

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**BELİRLİ ÖZEL HORADAM KUVVET DİZİLERİ ÜZERİNE**

Yüksek Lisans Tezi

**Selime Beyza ÖZÇEVİK**

Danışman

**Prof. Dr. Şenol EREN**

SAMSUN  
2022

## TEZ KABUL VE ONAYI

Selime Beyza ÖZÇEVİK tarafından, Prof. Dr. Şenol EREN danışmanlığında hazırlanan “BELİRLİ ÖZEL HORADAM KUVVET DİZİLERİ” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana Bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi XXXX XXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana Bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. XXXX XXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana Bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Prof. Dr. XXXX XXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana Bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Prof. Dr. XXXX XXXX Ondokuz Mayıs Üniversitesi ..... Ana Bilim Dalı		<input type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT  
Enstitü Müdürü

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet  (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır

İmza

27 /07 / 2022

Selime Beyza ÖZÇEVİK

## TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

**Tez Başlığı : BELİRLİ ÖZEL HORADAM KUVVET DİZİLERİ ÜZERİNE**

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 05.06.2022 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 12

Tek kaynak oranı : % 3 çıkmıştır.

İmza

05 /06/ 2022

Prof. Dr. Şenol EREN

# ÖZET

## BELİRLİ ÖZEL HORADAM KUVVET DİZİLERİ ÜZERİNE

Selime Beyza ÖZÇEVİK  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı  
Yüksek Lisans, Temmuz/2022  
Danışman: Prof. Dr. Şenol EREN

Bu tez çalışmasında öncelikle A.F Horadam tarafından 1965 yılında tanımlanan  $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$  Horadam sayı dizilerinin tanımı baz alınarak bu dizinin  $W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2}$  rekürans bağıntısının katsayıları sırasıyla  $p = 1, q = 3$  ve  $p = 3, q = 1$  şeklinde alınmış ve iki farklı özel Horadam sayı dizisi elde edilmiştir. 2012 yılında Ide ve Renault tarafından tanımlanmış olan modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizileri ve yapılan ilgili çalışmalar taban alınarak, tanımlanan iki özel Horadam sayı dizileri modül  $s$  ye indirgenmiş ve bu dizilerin modül  $s$  de kuvvet dizileri tanımlanmıştır. Burada, önce tanımlanan iki farklı özel Horadam kuvvet dizilerinin var oldukları modüller, sonrasında da bu modüllerdeki sayıları incelenmiş ve her iki dizi için de aynı modüllerde ve aynı sayıda oldukları gözlemlenmiştir. Daha sonra bu dizilerin periyotları incelenmiş ve Fibonacci kuvvet dizilerinin aynı modüllerde periyotları karşılaştırılmış,  $p = 1, q = 3$  olma durumunda Horadam kuvvet dizisinin periyotları ile aynı modüllerdeki Fibonacci kuvvet dizilerinin periyotlarının benzer sonuçlar gösterdiği ancak katsayılar değiştirildiğinde kuvvet dizilerinin periyotları belirli bir şekilde formülize edilemediği görülmüş ve bu durum örneklerle açıklanmıştır. Yapılan bu incelemelerin sonrasında Horadam sayı dizilerinin bir diğer özel hali olan Jacobsthal sayı dizileri incelenmiş daha sonra 2020 yılında Çelemoğlu vd. tarafından tanımlanan modül  $m$  de Jacobsthal sayı dizilerinin periyotları incelenmiş ve elde edilen bulgular sonuçlar ile ifade edilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Horadam sayı dizileri, Jacobsthal sayı dizileri, Kuvvet dizileri, Modül, Periyot

# ABSTRACT

## ON CERTAIN SPECIAL POWER HORADAM SEQUENCES

Selime Beyza ÖZÇEVİK  
Ondokuz Mayıs University  
Institute of Graduate Studies  
Department of Mathematics  
Master, July/2022  
Supervisor: Prof. Dr. Şenol EREN

In this thesis, firstly, coefficients of recurrence relation of Horadam sequences which defined by A.F. Horadam in 1965 was taken as respectively  $p = 1, q = 3$  and  $p = 3, q = 1$ , then it was obtained two different special Horadam number sequences. It was reduced two special Horadam number sequences to modulo  $s$  as based on power Fibonacci sequences in modulo  $s$  which defined by Ide and Renault in 2012 and it was defined power sequences of those sequences on modulo  $s$ . Here, firstly, it has been examined the modules in which these sequences exist and it has been observed that those modules are exist in same modules and same number for both special power sequences. Subsequently, it has been examined periods of these sequences and compared periods of power Fibonacci sequences in same modules. In this instance, in case  $p = 1, q = 3$ , then periods of power Horadam sequences has showed similar results with periods of Fibonacci number sequences in which same modules but when the coefficients change, it couldn't obtaine a specific formula for those sequence. Therefore, it was explained this situation by examples.

After these investigations, it was examined Jacobsthal number sequences which another one special case of Horadam number sequences and then it was examined periods of Jacobsthal number sequences in modulo  $m$  which defined by Celemoglu et.al. in 2020 and it was stated that findings with results.

**Keywords:** Horadam number sequences, Jacobsthal number sequences, Power sequences, Modulo, Period.

## ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, her zaman değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, hazırlanma süreci boyunca desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Şenol Eren'e ve akademik hayatım boyunca çalışmaları ve tecrübeleri ile benim için bir örnek teşkil eden, her anlamda desteğini hissettiğim değerli hocam Dr. Çağla Çelemoğlu'ya teşekkürlerimi borç bilirim.

Desteği ve güler yüzünü sadece lisans eğitiminde değil, mezun olduktan sonra da esirgemeyen öncelikle saygıdeğer bölüm başkanım Prof. Dr. Emin Kasap, yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Ergin Bayram hocalarıma teşekkür ederim

Selime Beyza ÖZÇEVİK

# İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI .....	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI .....	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR .....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
TABLolar DİZİNİ .....	ix
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
1.1. Sayı Dizileri Üzerine Bazı Ön Bilgiler.....	1
1.2. Tezin Amacı.....	5
<b>2. KURUMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ.....</b>	<b>8</b>
2.1. Matematiksel Alt Yapı.....	8
2.2. Sayı Dizileri İle İlgili Temel Kavramlar.....	16
2.3. Literatür Özeti.....	18
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>22</b>
<b>4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....</b>	<b>27</b>
4.1. Modül $m$ De Jacobsthal Kuvvet Dizilerinin Periyotları.....	27
4.2. Özel Horadam Kuvvet Dizileri.....	29
4.2.1. Özel Horadam Kuvvet Dizilerinin Varlığı Ve Sayısı.....	30
4.2.2. Özel Horadam Kuvvet Dizilerinin Periyotları.....	32
<b>5.SONUÇ.....</b>	<b>39</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>40</b>
<b>ÖZ GEÇMİŞ.....</b>	<b>42</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar
$\mathbb{Z}_s$	: Modül $s$ de kalan sınıfı
$\mathbb{Z}_s^*$	: Modül $s$ de asal kalan sınıf
$\varphi$	: Euler phi fonksiyonu
$F_n$	: Fibonacci dizisinin $n$ . terimi
$B_n$	: Fibonacci – Lucas sayı dizisinin $n$ . terimi
$G_n$	: Modül $m$ de Fibonacci kuvvet dizisinin $n$ . terimi
$W_n$	: Horadam sayı dizisinin $n$ . terimi
$H_n$	: Modül $s$ de özel Horadam dizisinin $n$ . terimi
$H'_n$	: Modül $s'$ de bir diğer özel Horadam dizisinin $n$ . terimi
$H_n^*$	: Modül $s'$ de bir diğer özel Horadam kuvvet dizisinin $n$ . terimi
$H_n^*$	: Modül $s$ de özel Horadam kuvvet dizisinin $n$ . terimi
$J_n$	: Jacobsthal dizisinin $n$ . terimi
$J_n^*$	: Modül $m$ de Jacobsthal kuvvet dizisinin $n$ . terimi
$L_n$	: Lucas sayı dizisinin $n$ . terimi
$j_n$	: Jacobsthal – Lucas sayı dizisinin $n$ . terimi
$L(J^*, m)$	: Modül $m$ de Jacobsthal dizisinin periyot uzunluğu
$L(J, m)$	: Modül $m$ de Jacobsthal dizisinin periyot uzunluğu
$\pi(s)$	: Modül $s$ de özel Horadam kuvvet dizisinin periyot uzunluğu
$\pi(s')$	: Modül $s'$ de bir diğer özel Horadam kuvvet dizisinin periyot uzunluğu
$\pi(m)$	: Modül $m$ de Fibonacci sayı dizisinin periyot uzunluğu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.1. Altın oran kavramının insan vücudundaki karşılığı.....	2
Şekil 2.2. Altın oran kavramının mimari alanda kullanımına örnek olarak Mısır piramitlerinin boyutları.....	3
Şekil 2.3. Bitkilerde altın oran kavramı .....	3

## TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1.1. Farklı katsayılar ile tanımlanan Horadam sayı dizileri örnekleri.....	5
Tablo 4.2.2.5. $p = 3, q = 1$ ve $p = 1, q = 3$ olma durumunda elde edilen Horadam sayı dizilerinin periyotları ile kuvvet dizilerinin mertebelerine örnekler.....	36

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Sayı Dizileri Üzerine Bazı Ön Bilgiler

Sayı dizileri matematikte çok geniş uygulama alanına sahip önemli konulardandır. Özellikle sayılar teorisi alanında önemli bir yere sahip olan sayı dizileri, geçmişten bu yana birçok araştırmacı tarafından incelenmiş ve üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Tam sayı dizileri denildiğinde ilk akla gelen şüphesiz Fibonacci sayı dizileridir. Bu sayı dizilerinin öncüsü olan Leonardo Pisano veya Leonard olarak da bilinen Leonardo Fibonacci, Orta çağ Avrupasının en seçkin matematikçilerinden biridir.

1170 yılında Pisa'da Bonacci ailesinin ferdi olarak dünyaya gelen Fibonacci'nin babası Guglielma(William) oğlunun ticaretle ilgilenmesini isteyen başarılı bir tüccardı. Guglielma, Cezayir şehrine atandığı 1190 yılında hesaplama sanatını öğrenmesi için Leonardo'yu Cezayir'e götürdü. Fibonacci temel eğitimini onu Hint-Arap sayısal sistemi ve Hint-Arap hesaplama teknikleriyle tanıştıran Müslüman bir okul yöneticisinden aldı. Leonardo Liber Abaci'de hocasından dokuz hint rakamı sanatını öğrenirken hissettiği mutluluğa değinmiştir (Koshy, 2001).

Fibonacci yirmili yaşlarında Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve Konstantinapolis'e sık sık iş gezileri yaptı, burada kullanılan çeşitli aritmetik sistemleri inceledi ve yerli akademisyenlerle fikir alışverişinde bulundu. 1200 yıllarında Pisa'ya geri döndü ve 1202'de öncü kitabı olan "*Liber Abaci*" adlı kitabını yayınladı. Liber Abaci, "*çörkü (= abaküs= sayı boncuğu)*" kitabı anlamına geliyordu. Bu kitap Hint-Arap numaralandırma sistemini ve aritmetik algoritmalarını Avrupa'ya tanıtmıştır. Kitabın ilk yedi bölümü bildiğimiz 10'lu sayı düzenini ve bu sayılarla dört işlemi anlatır. Daha sonra bu düzen, kâr hadleri, takas, para değiştirme, ağırlık ve hacim ölçülerinin birbirine çevrilmesi, ortaklar arasında bölüşme ve faiz gibi pratik ticaret problemlerine uygulanır (Koshy, 2001).

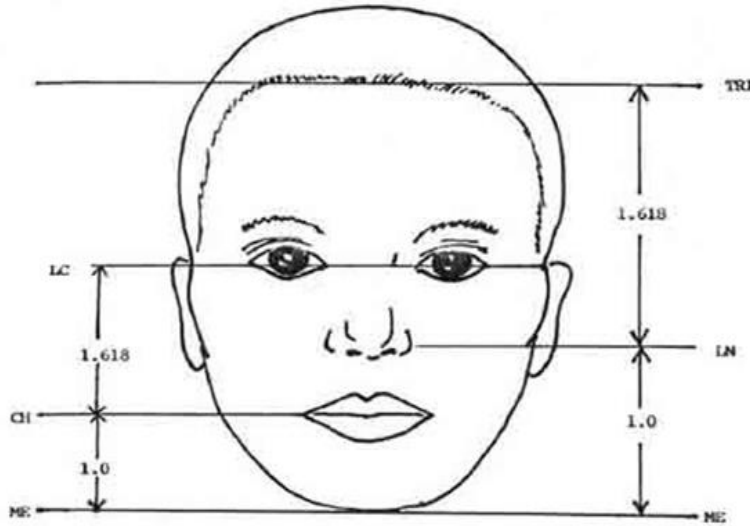
Fibonacci sayıları, Liber Abaci' de yer alan bir problem sonucunda ortaya çıkmıştır. Literatürde tavşan problemi olarak adlandırılan problem şu şekildedir:

*"Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?"*

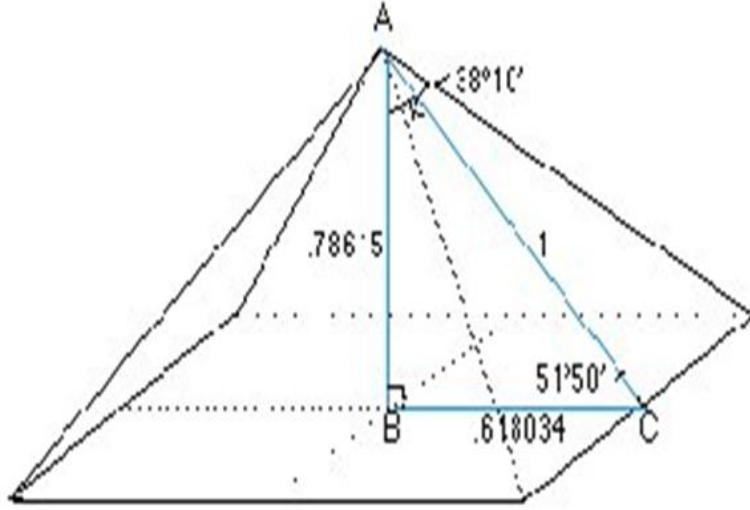
Leonardo Fibonacci bu problem üzerine düşünmüş ve aylara göre yetişkin tavşan çiftlerinin 0,1,1,2,3,5,8,13,21,... yavru tavşan çiftlerinin ise 1,0,1,1,2,3,5,8,13,... şeklinde bir artış gösterip yetişkin ve yavru toplam tavşan sayısının yine aylara göre

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,... şeklinde arttığını gözlemlemiştir. Bu dizi Fransız matematikçi *Gabriel Lamé*'den sonra *Lame Dizisi* olarak bilinirken, 1876 yılında Fransız matematikçi *François Edouard Anatole Lucas* tarafından *Fibonacci Dizisi* olarak isimlendirilmiştir (Koshy, 2001).

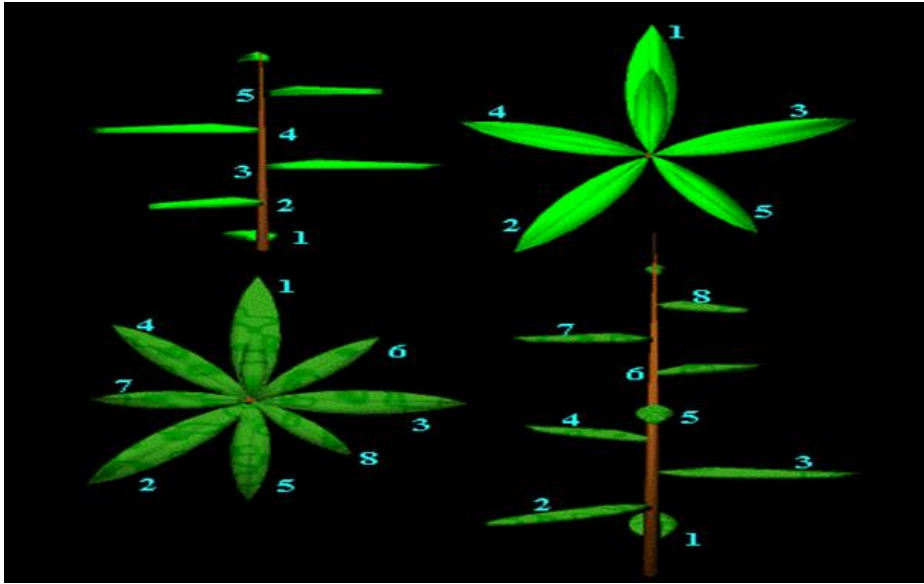
Fibonacci dizisinde, her sayı kendinden önceki iki sayının toplamı ile elde edilir ve bu şekilde sonsuza kadar devam eder. Dizinin terimlerini oluşturan rakamların oranlanması ile bu oranın altın oran olarak ifade edilen  $\phi = 1,618 \dots$  sayısına yaklaştığı keşfedilmiştir. Doğada, insan bedeninde, birçok sanat eserinde bu orana rastlamak mümkündür. Özellikle, mühendislik, tıp, finans hatta mimari alanlarda da altın oran kavramı dikkate alınmıştır. Bunlara ek olarak, insan vücudunda el parmaklarının üst boğumunun alt boğumuna oranı, elimizin dirseğimizle bileğimiz arasında kalan bölgeye oranı gibi duyu organlarımızda da altın orana rastlandığı kanıtlanmıştır. Bu anlamda, matematik ile doğa arasındaki ilişkiyi Fibonacci sayı dizileri ile örnekleyebiliriz (Tümbaş, 2018).



Şekil 1.1.1. Altın oran kavramının insan vücudundaki karşılığı



Şekil 1.1.2. Altın oran kavramının mimari alanda kullanımına örnek olarak Mısır piramitlerinin boyutları



Şekil 1.1.3. Bitkilerde altın oran kavramı

Bir dizide dizinin terimleri kendinden önceki terimler ile elde edilebiliyorsa bu dizilere rekürans dizileri, sahip oldukları bağıntıya da rekürans(yineleme) bağıntısı denir (Yılmaz, 2015). Fibonacci sayı dizisi,  $F_n$ ,  $n$ . Fibonacci sayısı ve her  $n \geq 2$  tam sayısı için başlangıç koşulları  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  olmak üzere,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  şeklinde rekürans bağıntısına sahiptir (Wall, 1960). Burada, rekürans bağıntısının katsayıları, ya da başlangıç koşulları veya her ikisi birden değiştirilerek Jacobsthal, Pell, Lucas, Pell-Lucas gibi bilinen diğer tam sayı dizileri de elde edilebilir. Ancak bu tam sayı dizilerinin hepsini kapsayan dizi tanımı 1965 yılında A.F Horadam

tarafından tanımlanmıştır.

Alwyn Francis Horadam (1923-2016), 22 Mart 1923'te Avustralya'da dünyaya gelmiştir. Sidney'in 230 km kuzeyinde bulunan Hunter vadisindeki bir çiftçinin oğlu olan Horadam'ın geometri, cebir, kombinatorik gibi alanlara ilgisi olmasına rağmen, ardında bıraktığı en büyük miras sayılar teorisi alanında olmuştur. Fibonacci sayı dizisinin başlangıç koşullarını ve rekürans bağıntısını genelleştirerek başlangıç koşulları  $a, b$ , rekürans bağıntısının karakteristik denkleminin katsayıları  $p, q$  ve  $n \geq 2$  olmak üzere,  $\{W_n\} \equiv \{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisini tanımlamıştır. Burada  $a, b$  doğal sayı,  $p, q$  sıfırdan farklı olmak üzere tam sayılar olup ikinci dereceden homojen lineer rekürans bağıntısı

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}$$

şeklinindedir. Burada katsayılar  $p = 1, q = -1$ , başlangıç koşulları  $a = 0, b = 1$  alınarak Fibonacci sayı dizisi  $\{W_n(0, 1; 1, -1)\}$  şeklinde gösterilebilir. Yapılan bu genelleştirme, Lucas tarafından seksen yıldan fazla bir süre önce tanımlanmış olan temel sayı dizilerinin bazı özelliklerinin açığa kavuşturulmasında da yardımcı olmuştur (Shannon, 2016).

$\{W_n\} \equiv \{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisinin karakteristik denklemi,  $x^2 - px - q = 0$  olup bu denklemin kökleri  $\alpha$  ve  $\beta$  olmak üzere,

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

şeklinindedir (Cerda, 2012).

Bir sayı dizisindeki herhangi bir terimi, diğer terimleri hesaplamaya gerek kalmadan elde etmemizi sağlayan Binet Formülü, Jacques Philippe Marie Binet tarafından 1843 yılında özellikle Fibonacci sayı dizileri için tanımlanmış, daha sonra diğer diziler için de Binet Formülü adı altında benzer bağıntılar elde edilmiştir.

$n \geq 0$  için, Horadam dizisinin Binet formülü,

$$W_n = \left(\frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}\right) \alpha^n - \left(\frac{b - a\alpha}{\alpha - \beta}\right) \beta^n$$

biçimindedir. (Cerda, 2012).

Horadam dizilerinin tanımından yararlanarak rekürans bağıntısının

katsayılarının ve başlangıç koşullarının değiştirilmesi ile elde edilen sayı dizilerini aşağıdaki tablo ile gösterebiliriz.

Tablo 1.1.3. Horadam sayı dizisinin rekürans bağıntısının katsayıları değiştirilerek elde edilen sayı dizilerine örnekler

$a$	$b$	$p$	$q$	Sayı Dizisi
1	1	1	-1	Fibonacci Sayı Dizisi
2	1	1	-1	Lucas Sayı Dizisi
0	1	2	-1	Pell Sayı Dizisi
2	2	2	-1	Pell-Lucas Sayı Dizisi
1	1	2	-1	Modified-Pell Sayı Dizisi
0	1	1	-2	Jacobsthal Sayı Dizisi
2	1	1	-2	Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi

Tablo 1.1.3 de gösterilen Horadam sayı dizilerinin rekürans bağıntısı ve katsayılarına bağlı olarak elde edilen diziler, bu dizilerin üreteç fonksiyonları, matris gösterimleri, periyotları gibi birçok özellikleri üzerine birçok araştırmacı tarafından çok sayıda çalışma yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalardan kaynak özetleri bölümünde bahsedilmiştir.

## 1.2. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında var olan bu sayı dizilerine ek olarak Horadam sayı dizisinin genel tanımında rekürans bağıntısının katsayıları ve başlangıç koşulları iki farklı şekilde alınarak yeni sayı dizileri tanımlanarak bu sayı dizileri ayrı ayrı belirli modüllere indirgenmiş ve periyot uzunlukları incelenmiştir. Ardından, elde edilen bu iki sayı dizisinin kuvvet dizileri tanımlanmış ve yine belirli modüllere indirgenerek bu dizilerin var oldukları modüllerde periyot uzunlukları incelenmiş ve aynı modüllerde sayı dizilerinin periyotları ile karşılaştırılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, yine Horadam sayı dizilerinin bir özel hali olan Jacobsthal sayı

dizileri ile daha önceki yapılan çalışmalar arasında Çelemoğlu ve Pancar tarafından tanımlanmış olan Jacobsthal kuvvet dizileri tanımını taban alarak, Jacobsthal sayı dizilerinin periyot uzunlukları ile, kuvvet dizilerinin aynı modüllerdeki periyot uzunlukları birlikte incelenmiştir.

İde ve Renault, 2012 yılında '*Power Fibonacci Sequences on Modulo m*' adlı çalışmalarında, Fibonacci sayı dizisinin rekürans bağıntısı ile aynı rekürans ve bağıntısına sahip modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizilerini tanımlamışlardır. Tanımladıkları bu dizilerin var oldukları modülleri karakterize edip bu modüllerdeki sayısını elde etmişler ve bu modüllerde var olan kuvvet dizilerinin periyotlarını inceleyerek Fibonacci sayı dizisinin aynı modüllerdeki periyot uzunlukları ile aralarında ilişki kurmuş ve kurulan bu ilişkiler sonucunda, kuvvet dizilerinin periyotlarını sayı dizisinin periyotları cinsinden ifade etmişlerdir ve yaptıkları bu çalışma ile literatüre hem yeni bir dizi tanımı katmış hem de diğer sayı dizileri için fikir oluşturma açısından büyük katkı sağlamışlardır. Bu çalışmanın ışığında bu tezde, ele alınan sayı dizisi ile aynı rekürans bağıntısına sahip belirli modüllerde kuvvet dizisi tanımlandığında, sayı dizileri ile kuvvet dizilerinin periyot uzunlukları arasında her zaman bir ilişki olup olmadığı bununla ilgili sonuçlar elde edilmesi amaçlanmıştır. Sayı dizileri matematiğin özellikle sayılar teorisi olmak üzere ek olarak kriptografide de önem taşıması ile birlikte, bu tezde tanımlanan yeni diziler ve elde edilen ilgili sonuçlar ile birlikte de üzerine yapılabilecek yeni çalışmalar için de temel oluşturacaktır.

Bu tez çalışması,  $m$  asal olmak üzere, modül  $m$  de yazılan kuvvet dizileri  $\mathbb{Z}_m^*$  in devirli bir alt grubu oluşturduğundan, dolayısıyla bu grupların mertebeleri, yani kuvvet dizilerinin periyotları göz önüne alındığında, aynı rekürans bağıntısına sahip sayı dizileri ile aynı modüllerde periyot uzunlukları birlikte incelendiğinde elde edilen sonuçların benzerliği ya da farklılığı açısından bu anlamda yeni bir bakış açısı kazanılmasına katkıda bulunacaktır.

Tezin ikinci bölümü olan kuramsal temeller ve kaynak özetleri bölümünde, sayılar teorisi kapsamında bu çalışmanın temelini oluşturan bazı temel kavramlar ifade edilmiş ve sayı dizileri ile ilgili daha önceki yapılan çalışmalara değinilmiştir.

Tezin üçüncü bölümü olan Materyal ve Yöntem bölümünde, materyal olarak kullanılan Fibonacci sayı dizileri, Jacobsthal sayı dizileri, Fibonacci kuvvet dizileri

ve Jacobsthal kuvvet dizileri verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümü olan Bulgular ve Tartışma bölümünde, Horadam sayı dizilerinin genel tanımında verilen rekürans bağıntısının katsayıları sırasıyla  $p = 1, q = 3$  ve  $p = 3, q = 1$  alınarak yeni Horadam sayı dizileri tanımlanmış, bu sayı dizileri 2 den büyük tam sayı olmak üzere modüllere indirgenmiş ve periyot uzunlukları incelenmiştir. Ardından her iki dizi için de modül  $s$  de Horadam kuvvet dizileri tanımlanmış, bu dizilerin var olduğu modüller karakterize edilmiş ve teorem olarak ifade edilmiştir. Bunların yanı sıra var oldukları modüllerde bu kuvvet dizilerinin periyot uzunlukları incelenmiş ve başta tanımlanan sayı dizilerinin periyotları ile karşılaştırılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin beşinci bölümü olan sonuç bölümünde ise, elde edilen tüm bulgulara yer verilmiş, sonraki yapılacak olan farklı çalışmalar için tavsiyelerde bulunulmuştur.

## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

### 2.1. Matematiksel Alt Yapı

Bu bölümde, tez çalışması için alt yapı oluşturan cebir ve sayılar teorisi alanındaki bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir, ayrıca yine tez için temel oluşturan literatürde yapılan bazı çalışmalar açıklanmıştır.

Tanım 2.1.1. Belirli nesnelere topluluğuna küme, her bir nesneye ise bu kümenin elemanı denir. Elemanı olmayan kümeye ise boş küme denir ve  $\emptyset$  veya  $\{ \}$  ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.2.  $A$  ve  $B$  kümeleri verilsin ve  $a \in A, b \in B$  olsun. O zaman  $(a, b)$  sembolüne birinci bileşeni  $a$ , ikinci bileşeni  $b$  olan sıralı ikili denir.  $(a, b), (c, d)$  sıralı ikilileri için  $(a, b) = (c, d)$  olması için gerek ve yeter koşul  $a = c, b = d$  olmasıdır (Asar ve Arıkan, 2009).

Tanım 2.1.3. Boş olmayan  $A$  ve  $B$  kümeleri verilsin. Elemanları sıralı ikililer olan  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  kümesine  $A$  ve  $B$  nin Kartezyen çarpımı denir (Terziler ve Öner, 2013).

Tanım 2.1.4.  $A$  ve  $B$  kümeleri verilsin. Eğer  $x \in A$  için  $x \in B$  ise  $A$  ya  $B$  nin alt kümesidir denir ve  $A \subseteq B$  şeklinde gösterilir. Eğer  $A \subseteq B$  ve  $A \neq B$  ise  $A$  ya  $B$  nin bir öz altkümesi denir ve  $A \subset B$  biçiminde gösterilir (Asar ve Arıkan, 2009).

Tanım 2.1.5.  $n \geq 2$  olmak üzere  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kümeleri verilsin. O zaman  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  Kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesi  $R$  ye  $A_1, A_2, \dots, A_n$  üzerinde bir  $n$  -li bağıntı denir.  $R = \emptyset$  ya da  $R = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  ise o zaman  $R$  ye, sırasıyla  $A_1, A_2, \dots, A_n$  üzerindeki boş bağıntı ve evrensel bağıntı denir (Asar ve Arıkan, 2009).

Tanım 2.1.6.  $A$  kümesi üzerinde bir  $R$  bağıntısı verilsin.

- i. Eğer her  $a \in A$  için  $aRa$  ise  $R$  ye bir yansıyan bağıntı denir.
- ii. Eğer her  $a, b \in A$  için  $aRb$  iken  $bRa$  ise  $R$  ye bir simetrik bağıntı denir.
- iii. Eğer her  $a, b \in A$  için  $aRb$  ve  $bRa$  iken  $a = b$  ise  $R$  ye bir anti simetrik bağıntı denir.
- iv. Eğer her  $a, b, c \in A$  için  $aRb$  ve  $bRc$  iken  $aRc$  ise  $R$  ye bir geçişli bağıntı denir (Asar ve Arıkan, 2009).

Tanım 2.1.7.  $A$  bir küme ve  $A$  üzerinde bir  $R$  bağıntısı verilsin. Eğer  $R$  yansıyan, simetrik ve geçişli ise  $R$  ye  $A$  üzerinde bir denklik bağıntısı denir (Asar ve Arıkan, 2009).

Tanım 2.1.8.  $f, A$  kümesinden  $B$  kümesine bir bağıntı olsun. Eğer her  $a \in A$  için  $(a, b) \in f$  olacak biçimde bir tek  $b \in B$  varsa  $f$  ye  $A$  dan  $B$  ye bir fonksiyon denir. Ayrıca  $A$  ya  $f$  nin tanım kümesi ve  $B$  ye  $f$  nin değer kümesi denir.  $A$  dan  $B$  ye tanımlı  $f$  fonksiyonu  $f : A \rightarrow B$  şeklinde gösterilir (Asar ve Arıkan, 2009).

Tanım 2.1.9.  $A$  bir küme,  $R, A$  da bir denklik bağıntısı ve  $a, b \in A$  olsun.  $a \in A$  ya denk olan elemanların  $\{x \in A \mid (x, a) \in R\}$  kümesine  $a$  nın denklik sınıfı denir  $[a]$  veya  $\bar{a}$  ile gösterilir.  $(a, b) \in R$  ise simetri özelliğinden dolayı  $\bar{a} = \bar{b}$  dir (Öner, 2013).

Tanım 2.1.10.  $G$ , boştan farklı bir küme olsun.  $(a, b) \rightarrow a * b$  ile tanımlanan

$$*: G \times G \rightarrow G$$

fonksiyonuna bir ikili işlem denir.  $(a * b) \in G$ . Burada  $*$  verilen tarife göre çarpma, toplama ya da farklı bir işlem olabilir. Genel olarak  $a * b$  yerine  $ab$  kullanılır (Öner, 2013).

Tanım 2.1.11. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı boş olmayan bir kümeye bir cebirsel yapı denir.  $A$  kümesi üzerinde bir  $*$  ikili işlemi tanımlı ise bu cebirsel yapı  $(A, *)$  ile gösterilir (Çallıalp, 2001a).

Tanım 2.1.12.  $G$ , boş olmayan bir küme ve  $*, G$  de bir ikili işlem olsun.  $(G, *)$  cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

- i.  $\forall a, b, c \in G$  için  $(a * b) * c = a * (b * c)$  dir.
- ii.  $\exists e \in G$  öyleki  $\forall a \in G$  için  $a * e = e * a = a$  dır.
- iii.  $\forall a \in G$  için  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  olacak şekilde  $\exists a^{-1} \in G$  vardır (Çallıalp, 2001a).

Tanım 2.1.13.  $R \neq \emptyset$  kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem  $+$  ve  $\cdot$  olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan  $(R, +, \cdot)$  cebirsel yapısına bir halka denir.

- i.  $(R, +)$  bir değişmeli gruptur.
- ii.  $\cdot$  işleminin  $R$  de birleşme özelliği vardır.

iii.  $\cdot$  işleminin  $+$  işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır (Çallıalp, 2018c).

Tanım 2.1.14.  $R$  halkasında,  $0_R \neq a \in R$  elemanı için;  $ab = 0_R$  veya  $ba = 0_R$  olacak şekilde  $\exists 0_R \neq b \in R$  bulunabilirse  $a$  ya, halkanın bir sıfır böleni denir (Çallıalp, 2018c).

Tanım 2.1.15. Birimi  $1_R \neq 0_R$  olan birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya tamlik bölgesi denir (Hungerford, 1974)

Tanım 2.1.16.  $R$  birimli ve değişmeli bir halka ve  $R - \{0_R\} = R^*$ , ikinci işlem  $\cdot$  ye göre bir grup ise  $R$  ye bir cisim denir (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.17.  $F$  bir cisim ve  $G, F$  nin sıfırdan farklı elemanlarının çarpımsal bir alt grubu olsun. Bu durumda  $G$  devirlidir (Hungerford, 1974).

Tanım 2.1.18.  $(G, *)$  bir grup ve  $\forall a, b \in G$  için  $a * b = b * a$  değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya Abel grubu denir (Çallıalp, 2001a).

Tanım 2.1.19.  $(G, *)$  bir cebirsel yapı olsun. Şayet,  $*$  ikili işlemi birleşme özelliğine sahipse  $(G, *)$  ye yarı grup,  $(G, *)$  özdeş elemanlı bir yarı grup ise  $(G, *)$  ye monoid denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.20. Bir  $G$  grubunun eleman sayısına  $G$  nin mertebesi denir ve  $|G|$  ile gösterilir. Şayet  $G$  nin eleman sayısı sonlu ise  $G$  ye sonlu, aksi takdirde sonsuz grup denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.1.21.  $G$  bir grup ve  $a, b \in G$  verilsin.  $ax = b$  ve  $ya = b$  eşitlikleri  $G$  de yalnız bir çözüme sahiptir (Öner, 2013).

Teorem 2.1.22.  $G$  bir yarı grup olsun. Şayet  $G$  nin sağ birimi ve  $G$  deki her elemanın sağ tersi varsa  $G$  bir grup olur (Öner, 2013).

Teorem 2.1.23.  $G$  bir yarı grup olsun.  $G$  nin bir grup olması için gerek ve yeter şart, her  $a, b \in G$  için  $ax = b$  ve  $ya = b$  eşitliklerinin  $G$  de bir çözümü olmasıdır (Öner, 2013).

Tanım 2.1.24.  $G$  bir grup  $H \subseteq G$  boş olmayan bir küme olsun.  $H, G$  deki işleme göre kendi başına bir grup ise  $H$  ye  $G$  nin bir alt grubudur denir ve  $H \leq G$  ile gösterilir (Çallıalp, 2001a).

Teorem 2.1.25.  $G$  sonlu bir grup ve  $H < G$  olsun. Bu durumda  $|H| \mid |G|$  dir

(Bayraktar, 1988).

Tanım 2.1.26. Bir  $G$  grubu için,  $G = \langle M \rangle$  olacak şekilde bir  $M \subset G$  bulunabiliyorsa,  $G$  ye  $M$  ile üretilmiş grup denir. Eğer  $M$  sonlu bir küme ise  $G$  ye sonlu üretilmiş grup ve  $M = \{a\}$  tek elemanlı bir küme ise  $G$  ye  $a$  ile üretilmiş devirli grup denir ve  $G = \langle a \rangle$  şeklinde yazılır (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.27. Devirli bir grubun her alt grubu devirlidir (Çallıalp, 2018b).

Tanım 2.1.28.  $G$  bir grup ve  $a \in G$  olsun.  $a$  nın ürettiği  $\langle a \rangle$  devirli grubunun mertebesine  $a$  elemanının mertebesi denir ve  $o(a)$  ile gösterilir. O halde  $o(a)$ ,  $a^n = e$  koşulunu sağlayan  $n > 0$  tam sayıları arasında en küçük olanıdır (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.29.  $G = \langle a \rangle$  ve  $|G| = n$  verilsin.  $b \in G$ ,  $a^s = b$  ve  $(n, s) = d$  olsun. Bu durumda  $H = \langle b \rangle$  için  $|H| = n/d$  dir (Öner, 2013).

Teorem 2.1.30.  $G$  bir grup,  $a \in G$  ve  $o(a) = n$  olsun. Bu durumda  $a^m = e \Leftrightarrow n \mid m$  dir (Çallıalp, 2018c).

Tanım 2.1.31.  $n > 1$  tam sayısının kendisinden ve 1 den başka pozitif böleni yoksa bu sayıya asal sayı denir (Bayraktar, 1988).

Teorem 2.1.32. Sonsuz sayıda asal sayı vardır (Bayraktar,1988).

Tanım 2.1.33.  $n$  asal sayısı için  $2^n - 1$  biçiminde yazılabilen sayılara Mersenne sayıları, bu sayılar arasından asal olanlara ise Mersenne asalı denir (Rosen, 1984).

Tanım 2.1.34.  $n$  doğal sayısı için  $2^{2^n} + 1$  biçiminde yazılabilen asal sayılara Fermat asal sayıları denir (Rosen, 1984).

Tanım 2.1.35.  $n \geq 2$  olmak üzere hepsi birden sıfır olmayan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tam sayıları için  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$  ise bu tam sayılara aralarında asal denir (Bayraktar, 1988).

Tanım 2.1.36.  $p$  asal ve  $0 \neq a \in \mathbb{Z}$  olsun. Bu durumda  $(a, p) = 1 \Leftrightarrow p \nmid a$  dir (Çallıalp, 2009b).

Teorem 2.1.37. (Aritmetiğin Temel Teoremi) Her  $a > 1$  tam sayısının asal çarpanlara ayrılışı, sıra gözetmeksizin tek türdür (Bayraktar, 1988).

Teorem 2.1.38. Sıfırdan farklı her  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a = (\pm 1)p_1 p_2 \dots p_n$  şeklinde, farklı olmaları gerekmeyen bir takım asal sayıların ( $n = 0$  olabilir) çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış sıra gözetmeksizin tek türdür (Bayraktar, 1988).

Teorem 2.1.39.  $m, n \in \mathbb{Z}$  ve  $n \neq 0$  ise  $m = qn + r$ ,  $0 \leq r < n$  olacak şekilde bir tek  $q$  ve  $r$  tam sayıları vardır (Bayraktar, 1988).

Tanım 2.1.40.  $n = qm + r$ ,  $0 \leq r < |m|$  ise  $q$  ya bölüm,  $r$  ye de kalan denir. Verilen  $m$  ve  $n$  tam sayıları için  $q$  ve  $r$  yi bulmaya da  $n$  yi  $m$  ile kalanlı bölme denir (Çallıalp, 2009b).

Tanım 2.1.41.  $a, b \in \mathbb{Z}$  olsun.

- i.  $d \mid a$  ve  $d \mid b$  ise  $d$  ye  $a$  ile  $b$  nin bir ortak böleni denir.
- ii.  $d, a$  ile  $b$  nin bir ortak böleni olsun. Eğer  $a$  ile  $b$  nin her  $c$  ortak böleni için  $c \mid d$  ise  $d$  ortak bölenine,  $a$  ile  $b$  nin en büyük ortak böleni (ebob) denir (Çallıalp, 2009b).

Tanım 2.1.42.  $(a, b) = 1$  yapan  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  tam sayıları aralarında asaldır.

Tanım 2.1.43.  $a, b \in \mathbb{Z}$  olsun.

- i.  $a \mid k$  ve  $b \mid k$  olacak şekilde bir  $k > 0$  tam sayısı varsa  $k$  ya  $a$  ile  $b$  nin bir ortak katı denir.
- ii.  $k, a$  ile  $b$  nin bir ortak katı olsun. Eğer  $a$  ile  $b$  nin ortak katı için  $k \mid t$  ise  $k$  ya  $a$  ile  $b$  nin en küçük ortak katı denir ve  $k = [a, b]$  ile gösterilir (Çallıalp, 2009b).

Tanım 2.1.44.  $m > 0$  tam sayı ve  $a, b \in \mathbb{Z}$  olsun.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b$$

ile tanımlanır. Bu taktirde  $a$  ve  $b$ , modülo  $m$  kongrüent (denk) denir. Böyle bir ifadeye de kongrüans denir (Bayraktar, 2006).

Önerme 2.1.45. Tanım 2.1.44 de tanımlanan  $\equiv$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.46.  $a \equiv a_1 \pmod{m}$  ve  $b \equiv b_1 \pmod{m}$  ise  $a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod{m}$  dir (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.47.  $(a, m) = 1$  ise  $ax \equiv b \pmod{m}$  nin çözümü var ve  $\pmod{m}$

tek bir sınıftır (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.48.  $a \equiv a_1 \pmod{m}$  ve  $b \equiv b_1 \pmod{m}$  ise  $ab \equiv a_1 b_1 \pmod{m}$  dir (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.49.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a, m) = (b, m)$  dir (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.50.  $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a$  ve  $b$  nin  $m$  ile bölümünden elde edilen kalanın aynı olmasıdır (Çallıalp, 2018c).

Tanım 2.1.51.  $\mathbb{Z}$  deki  $\equiv$  bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına  $m$  modülüne göre  $\pmod{m}$  kalan sınıfları denir ve tüm kalan sınıfları kümesi  $\mathbb{Z}_m$  ile gösterilir (Çallıalp, 2018c).

Tanım 2.1.52.  $\bar{a} \in \mathbb{Z}$  sınıfı için,  $(a, m) = 1$  ise  $\bar{a}$  sınıfına bir asal kalan sınıfı denir.  $\mathbb{Z}_m$  nin bütün asal kalan sınıflarının kümesi  $\mathbb{Z}_m^*$  ile gösterilir (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.53. İki asal kalan sınıfın çarpımı da bir asal kalan sınıfıdır (Çallıalp, 2018c).

Önerme 2.1.54.  $\mathbb{Z}_m$  deki bir kalan sınıfının tersinin olması için gerek ve yeter koşul bir asal kalan sınıfı olmasıdır (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.55. (Çinlilerin Kalan Teoremi)  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ikişerli olarak aralarında asal pozitif tam sayılar ve  $a_1, a_2, \dots, a_k$  keyfi tam sayılar olsun. Bu durumda  $z \equiv a_i \pmod{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) kongrüens sisteminin bir  $z$  çözümü vardır. Ayrıca başka herhangi bir  $z$  tam sayısı da bu kongrüens sisteminin çözümü oluyorsa ancak ve ancak  $n = \prod_{i=1}^k n_i$  olmak üzere  $z \equiv z' \pmod{n}$  dir (Shoup, 2009).

Önerme 2.1.56.  $a \equiv a_1 \pmod{m}$  ve  $b \equiv b_1 \pmod{m}$  ise  $ab \equiv a_1 b_1 \pmod{m}$  dir (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.57.  $n > 0$  olmak üzere  $a, n \in \mathbb{Z}$  için  $a$  'nın modül  $n$  de çarpımsal tersinin olması için gerek ve yeter koşul  $a$  ile  $n$  'nin aralarında asal olmasıdır (Shoup, 2009).

Tanım 2.1.58. Pozitif  $n$  tam sayısı için  $1 \leq a \leq n$  ve  $(a, n) = 1$  olan  $a$  tam sayılarının sayısı  $\varphi(n)$  ile gösterilir ve Euler Fonksiyonu denir (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.59  $m \in \mathbb{Z}$  olsun.  $(a, m) \equiv 1$  olan her  $a \in \mathbb{Z}$  için  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  veya  $\bar{a}^{\varphi(m)} \equiv \bar{1}$  dir (Çallıalp, 2018c).

**Teorem 2.1.60.**  $p$  bir asal sayı ve  $a$  bir tam sayı olmak üzere  $p$ ,  $a$  yı bölmüyor ise  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  dir (Asar ve Arıkan, 2011).

**Tanım 2.1.61.**  $x^2 \equiv a \pmod{m}$  kongrüansının bir çözümü varsa  $a$  ya mod  $m$ , 2. kuvvet rezidüsü kısaca kuadratik rezidü denir. Eğer bu kongrüansın çözümü yoksa  $a$  sayısına  $m$  modülüne göre kuadratik kalan değil denir (Çallıalp, 2009b).

**Teorem 2.1.62.**  $p \neq 2$  asal ve  $p \nmid a$  olsun.  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  nin bir çözümü olması için  $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  olmasıdır (Rosen, 1984).

**Lemma 2.1.63.**  $p$  tek asal sayı ve  $e$  bir pozitif tam sayı olsun. Eğer  $x^2 \equiv 1 \pmod{p^e}$  ise  $x \equiv \mp 1 \pmod{p^e}$  dir (Ide and Renault, 2012).

**Sonuç 2.1.64.**  $p$  tek asal sayı olmak üzere

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & p \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$$

olup bu sonuca göre  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  kongrüansının sağlanması için gerek ve yeter şartın  $p$  asalının  $4k + 1$  formunda olması gerektiği görülebilir (Öner, 2013).

**Tanım 2.1.65.**  $p \neq 2$  asal tam sayı olsun.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } p \nmid a \text{ ve } a \text{ kuadratik rezidü ise,} \\ -1, & \text{eğer } p \nmid a \text{ ve } a \text{ kuadratik rezidü değil ise,} \\ 0, & \text{eğer } p \mid a \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve  $\left(\frac{a}{p}\right)$  ye Legendre sembolü denir (Çallıalp, 2009b).

**Teorem 2.1.66.** (Euler Kriteri)  $p$  tek asal sayı olmak üzere her  $a \in \mathbb{Z}$  için  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$  olmasıdır (Namlı, 2001).

**Teorem 2.1.67.**  $p$  tek asal sayı olsun. Bu durumda,

$$\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0$$

ve  $p$  sayısı, tam olarak  $(p-1)/2$  tane kuadratik kalan olan ve  $(p-1)/2$  tane kuadratik kalan olmayan sayıya sahiptir (Öner, 2013).

**Önerme 2.1.68.**  $p$  tek asal tam sayı, ve  $(a, b) = (b, p) = 1$  olacak şekilde  $a$  ve  $b$  sayıları verilsin. Bu durumda Legendre sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i.  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right) \pmod{p}$ ,
- ii.  $(a^2/p) = 1$ ,
- iii.  $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ ,
- iv.  $a \equiv b \pmod{p}$  ise  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ ,
- v.  $p \nmid c$  ise  $(ac^2/p) = (a/p)$ ,
- vi.  $(1/p) = 1$  ve  $(-1/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$  (Öner, 2013).

Teorem 2.1.69. (Kuadratik Karşılık Kuralı)  $p \neq q$  tek ve asal tam sayılar ise

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

dir (Çallıalp, 2009b).

Sonuç 2.1.70.  $p$  ve  $q$  farklı tek asallar ise,

$$(p/q) = \begin{cases} (q/p), & p \equiv 1 \pmod{4} \text{ veya } q \equiv 1 \pmod{4} \\ (p/q), & p \equiv q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (\text{Öner, 2013}).$$

Teorem 2.1.71.  $p$  tek asal sayısı ve  $(a, p) = 1$  olacak şekilde  $a$  tam sayısı verilsin. Bu takdirde,

$$x^2 \equiv a \pmod{p^n} \quad n \geq 1$$

kuadratik kongrüansının çözümünün olması için gerek ve yeter şart  $(a/p) = 1$  olmasıdır (Öner, 2013).

Teorem 2.1.72.  $G$  sonlu bir grup ve  $H < G$  olsun. Bu durumda  $|H| \mid |G|$  dir (Bayraktar, 1988).

Önerme 2.1.73.  $G$  bir grup,  $a \in G$  ve  $o(a) = n$  olsun. Bu durumda  $a^m = e \Leftrightarrow n \mid m$  dir (Çallıalp, 2018c).

Teorem 2.1.74. (Hensel's Lemma)  $p$  asal,  $r$ ,  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^i}$  denkleminin bir çözümü olsun.  $f'(r) \not\equiv 0 \pmod{p^i}$  ise  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{i+1}}$  denkleminin  $\bar{r} \equiv r \pmod{p^i}$  olacak şekilde  $\bar{r}$  kökü vardır (Jones, 1998).

Tanım 2.1.75.  $f$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  tanım kümesinin her  $x$  elemanı için,  $f(x) = f(x + T)$  olacak şekilde bir  $T$  pozitif sayısı varsa bu  $f$  fonksiyonuna

periyodik fonksiyon denir.  $f(x) = f(x + T)$  koşulunu sağlayan en küçük pozitif  $T$  sayısına ise fonksiyonun periyodu denir (Öztürk, 2011).

## 2.2. Sayı Dizileri İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. Her  $n \geq k$  ve sabit  $a_j$  ( $0 \leq j \leq k - 1$ ) katsayıları için

$$u_n = a_{k-1}u_{n-1} + a_{k-2}u_{n-2} + \dots + a_1u_{n-k+1} + a_0u_{n-k} \quad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan  $(u_n)$  dizisine *k.dereceden* homojen lineer rekürans dizi denir. (2.1) eşitliğine ise *k.dereceden* homojen lineer rekürans bağıntısı denir.  $(u_n)$  dizisinin ilk  $k -$  tane terimine yani  $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$  sayılarına  $(u_n)$  dizisinin başlangıç şartları denir (Yılmaz, 2015).

Tanım 2.2.2.  $(u_n)$ , (2.1) eşitliğindeki gibi bir dizi ise,

$$p(x) := x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_1x - a_0$$

polinomuna  $(u_n)$  dizisinin karakteristik polinomu,  $p(x) = 0$  denkleminde ise  $(u_n)$  dizisinin karakteristik denklemi denir (Yılmaz, 2015).

Tanım 2.2.3.  $m$ , mertebe olmak üzere  $m \geq 2$  için Fibonacci sayıları  $F_i^{(m)}$  ile gösterilir ve sınır koşulları  $F_0^{(m)} = 1$  ve  $-m < n < 0$  için  $F_n^{(m)} = 0$  olmak üzere  $n > 0$  için  $F_n^{(m)} = F_{n-1}^{(m)} + F_{n-2}^{(m)} + \dots + F_{n-m}^{(m)}$  rekürans bağıntısını sağlayan sonsuz tam sayı dizisine  $m$ . mertebeden Fibonacci sayı dizisi denir (Singh, et al., 2014).

Özel olarak  $m = 2$  için Fibonacci sayıları, başlangıç terimleri  $F_0 = 0$  ve  $F_1 = 1$  olan ve  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  rekürans bağıntısını sağlayan bir sonsuz tam sayı dizisini oluşturur.

Tanım 2.2.4.  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  Fibonacci dizisinin  $f(x) = x^2 - x - 1$  karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, Fibonacci sayı dizileri için Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

olarak bilinir (Catarino, 2014).

Tanım 2.2.5.  $n \geq 2$  için

$$F_n(x, y) = xF_{n-1}(x, y) + yF_{n-2}(x, y)$$

rekürans bağıntısı ve

$$F_0(x, y) = 0, F_1(x, y) = 1$$

başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma iki değişkenli Fibonacci polinomu denir.

$y = 1$  için  $F_n(x, 1)$  iki değişkenli Fibonacci polinomu klasik Fibonacci polinomuna dönüşür (Catalani, 2004).

Tanım 2.2.6.  $n > 0$ ,  $1 \leq i \leq k$  için  $J_n^i = J_{n-1}^i + 2J_{n-2}^i + \dots + J_{n-k}^i$  ve başlangıç koşulları  $n = 1 - i$  ise 1, diğer durumlarda 0 olan  $J_n^i$  sonsuz tam sayı dizisine genelleştirilmiş  $k$ - Jacobsthal sayı dizisi denir. Özel olarak,  $k = 2$  için başlangıç koşulları  $J_0 = 0, J_1 = 1$  olan ve  $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$  rekürans bağıntısını sağlayan  $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$  tam sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir (Deveci, vd., 2016).

Tanım 2.2.7.  $\{j_n\}$  Jacobsthal- Lucas sayı dizileri,  $n \geq 2$  için başlangıç koşulları  $j_0 = 2, j_1 = 1$  olan ve  $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlıdır (Aydın, 2018).

Tanım 2.2.8. Jacobsthal ve Jacobsthal- Lucas sayı dizileri için Binet Formülü

$$J^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ ve } j_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir (Daşdemir, 2012).

Tanım 2.2.9.  $k \geq 2$  tam sayı olmak üzere,  $P^{(k)} = \left(P_n^{(k)}\right)_{n=-(k-2)}^{\infty}$  genelleştirilmiş  $k$  - Pell dizisi başlangıç koşulları  $P_{-(k-2)}^{(k)} = P_{-(k-3)}^{(k)} = \dots = P_0^{(k)} = 0$  ve  $P_1^{(k)} = 1$  olup  $P_n^{(k)} = 2P_{n-1}^{(k)} + P_{n-2}^{(k)} + \dots + P_{n-k}^{(k)}$  rekürans bağıntısı ile tanımlı sonsuz tam sayu dizisidir.  $k = 2$  için en yaygın bilinen başlangıç koşulları  $P_0 = 0$  ve  $P_1 = 1$  olup  $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlı Pell sayı dizileri elde edilir (Bravo, et al., 2020).

Tanım 2.2.10.  $n \geq 2$  olmak üzere, Lucas sayı dizileri başlangıç koşulları  $L_0 = 2, L_1 = 1$  olup  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlıdır (Singh, et al., 2014).

Tanım 2.2.11.  $n \geq 2$  için,

$$L_n(x, y) = xL_{n-1}(x, y) + yL_{n-2}(x, y)$$

rekürans bağıntısı ve

$$L_0(x, y) = 2, \quad L_1(x, y) = x$$

başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma iki değişkenli Lucas polinomu denir.

$y = 1$  için  $L_n(x, 1)$  iki değişkenli Lucas polinomu klasik Lucas polinomuna dönüşür (Catalani, 2004).

Tanım 2.2.12. Genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas dizileri  $n \geq 2$  olmak üzere  $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$  şeklinde gösterilir ve  $b$  ve  $s$  negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, başlangıç koşulları  $B_0 = 2b$  ve  $B_1 = s$  olup  $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlıdır (Singh, et al., 2014).

1960'lı yıllarda Charles H. King tarafından tanımlanan Fibonacci sayı dizilerinin matrisler ile ilişkisini veren  $Q$  matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır ve bu matris ile  $Q^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$  eşitliğini tanımlamış ve bu matrisi kullanarak

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \det Q = -1$$

eşitliğini elde etmiştir. Ayrıca bu eşitlikleri kullanarak

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

olarak bilinen Cassini formülü elde etmiştir (Uygun, 2013).

### 2.3 Literatür Özeti

Bu bölümde, kaynaklar kısmında belirtilen çalışmalardan kısa bir özet verilecektir.

1960 yılında D. D. Wall tarafından başlangıç koşulları değiştirilerek elde edilen iki Fibonacci sayı dizisi modül  $m$  de incelenerek, periyot uzunlukları arasında ilişki kurulmuş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir (Wall, 1960). Ardından, 1961 yılında A.F Horadam tarafından Fibonacci dizilerinin bir genellemesi tanımlanmış ve bu diziler için bazı sonuçlar elde edilmiştir (Horadam, 1961). Fibonacci dizilerinin rekürans bağıntısı değiştirilerek 1973 yılında N.J.A Sloane tarafından Jacobsthal sayı dizileri tanımlanmıştır. (Sloane, 1973).

1994 yılında A. F. Horadam tarafından Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları

elde edilmiş ve bu sayıların birbirleri arasındaki ilişki araştırılarak bu sayı dizilerinin bazı özellikleri elde edilmiştir (Horadam, 1994).

2004 yılında M. Catalani tarafından çift değişkenli Fibonacci polinomları tanımlanmış, başlangıç koşulları belirtilen çift değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları elde edilmiş ve matris yaklaşımları kullanılarak yeni eşitlikler elde edilmiştir (Catalani, 2004). Yine 2004 yılında, H.M. Srivastava tarafından tamamlanmamış Jacobsthal sayıları ve tamamlanmamış Jacobsthal Lucas sayıları araştırılmış, bu sayıların üreteç fonksiyonlarını içeren bazı sonuçlar elde edilmiştir (Srivastava, 2004).

Tanımlanan Jacobsthal sayı dizileri ile ilgili yapılan çalışmalar devam etmiş ve 2009 yılında Yılmaz ve Bozkurt tarafından  $k$ . mertebeden genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizileri tanımlanmıştır (Yılmaz ve Bozkurt, 2009). 2009 yılında Horadam sayı dizileri ile ilgili ise Horzum ve Kocer tarafından 2. dereceden polinom dizilerinin yeni bir genelleştirilmesi tanımlanmış, Horadam polinomal dizileri ile ilgili bazı eşitlikler elde edilmiştir. (Horzum, Kocer, 2009). 2010 yılında ise B. Demirtürk tarafından bazı özel matrisler kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayıları arasında ilişki kurularak bazı eşitlikler elde edilmiştir (Demirtürk, 2010).

2011 yılında Y. Yazlık ve N. Taşkara tarafından genelleştirilmiş  $k$  – Horadam sayı dizileri tanımlanmış, bu dizilerin üreteç fonksiyonları, Binet formülleri verilmiş ve bazı eşitlikler elde edilmiştir (Yazlık ve Taşkara, 2011).

2012 yılında J. Ide ve M. Renault tarafından Fibonacci sayı dizilerine dayalı olarak modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizileri tanımlanmış ve bu dizilerin varlığı, sayıları, periyot uzunlukları ve alt dizi ilişkileri incelenmiş olup bazı sonuçlar elde edilmiştir (Ide and Renault, 2012). 2013 yılında D. Jhala vd. tarafından  $k$  – Jacobsthal sayıları için Binet formülü elde edilmiş ve bu Binet formülü kullanılarak  $k$  – Jacobsthal sayı dizileri için bazı özellikler elde edilmiştir (Jhala, et al., 2013). 2014 yılında Bijendra Singh, Omprakash Sikhwal ve Yogesh Kumar Gupta tarafından genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas dizilerinin rekürans bağıntısı tanımlanarak bu diziler ile ilgili Binet formülü ve determinant özellikleri yardımıyla bazı eşitlikler elde edilmiştir (Singh, et al., 2014).

Lucas sayı dizileri ile ilgili yapılan bir başka çalışmada ise 2016 yılında Ş. Uygun ve H. Eldogan tarafından genelleştirilmiş  $k$  – Jacobsthal ve  $k$  – Lucas

dizileri arasında önemli ilişkiler kurulmuş, Binet formülleri kullanılarak bazı eşitlikler elde edilmiştir (Uygun and Eldogan, 2016). Yine 2016 yılında Y. Yazlık vd. tarafından modül  $m$  de Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri birlikte incelenerek, bu dizilerin periyot uzunlukları arasında bazı ilişkiler kurulmuş, eşitlikler elde edilmiştir ( Yazlık, vd., 2016) ve Ö. Deveci vd. tarafından modül  $m$  de,  $k \geq 2$  olmak üzere  $k$ . mertebeden genelleştirilmiş  $k -$  Jacobsthal sayı dizileri ve modül  $m$  de,  $k \geq 3$  olmak üzere  $k$ . mertebeden genelleştirilmiş  $k -$  Jacobsthal-Padovan sayı dizilerinin periyot uzunlukları incelenmiştir.

2016 yılında, Ş. Uygun ve E. Owusu tarafından, Jacobsthal sayılarının çift periyodik Jacobsthal sayıları olarak yeni bir genelleştirilmesi çift periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerine benzer olarak başlangıç koşulları  $\hat{j}_0 = 0, \hat{j}_1 = 1$  olan

$$\hat{j}_n = \begin{cases} a\hat{j}_{n-1} + 2\hat{j}_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ b\hat{j}_{n-1} + 2\hat{j}_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad n \geq 2,$$

şeklinde tanımlanmış, genelleştirilmiş fonksiyonları ile birlikte, Binet formülleri, Cassini, Catalan ve D' Ocagne eşitlikleri elde edilmiştir (Uygun, Owusu, 2016).

2018 yılında, F. Aydın tarafından genelleştirilmiş Jacobsthal, genelleştirilmiş karmaşık Jacobsthal ve genelleştirilmiş dual Jacobsthal sayıları araştırılmış ve bu dizilerin özel bir türü tanımlanarak, bu diziler için rekürans bağıntıları, vektör ilişkileri, Binet formülleri verilmiştir (Aydın, 2018).

2018 yılında A. Tümbaş tarafından Horadam sayı ve polinom dizileri incelenerek genelleştirilmiş Horadam dizileri ile ilgili özellikler matris kullanımı ile elde edilmiştir (Tümbaş, 2018).

2020 yılında J. Bravo ve diğerleri tarafından genelleştirilmiş  $k -$  Pell dizileri araştırılmış, rekürans bağıntıları, genelleştirilmiş Binet formülü ve farklı aritmetik ilişkiler tanımlanmıştır. Ek olarak Fibonacci ve genelleştirilmiş Pell dizilerini içeren bazı eşitlikler elde edilmiştir (Bravo, et.al., 2020).

2020 yılında Ç. Çelemoğlu vd. tarafından Fibonacci sayı dizilerinin rekürans bağıntılarının değiştirilmesi ile farklı diziler tanımlanmış, bu diziler kullanılarak yeni kuvvet dizileri tanımlanarak bu dizilerin El Gamal şifreleme sistemi üzerine uygulamaları yapılmıştır (Çelemoğlu, vd., 2020).

2021 yılında G.Y. Şentürk vd. tarafından karmaşık sayılar kullanılarak genişletilmiş Horadam sayıları tanımlanmış, tanımlanan bu sayıların Binet formülü,

Cassini, Catalan, D' Ocagne eşitlikleri verilmiş yine bu sayıların matris gösterimleri araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir (Şentürk, vd., 2021). Yine bu diziler ile ilgili 2021 yılında, N. Yılmaz vd. tarafından  $(k, t)$  – Horadam sayılarının yeni bir ailesi tanımlanmış ve Binet formülleri elde edilmiş, Cassini ve Catalan eşitlikleri tanımlanmıştır (Yılmaz vd. 2021). Bir başka çalışmada ise, N. Kilic tarafından 2021 yılında  $k$  – Horadam karmaşık sayıları üzerine çalışılmış ve bazı eşitlikler elde edilmiştir. Ayrıca tanımlanan bu dizilerin matrisler üzerine uygulamaları verilmiştir (Kilic, 2021).

2021 yılında Fibonacci dizileri ile ilgili, Y.K. Panwar tarafından  $k$  – Fibonacci sayılarının bir genelleştirilmesi tanımlanmış, bu diziler ile ilgili Catalan, Cassini, D' Ocagne eşitlikleri verilmiş, ardışık iki teriminin bölümünün limiti araştırılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu dizilerin karakteristik denklemi ile ilgili yeni eşitlikler elde edilmiştir (Panwar, 2021).

2021 yılında Ş. Uygun tarafından çift periyodik Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri incelenmiş, bu diziler arasında yeni ilişkiler kurularak eşitlikler ile ifade edilmiştir (Uygun, 2021).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında materyal olarak Fibonacci dizileri, modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizileri, Jacobsthal dizileri, ve sayı dizilerinin en genel hali olan Horadam sayı dizileri, yöntem olarak 2.1 kısımda verilen temel kavramlar ile birlikte modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizileri üzerine uygulanan çalışmalar kullanılmıştır.

Tanım 3.1. Horadam sayı dizileri, başlangıç koşulları  $H_0 = a, H_1 = b$  olup  $H_{n+1} = pH_n + qH_{n-1}$  rekürans bağıntısı ile tanımlıdır. Burada  $a$  ve  $b$  doğal sayılar,  $p$  ve  $q$  sıfırdan farklı tam sayılardır. Horadam sayı dizilerinin karakteristik denklemi  $z_1, z_2$  denklemin çözümleri olmak üzere  $z^2 - pz + q = 0$  şeklindedir (Bagdasar and Larcombe, 2013).

Teorem 3.3. modül  $m > 2$  tam sayı olmak üzere, Fibonacci sayı dizisi mod  $m$  de periyodiktir (Wall, 1960).

Teorem 3.4.  $i = 1, \dots, n$   $h_i, F_n(\text{mod } p_i^{e_i})$  Fibonacci sayı dizisinin periyodu olsun. modül  $m = \prod p_i^{e_i}$  şeklinde asal çarpanlarına ayrıldığında, Fibonacci sayı dizisinin  $\text{mod } m$  de ki periyodu  $h = [h_i]$  dir (Wall, 1960).

Teorem 3.6.  $m > 2$  olmak üzere,  $\text{mod } m$  de Fibonacci sayı dizisinin periyodu çifttir (Wall D.D., 1960).

Tanım 3.7.  $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$  rekürans bağıntısını sağlayan, bazı  $m$  modülleri için,  $G \equiv 1, a, a^2, a^3, \dots \pmod{m}$  tam sayı dizisine de Fibonacci kuvvet dizisi denir (Ide and Renault, 2012).

Örnek 3.8. Modül  $m = 19$  olmak üzere iki tane Fibonacci kuvvet dizisi vardır. Bu diziler

1,15,16,12,9,2,11,13,5,18,4,3,7,10,17,8,6,14,1,5 ... ve 1,5,6,11,17,9,7,16,4,1,5 ... şeklindedir.

2012 yılında, Ide ve Renault tarafından modül  $m$  Fibonacci kuvvet dizileri tanımlandıktan sonra, bu dizilerin varlığı ve sayıları araştırılmış, var oldukları modüller karakterize edilerek bu modüllerdeki sayıları belirlenmiştir. Daha sonra bu dizilerin  $\text{mod } m$  de periyot uzunlukları incelenmiş ve  $\text{mod } m$  de Fibonacci kuvvet dizilerinin periyotları aynı modülde Fibonacci sayı dizilerinin periyotları cinsinden

ifade edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen teorem ve lemmalar, bu tez çalışması için büyük ölçüde katkı sağlamıştır.

**Teorem 3.9.** mod 5 de kesinlikle bir tane Fibonacci kuvvet dizisi vardır.  $m \neq 5$  için,  $p_i \equiv \pm 1 \pmod{10}$  olmak üzere  $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  veya  $m = 5 p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  şeklinde asal çarpanlarına ayrıldığında mod  $m$  de  $2^k$  tane Fibonacci kuvvet dizisi vardır (Ide and Renault, 2012).

Şimdi vereceğimiz lemma ve teorem için,  $f(x) = x^2 - x - 1$  Fibonacci sayı dizisinin karakteristik denklemi,  $\alpha$  ve  $\beta$  bu denklemin alınan modüllerdeki kökleridir. Ayrıca, modül  $m$  de Fibonacci sayı dizisinin periyodu  $\pi(m)$  ile gösterilmiş olup,  $\pi(m)$  ile ilgili belirli bir formül bulunmamaktadır (Ide and Renault, 2012). Fibonacci kuvvet dizileri için ise kökler ile oluşturulan kuvvet dizileri  $\text{mod } m$  de  $\mathbb{Z}_m$  in devirli bir alt grubunu oluşturduğundan, mertebe kavramı dikkate alınmıştır. Dolayısıyla, Fibonacci kuvvet dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri  $\alpha$  ve  $\beta$  olmak üzere, bu kökler ile oluşturulan kuvvet dizilerinin mertebesi  $|\alpha|, |\beta|$  ile gösterilmiştir.

**Lemma 3.10.**  $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$  asal tam sayı ve  $\alpha$  ve  $\beta$   $f(x) = x^2 - x - 1 \pmod{p^e}$  nin kökleri olsun. Genelliği bozmadan  $|\alpha| \geq |\beta|$  alalım. Bu durumda,

- a)  $\pi(p^e) \equiv 0 \pmod{4}$  ise  $|\alpha| = |\beta| = \pi(p^e)$
- b)  $\pi(p^e) \equiv 2 \pmod{4}$  ise  $|\alpha| = 2|\beta| = \pi(p^e)$  (Ide and Renault, 2012).

**Teorem 3.11.**  $p_i \equiv \pm 1 \pmod{10}$  olmak üzere  $m = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  olsun.

- a)  $\pi(m) \equiv 0 \pmod{4}$  ise mod  $m$  de her Fibonacci kuvvet dizisinin periyodu  $\pi(m)$  dir.
- b)  $\pi(m) \equiv 2 \pmod{4}$  ise mod  $m$  de bir tane Fibonacci kuvvet dizisinin periyodu  $\frac{1}{2}\pi(m)$ , diğerlerinin periyodu  $\pi(m)$  dir.
- c)  $\pi(m) \equiv 0 \pmod{4}$  ise mod  $5m$  de her Fibonacci kuvvet dizisinin periyodu  $\pi(m)$  dir.
- d)  $\pi(m) \equiv 2 \pmod{4}$  ise mod  $5m$  de her Fibonacci kuvvet dizisinin periyodu  $2\pi(m)$  dir (Ide and Renault, 2012).

Örnek 3.12. mod  $m = 31$  için Fibonacci sayı dizisi

0,1,1,2,3,5,8,13,21,3,24,27,20,16,5,21,26,16,11,27,7,3,10,13,23,5,28,2,30,1,0,1,1,  
olup  $\pi(31) = 30 \equiv 2 \pmod{4}$ .

➤ mod  $m = 31$  için iki tane Fibonacci kuvvet dizisi

1,13,14,27,10,6,16,22,7,29,5,3,8,11,19,30,18,17,4,21,25,15,9,24,2,26,28,23,20,12,  
1,13,1,19,20,8,28,5,2,7,9,16,25,10,4,14,18,1,19 ...

olup burada  $|13|_{31} = 30$ ,  $|19|_{31} = 15$  olduğundan,  $\pi(31) = |13|_{31} = 2|19|_{31}$ .

➤ mod  $m = 41$  için Fibonacci sayı dizisi

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,14,7,21,28,8,36,3,39,1,40,0,40,40,39,38,36,33,28,20,7, ...  
olup  $\pi(41) = 40 \equiv 0 \pmod{4}$ .

➤ mod  $m = 41$  için iki tane Fibonacci kuvvet dizisi

1,7,8,15,23,38,20,17,37,13,9,22,31,12,2,14,16,30,5,35,40,34,33,26,18,3,21,24,4 ...  
1,35,36,30,25,14,39,12,10,22,32,14,5,19,24,2,26,28,13,0,13,13,26,39,20,18,38 ...

olup  $\pi(41) = |7|_{41} = |35|_{41}$ .

➤ mod  $m = 11$  için Fibonacci sayı dizisi

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,0,34,34,13,47,5,52,2,54,1,0,1 ... olup  
 $\pi(11) = 10 \equiv 2 \pmod{4}$ .

➤ mod  $5m$  için yazılabilecek iki tane Fibonacci kuvvet dizisi

1,8,9,17,26,43,14,2,16,18,34,52,31,28,4,32,36,13,49,7,1,8,9 ...  
1,48,49,42,36,23,4,27,31,3,34,37,16,53,14,12,26,38,9,47,1,48 ...

olup  $|8|_{5m} = 20$ ,  $|48|_{5m} = 20$ .

➤ mod  $m = 41$  için Fibonacci sayı dizisi

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,14,7,21,28,8,36,3,39,1,40,0,40,40,39,38,36,33,28,20,7,27 ...  
olup  $\pi(41) = 40 \equiv 0 \pmod{4}$ .

➤ mod  $5m$  için yazılabilecek iki tane Fibonacci kuvvet dizisi

1,48,49,97,146,38,184,17,201,13,9,22,31,53,84,137,16,153,169,117,81,198,74,

1,158,159,112,66,178,39,12,51,63,114,177,86,58,144,202,141,138,74,7,81,88,169, ...

olup  $|48|_{5m} = |158|_{5m} = \pi(41)$ .

Horadam sayı dizilerinin başka bir özel hali olan Jacobsthal sayı dizilerinin tanımı şu şekildedir:

Tanım 3.13.  $n > 0$ ,  $1 \leq i \leq k$  için  $J_n^i = J_{n-1}^i + 2J_{n-2}^i + \dots + J_{n-k}^i$  ve başlangıç koşulları  $n = 1 - i$  ise 1, diğer durumlarda 0 olan  $J_n^i$  sonsuz tam sayı dizisine genelleştirilmiş  $k$ - Jacobsthal sayı dizisi denir. Özel olarak,  $k = 2$  için başlangıç koşulları  $J_0 = 0$ ,  $J_1 = 1$  olan ve  $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$  rekürans bağıntısını sağlayan  $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$  tam sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir.

Jacobsthal sayı dizisinin karakteristik denklemi  $x^2 - x - 2 = 0$  olup iki reel kökü  $x_1 = 2$  ve  $x_2 = -1$  dir (Deveci, vd., 2016).

Deveci vd. tarafında 2016 yılında yapılan çalışmada sonlu bir grupta genelleştirilmiş  $k$ - Jacobsthal sayı dizilerinin periyodik olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla  $m > 1$  tam sayı olmak üzere, modül  $m$  de Jacobsthal sayı dizileri,  $m$ ' nin çift veya tek olma durumu fark etmeksizin periyodiktir ve sonlu bir grup oluşturur.

2016 yılında Yazlık vd., yaptıkları çalışmada Jacobsthal sayı dizisinin periyotlarını incelemiş ve elde ettikleri sonuçları lemma ve teoremler ile ifade etmiştir. Buradaki lemma ve teoremler için modül  $m$  de Jacobsthal sayı dizisinin periyodu  $L(J, m)$  ile gösterilmiştir.

Lemma 3.14.  $m$  tek asal sayı ve  $i \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,

a)  $L(J, m^i) = L(J, m).m^{i-1}$

b)  $(a, b) = 1$  ise  $L(J, a.b) = [L(J, a), L(J, b)]$  dir (Yazlık, vd., 2016).

Teorem 3.15.  $m \geq 3$  için  $L(J, m) = L(J, 2m)$  dir (Yazlık, vd., 2016).

Teorem 3.16.  $i \geq 2$  için  $x_1$ , (1) de belirtilen denklemin reel kökü olmak üzere  $L(J, x_1^i) = 2$  (Yazlık, vd., 2016).

Teorem 3.17.  $p > 2$  ve  $i \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $L(J, p.x_1^i) = L(J, p)$  dir (Yazlık, vd, 2016).

Celemoglu vd. 2020 yılında yaptığı çalışmalarında mod  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerini tanımlamıştır.

Tanım 3.18.  $J_n^*$ ,  $J_n^* = J_{n-1}^* + 2J_{n-2}^*$  rekürans bağıntısını sağlayan bir sonsuz tam sayı dizisi olsun. Eğer  $m > 1$  tam sayısı için  $J^* \equiv 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots \pmod{m}$  oluyorsa  $J^*$  a modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizisi denir (Çelemoğlu, vd., 2020).

Teorem 3.20. modül  $m \geq 3$  için Jacobsthal kuvvet dizisi kesin olarak vardır. Modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerinin sayısı için ise,  $m = 3$  için tam olarak 1 tane Jacobsthal kuvvet dizisi vardır.  $m \neq 3$  için  $m = 3^e p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  şeklinde asal çarpanlarına ayrıldığında modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerinin sayısı  $e = 0, 1$  için  $2^k$  tane,  $e = 2$  için  $3 \cdot 2^k$  tane,  $e > 2$  için  $6 \cdot 2^k$  tanedir (Çelemoğlu, vd., 2020).

Örnek 3.21. mod 18 de  $18=3^2 \cdot 2$  olduğundan elde edilen Jacobsthal kuvvet dizileri aşağıdaki gibidir.

1,2,4,8,16,14,10,2,4,8,16,...

1,5,7,17,13,11,1,5,7,17,...

1,8,10,8,10,8,10,...

1,11,13,17,7,5,1,11,13,...

1,14,16,8,4,2,10,14,16,8,4,2,10,14,16,...

1,17,1,17,1,...

Bu tez çalışmasında, tanımlanan modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerinin periyotları incelenmiş ve Jacobsthal sayı dizileri ile ilgili yapılan çalışmalar göz önüne alınarak modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizileri ve Jacobsthal sayı dizilerinin periyot uzunlukları birlikte incelenerek bazı sonuçlar elde edilmiştir. Dahası, Horadam sayı dizilerinin Jacobsthal, Fibonacci sayı dizileri gibi özel hallerine ek olarak, Horadam sayı dizilerinin rekürans bağıntısı dikkate alınarak iki farklı özel Horadam sayı dizileri tanımlanmış ve daha sonra bu dizilerin modül  $m$  de kuvvet dizileri de tanımlanarak, 2012 yılında Ide ve Renault'un yapmış oldukları çalışmalar ışığında tanımlanan bu yeni dizilerin periyot uzunlukları incelenmiş ve aynı modüllerde sayı dizileri ile kuvvet dizilerinin periyot uzunlukları arasında ilişki kurulmuştur.

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümün ilk kısmında, öncelikle daha önce üzerinde çalışılmış olan Jacobsthal sayı dizilerin periyotları ile modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerinin periyotları arasında bir ilişki kurulmuş, elde edilen bulgular sonuç ve teoremler ile ifade edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, aynı modülde aynı karakteristik denkleme sahip olan bu sayı dizilerinin periyot uzunluklarının da benzer sonuçlar verdiği konu ile ilgili daha önceki yapılan çalışmalar ile karşılaştırılarak gözlemlenmiştir. Bölümün sonraki kısmında ise, literatürde bilinen sayı dizilerinin dışında bu sayı dizilerinin en genel hali olan Horadam sayı dizilerinden yararlanılarak iki yeni sayı dizisi tanımlanmış, benzer şekilde var oldukları modüllerde periyot uzunlukları incelendikten sonra elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir. Yapılan bu çalışmaya göre ise literatürde bilinen sayı dizilerinden farklı olarak çok sayıda yeni sayı dizisi tanımlanabileceği hatta  $m \neq 2$  asal olmak üzere bu sayı dizilerinin her biri modül  $m$  ye indirgenildiğinde  $\mathbb{Z}_m^*$  devirli alt grubunu oluşturup, periyodik birer dizi haline dönüşebileceği görülmüştür. Ayrıca yeni tanımlanan sayı dizileri aynı modüllerde alınarak karşılaştırılmış, benzerlik ve farklılıklar örnekler ile ifade edilmiştir. Tüm bu çalışmalar ile birlikte, tezin bu bölümünde elde edilen bulgular daha önce üzerine çeşitli konular ile çalışılmış sayı dizilerinin dışında yeni tanımlanabilir diziler için destekleyici bir durum oluşturmaktadır.

### 4.1. Modül $m$ de Jacobsthal Kuvvet Dizilerinin Periyotları

Bu tez çalışmasında  $J^*$ , modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizileri olmak üzere, modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerinin periyodu  $L(J^*, m)$  ile gösterilmiştir.

$J_n^* = J_{n-1}^* + 2J_{n-2}^*$  rekürans bağıntısının karakteristik denklemi  $x^2 - x - 2 = 0$  olup denklemin reel kökleri 2 ve  $-1$  olduğundan modül  $m$  de 2 ve  $-1$  kesinlikle Jacobsthal kuvvet dizisi oluşturur. Dikkat edilirse,  $(-1)^n \equiv 1 \pmod{m}$  koşulunu sağlayan en küçük  $n$  pozitif tam sayısı 2 olduğundan her  $m \geq 2$  tam sayısı için  $m - 1$  in periyodu 2 dir. Ayrıca alınan modüllere göre oluşturulan Jacobsthal kuvvet dizileri modül  $m$  de bir sonlu grup belirtir. Bu bakımdan, modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizileri ve modül  $m$  de Jacobsthal sayı dizileri ile benzerlik göstermektedir.

Şimdi modül  $m$  de Jacobsthal kuvvet dizilerinin periyotları için elde edilen

bazı sonuçları ifade edelim.

Sonuç 4.1.1.  $m = 3^e p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  olmak üzere  $\pi(m)$  çifttir.

$x^2 - x - 2 \equiv 0 \pmod{m}$  denkleminde alınan her modül için 2 ve  $-1$  kök belirtir. Modül  $m$  de  $m - 1$  in periyodu 2 dir ve her kök sonlu grup oluşturduğundan  $-1$  in oluşturduğu sonlu grup, 2 nin oluşturduğu sonlu grubun bir alt grubudur. Alt grubun mertebesi, grubun mertebesinin böleceği için kök 2 için  $\pi(m) = n$  ise  $2 \mid n$  olmalı. Dolayısıyla,  $n = 2 \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olup  $\pi(m)$  çift tam sayıdır.

Teorem 4.1.2.  $p$  tek asal sayı ve  $m = p^i$  olmak üzere  $L(J^*, p^i) = L(J^*, p^{i-1}) \cdot p$  dir. Özel olarak,  $p = 3$  olma durumunda  $\pi(3^i) \equiv 2 \pmod{4}$  dir.

*İspat:* Jacobsthal sayı dizileri için  $L(J, p^i) = L(J, p^{i-1}) \cdot p$  eşitliğinin sağlandığı teorem ile ifade edilmiştir.

Özel durumu incelersek,

$i = 1$  olsun.  $L(J^*, 3) = 2$  olup eşitlik sağlanır.

$i = n > 1$  ve  $L(J^*, 3^i) \equiv 2 \pmod{4}$  olsun.

$i = n + 1$  için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Yukarıdaki eşitlikten  $L(J^*, 3^{i+1}) = L(J^*, 3^i) \cdot 3$  yazabiliriz.  $L(J^*, 3^i) \equiv 2 \pmod{4}$  olduğundan  $4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  biçimindedir. O halde  $3 \cdot (4k + 2) = 12k + 6 = 12k + 4 + 2 = 4 \cdot (3k + 1) + 2$  olup dolayısıyla  $L(J^*, 3^{i+1}) \equiv 2 \pmod{4}$  dir.

Teorem 4.1.3.  $m = 3^e p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  için  $e = 0$  olsun. Bu durumda

$$L(J^*, m) = [L(J^*, p_1^{e_1}), L(J^*, p_2^{e_2}), \dots, L(J^*, p_k^{e_k})] \text{ dir.}$$

Hatta teoremin daha genel ifadesi,  $m = 3^e p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ ,  $e \geq 1$  olmak üzere  $L(J^*, m) = [L(J^*, 3^e), L(J^*, p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k})]$  dir.

Sonuç 4.1.4.  $m \geq 3$  için,  $L(J^*, m) = L(J^*, 2m)$  dir.

Sonuç 4.1.5.  $x_1$ , Jacobsthal kuvvet dizisinin karakteristik denkleminin kökü olmak üzere,  $p > 2$  ve  $i \in \mathbb{N}$  için  $L(J^*, p \cdot x_1^i) = L(J^*, p)$  dir.

Sonuç 4.1.6.  $i = 1 \dots k$ ,  $k > 1$  olmak üzere  $p_i \neq 3$  tek asal tam sayı olsun.  $m = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  ise  $L(J, m) = L(J^*, m)$  dir.

*Örnek 4.1.7.*  $\text{mod } m = 385$  olmak üzere ,  $385 = 5.7.11$  olup bu modülde elde edilen Jacobsthal sayı dizisi

0,1,1,3,5,11,21,43,85,171,341,298,210,36,71,143,285,186,371,358,330,276,166  
333,280,176,351,318,250,116,231,78,155,311,236,88,175,351,316,248,110221  
56,113,225,66,131, 263,140,281,176,353,320,256,126,253,120,96,193,0,1,1,3

olup  $L(J, 385) = 60$  dır.

$\text{mod } m = 385$  olmak üzere bu modülde elde edilen Jacobsthal kuvvet dizisi  
1,2,4,8,16,32,64,128,256,127,254,123,246,107,214,43,86,172,344,303,221,57,114  
228, 71,142,284,183,366,347,309,233,81,162,324,263,141,282,179,358,331,277,  
169,338,291,197,9,18,36,72,144,288,191,382,379,373,361,337,289,193,1,2 ...

olup  $L(J^*, 385) = 60$  dır.

Sonuç 4.1.8.  $m = 3.k$  olmak üzere,  $\text{mod } m$  de elde edilen Jacobsthal kuvvet dizilerinden birinin periyodu 2, diğ erinin periyodu  $\frac{1}{3}L(J, m)$  dir.

*Örnek 4.1.9.*  $\text{mod } m = 9$  olmak üzere bu modülde elde edilen Jacobsthal sayı dizisi 0,1,1,3,5,2,3,7,4,0,8,8,6,4,7,6,2,5,0,1,1 ...  $L(J, 9) = 18$  ve aynı modülde elde edilen Jacobsthal kuvvet dizileri üç tane olup 1,2,4,8,7,5,1,2,4, ... 1,5,7,8,4,2,1,5, ... ve 1,8,1,8... şeklindedir. Elde edilen bu dizilerin ilk ikisi için periyot uzunlukları  $\frac{1}{3}L(J, 9) = 6$  iken diğ er dizi için periyot uzunluğ unun 2 oldu ğ u görülür.

Sonuç 4.1.10.  $p$  tek asal sayı olmak üzere, Jacobsthal sayı dizilerinin  $\text{mod } p$  deki periyodu, Jacobsthal kuvvet dizilerinin  $\text{mod } p$  deki periyotlarının ekokuna eşittir. Ayrıca Sonuç 4.1.5 den dolayı bu durum  $\text{mod}(2^k.p)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  içinde geçerlidir.

*Örnek 4.1.11.*  $\text{mod } m = 11$  olmak üzere bu modülde elde edilen Jacobsthal sayı dizisi 0,1,1,3,5,0,10,10,8,6,0,1,1,3, ... olup  $L(J, 11) = 10$ , aynı modülde elde edilen Jacobsthal kuvvet dizileri 1,2,4,8,5,10,9,7,3,6,1,2, ... ve 1,10,1,10,1,10 ... şeklinde olup periyotları sırasıyla 5 ve 2 dir.

## 4.2. Özel Horadam Kuvvet Dizileri

Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde Fibonacci, Jacobsthal, Pell gibi bilinen sayı dizileri üzerine birçok çalışma yapıldığı görülebilir. Bu durum aslında sayı dizilerinin matematiksel anlamda çalışma alanının oldukça geniş olduğunun bir göstergesidir. Dolayısıyla bilinen sayı dizilerinin dışında yeni tanımlanan sayı dizileri ise bu çalışma alanının genişletilmesine katkıda bulunacaktır.

Tezin bu bölümünde bu sayı dizilerinin en genel hali olan Horadam sayı dizilerinin rekürans bağıntısı ve başlangıç koşulları kullanılarak iki farklı yeni sayı dizisi tanımlanmış, tanımlanan diziler üzerinden aynı rekürans bağıntısı ile kuvvet dizileri elde edilmiş, sırasıyla  $s$  ve  $s'$  olmak üzere var oldukları modüllere indirgenmiştir. Ardından başta tanımlanan sayı dizileri ile aynı modülde oluşturdukları kuvvet dizilerinin periyotları birlikte incelenmiştir.

### 4.2.1. Özel Horadam Kuvvet Dizilerinin Varlığı Ve Sayısı

Bu kısımda, öncelikle  $n \geq 2$  olmak üzere başlangıç koşulları  $W_0 = a$ ,  $W_1 = b$  olup  $W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlı Horadam kuvvet dizileri için,  $p = 1$ ,  $q = 3$  alınarak başlangıç koşulları  $H_0 = 0$ ,  $H_1 = 1$  olan  $H_n = H_{n-1} + 3H_{n-2}$  rekürans bağıntısına sahip Horadam sayı dizisi ve  $p = 3$ ,  $q = 1$  alınarak yine başlangıç koşulları  $H'_0 = 0$ ,  $H'_1 = 1$  olacak şekilde  $H'_n = 3H'_{n-1} + H'_{n-2}$  rekürans bağıntısına sahip Horadam sayı dizisi tanımlanmış, daha sonra bu dizilerin hangi modüllerde kaç tane var olduğu ile ilgili her iki dizi için de ayrı ayrı incelemeler yapılarak elde edilen sonuç teorem 4.2.1.6 da belirtilmiştir.

Tanım 4.2.1.1.  $n \geq 2$  için başlangıç koşulları  $H_0 = 0$ ,  $H_1 = 1$  olan ve  $H_n = 3H_{n-1} + H_{n-2}$  rekürans bağıntısına sahip sonsuz tam sayı dizilerine Özel Horadam sayı dizisi denir.

Tanım 4.2.1.2.  $H_n = 3H_{n-1} + H_{n-2}$  rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizisinin terimleri bazı  $s$  modülleri için  $H^* \equiv 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots \pmod{s}$  şeklinde bir dizi oluşturuyorsa, bu dizilere modül  $s$  de özel Horadam kuvvet dizisi denir.

Rekürans bağıntısının kat sayıları değiştirilerek elde edilmiş olan bir diğer Horadam sayı dizisi aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.2.1.3.  $n \geq 2$  için başlangıç koşulları  $H'_0 = 0$ ,  $H'_1 = 1$  olan ve  $H'_n = 3H'_{n-1} + 1H'_{n-2}$  rekürans bağıntısına sahip sonsuz tam sayı dizilerine özel Horadam

sayı dizisi denir.

Tanım 4.2.1.4.  $H'_n = H'_{n-1} + 3H'_{n-2}$  rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizisinin terimleri bazı  $s$  modülleri için  $H'^* \equiv 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots \pmod{s'}$  şeklinde bir dizi oluşturuyorsa, bu dizilere modül  $s'$  de özel Horadam kuvvet dizisi denir.

Tanımlanan sayı dizileri göz önüne alındığında, Horadam sayı dizilerinin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi tez çalışmasının giriş kısmında belirtildiği gibi  $x^2 - px - q = 0$  şeklinde olduğundan,  $p = 1, q = 3$  olma durumunda elde edilen  $H_n$  sayı dizisinin karakteristik denklemi  $x^2 - x - 3 = 0$ ,  $p = 3, q = 1$  olma durumunda elde edilen sayı dizisinin karakteristik denklemi  $x^2 - 3x - 1 = 0$  şeklinde elde edilir.

Kuvvet dizileri ise sayı dizileri ile aynı rekürans bağıntılarına sahip olup  $H_n$  kuvvet dizilerini oluşturan  $\alpha$  değerleri,  $x^2 - x - 3 = 0$  denkleminin modül  $s$  deki,  $H_n^*$  kuvvet dizilerini oluşturan  $\beta$  değerleri ise,  $x^2 - 3x - 1 = 0$  denkleminin modül  $s'$  deki kökleridir.

*Örnek 4.2.1.5.*  $p = 1, q = 3$  olma durumunda ,

modül  $s = 17$  için elde edilen iki tane özel Horadam kuvvet dizisi

$$1,5,8,6,13,14 \dots \text{ ve } 1,13,16,4,1,13 \dots$$

şeklindedir.

$p = 3, q = 1$  olma durumunda,

modül  $s = 53$  için elde edilen iki tane özel Horadam kuvvet dizisi

$$1,9,28,40,42,7,10 \dots \text{ ve } 1,40,15,17,44,11,16 \dots$$

şeklindedir.

Bu dizilerin varlığı ve var olduğu modüllerde sayıları ile ilgili aşağıdaki teorem elde edilmiştir. Teoreme göre, tanımlanan her iki kuvvet dizisi için de karakterize edilen modüller aynı biçimde olup bu modüllerde aynı sayıda var oldukları gözlemlenmiştir.

**Teorem 4.2.1.6.** modül 13 için kesinlikle 1 tane özel Horadam kuvvet dizisi vardır.  $s \neq 13$  için,  $i = 1, \dots, k$  ve  $p_i \equiv \mp 1, \mp 3, \mp 4 \pmod{13}$  şeklinde asal sayılar olmak üzere,  $s = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  veya  $s = 13 \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  şeklinde asal

çarpanlarına ayrıldığında, bu modüllerde  $2^k$  tane özel Horadam kuvvet dizisi bulunur.

*İspat:*  $h(x) = x^2 - 3x - 1$  özel Horadam kuvvet dizisinin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, modül  $s$  de bu denklemin kökleri olan  $\alpha$  değerleri,  $1, \alpha, \alpha^2 \dots$  şeklinde kuvvet dizisinin terimlerini belirlemektedir.  $h(x)$  denkleminin kökleri  $s$  tek ve  $r^2 \equiv 13 \pmod{s}$  olmak üzere,  $2^{-1}(3 + r)$  formundadır.

$g(x) = x^2 - 13$  alalım.  $g(x) \equiv 0 \pmod{s}$  denkleminin çözümleri incelendiğinde,  $s = 13$  için  $x^2 \equiv 13 \pmod{13}$  olup tek çözüm  $0$  olup  $x^2 \equiv 13 \pmod{169}$  için denklemin çözümü yoktur. Dolayısıyla,  $x^2 \equiv 13 \pmod{13^e}$  denklemini sadece  $e = 1$  iken çözüme sahiptir ve bu çözüm ile yazılan özel Horadam kuvvet dizisi  $1, 8, 12, 5, 1, \dots$  şeklindedir.

$s \neq 13$  durumunda, kuadratik karşılık kuralından,  $13, p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4 \pmod{13}$  iken bir kuadratik kalandır. Bu yüzden bu modüllerde  $g(x) \equiv 0 \pmod{s}$  denklemini iki farklı köke sahiptir. Hensel'in Lemmasına göre  $x_0, g(x) \pmod{p}$  nin bir kökü ise  $g'(x_0) = 2x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$  olduğundan,  $g(x) \pmod{p^e}$  denklemini her  $e$  pozitif tam sayısı için iki farklı köke sahiptir.

Son olarak,  $s$  ve  $s'$  aralarında asal olmak üzere  $g(x) \equiv 0 \pmod{s}$  denkleminin  $k$  tane,  $g(x) \equiv 0 \pmod{s'}$  denkleminin  $t$  tane çözümü varsa, Çin Kalan teoremine göre  $g(x) \equiv 0 \pmod{s \cdot s'}$  denklemini  $k \cdot t$  tane çözüme sahiptir. Dolayısıyla istenen gösterilmiş olur.

#### 4.2.2. Özel Horadam Kuvvet Dizilerinin Periyotları

Burada ilk olarak  $p = 3, q = 1$  alınarak elde edilen Horadam kuvvet dizilerinin var oldukları modüllerde periyot uzunlukları incelenmiş, bu inceleme ile birlikte elde edilen sonuçlar lemma ve teoremler ile aşağıda ifade edilmiştir. Ayrıca,  $p = 3, q = 1$  olma durumunda elde edilen Horadam kuvvet dizisinin periyot uzunlukları ile Ide ve Renault'un çalışmalarında inceledikleri modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizilerinin periyot uzunlukları hakkında elde edilen sonuçlar benzerlik göstermektedir.

$p = 1, q = 3$  olma durumunda elde edilen Horadam kuvvet dizilerinin periyotları incelendiğinde, aynı rekürans bağıntısına sahip Horadam sayı dizilerinin aynı modüllerde periyot uzunlukları ile aralarında belli bir ilişki kurulamamıştır. Aynı modüllerde var olan iki kuvvet dizisinin periyot uzunlukları arasındaki

farklılıklar bölümünün sonunda Tablo 4.2.2.5. de gösterilmiştir.

Her iki dizi için de yapılan incelemeler göz önüne alındığında, var oldukları modüller birer asal sayı olduğundan, bu modüllerde bu diziler  $\mathbb{Z}_s^*$  in çarpımsal devirli bir alt grubunu oluşturduğundan, Lagrange Teoremi'ne göre, her kuvvet dizisinin mertebesi,  $\mathbb{Z}_s^*$  grubunun mertebesini böler. Tanımlanan iki dizi için, birinde periyot uzunlukları formülize edilebilirken diğer kuvvet dizilerinin mertebesi belirli bir şekilde ifade edilememiştir ancak elde edilen kuvvet dizilerinin her birinin mertebesi,  $|\mathbb{Z}_s^*|$  in bölenlerinden oluşmaktadır.

Bu bölümde modül  $s$  de Horadam sayı dizilerinin periyot uzunluğu  $\pi(s)$ ,  $\alpha$ , tanımlanan Horadam sayı dizilerinin karakteristik denkleminin kökü olmak üzere, modül  $s$  de  $\alpha$  ile yazılan Horadam kuvvet dizisinin mertebesi  $|\alpha|_s$  ile gösterilmiştir.

Lemma 4.2.2.1.  $p$  asal sayısı  $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4 \pmod{13}$  şeklinde olmak üzere.  $\alpha$  ve  $\theta$   $h(x) = x^2 - 3x - 1 \pmod{p^e}$  denkleminin kökleri olsun. Genelliği bozmadan,  $|\alpha| \geq |\theta|$  alalım. Bu durumda,

$$a) \pi(p^e) \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise } |\alpha| = |\theta| = \pi(p^e),$$

$$b) \pi(p^e) \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise } |\alpha| = 2|\theta| = \pi(p^e) \text{ dir.}$$

*İspat:*  $\alpha$  ve  $\theta$ ,  $h(x) = x^2 - 3x - 1 \pmod{p^e}$  denkleminin kökleri olduğundan,  $\alpha \cdot \theta \equiv -1$  olup her  $n$  pozitif doğal sayısı için,

$$(\alpha \cdot \theta)^n \equiv \alpha^n \theta^n \equiv (-1)^n \pmod{p^e}$$

yazılabilir. İlk olarak,  $|\alpha| = |\theta| = n$  ise  $1 \equiv \alpha^n \cdot \theta^n \equiv (-1)^n$  olup burada  $n$  nin çift olması gerektiği görülür. Dolayısıyla  $n$  çift,  $p$  tek olduğundan

$$\alpha^{n/2} \equiv \theta^{n/2} \equiv -1 \pmod{p^e}$$

yazılabilir (Lemma 2.1.33). Ardından,

$$(-1)^{n/2} \equiv \alpha^{n/2} \theta^{n/2} \equiv (-1) \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{p^e}$$

olup  $n/2$  nin çift olması gerektiği görülür. Dolayısıyla  $2 \mid n/2$  ve buradan  $4 \mid n$  elde edilir ki bu şekilde lemmanın (a) şıkkı gösterilmiş olur. İkinci olarak,  $|\alpha| > |\theta| = n$  ise  $\alpha^n \theta^n \equiv (-1)^n$  olup  $\alpha^n = (-1)^n$  dir. O halde  $\alpha^{2n} \equiv 1$  olup  $|\alpha|$ ,  $2n$  yi bölmelidir.  $2n$  nin bölenleri düşünüldüğünde,  $|\alpha| > n$  olduğundan,  $|\alpha| = 2n$  elde edilir.

Şimdi ifade edeceğimiz teorem, karakterize edilen modüllerin en genel hali için periyot uzunluklarını ifade etmektedir.

**Teorem 4.2.2.2.**  $p_i \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4 \pmod{13}$  olmak üzere,  $s = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- a)  $\pi(s) \equiv 0 \pmod{4}$  ise modül  $s$  de her özel Horadam kuvvet dizisinin mertebesi ,aynı modüldeki sayı dizisinin periyoduna eşit olup  $\pi(s)$  dir.
- b)  $\pi(s) \equiv 2 \pmod{4}$  ise modül  $s$  de var olan özel Horadam kuvvet dizilerinden bir tanesinin mertebesi  $\frac{1}{2}\pi(s)$  olup, diğerlerinin mertebesi ise sayı dizisinin periyoduna eşit olup  $\pi(s)$  dir.
- c)  $\pi(s) \equiv 0 \pmod{4}$  ise modül  $13s$  de her özel Horadam kuvvet dizisinin mertebesi, aynı modüldeki sayı dizisinin periyoduna eşit olup  $\pi(s)$  dir.
- d)  $\pi(s) \equiv 2 \pmod{4}$  ise modül  $13s$  de her özel Horadam kuvvet dizisinin mertebesi, sayı dizisinin periyot uzunluğunun 2 katı olup  $2\pi(s)$  dir.

*İspat:* İlk olarak modül  $s = p^e$  için Lemma 4.2.2.1 de verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, teoremin ispatında  $s$  ve  $m$  aralarında asal olmak üzere, modül  $s.m$  de kuvvet dizilerinin periyotları ile sayı dizilerinin periyotları arasındaki ilişkiyi göstereceğiz.

$h(x) = x^2 - 3x - 1 \pmod{s}$  denkleminin kökleri  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ,  $h(x) \pmod{m}$  denkleminin kökleri ise  $b_1, b_2, \dots, b_t$  ile gösterilsin. O halde,  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq t$  olmak üzere,  $h(x) \pmod{s.m}$  denkleminin kökleri  $c_{ij}$  olmak üzere,  $c_{ij}$  aşağıdaki denklilikleri sağlamaktadır.

$$c_{ij} \equiv a_i \pmod{s}$$

$$c_{ij} \equiv b_j \pmod{m}$$

İlk olarak, Teorem 3.4. den dolayı  $|c_{ij}|_{s.m} = [|a_i|_s, |b_j|_m]$  eşitliğinin sağlandığı görülebilir.

Teoremin (a) şıkkı için, Kabul edelim ki  $\pi(s) \equiv 0 \pmod{4}$  veya  $\pi(m) \equiv 0 \pmod{4}$  olduğunu kabul edelim. Buradan,  $|c_{ij}|_{s.m} = [|a_i|_s, |b_j|_m], [\pi(s), \frac{1}{2}\pi(m)], [\frac{1}{2}\pi(s), \pi(m)]$  olmak üzere üç durum vardır. Ancak tüm durumlar

için  $|c_{ij}|_{s,m} = \pi(s.m) \equiv 0 \pmod{4}$  eşitliğinin sağlandığı görülebilir.

Teoremin (b) şıkkı için,  $\pi(s) \equiv 2 \pmod{4}$  veya  $\pi(m) \equiv 2 \pmod{4}$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $|c_{ij}|_{s,m} = [|a_i|_s, |b_j|_m], [\pi(s), \frac{1}{2}\pi(m)], [\frac{1}{2}\pi(s), \pi(m)]$  durumları göz önüne alındığında,  $|c_{ij}|_{s,m} = \pi(s.m) \equiv 2 \pmod{4}$  olup ancak  $|c_{ij}|_{s,m} = [\frac{1}{2}\pi(s), \frac{1}{2}\pi(m)]$  olma durumunda,  $|c_{ij}|_{s,m} [\frac{1}{2}\pi(s), \frac{1}{2}\pi(m)] = \frac{1}{2}\pi(s.m)$  eşitliğinin sağlandığı görülebilir.

Teoremin (c) ve (d) şıkları için,  $h(x) = x^2 - 3x - 1 \pmod{s}$  denkleminin kökleri  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ile gösterilmek üzere, modül 13 için  $h(x) \pmod{13}$  denkleminin tek kökü 8 olduğundan,  $h(x) \pmod{13s}$  denkleminin kökleri  $c_i$  olmak üzere, bu kök aşağıdaki denklilikleri sağlamaktadır.

$$c_i \equiv 8 \pmod{13}$$

$$c_i \equiv a_i \pmod{s}.$$

Bu durumda,  $|c_i|_{13s} = [|8|_{13}, |a_i|_s] = [4, |a_i|_s]$  olduğu görülebilir. Şayet  $\pi(s) \equiv 0 \pmod{4}$  ise burada  $|a_i|_s = \pi(s) \equiv 0 \pmod{4}$  olup

$$|c_i|_{13s} = [4, |a_i|_s] = \pi(s)$$

olarak istenilen elde edilir.

Son olarak, eğer  $\pi(s) \equiv 2 \pmod{4}$  ise burada iki durum söz konusudur:

$|a_i|_s = \pi(s) \equiv 2 \pmod{4}$  veya  $|a_i|_s = \frac{1}{2}\pi(s) \equiv 1 \pmod{2}$  olmalı ki her iki durum için de  $|c_i|_{13s} = 2\pi(s)$  eşitliği sağlanarak istenen elde edilmiş olur.

$p = 3, q = 1$ , olma durumunda tanımlanan özel Horadam kuvvet dizisi ve aynı rekürans bağıntısına sahip sayı dizisi arasındaki bu şekilde lemma ve teoremler ile kurulmuştur ki bu açıdan Fibonacci kuvvet dizileri ile benzerlik gösterdiği gözlemlenmiştir. Ancak  $p = 1, q = 3$  olma durumunda tanımlanan özel Horadam kuvvet dizilerinin mertebesi ile sayı dizilerinin periyotları arasındaki ilişki karakterize edilememiştir. Bu durumu bir kaç örnek ile aşağıdaki gibi açıklayabiliriz:

*Örnek 4.2.2.4.*

➤ modül 61 için Horadam sayı dizisi

0,1,1,4,7,19,11,10,14,15,28,15,12,28,6,3,21,1,6,9,27,25,19,7,6,27,16,10,0,1 ...

şeklinde olup  $\pi(s) = 20$  ve aynı modülde bulunan iki özel Horadam kuvvet dizisi

1,24,27,38,58,50,41,8,9,33,60,37,34,23,3,11,20,53,52,28,1,24 ...

1,37,40,29,27,53,12,49,24,49,60,24,21,32,34,8,49,12,37,12,1,37 ...

olup burada her iki kuvvet dizisinin de mertebesi eşit ve 20 dir. Sonuç olarak,

$\pi(61) = |24|_{61} = |37|_{61}$  dir.

➤ modül 53 için Horadam sayı dizisi

0,1,1,4,7,19,40,44,5,31,46,33,12,5,41,3,20,29,36,17,19,17,21,19,29,33,47,49,

17,5,3,18,27,28,3,34,43,39,9,20,47,1,36,39,41,52,16,13,8,47,18,0,1 ...

şeklinde olup  $\pi(53) = 52$  ve aynı modüldeki iki özel Horadam kuvvet dizisi

1,8,11,35,15,14,16,48,13,51,37,31,36,23,25,41,10,27,4,32,44,34,7,3,24,33,52,45  
42,18,38,39,47,5,40,2,16,22,17,30,28,12,43,26,49,21,9,19,46,50,29, ...

$$|8|_{53} = 52$$

1,46,9,28,16,47,42,24,44,10,36,13,15,1,46 ...  $|46|_{53} = 13$  şeklindedir. Sonuç olarak,  $\pi(53) = |8|_{53} = 4|46|_{53}$  elde edilir.

➤ modül 43 için Horadam sayı dizisi

0,1,1,3,6,15,33,35,5,24,39,25,13,2,41,4,41,10,4,34,3,19,28,42,40,37,28,10,8,

38,19,2,39,2,33,39,9,40,24,15,1,3,4,18,30,41... olup  $\pi(43) = 42$ .

Aynı modülde bulunan iki özel Horadam kuvvet dizisi

1,12,15,8,10,34,21,37,14,39,38,26,11,3,36,2,24,30,16,20,25,42,31,28,35,33,9,27,6,

29,4,5,17,32,40,7,41,19,13,27,23,18,1,12 ...  $|12|_{43} = 42$

1,32,35,2,21,27,4,42,11,8,41,22,16,39,1,32 ...  $|32|_{43} = 14$  şeklindedir.

Sonuç olarak,  $\pi(43) = |12|_{43} = 3|32|_{43}$  elde edilir.

➤ modül 23 için Horadam sayı dizisi

0,1,1,4,7,19,17,5,10,2,9,15,19,18,6,14,9,5,9,1,5,8,0,1 ... olup  $\pi(23) = 22$ .

Aynı modülde bulunan iki özel Horadam kuvvet dizisi

1,9,12,16, ,6,8,3,4,13,2,18,1,9 ...  $|9|_{23} = 11$

1,15,18,17,2,7,13,11,4,14,3,22,8,5,6,21,16,10,12,19,9,20,1,15 ...  $|15|_{23} = 22$

şeklinde. Buradan ise  $\pi(23) = |15|_{23} = 2|9|_{23}$  olduğu görülebilir.

Örnekte görüldüğü gibi,  $p = 1, q = 3$  olma durumunda tanımlanan Horadam sayı dizilerinin periyotları ve aynı modüllerde Horadam kuvvet dizilerinin mertebesi incelendiğinde, bu iki çeşit dizi arasında belirli bir ilişki kurulamamıştır. Ancak,  $p$  asal olmak üzere modül  $p$  de yazılan sayı dizileri,  $\mathbb{Z}_p^*$  in devirli bir alt grubunu oluşturduğundan, bu çalışmada tanımlanan kuvvet dizileri için de Lagrange teoremine göre, elde edilen kuvvet dizilerinin mertebeleri, sayı dizilerinin periyot uzunluklarının bölenlerinden oluştuğu görülebilir, ayrıca kesinlikle elde edilen kuvvet dizilerinden bir tanesinin mertebesi, sayı dizisinin periyot uzunluğuna eşit olarak gözlemlenmiştir. Bu durumu genelleştirirsek, bu çalışmada tanımlanan her iki özel Horadam kuvvet dizisi için Teorem 4.2.1.6' ya göre, karakterize edilen modüllerde elde edilen  $2^k$  tane özel Horadam kuvvet dizisinin  $2^{k-1}$  tanesinin mertebesi, sayı dizisinin periyoduna eşit olup diğerleri  $\pi(s), \frac{1}{2}\pi(s), \frac{1}{3}\pi(s)$  veya  $\frac{1}{4}\pi(s)$  dir.

Aşağıdaki tabloda aynı modüllerde tanımlanan iki özel Horadam kuvvet dizilerinin periyotları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Tablo 4.2.2.5.  $p = 3$  ve  $q = 1$  alınarak çeşitli modüllerde elde edilen özel Horadam sayı dizilerinin periyot uzunlukları ve kuvvet dizisinin mertebeleri ile  $p = 1, q = 3$  alınarak çeşitli modüllerde elde edilen Horadam sayı dizilerinin periyotları ve kuvvet dizilerinin mertebelerine örnekler

	$p = 3, q = 1$		$p = 1, q = 3$	
<i>Modül</i>	Periyot	Mertebe	Periyot	Mertebe
17	16	$\alpha = 6, \quad  6 _{17} = 16$ $\beta = 14, \quad  14 _{17} = 16$	16	$\theta = 5, \quad  5 _{17} = 16$ $\gamma = 13, \quad  13 _{17} = 4$
23	22	$\alpha = 10, \quad  10 _{23} = 22$ $\beta = 16, \quad  16 _{23} = 11$	22	$\theta = 15, \quad  15 _{23} = 22$ $\gamma = 9, \quad  9 _{23} = 11$
29	28	$\alpha = 11, \quad  11 _{29} = 28$ $\beta = 21, \quad  21 _{29} = 28$	28	$\theta = 10, \quad  10 _{29} = 28$ $\gamma = 20, \quad  20 _{29} = 7$

43	20	$\alpha = 13, \quad  13 _{43} = 20$ $\beta = 33, \quad  33 _{43} = 20$	42	$\theta = 12, \quad  12 _{43} = 42$ $\gamma = 32, \quad  32 _{43} = 14$
53	26	$\alpha = 9, \quad  9 _{53} = 26$ $\beta = 47, \quad  47 _{53} = 13$	52	$\theta = 8, \quad  8 _{53} = 52$ $\gamma = 46, \quad  46 _{53} = 13$
61	30	$\alpha = 39, \quad  39 _{61} = 30$ $\beta = 25, \quad  25 _{61} = 15$	20	$\theta = 38, \quad  38 _{61} = 60$ $\gamma = 24, \quad  24 _{61} = 20$
79	26	$\alpha = 17, \quad  17 _{79} = 26$ $\beta = 65, \quad  65 _{79} = 13$	39	$\theta = 16, \quad  44 _{79} = 39$ $\gamma = 64, \quad  64 _{79} = 13$
101	50	$\alpha = 85, \quad  85 _{101} = 50$ $\beta = 19, \quad  19 _{101} = 25$	100	$\theta = 18, \quad  18 _{101} = 100$ $\gamma = 84, \quad  84 _{101} = 5$
103	102	$\alpha = 74, \quad  74 _{103} = 102$ $\beta = 32, \quad  32 _{103} = 51$	34	$\theta = 73, \quad  73 _{103} = 34$ $\gamma = 31, \quad  31 _{103} = 34$

Tablo 4.2.2.5 de görüldüğü gibi, katsayılar arasında değişim yapıldığında, elde edilen rekürans bağıntısını sağlayan tam sayı dizilerinin aynı modüllerdeki periyot uzunlukları, hatta aynı rekürans bağıntısına göre oluşturulan kuvvet dizilerinin de mertebeleri arasında farklılıklar olduğu görülebilir.

Ayrıca katsayıların yer değiştirmesi ile birlikte elde edilen karakteristik denklemlerin köklerine bakıldığında bu sayı dizilerinin var olduğu her modül için,  $\alpha, \beta$   $h(x) = x^2 - 3x - 1$  denkleminin,  $\theta, \gamma$   $h'(x) = x^2 - x - 3$  karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere,  $\alpha = \theta + 1$  ve  $\beta = \gamma + 1$  olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla diğer modüllerde de inceleme yapıldığında, karakteristik denklemlerin birinde kökler belirlenirse diğeri de kolaylıkla bulunabilir.

## 5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Horadam sayı dizilerinin tanımını dikkate alınarak katsayılar ve başlangıç koşulları keyfi olarak değiştirildiğinde bir sayı dizisi oluşturulup bu dizilerin birbirleri ile ilişkileri merak konusu olmuş ve buna yönelik incelemeler yapılmıştır. Ayrıca modül  $m$  de Fibonacci kuvvet dizileri ile ilgili yapılan çalışmalar dikkate alınarak aynı dizilerin modül  $s$  de kuvvet dizileri de oluşturulmuş benzer şekilde inceleme yapılarak bu dizilerin birbirleri ile ilişkileri incelenmiştir.

Sayı dizilerinin önemi göz önüne alındığında, Horadam sayı dizileri en genel tam sayı dizisi olup katsayılar değiştirilerek birçok sayı dizisi elde edilebilir. Bu tezde elde edilen tam sayı dizileri için var oldukları modüller aynı olup, periyotlar arasındaki ilişkiler farklılık göstermiştir. Daha sonraki çalışmalarda yine birbirinden farklı sayı dizileri tanımlanarak bu dizilerin matris gösterimi, polinomal denklemleri gibi farklı alanlarda da özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Arıkan, A., Arıkan, A. ve Asar, A.O. (2009). *Cebir*, Eflatun Yayınevi, Ankara.
- Aydın, F. T. (2018). "On generalizations of the Jacobsthal sequence". *Notes on number theory and discrete mathematics*, 24(1), 120-135.
- Bagdasar, O. D., & Larcombe, P. J. (2013). "On the characterization of periodic complex Horadam sequences". *Fibonacci Quart*, 51(1), 28-37.
- Bayraktar, M. (2016). *Soyut Cebir Ve Sayılar Teorisi*, Gazi Kitabevi, Ankara.
- Bravo, J. J., Herrera, J. L., & Luca, F. (2021). "On a generalization of the Pell sequence". *Mathematica Bohemica*, 146(2), 199-213.
- Catalani, M. (2004). "Identities for Fibonacci and Lucas Polynomials derived from a book of Gould". *arXiv preprint math/0407105*.
- Çallıalp, F. (2001a). *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Çallıalp, F. (2009b). *Sayıların Teorisi*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Çallıalp, F. (2018c). *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Çelemoğlu, Ç., Pancar, A., Nallı, A. (2020). *Fibonacci kuvvet dizilerinin varyasyonları ve bu varyasyonların kriptografiye uygulanması*, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Samsun, 38-40.
- Demirtürk, B. (2010). "Fibonacci and Lucas sums by matrix methods". *In International Mathematical Forum*, 5(3), 99-107.
- Deveci, Ö., Karaduman, E., & Sağlam, G. (2016). "The Jacobsthal sequences in finite groups". *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 42(1), 79-89.
- Falcon, S. (2014). "On the k-Jacobsthal numbers". *American Review of Mathematics and Statistics*, 2(1), 67-77.
- Falcón, S., & Plaza, Á. (2007). "On the Fibonacci k-numbers". *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5), 1615-1624.
- Fraleigh, John, B. (2013). *Soyut Cebire Giriş*, Mehmet Terziler ve Tahsin Öner (çev), Palme Yayıncılık, 7. bs.
- Cerda-Morales, G. (2013). "On generalized Fibonacci and Lucas numbers by matrix methods". *Hacettepe journal of mathematics and statistics*, 42(2), 173-179.
- Horadam, A. F. (1961). "A generalized Fibonacci sequence". *The American Mathematical Monthly*, 68(5), 455-459.
- Horadam, A. F. (1996). "Jacobsthal representation numbers". *significance*, 2, 2-8.
- Hungerford, T. W. (2012). *Algebra*, Springer Science & Business Media.
- Ide, J., & Renault, M. S. (2012). "Power Fibonacci Sequences". *The Fibonacci Quarterly*, 50(2), 175-180.
- Jones, G. A., & Jones, J. M. (1998). *Elementary number theory*. Springer Science & Business Media.
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2*. John Wiley & Sons.
- Köken, F., Bozkurt, D. (2008). "On the Jacobsthal-Lucas Numbers by Matrix Method", *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3(33), 1629-1633.

- Öner, T. (2013). *Sayılar Teorisi II Ders Notları*. Erişim: 28 Haziran 2013  
<mailto:https://www.yumpu.com/user/akademik.mu.edu.tr>
- Öztürk F. (2011). *Periyodik Fonksiyonlar ve Uygulamaları*, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Matematik Anabilim Dalı, Erzurum.
- Panwar, K, Yashwant, V. K. Gupta and Jaya Bhandari (2020). “GENERALIZED IDENTITIES OF BIVARIATE FIBONACCI AND BIVARIATE LUCAS POLYNOMIALS”, *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology*, 1(2), 146-154.
- Rosen, K. H. (2005). *Elementary number theory and its applications*, Pearson/Addison Wesley.
- Shannon, A. G. (2016).” Alwyn Horadam: The man and his mathematics”. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 22, 1-4.
- Sloane, N. J. A. (2014). *A handbook of integer sequences*. Academic Press.
- Uygun, Ş., & Eldogan, H. (2016). “Properties of k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas sequences”. *General Mathematics Notes*, 36(1), 34.
- Uygun, S., & Eldogan, H. (2016). “k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas matrix sequences”. *In International Mathematical Forum*, 11(3), 145-154.
- Uygun, Ş., & Uslu, K. (2016). “The (s, t)-Generalized Jacobsthal Matrix Sequences”. *In Computational Analysis*, Springer, Cham.
- Uygun, S., & Eldogan, H. (2016). “ k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas matrix sequences”. *In International Mathematical Forum*, 11(3), 145-154.
- Uygun, S., & Tümbas, A. (2018). “Generalized k-Jacobsthal Sequence”. *Asian Journal of Mathematics and Physics*, 2, 45-50.
- Wall, D. D. (1960). “Fibonacci series modulo m”. *The American Mathematical Monthly*, 67(6), 525-532.
- Yazlik, Y., Yilmaz, N., Taskara, N., & Uslu, K. (2016). “ Jacobsthal family modulo m”. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 6(1), 15-21.

## ÖZ GEÇMİŞ

Selime Beyza Özçevik, Samsun Canik İMKB Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünden 28.06.2020 tarihinde mezun oldu. 2020 yılında OMÜ LEE Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi. Mezuniyetinden bu yana matematik öğretmeni olarak görev yapan Selime Beyza Özçevik, orta derecede İngilizce bilmektedir.

### İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0000-0003-2026-3345

### Yayınlar:

1. Çelemoğlu, Ç., Özçevik, S. B., & Eren, Ş. (2022). Power Pell Sequences, Some Periodic Relations of These Sequences, and a Cryptographic Application With Power Pell Sequences. In Applications of Computational Science in Artificial Intelligence (pp. 21-43). IGI Global.
2. Çelemoğlu, Ç., Özçevik, S. B., & Eren, Ş. (2022). On Certain Power Horadam Sequences. Journal of Science & Technology, Düzce University.

### Kongreler:

1. Özçevik, S. B., Çelemoğlu, Ç., & Eren, Ş. (2021). SOME SPECIAL POWER HORADAM SEQUENCES AND PERIODS. 1st International Symposium On Recent Advances In Fundamental And Applied Sciences, ISFAS.
2. Özçevik, S. B., Çelemoğlu, Ç., & Eren, Ş. (2021). 'Modül  $m$  de Jacobsthal Kuvvet Dizilerinin Periyotları Üzerine'. İstanbul Üniversitesi 33. Ulusal Matematik Sempozyumu, 31 Ağustos – 3 Eylül.

### Kazanılan Teşvikler, Ödüller ve Burslar:

1. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Bölüm Birinciliği (2020).

