iki tarafından etkilenen yük sonucu elde edilen kritik burkulma kuvvetleri ile literatürde elde edilmiş sonlu şerit metoduyla karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 4.2.'de verilmiştir.

Tablo 4.2. Basit mesnet FD plak için kritik burkulma kuvveti (MPa)

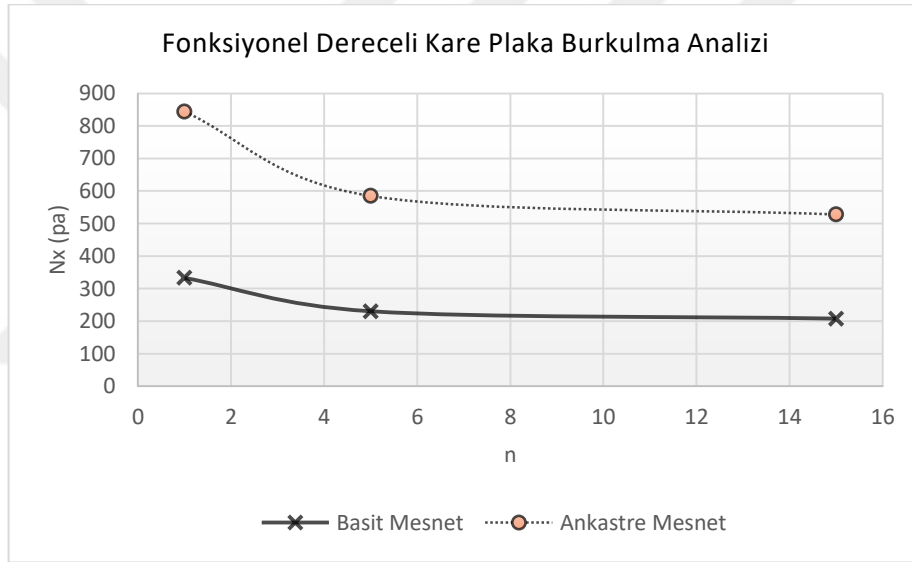
	$n=0$	$n=1$	$n=3$	$n=10$
Sarrami S.	137.38	68.47	48.63	41.16
Sharie ve ark.	137.37	68.47	48.63	41.16
Mevcut çalışma	137.30	68.31	48.68	41.36

Sınır şartları değiştirilmiş kare plaka için dört tarafından sabitlenmiş ve iki tarafından etkilenen bası yükü sonucu elde edilen kritik burkulma kuvvetleri ile sonlu şerit metodu ile elde edilen değerler ile Tablo 4,3'te verilmiştir.

Tablo 4.3. Ankastrre FD plak için kritik burkulma kuvveti (MPa)

	n=0	n=1	n=3	n=10
Sarrami S.	353.43	176.66	137.85	65.29
Mevcut çalışma	354.42	171.81	122.24	64.02

Fonksiyonel dereceli kare plakaya farklı sınır şartları altında etkiyen bası yüküne bağlı elde edilen kritik burkulma değerleri Şekil 4.6’da verilmiştir. Ankastrre kare plakada burkulma değerlerinin basit mesnet kare plakaya oranla daha yüksek değerler aldığı görülmektedir. Artan üssel n değerleriyle kritik burkulma değerleri azalmakta ve belli bir değerden sonra lineer devam ettiği literatürdeki değerler ile örtüşmektedir.



Şekil 4.6. Basit mesnet ve ankastrre mesnet kare plaka için burkulma değerleri karşılaştırılmıştır

Fonksiyonel dereceli plakada farklı Elastisite Modül değerleri için kritik burkulma değerleri elde edilmiştir. Bu değerler sonlu elemanlar yöntemi ve Ansys programları ile hesaplanmıştır. Plakada sınır şartları ilk olarak iki kenarı ankastrre mesnet ve diğer iki kenarı serbest mesnet (CFFC) ve sonraki sınır şartında ise plakanın üç kenarı serbest bir kenarı ankastrre mesnet (FFFC) durumu ele alınmıştır. Artan plak boyutları ile kritik burkulma değerleri incelenmiştir.

$$E(x) = (E_1 - E_2) \left(\frac{x+L}{2L} \right)^n + E_2 \quad \text{ve} \quad E(x) = E_1 e^{-\lambda x}$$

hesaplanmasında kullanılmıştır. Çalışmada endüstride yoğun olarak kullanılan malzemeler seçilmiştir. Seramik (Zirconia) malzeme için $E=151 \times 10^9$ GPa ve Poizon

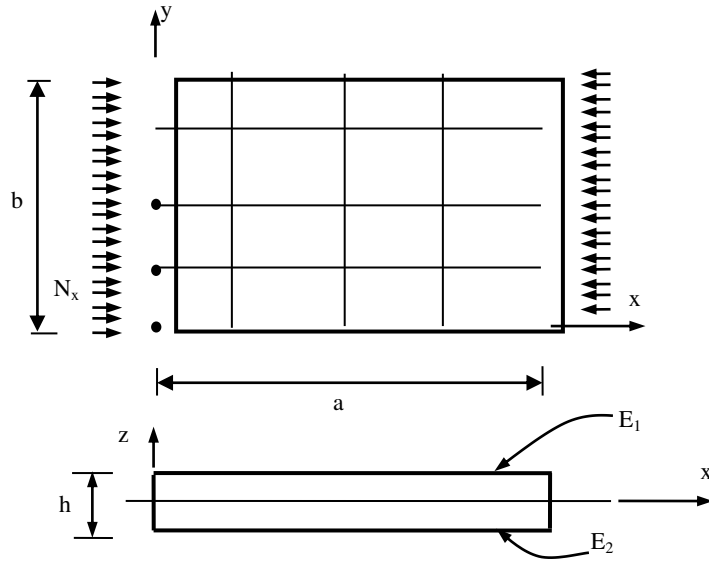
oranı $\nu=0.3$ buna ilave olarak metal malzeme alüminyum $E=70 \times 10^9$ GPa ve $\nu=0.3$ değerleri seçilmiştir. Değişen λ ve n değerleri için kritik burkulma değerleri elde edilmiştir. Malzeme özellikleri ve plaka geometrisine bağlı olarak paket program Ansys Shell281 modeli için sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen değerler sonlu elemanlar yöntemiyle bulunan değerler arasında uyumlu sonuçlar göstermiştir. Sonlu elemanlar metodunda plaka daha küçük alanlara bölünerek sonuçların değişimi gözlenmiştir. Plaka 281 modeli Ansys paket programında seçilmiş ve plaka 4, 16, 20 ve 24 parçaya bölünerek kritik burkulma değerleri elde edilmiştir.

Tablo 4.4. FD Plakada Burkulma Yüğü ile Malzeme Özelliklerinin Dügüm Noktaları ile Değişimi. Plak Sadece Bir Kenarı Ankastre Mesnet Diğer Kenarlar Serbest Mesnet (FFFC)

h=0.0025m.	Plak Dügüm Nokta Sayısı	Plak Burkulma Değeri (N)			
		Plak Boyutları (m) 0.25 x 0.25	Plak Boyutları (m) 0.25 x 0.5	Plak Boyutları (m) 0.25 x 0.75	Plak Boyutları (m) 0.25 x 1
$\lambda = 1$	NELEMAN=4	4269	1629	720.5	403.5
	NELEMAN=16	6291	1555	686.8	384.9
	NELEMAN=20	6290	1555	686.7	384.9
	NELEMAN=24	6290	1555	686.7	384.9
$\lambda = 5$	NELEMAN=4	11950	2963	1310	734.3
	NELEMAN=16	16190	2738	1211	678.9
	NELEMAN=20	11070	2738	1210	678.9
	NELEMAN=24	11060	2738	1210	678.8
$\lambda = 8$	NELEMAN=4	13990	3469	1534	860
	NELEMAN=16	13160	3254	1438	806.6
	NELEMAN=20	13160	3254	1438	806.6
	NELEMAN=24	13160	3254	1438	806.6

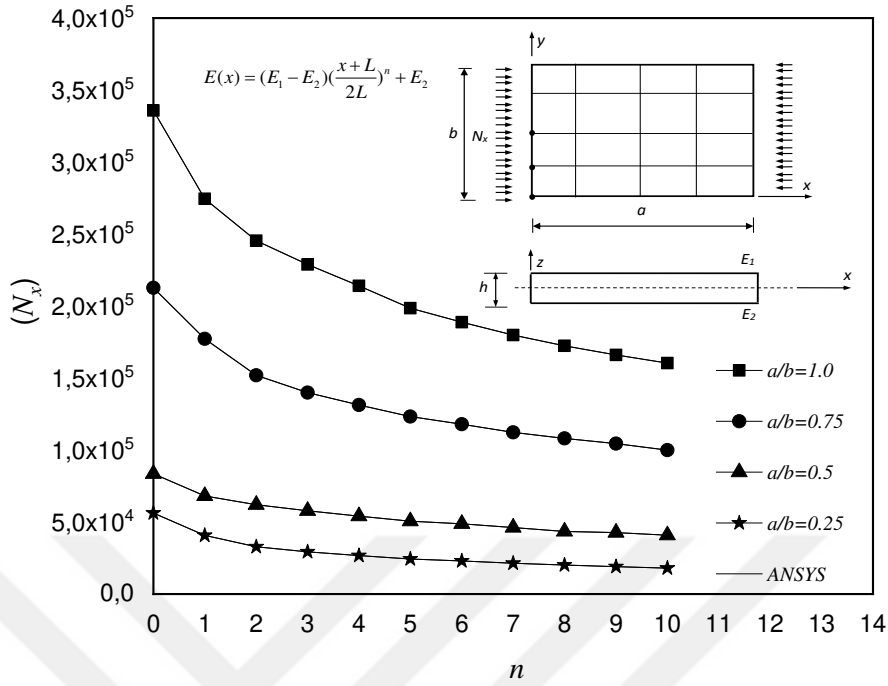
4.2.2. Fonksiyonel Dereceli Plakada Elastisite Modülünün Kalınlık Yönünde Değişimi

Fonksiyonel dereceli plakada kalınlık boyunca değişen elastisite modül değerlerine bağlı olarak değişen burkulma değerleri incelenmiştir. Plaka kalınlığı klasik plak teorisine uygun değerler alınmıştır. Fonksiyonel dereceli plakanın elastik modülü, plaka kalınlığı yönündeki plak rijitlik matrisinin değişimi ile orantılıdır.



Şekil 4.7. Dikdörtgen FDM plakada kalınlık yönünde özelliklerinin değişimi.

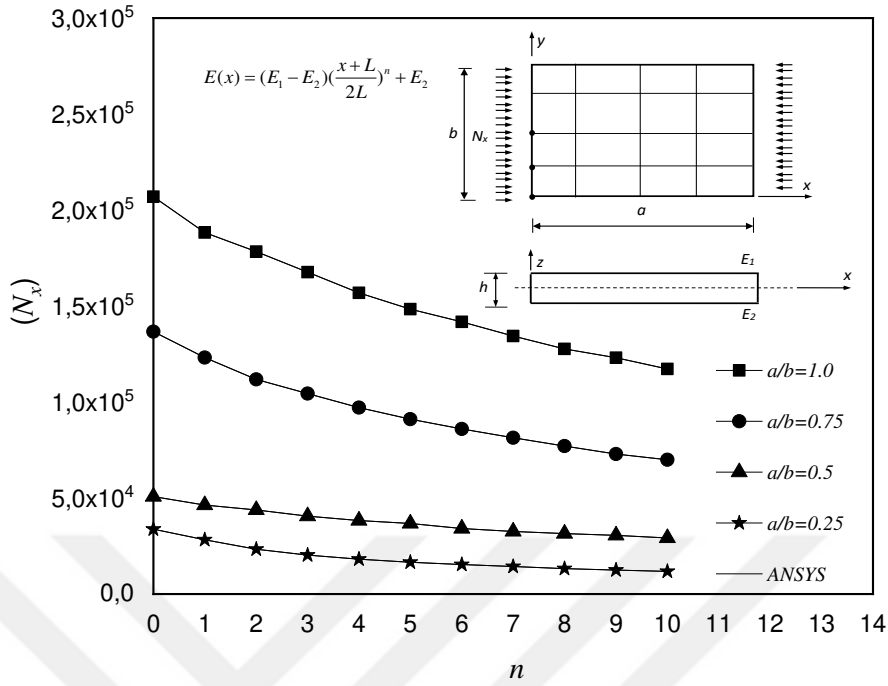
Fonksiyonel dereceli plakanın iki kenarı ankastre mesnet diğer iki kenarının serbest mesnet sınır şartları için çözümlenmiştir. Plak burkulma değerleri elastik modülün $E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2$ denklemi ile plakanın alt kısmı seramik üst kısmı alüminyum malzeme ve iç kısımlara doğru dereceli olarak değişimi kabul edilmiştir. Artan n değerleri ile kritik burkulma değerleri azalmaktadır. Fonksiyonel dereceli plakanın değişen kenar ve uzunluk değerleri ile kritik burkulma yükleri Şekil 4.8’de karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.8. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile değişimi incelenmiştir. Plak boyut oranları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve CFFC sınır şartı için elastic modül değişimi

$$E(x) = (E_1 - E_2) \left(\frac{x+L}{2L} \right)^n + E_2 \text{ fonksiyonu kullanılmıştır.}$$

Fonksiyonel dereceli plakanın bir kenarı ankastre mesnet diğer kenarlarının serbest mesnet sınır şartları için kritik burkulma analizi yapılmıştır. Artan n değerleri ile kritik burkulma değerleri azalmaktadır. Fonksiyonel dereceli plakanın değişen kenar- boy değerlerine göre kritik burkulma değerleri Şekil 4.9’da görüldüğü gibi değişmektedir. Plaka geometrisinin plaka burkulma değerlerinde etkili olduğu görülmüştür.



Şekil 4.9. FD plakada kritik burkulma değerinin artan n değerleri ile değişimi ele alınmıştır. Plak boyut oranları $a/b=0.25;0.5;0.75;1.0$ ve FFC sınır şartı için elastic modül değişimi

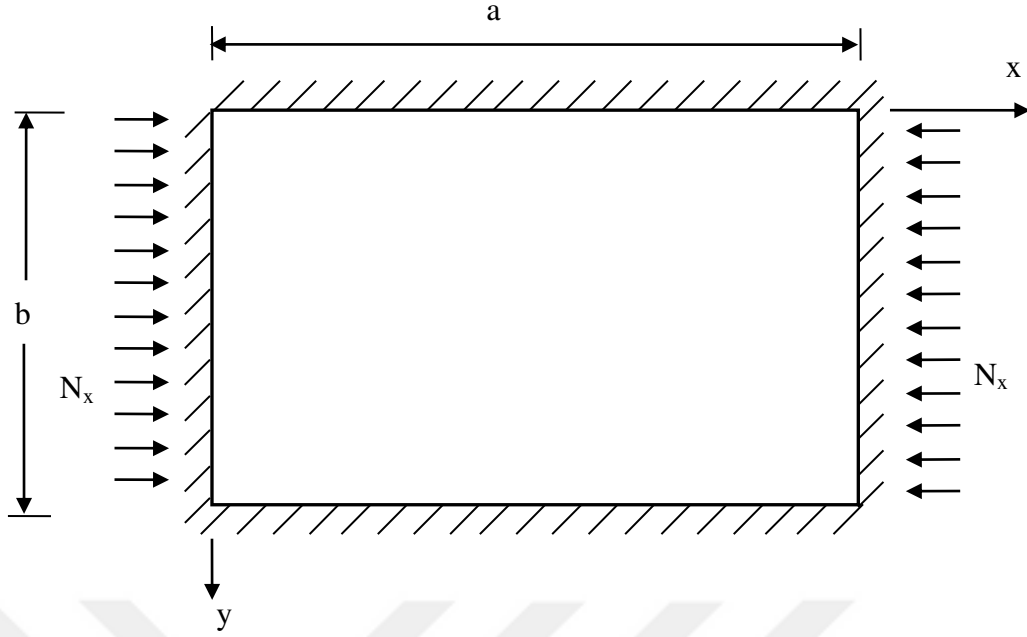
$$E(x) = (E_1 - E_2)\left(\frac{x+L}{2L}\right)^n + E_2 \text{ denklemini kullanılmıştır.}$$

4.3. Fonksiyonel Dereceli Yamuk Plaka

Bu bölümde yamuk plaka için iki farklı sınır şartı için kritik burkulma yükü değerleri incelenmiştir. Bunlar sırasıyla

a) Plaka dört tarafından sabitlenmiş durumdadır. Tek yönlü bası yükü uygulanarak plaka burkulmaya zorlanmıştır.

b) Plaka bir kenarından sabitlenmiş ve diğer kenarları serbest bırakılmıştır. Tek yönlü bası yükü altında plak burkulmaya zorlanmıştır.



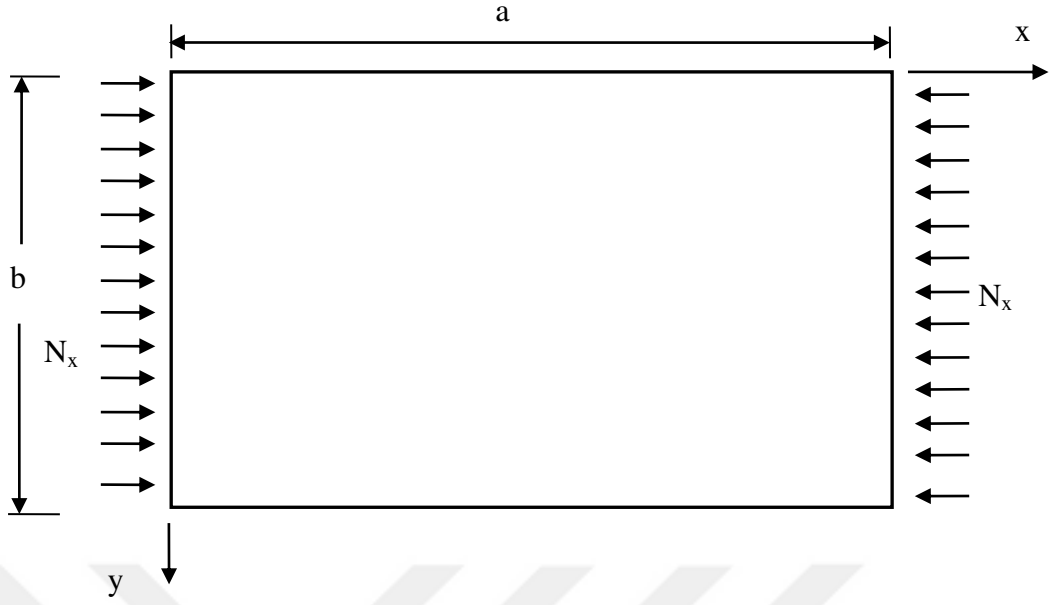
Şekil 4.10. Dört tarafından sabitlenmiş plakada tek yönlü kuvvet uygulanması

Fonksiyonel dereceli plakada elastite modülün değişimi x eksenini yönünde değiştirilmiş ve fonksiyon olarak $E(x) = E_1 e^{-\lambda x}$ seçilmiştir. Denklemdaki λ değerleri 0 ile 10 aralığında alınmıştır. İkinci durumda ise Elastite Modül değişimi plaka kalınlığı z eksenini yönünde değiştirilmiştir. Bu sınır koşulu için seçilen denklem

$$E(z) = (E_1 - E_2) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n + E_2$$

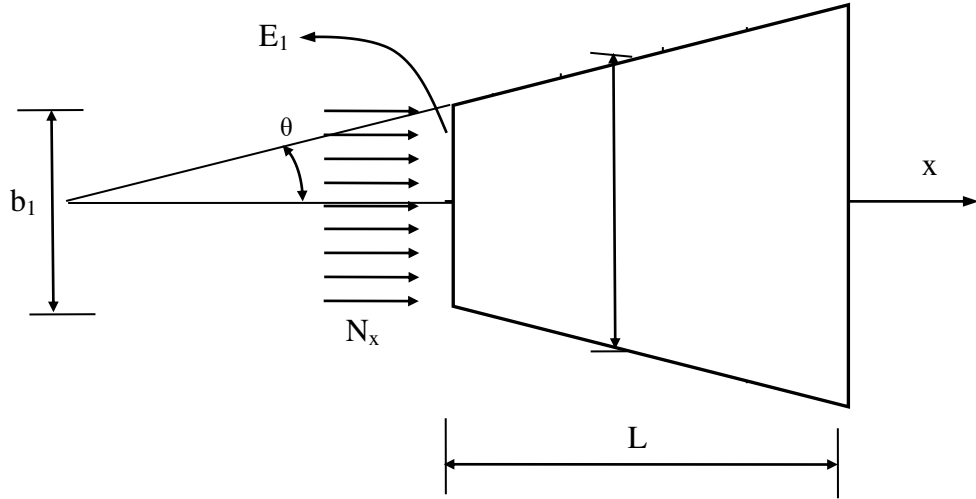
Dikdörtgen plakada orta eksene etkiyen N_x yükünün üniform olarak x eksenini boyunca $x=0$ ve $x=a$ aralığında şekil 4.2'de görüldüğü gibi burkulan plakada deformasyon yüzeyini gösteren seri açılımı şeklindedir.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$



Şekil 4.11. Plakanın N_x yükü etkisinde sıkıştırılması

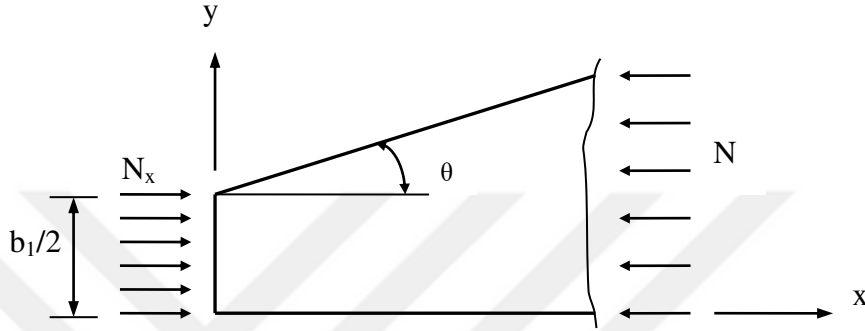
Denklemdaki n değerleri ise 0 ile 10 aralığında alınmıştır. Enerji denklemi kullanılarak plakada kritik burkulma yük değerleri hesaplanmıştır. Burada sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak plaka bölümlere ayrılmıştır.



Şekil 4.12. Plaka aksenal bası yükü etkisinde parçalara bölünmüş

Plaka enerji denkleminde değişen elastik modül değerleriyle kritik burkulma yükleri N_x değerleri Hermitian polinomları ile elde edilmiştir. Elastik modül değişimi plaka uzunluğu x ekseni boyunca alınmıştır. Burada E_1 Elastik modül

değeri x değerinin sıfır yani başlangıç noktasıdır. Bu durumda $E(x)$ denklemi $E_1 e^{-Lx}$ burada $x=L$ plak uzunluğu boyunca alacağı değerleri kapsamaktadır. Buradan Elastik modül değeri $E(x) = (E_1 - E_2) \left(\frac{x+L}{2L} \right)^n + E_L$ denklemini kullanılmıştır. Plaka kalınlığı boyunca Elastik modül değişimi z eksenini boyunca x - y düzlemine dik Elastik modül değişimi plakanın üst kısmından başlamaktadır. Değişen λ ve n değerleri için plakada farklı θ açılarının plaka burkulma değerlerine etkisi araştırılmıştır.



Şekil 4.13. Plakada alınan bir kesite etkiyen bası yükü

4.4. Elastik Modülün X Eksenini Boyunca Değişimi

Plaka deplasman yer değiştirme değerleri aşağıda sırasıyla yazılmıştır.

w = Plak çökme değeri

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}; \text{ plakanın Y ekseninde dönme açısı}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}; \text{ plakanın X ekseninde dönme açısı} \quad (4.1)$$

$$\theta_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \text{ plakanın X ekseninde eğrilik açısı}$$

Plaka uzama denklemlerinin matris formu aşağıdaki gibidir:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Etkiyen bası yük aşağıdaki gibidir:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Denklemleri kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{E(x)h^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \frac{E(x)h^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= (1-\nu) \frac{E(x)h^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Burada elastik modülün X eksenini boyunca değişimini göstermektedir.

Böylece kuvvet denklemleri matris formunda aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_{fgm} \quad \{\varepsilon\} = [D]_{fgm} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Buradan fonksiyonel dereceli plakanın rijitlik matrisi [D] ise aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$[D]_{fgm} = \frac{E_0 e^{-\lambda x} h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Diğer taraftan, toplam enerji denkleminde sadece N_x yükü dikkate alınacağından dolayı denklemde sadeleştirmeler yapılmıştır.

$$U = \iint_R \left(M_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2M_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + M_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) dx dy + \iint_R \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy \quad (4.7)$$

Elde edilen denklemin matris formunda yazımı aşağıdaki denklemde verilmiştir:

$$U = \iint_R \left[M_x \quad M_y \quad M_{xy} \right] \delta \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} dx dy + \iint_R N_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (4.8)$$

Denklem (4.5) ve (4.6) kullanılarak (4.8) denklemini aşağıdaki formda yazılmıştır.

$$U = \iint_R \{ \delta \varepsilon \}^T \frac{E_1 e^{-\lambda x} h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{ \varepsilon \} dx dy + \iint_R N_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (4.9)$$

Sonlu elemanlar çözüm aşamasında Hermitian polinomları ile açılım yapılmıştır. Düğüm yer değiştirmelerinde denklem 4.9'u ifade etmek için Hermit polinomlarından türetilen şekil fonksiyonlarını içeren aşağıdaki ifade yazılmıştır. Toplam enerji denklemi kullanılarak yer değiştirme değerleri şekil fonksiyonu \tilde{N} sonuçlar elde edilmiştir. Hermitian polinomları kullanılarak aşağıdaki denklem yazılmıştır:

$$\{w\} = [\tilde{N}] \{a\} = \{a\}^T [\tilde{N}]^T \quad (4.10)$$

Ve transpozası alınarak aşağıda ifade edilmiştir:

$$\delta w = \{ \delta a \}^T [\tilde{N}]^T \quad (4.11)$$

Burada T transpozayı ifade etmektedir. Bir diğer değişken $\{a\}$ ise düğüm yer değiştirme vektörünü ifade etmektedir. Buradan denklem (4.1) kullanılarak aşağıdaki denklem yazılmıştır.

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \\ a_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_{xy} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Denklemdeki ε açıkça yazılacak olursa:

$\{\varepsilon\} = [L]\{w\}$ ve $[B] = [L][\tilde{N}]$ şeklinde ifade edilmiştir.

Böylece yer değiştirme vektörü aşağıdaki formda tanımlanmıştır.

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\}$$

Yukarıdaki ifadeye denklem (4.12) ilave edilirse aşağıdaki denklem yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \{\delta a\}^T & \left[\left(\iint_R [B]^T \frac{E_1 e^{-\lambda x} h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} [B] dx dy \right) \{a\} - \right. \\ & \left. - \{\delta a\}^T \left[\iint_R \left(\tilde{N}_{,x} \right)^T [\tilde{N}] dx dy \right] \{a\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Böylece sonlu elemanlar denkleminin basit formu denklem 4.14 elde edilmiştir.

$$[K_F]_{fgm} \{a\} - N_x [K_G]_x \{a\} = 0 \quad (4.14)$$

Denklemdeki $[K_F]$ ve $[K_{Gx}]$ değerleri sırasıyla fonksiyonel dereceli plakanın eğilme sertliği ve şekil matrisleridir. Plakanın elastik modülü ve rijitlik matrisleri $[D]$ ayrı ayrı düğüm noktalarında değişen x değerlerine bağlı olarak hesaplanmaktadır. Bu sebeple λ değerinin sıfır olması durumunda plaka homojen bir yapı olarak kendini göstermektedir. Her bir sonlu eleman için $[K_F]$ ve $[K_{Gx}]$ değerleri referans elemanlar için oluşturulmuştur.

$$[K_F]^e = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^1 [B]^T \frac{E_1 e^{-\lambda x} h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} [B] \det(J) d\xi d\eta \quad (4.15)$$

$[B]$ matrisi şekil matrisi ve şekil fonksiyonu dönüşüm matris formu:

$$[B] = \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial y^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x \partial y} \right\rangle \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \eta} \right\rangle \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \xi^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \eta^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \xi \partial \eta} \right\rangle \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Yukarıdaki denklemdeki T_1 ve T_2 değerleri aşağıda ifade edilmiştir:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ve

$$[T_1] = -[T_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} J_{11} & \frac{\partial}{\partial \xi} J_{12} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{11} + \frac{\partial}{\partial \xi} J_{21} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{12} + \frac{\partial}{\partial \xi} J_{22} \right) \end{bmatrix} [j] \quad (4.18)$$

Yukarıdaki T_1 ve T_2 denklemlerindeki J_{ij} ve j_{ij} değerleri Jacobian ve Jacobian matrisinin tersini ifade etmektedir. İki boyutlu matrislerin dönüşümleri ise $J_{11} = \partial x / \partial \xi$, $J_{12} = \partial y / \partial \xi$, $J_{21} = \partial x / \partial \eta$, $J_{22} = \partial y / \partial \eta$ yazılmıştır.

Fonksiyonel dereceli plakanın eğilme sertliği matrisi $[K_F]$ plakadaki elastik modül değişimi açığa çıkarmaktadır. Plakadaki şekil değişikliği yani yamuk bir şekil durumu için plak şekil rijitliği $[K_{Gx}]$ değeri aşağıdaki denklem ile ifade edilmiştir.

$$[K_{Gx}]^e = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^1 \frac{b_1}{b_1 + 2x \tan \theta} (j_{11} \tilde{N}_\xi + j_{12} \tilde{N}_\eta) (j_{11} \tilde{N}_\xi + j_{12} \tilde{N}_\eta) d\xi d\eta \quad (4.19)$$

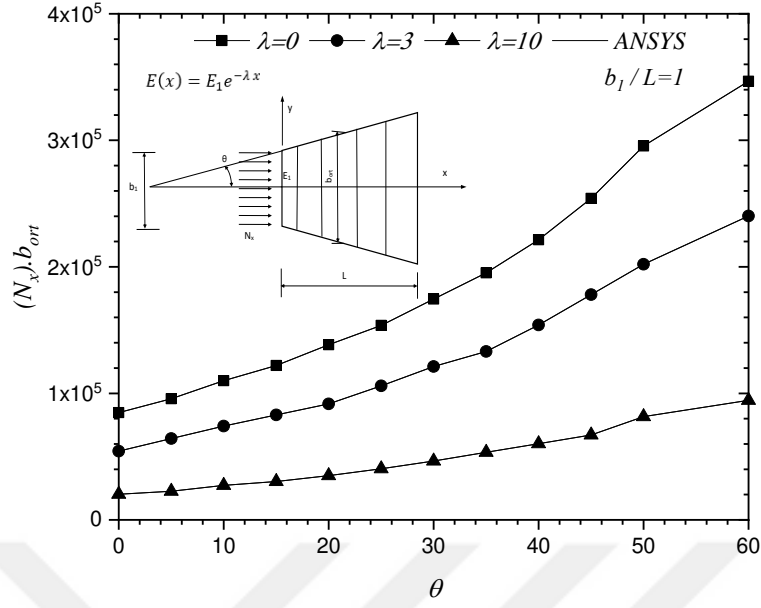
Burada plakanın x koordinat sisteminde $[K_F]$ ve $[K_{Gx}]$ matrislerinin $x = (\xi - 1)(\eta - 1)x_1 - \xi(\eta - 1)x_2 + \xi\eta x_3 - \eta(\xi - 1)x_4$ denklemi ile transformu elde edilmiştir. Buradaki x_1, \dots, x_4 değerleri x koordinat sistemindeki gerçek değerlerdir. Denklem (4.19) ifadesinde θ değerinin sıfır alınması durumunda plaka dikdörtgen form almıştır.

4.5. Yamuk Plakada Elastik Modülün Plaka uzunluğu Yönünde Değişimi

Fonksiyonel dereceli plakanın formu değiştirilerek yamuk şekil için burkulma değerleri farklı açılar için incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar, homojen plaka için yani λ , n ve $\theta=0^\circ$ değerleri için elde edilen sonuçları karşılamıştır. Fonksiyonel dereceli plaka için poizon oranları $\nu=0.3$ ve elastik modülleri ise sırasıyla $E_1=70$ GPa ve $E_2=380$ Gpa alınmıştır. Plakanın

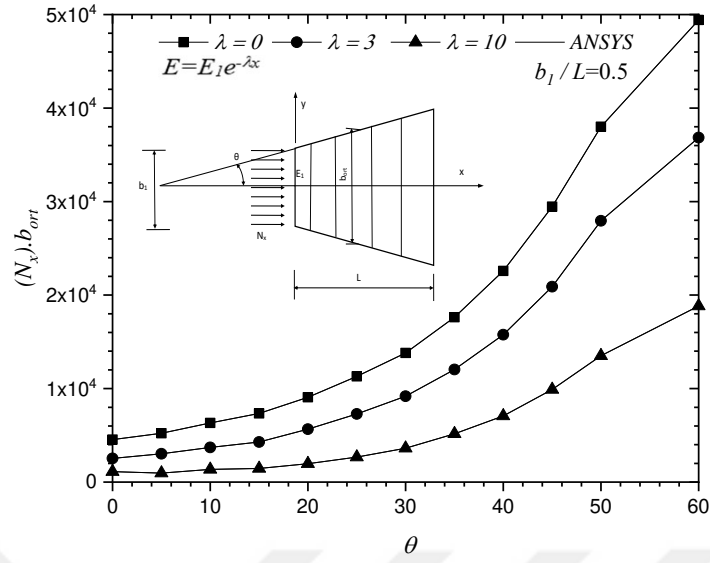
boyutları ise $a=0.25$ m, $b=0.25$ m, $h=0.0025$ m olarak alınmıştır. Homojen plaka için elde edilen plaka burkulma yükü $N_x=2.1757 \times 10^5$ N/m hesaplanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak λ , n ve $\theta=0^\circ$ değerleri için sonuç ise $N_x=2.156 \times 10^5$ N/m olarak hesaplanmıştır. Fonksiyonel dereceli plakanın boyutları, n ve λ değerlerinin değişiminin plaka burkulma yük değeri ile ilişkisi incelenmiştir. Plakanın değişen b_1/L boyutlarında değişen plaka rijitlik katsayısı hesaplanmıştır. Sayısal çalışmalarda plakanın X yönündeki değişen elastik modül değeri için başlangıç olarak $E_1=380$ GPa değeri seramik malzeme alınmıştır. Fonksiyonel dereceli plakanın kalınlık (z) yönündeki elastik modül değişimi başlangıç olarak plakanın alt yüzeyi için $E_1=380$ GPa değeri alınmıştır. Plakanın üst tabakası için ise elastik modülü $E_2=70$ GPa alüminyum malzeme seçilmiştir. Her iki malzeme için poizon oranları $\nu=0.3$ olarak sayısal işlemlerde kullanılmıştır. Sınır şartları plakanın iki tarafı sabit diğer iki tarafı serbest ve diğer çalışmada ise plakanın bir tarafı sabit diğer tarafları serbest kabul edilmiştir. Plakanın sabit kenarları için $w=0$, $\theta_x=0$, $\theta_y=0$, $\theta_{xy}=0$ değerleri alınmıştır.

Fonksiyonel dereceli plakanın uzunluğu yönünde elastisite modülü değiştirilmiştir. Fonksiyonel dereceli malzeme olarak Alüminyum ve seramik seçilmiştir. Fonksiyonel dereceli plakanın geometrisi değiştirilerek yamuk plaka formu için dereceli geçiş düşünülmüştür. Plaka genişliği b ve uzunluğu L kabul edilmiştir. Şekil 4.14'te görüldüğü üzere b_1 ile L değerleri birbirine eşittir. Plakanın yamuk kenar açısı θ değeri sıfırdan başlayarak 60 dereceye kadar burkulma analizi yapılmıştır. Şekil 4.14'te sınır şartları plakanın iki tarafı ankastre mesnet diğer iki tarafının serbest mesnet olması durumu için değişen λ değerleri ile θ değerlerinin plaka burkulma değerlerine etkisi incelenmiştir. Görüldüğü üzere artan θ değerleri ile doğru orantılı olarak plaka burkulma değerleri de artmaktadır. Yine bir diğer etken olan plaka yapısını oluşturan λ değerlerinin artan değerleri ile ters orantılı plaka burkulma değerleri azalmaktadır.



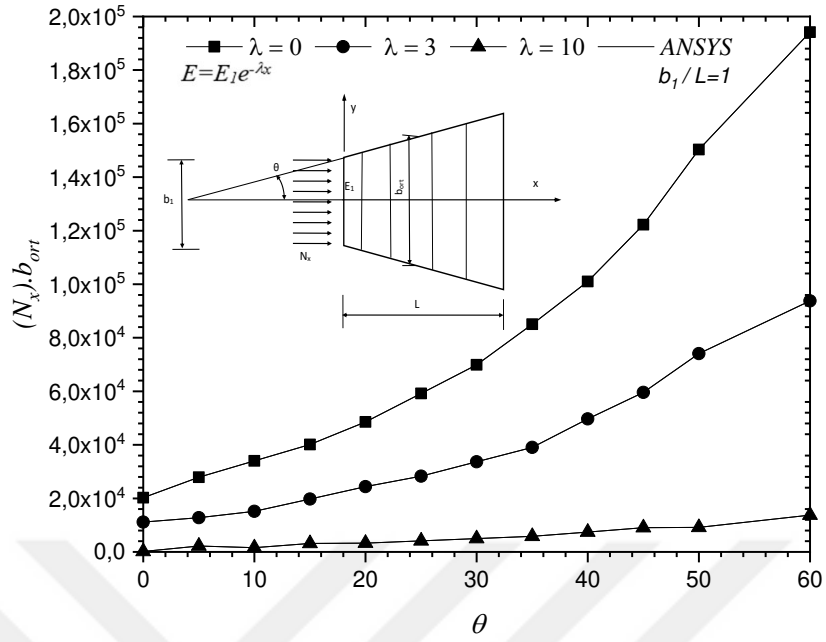
Şekil 4.14. Fonksiyonel Dereceli Yamuk plaka kenar-boy eşit ve elastik modül değişimi x eksenini yönünde uzunluk yönünde özelliklerinin değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemi ile incelenmiştir

Fonksiyonel dereceli yamuk plaka bir sonraki çalışmada dikdörtgen olarak ele alınmıştır. Elastisite modül değişimi uzunluk yönünde dereceli değiştiği kabul edilmiştir. Şekil 4.15'te görüldüğü gibi plakanın uzunluğu L değeri plakanın genişliğinin iki katı olup dikdörtgen formdadır. Plakanın kritik burkulma değerleri artan θ açılarıyla doğru orantılı olarak artmaktadır. Artan λ değerleri ise bize plakanın daha düşük değerlerde burkulduğunu göstermiştir. Bu analizde elde edilen bir diğer sonuç ise dikdörtgen plakanın daha düşük değerlerde burkulduğu görülmüştür.



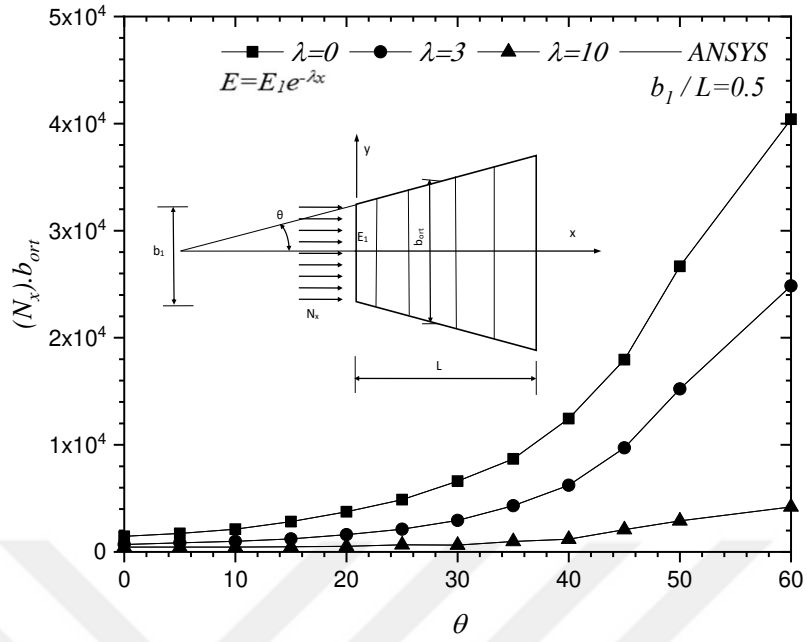
Şekil 4.15. Fonksiyonel Dereceli Yamuk plak kenar- boy eşit ve elastik modül değişimi x eksenini yönünde uzunluk yönünde özelliklerinin değişimi $E(x)=E_1e^{-\lambda x}$ denklemleri ile incelenmiştir FFFC

Fonksiyonel dereceli plaka uzunluğu L ve genişliği b olarak Şekil 4.16'da gösterilmiştir. Fonksiyonel dereceli plakanın iki kenarı serbest diğer iki kenarı ise ankastre mesnet olarak sabitlenmiştir. Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın kritik burkulma analizi sonucunda artan λ değerlerinin daha düşük kritik burkulma değerlerine ulaşmamıza sebep olduğunu açıkça göstermiştir. Yine artan θ açısının fonksiyonel dereceli yamuk plakanın daha yüksek değerlerde burkulduğunu Şekil 4.16'da açıkça göstermiştir.



Şekil 4.16. Fonksiyonel dereceli plakanın iki tarafı sabit diğer iki tarafı serbest durumda kritik burkulma değerlerinin X eksenini boyunca $E=E_1e^{-\lambda x}$ fonksiyonu kullanılarak değişimini göstermektedir

Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın burkulma analizinde toplam enerji denkleminde faydalanılmıştır. Problemin sonlu eleman denklemleri oluşturulmuştur. Burada ağ oluştururken kesme gerilmeleri ihmal edilmiştir.

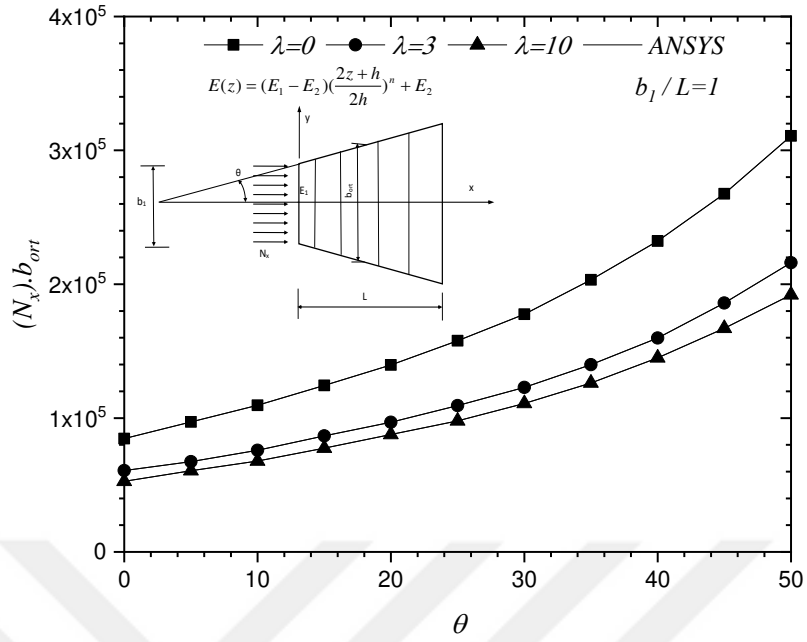


Şekil 4.17. Fonksiyonel dereceli plakanın iki tarafı sabit diğer iki tarafı serbest durumda kritik burkulma değerlerinin X eksenı boyunca $E=E_1e^{-\lambda x}$ fonksiyonu kullanılarak değişimini göstermektedir

Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın elastisite değişimi kalınlık yönünde dereceli olarak değiştirilmiştir. Bu durumda plakanın rijitlik matrisi $[D]$, z eksenı boyunca elastisite modülünün integralini içermektedir. $[K_{Gx}]$ ifadesi fonksiyonel dereceli yamuk plakanın geometrik sertliğini ifade etmektedir. Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın sınır şartları iki kenarı ankastre mesnet diğer iki kenarı basit mesnettir. Şekil 4.18’de görüldüğü gibi elastisite değişim denklemleri olarak,

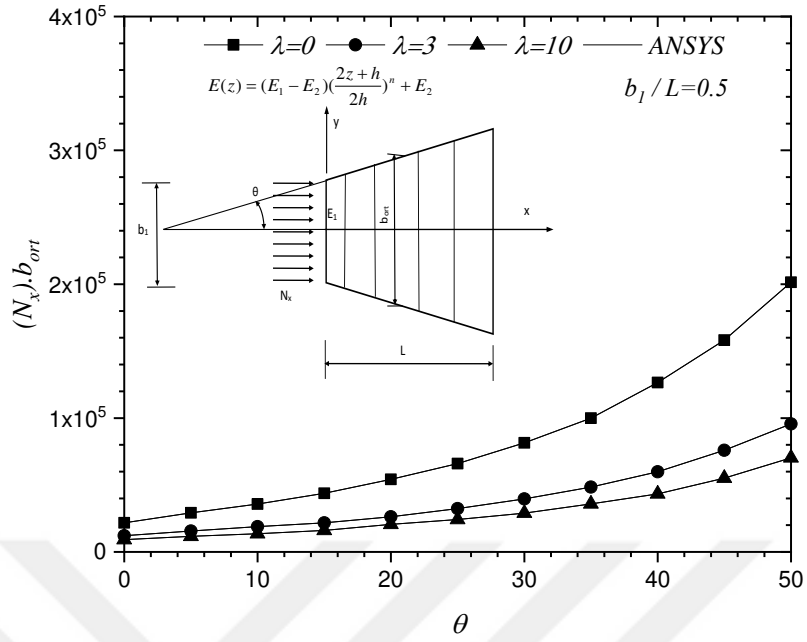
$$E(z) = (E_1 - E_2) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n + E_2$$

kullanılmıştır. Elde edilen kritik burkulma değerlerinin artan θ açısıyla arttığı görülmüştür. Yine başka bir parametre olarak λ değerlerinin artmasıyla kritik burkulma değerleri azalmaktadır.



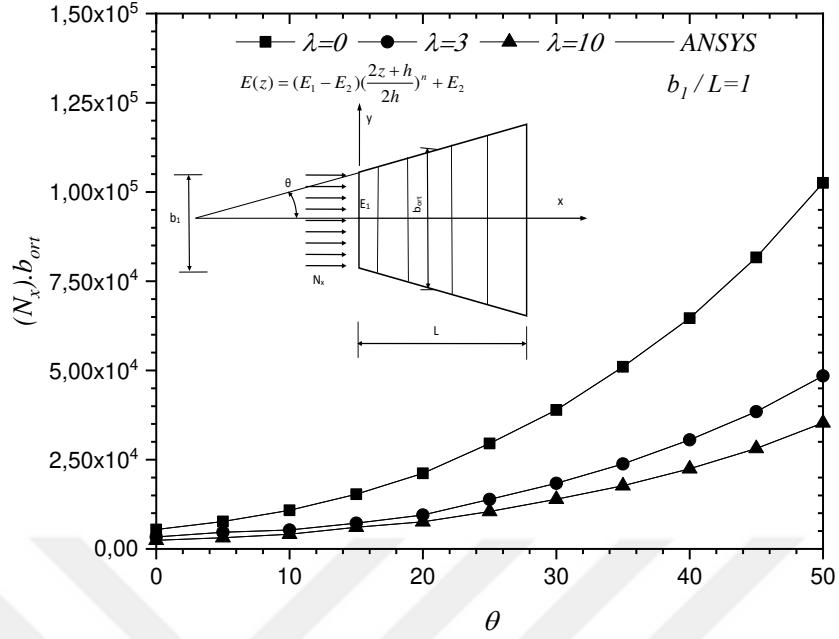
Şekil 4.18. İki zıt kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli Fonksiyonel Dereceli plaka özellikleri için kritik burkulma yükleri

Fonksiyonel dereceli plakanın geometrisi değiştirilerek dikdörtgen form verilmiştir. Şekil 4.19’da görüldüğü gibi fonksiyonel dereceli dikdörtgen plaka için sınır şartı olarak iki kenarı sabit diğer iki kenarı serbest bırakılmıştır. Plakanın sabit iki kenarından uygulanan yük altında kritik burkulması incelenmiştir. Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın değişen parametreleri ise sırasıyla θ açısı ve bir diğeri ise λ yani malzeme değişim oranıdır. Sırasıyla yamuk kenar için θ açısının artırılmasıyla kritik burkulma değerleri de artmıştır. Malzeme değişim oranı ise kritik burkulma kuvvetinin azalmasına neden olmaktadır. Şekil 4.18 ile karşılaştırdığımızda ise kare plakanın burkulmaya karşı daha dayanıklı olduğunu göstermiştir.



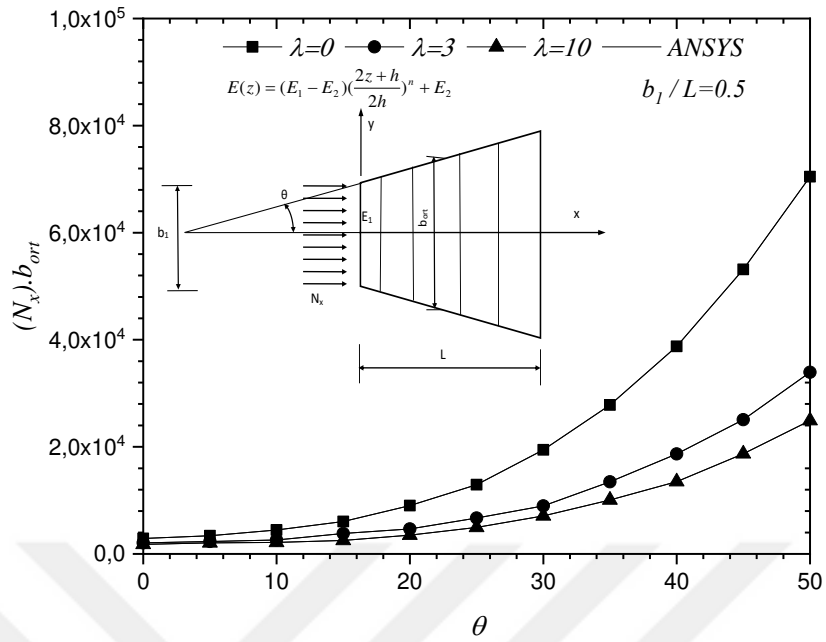
Şekil 4.19. İki zıt kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli FGM plakası özellikleri için kritik burkulma yükleri

Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın burkulma analizinde sınır şartı olarak plakanın bir kenarı sabit tutulmuştur. Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın diğer kenarları ise serbest bırakılmıştır. Plakanın kenar uzunluğu b_1 ile uzunluğu L değerleri eşit alınmış ve Şekil 4.20'de görüldüğü gibi kare geometri oluşturulmuştur. Fonksiyonel dereceli plakaya tek yönlü yük uygulanmış ve burkulmaya zorlanmıştır. Plakanın yamuk kenar açısının θ değerinin artmasıyla doğru orantılı olarak kritik burkulma kuvveti de artmaktadır. Fonksiyonel dereceli plakanın malzeme değişim oranı λ değerinin artması ise kritik burkulma değerlerini ters orantılı olarak Şekil 4.20'de görüldüğü gibi daha düşük değerlere ulaştığı görülmüştür.



Şekil 4.20. Bir kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2) \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli FGM plakası özellikleri için kritik burkulma yükler

Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın kenar uzunluğu b_1 ve uzunluğu L değerinin yarısı alınmıştır. Plakanın geometrisi dikdörtgen olarak burkulma analizi yapılmıştır. Şekil 4.21’de görüldüğü gibi plakanın kalınlığı yönünde karışım oranı λ değeriyle orantılıdır. Fonksiyonel dereceli yamuk plakaya etkiyen bası yükü ile burkulma analizi yapılmıştır. Yamuk plakanın artan θ değerleri kritik burkulma değerlerini artırmaktadır. Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın kalınlık yönünde değişim oranı λ değerinin artması ise kritik burkulma değerlerini ters orantılı olarak azaltmaktadır.



Şekil 4.21. Bir kenarı kenetli $E(z) = (E_1 - E_2) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n + E_2$ fonksiyona göre kalınlık boyunca çeşitli FGM plakası özellikleri için kritik burkulma yükler

Fonksiyonel dereceli plakanın değişen elastik modül, kenar boyutları toplam enerji denkleminde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak Hermitian Polinomları ile açılım yapılmıştır.

FD plakada değişen sınır şartlarına bağlı olarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak plakanın davranışları incelenmiştir. Seramik-Metal oranları için farklı yöntemler kullanılmıştır. İki farklı sınır şartı CFFC ve FFFC için kritik burkulma değerleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar homojen plaka ile karşılaştırılmıştır. CFFC sınır şartı için daha düşük kritik burkulma değerlerinin elde edildiği görülmüştür. Artan λ ve n değerleri plakanın daha az kararlı duruma yönelmesine sebep olmuştur. Bunun sonucunda plakada ani burkulmalar gözlenmiştir. Plakanın yapısı, boyutları ve elastik modül değişim oranları modellemede önemli etkenler olduğu görülmüştür. FD Plakaların burkulmaya karşı dizaynında dikkat edilmesi gereken elastik modül oranı, plaka boyutları önem taşımaktadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, fonksiyonel dereceli plakanın sonlu elemanlar yöntemi ile burkulma analizi yapılmıştır. Plakanın kararlılığı enerji ifadesi ile elde edilen sonlu elemanlar denklemi kullanılarak incelenmiştir. Klasik plaka teorileri plakaların eğilme ve burkulma davranışlarını analiz etmek için kullanılır. Bu çalışmada plakanın sonlu eleman denklemini elde etmek için ince plaka teorisi kullanılmıştır. Fonksiyonel dereceli plakanın malzeme derecelendirme fonksiyonu olarak güç yasası dikkate alınmıştır. Fonksiyonel dereceli malzemenin derecelendirilmesi hem kalınlık hem de plakanın uzunluğu yönünde ele alınmıştır. Plakada kullanılan seramik-metal karışımı için sonuçlar elde edilmiştir. Plakanın sınır koşulları ise tek yönlü etkiyen yüke karşı değişik kombinasyonlar incelenmiştir. Plakanın yük etkiyen yönleri, bir kenarı ankastre mesnet diğer kenarları serbest olarak seçilmiştir. Diğer kombinasyonda ise plakanın iki kenarı ankastre mesnet, diğer iki kenarı serbest olarak seçilmiştir.

Fonksiyonel dereceli plakanın burkulma analizine başlamadan önce çalışmayı doğrulamak amacıyla ilk olarak, güç yasası denkleminde endeks sıfır alınarak homojen malzeme için burkulma analizi yapılmıştır. Analitik sonuçların hâlihazırda mevcut olduğu dikdörtgen homojen plakanın kritik burkulma yükleri ile doğrulanmıştır. Bu doktora tez çalışması ile elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Çalışma sonucunda ulaşılan sonuçlar sırasıyla:

1. Fonksiyonel dereceli plakanın sonlu elemanlar yöntemi ile analizinde plakanın sınır koşulları karşılaştırıldığında; plakanın iki kenarı ankastre mesnet diğer iki kenarının serbest koşulunun, diğer yapılandırma durumuna, yani plakanın bir kenarı ankastre mesnet diğer kenarları serbest koşuluna göre kritik burkulma değerlerinin daha yüksek olduğu ve dolayısıyla ikinci yapılandırmanın daha az kararlı olduğu görülmüştür.

2. Güç yasası indeksleri olan λ ve n değerlerinin arttırılmasıyla, fonksiyonel dereceli plakanın kararsız hale yaklaştığı görülmüştür. Bu λ ve n indeksleri büyük değerlere ulaştığında, fonksiyonel dereceli plaka da dengesiz bir davranış sergileyerek, plakanın kolayca burkulduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle, güç yasası indekslerinin bu olumsuz etkisinin, tasarım esnasında dikkate alınması gerektiği

sonucuna varılmıştır.

3. Fonksiyonel dereceli yamuk plakanın eğim açısının artmasıyla, kritik burkulma yüklerinin de arttığı görülmüştür. Bu durumun nedeninin, eğim açısının artmasına bağlı olarak, plakanın boyutlarının azalması ve plakanın daha mukavemetli bir duruma gelmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

4. Plaka kalınlığının artmasına bağlı olarak, kritik burkulma değerlerinin de arttığı görülmüştür.

5. Fonksiyonel dereceli plakanın en-boy oranlarının, kritik burkulma değerlerinde önemli rol oynadığı gözlemlenmiştir. Düzlem içi yükler altında plakanın kararlılığı en-boy oranı arttıkça azalmaktadır.

6. Analiz sonucunda elde edilen kritik burkulma değerleri, fonksiyonel dereceli malzemeyi oluşturan malzemelerin burkulma değerleri aralığındadır. Kritik burkulma değeri hiçbir zaman seramik ya da metalin burkulma değerlerine ulaşmamıştır.

5.2. Öneriler

Bu çalışma ile fonksiyonel dereceli plakaların boyutlandırılmasında kritik burkulma değerleri elde edilmiştir. Kullanılacak çalışma alanlarına göre fonksiyonel dereceli malzemelerin dikkatle seçilmesi gerektiği düşünülmektedir. Kullanılacak malzemelerin avantajlı yönleri ön plana çıkarılarak bir malzeme seçimi yapılmalıdır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, fonksiyonel dereceli plakaların tasarım aşamasında kullanılmasının yararlı olacağı düşünülmektedir. Tasarım aşamasında burkulmaya karşı plakanın boyutlandırılmasında belirlenen optimum değerler ile burkulma yüküne karşı daha iyi sonuçlar elde edilebileceği öngörülmektedir. Çalışmada kullanılan yöntemin, farklı geometriler ve farklı malzeme bileşimleri için geniş bir çalışma alanı sağlayabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abolghasemi S, Shaterzadeh A & Rezaei R (2014). Thermo-mechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout. *Aerospace Science and Technology*, 39: 250-259
- Adim B, Daouadji T H & Rabahi A (2016). A simple higher order shear deformation theory for mechanical behavior of laminated composite plates. *International Journal of Advanced Structural Engineering (IJASE)*, 8(2): 103-117
- Ahlawat N & Lal R (2015). *Mathematical Analysis and its Applications*. Springer, 545-555.
- Akhavan H, Hashemi S H, Taher H R D, Alibeigloo A & Vahabi S (2009). Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis. *Computational Materials Science*, 44(3): 968-978
- Alinia M (2004). A parametric investigation on stiffening axially loaded panels. *International Journal of Civil Engineering*, 2(4): 246-256
- Altan M F & Kartal M E (2005). KARE DELİKLİ ORTOTROPİK PLAKALARIN BURKULMA ANALİZİ. *Teknoloji*, 8(4)
- Anonim (2014). *Encyclopedia of Thermal Stresses*,
- Asemi K, Salehi M & Akhlaghi M (2015). Three dimensional graded finite element elasticity shear buckling analysis of FGM annular sector plates. *Aerospace Science and Technology*, 43: 1-13
- Bhandari M & Purohit K (2014a). Analysis of Functionally Graded Material Plate under Transverse Load for Various Boundary Conditions. *Journal of Mechanical and Civil Engineering*: 46-55
- Bhandari M & Purohit K (2014b). Analysis of functionally graded material plate under transverse load for various boundary conditions. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 10(5): 46-55
- C. H P, Lundquist E E & Batdorf S B (1946). Effects of small deviations from flatness on effective width and buckling of plating in compression. *N.A.C.A.*: 1124
- Chajes A (1974). *Principles of structural stability theory*. Prentice Hall,
- Chmielewski M & Pietrzak K (2016). Metal-ceramic functionally graded materials—manufacturing, characterization, application. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 64(1): 151--160
- Civalek Ö, Korkmaz A & Demir Ç (2010). Discrete singular convolution approach for buckling analysis of rectangular Kirchhoff plates subjected to compressive loads on two-opposite edges. *Advances in Engineering Software*, 41(4): 557-560
- Daimi S & Bhalchandra S Analysis of Thermal Buckling of Ceramic-Metal Functionally Graded Plates Using Refined Third Order Shear Deformation Theory.
- Dhatt G, Touzot G & Cantin G (1984). *The finite element method displayed*: Elsevier.
- Dima I (2015). Buckling of flat thin plates under combined loading. *Incas Bulletin*, 7(1): 83
- DOĞAN A (2020). Buckling analysis of laminated composite plates under the effect of uniaxial and biaxial loads. *Turkish Journal of Engineering*, 4(4): 218-225
- Doiphode G & Patodi S (2012). FINDING CRITICAL BUCKLING LOAD OF RECTANGULAR PLATE USING INTEGRATED FORCE METHOD. *International Journal of Advances in Engineering & Technology*, 5(1): 288

- EVRAN S (2018). Critical Buckling Load Analysis of Layered Functionally Graded Shell Structures. *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 20(59): 595-605
- Feldman E & Aboudi J (1997). Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Composite Structures*, 38(1-4): 29-36
- Ferreira A & Barbosa J (2000). Buckling behaviour of composite shells. *Composite Structures*, 50(1): 93-98
- Girgin Z, Yılmaz Y & Çetkin A (2000). Application of the generalized differential quadrature method to deflection and buckling analysis of structural components. *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 6(2): 117-124
- H. B G (1891). On the stability of a Plane under thrusts in its own plane, with application to the buckling of the sides of a ship. *Proc. London Math Soc.*, 22-54.
- Hajlaoui A, Jarraya A, El Bikri K & Dammak F (2015). Buckling analysis of functionally graded materials structures with enhanced solid-shell elements and transverse shear correction. *Composite Structures*, 132: 87-97
- Hamad M & Tarlochan F (2013). An axisymmetric bending analysis of functionally graded annular plate under transverse load via generalized differential quadrature method. *Int. J. Res. Eng. Technol*, 2(7): 13-23
- Hasselman D & Youngblood G E (1978). Enhanced thermal stress resistance of structural ceramics with thermal conductivity gradient. *Journal of the American Ceramic Society*, 61(1-2): 49-52
- Işıtan A (2016). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemenin Lineer Burkulma Analizi Linear Buckling Analysis of Functionally Graded Material. *AKU J. Sci. Eng*, 16: 122-127
- Jaberzadeh E, Azhari M & Boroomand B (2013). Thermal buckling of functionally graded skew and trapezoidal plates with different boundary conditions using the element-free Galerkin method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42: 18-26
- Jadvani N, Dhiraj V S, Joshi S & Kalita K (2017). Non-dimensional stress analysis of orthotropic laminates. *Materials Focus*, 6(1): 63-71
- Jafar E M & Mahmood K (2012). AN EXACT SOLUTION OF MECHANICAL BUCKLING FOR FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL BIMORPH CIRCULAR PLATES. *A.M.E.S.*: 45-63
- Jam J E, Khosravi M & Namdaran N (2013). An exact solution of mechanical buckling for functionally graded material bimorph circular plates. *Metallurgical and Materials Engineering*, 19(1): 45-64
- Janghorban M (2016). Static analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal third order shear deformation theory. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 8(2): 87-100
- Kianian O, Sarrami-Foroushani S & Azhari M (2017). Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Based on Two-Variable Refined Plate Theory Using the Bubble Finite Strip Method. *AUT Journal of Civil Engineering*, 1(2): 145-152
- Komur M A & Sonmez M (2015). Elastic buckling behavior of rectangular plates with holes subjected to partial edge loading. *Journal of Constructional Steel Research*, 112: 54-60
- Lanc D, Vo T P, Turkalj G & Lee J (2015). Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams. *Thin-Walled Structures*, 86: 148-156

- Lanhe W (2014). Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Composite Structures*.
- Liu P, Bui T, Zhu D, Yu T, Wang J, Yin S & Hirose S (2015). Buckling failure analysis of cracked functionally graded plates by a stabilized discrete shear gap extended 3-node triangular plate element. *Composites Part B: Engineering*, 77: 179-193
- Mahdavian M (2009). Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading.
- Mahdavian M (2010, 1 1). Superposition buckling analysis of rectangular plates composed of functionally graded materials subjected to non-uniform distributed in-plane loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science*.
- Mansouri M & Shariyat M (2015). Biaxial thermo-mechanical buckling of orthotropic auxetic FGM plates with temperature and moisture dependent material properties on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, 83: 88-104
- Martínez-Pañeda E (2019). On the finite element implementation of functionally graded materials. *Materials*, 12(2): 287
- Millar F & Mora D (2015). A finite element method for the buckling problem of simply supported Kirchhoff plates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 286: 68-78
- Mohamed E I, Abderrahim S, Lahcen A, Abderrahim D & Abdellatif R (2019). Thermal Buckling of Coated Functionally Graded Plates Under Non-uniform Temperature Rises. *Transactions on Environment and Development*: 246-256
- Mohammadi M, Saidi A R & Jomehzadeh E (2010). Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Applied Composite Materials*, 17(2): 81-93
- Mokhtar B, Abedlouahed T, Abbas A & Abdelkader M (2009). Buckling analysis of functionally graded plates with simply supported edges. *Leonardo Journal of sciences*, 16: 21-32
- Mozafari H & Ayob A (2012). Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials. *Procedia Technology*, 1: 496-504
- Najafizadeh M & Eslami M (2002). Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression. *International journal of mechanical sciences*, 44(12): 2479-2493
- Natarajan S, Ferreira A, Bordas S, Carrera E, Cinefra M & Zenkour A (2014a). Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Triangular Elements with cell-based Smoothed Discrete Shear Gap Method. *Mathematical Problems in Engineering*: 472-491
- Natarajan S, Ferreira A, Bordas S, Carrera E, Cinefra M & Zenkour A (2014b). Analysis of functionally graded material plates using triangular elements with cell-based smoothed discrete shear gap method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014
- Noda N (1999). Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of thermal stresses*, 22(4-5): 477-512
- Osman M Y & Suleiman O M E (2017). Buckling analysis of thin laminated composite plates using finite element method. *International Journal of Engineering Research and Advanced Technology (IJERAT)*, 3(3): 1-18
- ÖKTEM A (2014). Fonksiyonel Derecelendirilmiş (Fd) İleri Kompozit Plakaların Statik Analizi. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 29(1)
- P. T S (1910). Einige stabilitätsprobleme der elastizitätstheorie. *Z. Math. Physik*: 337-385

- Pouladkhan A R, Emadi J & Safemehr M (2011). Numerical study of buckling of thin plates. *World academy of science, engineering and technology*: 152-157
- Praveen G & Reddy J (1998a). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33): 4457-4476
- Praveen G N & Reddy J N (1998b). Non linear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates. *J. Solids and Structures*: 4457-4476
- Przemieniecki J (1973). Finite element structural analysis of local instability. *AIAA journal*, 11(1): 33-39
- Ramu I & Mohanty S (2014). Buckling analysis of rectangular functionally graded material plates under uniaxial and biaxial compression load. *Procedia Engineering*, 86: 748-757
- Rao D K, Blessington P & Tarapada R (2012). Finite element modeling and analysis of functionally graded (FG) composite shell structures. *Procedia Engineering*, 38: 3192-3199
- Reddy B S, Kumar J S, Reddy C E & Reddy K (2013). Buckling analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory. *Journal of composites*, 2013
- Reddy J (1993). An Introduction to the Finite Element Method McGraw-Hill. Inc., New York
- Reddy J (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for numerical methods in engineering*, 47(1-3): 663-684
- Reddy J N (2005). An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. *Oxford University Press*
- Ritchie D & Rhodes J (1975). Buckling and post-buckling behaviour of plates with holes. *Aeronautical Quarterly*, 26(4): 281-296
- Rivera M G & Reddy J (2016). Stress analysis of functionally graded shells using a 7-parameter shell element. *Mechanics Research Communications*, 78: 60-70
- Saha R & Maiti P (2012). Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load. *International Journal of Civil and Structural Engineering*, 2(4): 1035
- Saidi A, Kazerouni S M & Mohammadi M (2010). Buckling Analysis of Thin Functionally Graded Rectangular Plates with two Opposite Edges Simply Supported. *International Journal of Engineering*, 23(2): 179-192
- Sarrami-Foroushani S, Azhari M & Saadatpour M (2013). Buckling of functionally graded stiffened and unstiffened plates using finite strip method. *Computational Methods in Civil Engineering*, 4(1): 1-24
- Schlack A (1964). Elastic stability of pierced square plates. *Experimental Mechanics*, 4(6): 167-172
- Shames I H (1997). *Elastic and inelastic stress analysis*. CRC Press,
- Singh M S & Thangaratnam K (2014). Analysis of functionally graded plates and shells: stress, buckling and free vibration. *Journal of Aerospace Sciences and Technology*, 66(2): 127-136
- Singh S M & Tangaratnam K (2014). Analysis of Functionally Graded Plates and Shells: Stress, Buckling and Free Vibration. *Full Length Paper*: 803
- Solmaz M Y, Kaman M O, Turan K & Turgut A (2010). Fiber takviye açısının tabakalı kompozit levhaların kritik burkulma yüküne etkisi.

- Song M, Yang J, Kitipornchai S & Zhu W (2017). Buckling and postbuckling of biaxially compressed functionally graded multilayer graphene nanoplatelet-reinforced polymer composite plates. *International journal of mechanical sciences*, 131: 345-355
- Stavsky Y & Friedland S (1971). Buckling of composite circular plates under radial compression. *Acta Mechanica*, 11(1): 87-98
- Swamy M S, Ranjith A, Sandya D & Badami S S (2015). Buckling Analysis of Plate Element Subjected to In Plane Loading Using ANSYS. *Int. Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 4(5)
- Timoshenko S & Gere J M (1961). Theory of elastic stability, McGrawHill Book Co. Inc., New York
- Tolga U & AKBULUT H Silindirik kompozit borularda çift eksenli yüklemenin burkulmaya etkisi. *Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi*, 5(2): 99-109
- Tran L V, Thai C H & Nguyen-Xuan H (2013). An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73: 65-76
- Valizadeh N, Natarajan S, Gonzalez-Estrada O A, Rabczuk T, Bui T Q & Bordas S P (2013). NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter. *Composite Structures*, 99: 309-326
- Ventsel E & Krauthammer T (2001). Thin Plates and Shell Theory. Thin Plates, Marcel Dekker Inc., 13-269, New York-Basel.
- Ventsel E, Krauthammer T & Carrera E (2002). Thin plates and shells: theory, analysis, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4): B72-B73
- Wang X & Wang Y (2015). Buckling analysis of thin rectangular plates under uniaxial or biaxial compressive point loads by the differential quadrature method. *International journal of mechanical sciences*, 101: 38-48
- Wang X, Wang Y & Yuan Z (2014). Accurate vibration analysis of skew plates by the new version of the differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 38(3): 926-937
- Whitney J (1970). The effect of boundary conditions on the response of laminated composites. *Journal of Composite Materials*, 4(2): 192-203
- Yaghoobi H & Fereidoon A (2014). Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 62: 54-64
- Yang J, Liew K & Kitipornchai S (2005). Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Composites Science and Technology*, 65(7-8): 1165-1175
- Yang J & Shen H-S (2001). Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Composite Structures*, 54(4): 497-508
- Zenkour A & Aljadani M (2018). Mechanical buckling of functionally graded plates using a refined higher-order shear and normal deformation plate theory. *Advances in aircraft and spacecraft science*, 5(6): 615
- Zienkiewicz O (1978). The finite-element method: McGraw Hill Book Co. Maidenhead. 787p
- Zienkiewicz O C & Taylor R L (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier,

Zuo H, Yang Z, Chen X, Xie Y & Zhang X (2014). Bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded plates via wavelet finite element method. *Comput Mater Continua*, 44(3): 167-204

