

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**ZAMAN KESİRLİ NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMLERİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ÖZELLİKLERİ**

Yüksek Lisans Tezi

Emre AYDIN

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi İnci ÇİLİNGİR SÜNGÜ

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Emre AYDIN tarafından, Dr. Öğr. Üyesi İnci ÇİLİNGİR SÜNGÜ danışmanlığında hazırlanan “Zaman Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemlerinin Sayısal Çözümleri ve Kararlılık Özellikleri” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 12.02.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Hüseyin DEMİR Samsun Üniversitesi Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye (Danışman)	Dr. Öğr. Üyesi İnci ÇİLİNGİR SÜNGÜ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
... / ... / ...
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmenliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

... / ... / 20...
Emre AYDIN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Zaman Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemlerinin Sayısal Çözümleri ve Kararlılık Özellikleri

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 13/01/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 3

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

... / ... / 20...
İnci ÇİLİNGİR SÜNGÜ

ÖZET

ZAMAN KESİRLİ NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ÖZELLİKLERİ

Emre Aydın

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans, Şubat / 2021

Danışman: Dr. Öğrt. Üyesi İnci Çilingir Süngü

Bu çalışmada, zaman değişkeninde kesirli türev içeren Newell-Whitehead-Segel denklemlerinin sayısal çözümleri ele alınmıştır. Bu denklemlerin $p = 2,3,4,5$ durumları göz önüne alınarak Sonlu-Fark Metodu (SFDM), Newton Tipi Lineerleştirme Metodu (NTLM) ve Standart Olmayan Sonlu-Fark Metotları (NSFDM) ile çözümleri incelenmiştir.

Problem genel halde ele alınarak, metotlar arasındaki farklılık ve benzerlikler incelenmiştir. Zaman-kesirli NWS denklemi için SFDM, NTLM ve NSFDM şemalarının tutarlılık, yakınsaklık ve kararlılık koşulları elde edilmiştir.

Zaman-kesirli NWS denkleminin $p = 2,3,4,5$ durumlarına karşılık birer örnek ele alınarak standart sonlu-fark, Newton tipi lineerleştirme metodu ve standart olmayan sonlu-fark metodu ile sayısal hesaplama yapılmıştır. Farklı kesirli türev mertebeleri içeren sonuçlar grafikler ve tablolar halinde gösterilmiştir. Sonuç olarak bu üç metodun nitelik ve nicelik olarak oldukça iyi sonuçlar verdiği elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: zaman-kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemleri, standart ve standart olmayan sonlu-fark metotları, Newton tipi lineerleştirme metodu, CFL koşulu

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS AND STABILITY PROPERTIES OF TIME FRACTIONAL NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL EQUATIONS

Emre AYDIN

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, February / 2021

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Inci CILINGIR SUNGU

In this study, numerical solutions of Newell-Whitehead-Segel equations containing time-fractional derivatives are discussed. The solutions of these equations when in $p = 2,3,4,5$ cases by using the Finite-Difference Method (SFDM), Newton Type Linearization Method (NTLM) and the Non-Standard Finite-Difference Methods (NSFDM) were investigated.

By considering the problem in general, the differences and similarities between these three methods are examined. For the fractional NWS equation, the consistency, convergence and stability conditions of SFDM, NTLM and NSFDM schemes were obtained.

Numerical calculations were made with Standard Finite-Difference Method, Newton Type Linearization Method and Non-Standard Finite-Difference Method by taking one example for each cases of $p = 2,3,4,5$ in the time-fractional NWS equation. Results containing different fractional derivative orders are shown in graphs and tables. As a result, it has been found that these three methods give quite effective results qualitatively and quantitatively.

Key Words: time-fractional Newell-Whitehead-Segel equations, standard and non-standard finite-difference methods, Newton type linearization method, CFL condition

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Akademik eğitim sürecimin bir üst noktası olan yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi İnci ÇİLİNGİR SÜNGÜ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Beni bugünlere getirmek için hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan anneme, babama ve beni hiç yalnız bırakmayan kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteklerini esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Emre Aydın

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	8
2.1. Temel Kavramlar	8
3. MATERYAL VE METOT	14
3.1. Materyal	14
3.2. Metot	15
3.2.1. Sonlu-Fark Metotları	15
3.2.2. Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Sonlu-Fark Metotları.....	16
3.2.3. Newton Tipi Lineerleştirme Metodu.....	17
3.2.4. Standart Olmayan Sonlu-Fark Metotları.....	17
3.2.5. Kesirli Mertebeden Türev İçeren Diferansiyel Denklemler İçin Standart Olmayan Sonlu-Fark Metotları.....	21
3.3. Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemi İçin Sonlu-Fark Şemaları.....	22
3.4. Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemi İçin Newton Tipi Lineerleştirme Metoduyla Elde Edilen Sonlu-Fark Şemaları.....	23
3.5. Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemi İçin Standart Olmayan Sonlu-Fark Şemaları.....	24
3.6. Kesirli NWS Denklemi İçin Sonlu-Fark Metotlarının Yakınsaklığının İncelenmesi.....	25
3.6.1. Sonlu-Fark Metotları için Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Koşulu.....	25
3.6.2. Kesirli NWS Denklemi İçin Sonlu-Fark Metodunun Yakınsaklığının İncelenmesi.....	26
3.6.3. Kesirli NWS Denklemi İçin Newton Tipi Lineerleştirme Metodunun Yakınsaklığının İncelenmesi.....	27
3.6.4. Kesirli NWS Denklemi İçin Standart Olmayan Sonlu-Fark Metodunun Yakınsaklığının İncelenmesi	30
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	33

5. SONUÇ VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	58
ÖZ GEÇMİŞ	

SİMGELER

${}^RLD_t^{-\alpha}$	Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
${}^RLD_t^\alpha$	Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^CD_t^\alpha$	Caputo Kesirli Türev Operatörü
${}^GLD_t^\alpha$	Grünwald-Letnikov Kesirli Türev Operatörü
$\widetilde{{}^RLD_t^\alpha}$	Riemann-Liouville Kesirli Türeve Yaklaşım Operatörü
Δt	Zaman Adım Büyüklüğü
Δx	Konum Adım Büyüklüğü
$\Gamma(m)$	Gama Fonksiyonu
φ	Altın oran

KISALTMALAR

SFDM	Standart Sonlu-Fark Metodu
NSFDM	Standart Olmayan Sonlu-Fark Metodu
NTLM	Newton Tipi Lineerleştirme Metodu
NWS	Newell-Whitehead-Segel Denklemi
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy Koşulu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.11. $u(x_i, t_k)$ nın yaklaşımı	12
Şekil 4.1.3. $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri.....	35
Şekil 4.1.6. $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri.....	36
Şekil 4.1.9. $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri.....	37
Şekil 4.2.3. $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri.....	40
Şekil 4.2.6. $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri.....	41
Şekil 4.2.9. $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri.....	43
Şekil 4.3.3. $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri.....	45
Şekil 4.3.6. $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri.....	47
Şekil 4.3.9. $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri.....	48
Şekil 4.4.3. $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri.....	51
Şekil 4.4.6. $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri.....	52
Şekil 4.4.9. $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri.....	54

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1.2.a $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	34
Çizelge 4.1.2.b $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	34
Çizelge 4.1.5.a $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	35
Çizelge 4.1.5.b $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	36
Çizelge 4.1.8.a $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	37
Çizelge 4.1.8.b $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	37
Çizelge 4.2.2.a $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	39
Çizelge 4.2.2.b $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	39
Çizelge 4.2.5.a $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	40
Çizelge 4.2.5.b $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	41
Çizelge 4.2.8.a $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	42
Çizelge 4.2.8.b $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	42
Çizelge 4.3.2.a $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	44
Çizelge 4.3.2.b $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	45

Çizelge 4.3.5.a $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	46
Çizelge 4.3.5.b $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	46
Çizelge 4.3.8.a $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	47
Çizelge 4.3.8.b $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	48
Çizelge 4.4.2.a $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	50
Çizelge 4.4.2.b $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri	50
Çizelge 4.4.5.a $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	51
Çizelge 4.4.5.b $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri	52
Çizelge 4.4.8.a $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	53
Çizelge 4.4.8.b $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri	53

1.GİRİŞ

Kesirli türev ve integral kavramı, tamsayı mertebeli türev ve integral tanımının keyfi bir mertebeye genişlemesidir. Bir nesnenin kesirli mertebeli bir modeli, doğal sayı mertebeli modeli ile kıyaslandığında gerçeğe daha uyumlu olması ve daha doğru sonuçlar vermesi bu alana olan ilgiyi günden güne arttırmaktadır. Matematik alanında yapılan çalışmaların ve geliştirilen metotların artması sonucunda son yıllarda mühendislik, fizik, kimya, biyoloji ve endüstriyel uygulamalarda kesirli analizin kullanımı hızla artmaya başlamıştır. Bu çalışmaların bazıları deneysel olarak ele alınmış, büyük bir kısmı ise bu tip denklemlerin sayısal ve analitik çözümleri üzerine yazılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Elektrik alanında, Westerlund tarafından kesirli mertebeli türevin kullanılması ile geliştirilen yeni bir kapasitör teorisi sunulmuştur (Westerlund and Ekstam, 1994).

Piezoelektrik uyarıcılara sahip esnek materyaller, dağınık bir parametre sistemine sahip oldukları için kesirli mertebeli diferansiyel denklemler kullanılarak daha doğru modellenenmiştir (Vinagre, et al, 1998).

Kesirli mertebeli sistemler, mertebesi reel sayı olan diferansiyel denklemler olarak ifade edilirler. Kesirli mertebeli sistemler kontrol mühendisliği alanındaki çalışmaların da konusu olmuştur. Bu çalışmalarda kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin temel alındığı kontrol alanı, kesirli mertebeli kontrol olarak tanımlanmıştır. Kontrolör tasarımı, sistem tanımlama bu alandaki çalışılan konulardandır (Manabe, 2003).

Endüstriyel uygulamalarında ise kesirli mertebeden kontrollerin kullanımı gösterilmiş ve bağımsız bir elektrikli aracın yolunu izleme problemlerine uygulanmıştır. Endüstriyel bir aracın yatay dinamik modelinin konveksiyonel uygulaması dikkate alınmıştır. Bu kontrollerle birçok kontrol şemaları elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır (Vinagre et al., 2004).

Yarı sonsuz kayıplı RC iletimi, kütle difüzyonu, ısı iletimi gibi dinamik süreçlerin doğal sayı mertebeli modelleri ile karşılaştırıldığında kesirli mertebeli modeller ile gerçeğe daha yakın bir şekilde modellenenildiği gösterilmiştir (Hwang and Cheng, 2006).

Kesirli hesaplamaların bir başka kullanım alanı ise katı ve sıvı yapı arasındaki yapışkan etkileşimi tanımlamaktır. İnsanın süngerimsi kemik örnekleri üzerinden

iletilen yavaş ve hızlı dalgalar için deneysel ve teorik sonuçlar karşılaştırılmış ve daha iyi sonuçlar elde edilmiştir (Sebaa et al., 2006).

Reaksiyon-difüzyon sistemleri, çeşitli fiziksel olaylara karşılık gelen matematiksel modellerdir. En yaygın olanı, bir veya daha fazla kimyasal maddenin derişiminin konum ve zamana bağılı değişikliğidir. Maddelerin birbirine dönüştüğü kimyasal reaksiyonlar ve maddelerin bir yüzey üzerine yayılmasına neden olan difüzyon gibi değişiklikler genel olarak bu tip denklemlerle sembolize edilirler. Ayrıca, sistem kimyasal olmayan dinamik süreçleri de tanımlayabilir. Örneğin biyoloji, kimya, jeoloji, fizik (nötron difüzyon teorisi) ve ekoloji gibi. Matematiksel olarak, reaksiyon difüzyon sistemleri aşağıdaki gibi yarı-linear parabolik kısmi diferansiyel denklem sistemleri şeklindedir.

$$\partial_t \vec{q} = D \nabla^2 \vec{q} + R(\vec{q}) \quad (1.1)$$

Burada $\vec{q}(x, t)$ bilinmeyen vektör fonksiyonudur. D difüzyon katsayısının diagonal matrisidir. R ise tüm yerel reaksiyonları temsil eder. Reaksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümleri; hareket eden dalgaların oluşumu ve dalga benzeri olaylar, çizgiler gibi kendi kendine organize olan diğer desenler, enerji tüketen solitonlar gibi altıgenler veya daha karmaşık yapılar dahil olmak üzere çok çeşitli davranışlar sergilerler. Reaksiyon-difüzyon diferansiyel denklemini sağlayan her fonksiyon aslında bir konsantrasyon değişkenini temsil eder. En basit reaksiyon-difüzyon denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\partial_t u = D \partial_x^2 u + R(u) \quad (1.2)$$

Bu denklem Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov denklemi olarak adlandırılır (Kolmogorov vd. 1937). Eğer reaksiyon terimi ihmal edilirse, denklem doğal difüzyon sürecini temsil eder. Eğer $R(u) = u(1 - u)$ şeklinde alınırsa, denklem biyolojik popülasyonların yayılmasını tanımlamak için kullanılan Fisher denklemini verir (Fisher, 1937).

Eğer $R(u) = u(1 - u)(u - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ alınırsa, denklem yanma teorisinde ortaya çıkan Zeldovich denklemine dönüşür (Zeldovich and Frank-Kamenetsky, 1938).

Eğer $R(u) = u(1 - u^2)$ alınırsa, Rayleigh-Benard konveksiyonunu tanımlamak için kullanılan Newell-Whitehead-Segel denklemini verir (Newell and Whitehead, 1969; Segel, 1969).

Bu tezde özellikle Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov denkleminin özel hali olan kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemleri incelenecektir. Bununla ilgili literatürde olan çalışmalar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

NWS denklemi homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ile çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Nourazar et al. 2011).

NWS denklemi homotopi analiz metodu (HAM) ve homotopi pade metodu (HPadeM) ile çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Kheiri et al., 2011).

NWS denklemi indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (RDTM) ve Adomian ayrıştırma metodu (ADM) ile çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Saravanan and Magesh, 2013).

NWS denklemi kübik B-spline kollokasyon algoritması (CBSC) kullanılarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Zahra and Ouf, El-Azab, 2014).

NWS denklemi Elzaki Adomian ayrıştırma metodu (EADM) kullanılarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Mahgoub and Sedeeg, 2016).

NWS denklemi homotopi pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu (HPSTM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Singh and Sharma, 2018).

NWS denklemi üstel sonlu-fark metodu (EFDM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Hilal et al., 2020).

Literatürde, NWS denkleminin analitik çözümleri ile ilgili çalışmaların sayısı oldukça azdır. Bunlar aşağıdaki gibi verilebilir:

NWS denkleminin (G^2/G) -genişleme metodu kullanılarak tam çözümleri elde edilmiştir (Malik vd, 2011).

NWS denkleminin tanh-coth metodunun yeni modifikasyonu kullanılarak tam çözümleri bulunmuştur (Akcagil ve Aydemir, 2016).

NWS denkleminin Sine-Gordon denklem genişleme metodu kullanılarak tam çözümleri elde edilmiştir (Korkmaz, 2018).

NWS denkleminin genelleştirilmiş üstel rasyonel fonksiyon metodu yardımıyla bazı tam çözümleri bulunmuştur (Yusuf vd, 2019).

Kesirli NWS denklemi kesirli varyasyonel iterasyon metodu (FVIM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Prakash et al., 2019).

Kesirli NWS denklemi Adominian ayrıştırma metodu (ADM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Prakash and Verma, 2019).

Kesirli NWS denklemi kesirli rezidü kuvvet serisi yöntemi (FRPS) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Saadeh vd, 2019).

Kesirli NWS denklemi modifiye edilmiş indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (MRDTM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Alderremy vd, 2019).

Kesirli NWS denklemi için konformal indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (CRDTM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Jneid and Chauk, 2020).

Kesirli NWS denklemi homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu (HPTM) ve homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm metodu (HPETM) kullanarak çözülmüş, nümerik sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır (Singh and Sharma, 2020).

Literatürde kesirli NWS denklemi için birçok nümerik çalışma bulunmasına rağmen kesirli NWS denklemlerinin analitik çözümleri ile ilgili herhangi bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu tez çalışmasında kesirli NWS denklemi için sonlu-fark ve standart olmayan sonlu-fark metotları kullanılmıştır. Sonlu-fark metodu literatürde yaygın olarak kullanılan oldukça elverişli bir metottur. Son yıllarda kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler için de kullanılmış ve iyi sonuçlar alınmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi verilebilir:

KdV ve Kadomtsev-Petviashvili denklemleri için sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Feng and Mitsui, 1998).

Kesirli adveksiyon-dispersiyon akış denklemleri için sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Meerschaert and Tadjeran, 2004).

Konveksiyon-difüzyon denklemi için sonlu-fark yaklaşımı uygulanmış, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Salkuyeh, 2006),

Kesirli Catteneo denklemi için açık ve kapalı sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Ghazizadeh et al., 2010).

İki taraflı konum kesirli dalga denklemi için sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Sweilam et al., 2011).

Kesirli adveksiyon-difüzyon denklemi için açık sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Sousa, 2012),

Bir boyutlu ısı iletim problemini çözmek için geri yönlü sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Jankowska et al., 2015).

Bratu problemini çözmek için sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Temimi and Ben-Romdhane, 2016).

Matematiksel biyolojide ortaya çıkan lineer olmayan bir model için sonlu-fark metodu kullanılmıştır. Ayrıca tam çözüm bulunmuştur. Bulunan nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Yokus vd., 2018).

Sharma-Tasso-Olver denklemi için sonlu-fark metodu kullanılmış, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır. Ayrıca tam çözüm bulunmuştur. Bulunan nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Suleiman vd., 2018).

Cahn-Allen denklemi için sonlu-fark metodu uygulanmış, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Yokus ve Bulut, 2019).

Standart olmayan sonlu-fark metodu klasik anlamdaki sonlu-fark metodundan oldukça farklıdır. Son yıllarda kullanılmaya başlanan bu metot ayrıştırma kısmında esnekliğe sahip olduğundan uygulanması kolaydır ve birçok sayısal metottan çok daha iyi sonuç veren bir metottur. Denkleme özel bir ayrıştırma yapıldığından kullanım kolaylığı ve lineer olmayan denklemlere uygulanabilme özelliklerinden dolayı son yıllarda kullanımı oldukça artmıştır. Bu metot kullanılarak yapılan çalışmalar aşağıdaki gibi verilebilir:

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler için standart-olmayan sonlu-fark şemalarının nasıl elde edileceği tanıtılmıştır (Mickens, 2002).

Sonlu ince bir çubuk içinde lineer olmayan ısı transferi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Jordan, 2003).

Reaksiyon-difüzyon denklemleri için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Anguelov et al., 2005).

Akışkanlar mekaniğinde lineer kesirli kısmi diferansiyel denklemler için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Moaddy et al., 2011).

İki taraflı konum-kesirli kısmi diferansiyel denklemler için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Momani et al., 2012).

Kesirli mertebeli Brusselator sistemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Ongun vd., 2013).

Sabit katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Ehrhardt and Mickens, 2013).

Bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Appadu, 2013).

Burgers ve Burgers-Fisher denklemleri için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Zhang et al., 2014).

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Sweilam et al., 2018).

FitzHugh-Nagumo denklemleri için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Appadu et al., 2018).

Hodgkin-Huxley denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Aderogba and Chapwanya, 2018).

Huxley denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Namjoo and Zibaei, 2019).

Burgers-Huxley denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Appadu et al., 2019).

Genelleştirilmiş KdV-Burgers denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar yorumlanmıştır (Koroglu, 2020).

Komplex mertebeli kesirli Burgers denklemi için standart olmayan sonlu-fark metodu uygulanmıştır, nümerik sonuçlar değerlendirilmiştir (Sweilam et al., 2020).

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel tanımlar ve bazı nümerik notasyonlara yer verilmiştir. İkinci bölümde, ele alınan kesirli NWS denklemi genel olarak tanıtılmıştır. Kesirli NWS denklemlerini çözmek için sonlu-fark, Newton tipi lineerleştirme ve standart olmayan sonlu-fark metotları detaylı olarak incelenmiş, genel haldeki kesirli NWS denklemi için bu üç metotla sonlu-fark şemaları oluşturulmuştur ve bu şemaların kararlık ve yakınsaklık koşulları elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli NWS denkleminin $p = 2,3,4,5$ durumları için üç farklı sonlu-fark metoduyla bulunan sayısal sonuçlar tablolar ve grafiklerle gösterilmiştir. Son bölümde ise bu tezde yapılan çalışmaların sonuçları incelenmiş, metotların etkililiği ve kesirli NWS denklemiyle uyumluluğu yorumlanmıştır.

2.GENEL BİLGİLER

2.1.Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\alpha > 0$ olmak üzere; (a, t) aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve integrallenebilir $f(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}^{RL}D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

biçiminde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1.2. $\alpha > 0$ olmak üzere; (a, t) aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve integrallenebilir $f(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi;

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[{}^{RL}D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

biçiminde tanımlanır. Burada n , negatif olmayan tamsayıdır ve $n-1 \leq \alpha < n$ dir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1.3. $\alpha > 0$ olmak üzere; (a, t) aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve integrallenebilir $f(t)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi;

$${}^C D_t^\alpha f(t) = D_{a,t}^{-(n-\alpha)} [f^n(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds$$

biçiminde tanımlanırlar. Burada n , negatif olmayan tamsayıdır ve $n-1 \leq \alpha < n$ dir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1.4. $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $[a, t]$ aralığı üzerinde tanımlı ve C^n sınıfından olan bir $f(t)$ fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevi;

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$$

biçiminde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1.5. $\omega_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ olmak üzere, ω_j^α katsayıları aşağıdaki tekrarlama bağıntısı kullanarak da hesaplanabilir (Podlubny, 1999).

$$\omega_0^\alpha = 1, \quad \omega_k^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) \omega_{k-1}^\alpha, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Not 2.1.6. Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi için verilen tanımlar genel olarak denk değildir. Aralarında aşağıdaki şekilde verilen bir bağıntı mevcuttur.

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

Burada $f \in C^{n-1}[a, t]$ dir ve $f^n, [a, t]$ üzerinde integrallenebilir. Ayrıca eğer $f \in C^n[a, t]$ ise ${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ dir.

Örnek 2.1.7. $f(t) = (t-a)^\beta$ kuvvet fonksiyonunun ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$, ${}^C D_t^\alpha f(t)$, ${}^{GL}D_t^\alpha f(t)$ kesirli türevlerini irdeleyelim.

Çözüm:

Öncelikle Riemann-Liouville kesirli integralini hesaplayalım:

$\alpha < 0$ olsun. Bu takdirde

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^{-(-\alpha)}(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}(s-a)^\beta ds$$

şeklinde yazılabilir. $s = a + \varphi(t-a)$ dönüşümü yapılırsa ve integralin yakınsaklığı için $\beta > -1$ olduğu varsayılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}(s-a)^\beta ds &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\beta-\alpha} (1-\varphi)^{-\alpha-1} (\varphi)^\beta d\varphi \\ &= \frac{(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-\varphi)^{-\alpha-1} (\varphi)^\beta d\varphi \\ &= \frac{(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} B(-\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplayalım:

$0 \leq m \leq \alpha < m+1$ ve $m \in Z^+$ olsun ve $\beta > m$ olduğu varsayılırsa;

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \left({}^{RL}D_t^{-(m-\alpha+1)} f(t) \right)$$

yazılabilir. ${}^{RL}D_t^{-(m-\alpha+1)} f(t)$ için $(m - \alpha + 1) > 0$ olduğundan $(m - \alpha + 1) = p$ dersek ${}^{RL}D_t^{-(m-\alpha+1)} f(t) = {}^{RL}D_t^{-p} f(t)$ olur. Buradan ${}^{RL}D_t^{-p} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+p+1)}$ bulunur.

Not 2.1.8. $\beta(\beta - 1)(\beta - 2) \dots (\beta - m) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m)}$ eşitliği vardır.

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)(t - a)^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + p + 1)} \right) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + p + 1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (t - a)^{\beta+p} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+p+1)} ((\beta + p)(\beta + p - 1) \dots (\beta + p - m))(t - a)^{\beta+p-m-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + p + 1)} \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + p - m)} (t - a)^{\beta+p-m-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + p - m)} (t - a)^{\beta+p-m-1} \end{aligned}$$

p değeri yukarıda yerine yazılırsa;

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta-\alpha}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f(t) = (t - a)^\beta$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi ${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t - a)^{\beta-\alpha}$ şeklinde elde edilir.

Caputo anlamındaki kesirli türevi hesaplayalım:

$0 \leq m \leq \alpha < m + 1$ ve $m \in Z^+$ olsun ve $\beta > m$ olduğu varsayılırsa;

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}^C D_t^{-(m-\alpha+1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} f(t) \right) = {}^C D_t^{-(m-\alpha+1)} f^{m+1}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \int_a^t (t - s)^{m-\alpha} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (s - a)^\beta ds \end{aligned}$$

$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (s - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m)} (s - a)^{\beta-m-1}$ eşitliği yukarıda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m)} (s-a)^{\beta-m-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha} (s-a)^{\beta-m-1} ds \end{aligned}$$

olur. Eğer $s = a + \varphi(t-a)$ dönüşümü yapılırsa Caputo kesirli türevi

$${}_a^c D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

şeklinde elde edilir. $f(t) = (t-a)^\beta$ fonksiyonu için $f \in C^n$ olduğundan; $\forall \alpha > 0$ için

$${}^R L D_t^\alpha f(t) = {}^G L D_t^\alpha f(t) = {}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

eşitliği bulunur. Yani $f(t) = (t-a)^\beta$ fonksiyonu Riemann-Liouville anlamındaki türevi, Caputo anlamındaki türevi ve Grünwald-Letnikov anlamındaki türevi birbirine eşittir.

Özel olarak $\beta = 2, a = 0$ alınırsa $f(t) = t^2$ olup ${}^R L D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}$ olur.

Eğer $\alpha = 1$ olursa ${}^R L D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} t^{2-1} = 2t$ bulunur.

Eğer $\alpha = \frac{1}{2}$ olursa ${}^R L D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{2-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t\sqrt{t}$ bulunur.

Eğer $\alpha = \frac{3}{2}$ olursa ${}^R L D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{2-\frac{3}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$ bulunur.

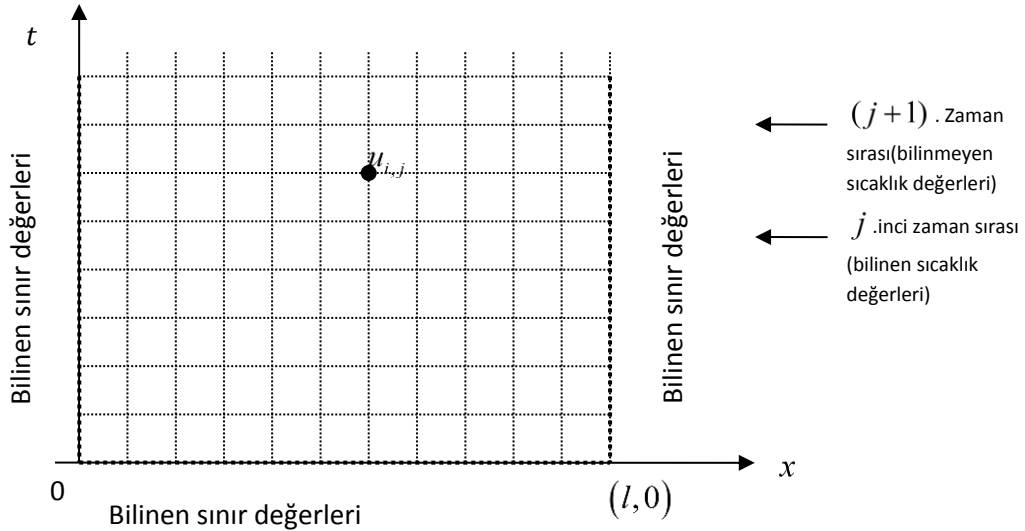
Tanım 2.1.9. $[t_0, T]$ aralığı üzerinde tanımlanmış tek değişkenli $u(t)$ fonksiyonu için, N düzgün zaman adımı olmak üzere $\Delta t = \frac{(T-t_0)}{N}$ olarak tanımlanır. t_k , geçici düğüm noktaları $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ biçiminde verilir. $u(t_k)$ nın yaklaşımı da u_k ile gösterilir (Amirali ve Duru, 2002).

Tanım 2.1.10. $[x_L, x_R] \times [t_0, T]$ bölgesi üzerinde tanımlanmış iki değişkenli $u(x, t)$ fonksiyonu için Δx ; x-yönündeki adım büyüklüğü, Δt ; zaman adım büyüklüğü olmak üzere

$$\Delta x = \frac{(x_R - x_L)}{N_x}, \quad x_i = x_L + i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x$$

$$\Delta t = \frac{(T - t_0)}{N_T}, \quad t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_T$$

Burada N_x ve N_T pozitif tamsayılarıdır. $u(x_i, t_k)$ nın yaklaşımı u_i^k ile gösterilir (Amirali ve Duru, 2002).



Şekil 2.1.11. $u(x_i, t_k)$ nın yaklaşımı

Tanım 2.1.12. $u(x, t)$ fonksiyonunun bazı fark operatörleri şu şekilde tanımlanır:

$$\Delta_t u_i^k = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \quad (\text{ileri yönlü}), \quad \nabla_t u_i^k = \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} \quad (\text{geri yönlü})$$

$$\Delta_x u_i^k = \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\Delta x} \quad (\text{ileri yönlü}), \quad \nabla_x u_i^k = \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (\text{geri yönlü})$$

$$\delta_x u_i^k = \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (\text{merkezi yönlü}), \quad \delta_t u_i^k = \frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\Delta t} \quad (\text{merkezi yönlü})$$

$$\delta_x^2 u_i^k = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (\text{merkezi yönlü}), \quad \delta_t^2 u_i^k = \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (\text{merkezi yönlü})$$

Burada δ_x , δ_t x ve t yönündeki I. mertebeden merkezi fark operatörleri, δ_x^2 ve δ_t^2 ise x ve t yönündeki II. mertebeden merkezi fark operatörleridir (Amirali ve Duru, 2002).

Özellikler uygulamalarda kullanılan fonksiyonların geniş bir sınıfı için Grünwald-Letnikov türevi ve Riemann-Liouville türevi denktir. Sonuçta Riemann-Liouville tanımı problem formülüzasyonu için uygun iken Grünwald-Letnikov tanımı nümerik çözüm elde etmek için uygundur. $t \in [t_0, T]$ olmak üzere $u(t)$

fonksiyonunun kesirli türevi ve nümerik yaklaşımı sırasıyla ${}^{RL}D_t^\alpha u(t_k)$ ve ${}^{RL}D_t^\alpha \widetilde{u}(t_k)$ ile gösterilsin.

Tanım 2.1.13. $t \in [t_0, T]$, $u(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi ${}^{RL}D_t^\alpha u(t_k)$ olmak üzere, Grünwald-Letnikov türevinin tanımıyla Riemann-Liouville türevine yaklaşmak daha uygundur. $\omega_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ gösterimi kullanılırsa ${}^{RL}D_t^\alpha u(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevine aşağıdaki gibi yaklaşılabilir:

$${}^{RL}D_t^\alpha u(t_k) \approx {}^{RL}D_t^\alpha \widetilde{u}(t_k) = \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=0}^k \omega_j^\alpha u(t_{k-j})$$

Bu yaklaşım Grünwald-Letnikov yaklaşımı olarak adlandırılır. $\forall \alpha > 0$ için Grünwald-Letnikov yaklaşımı I. mertebededir ve yakınsaktır. (Li and Zeng, 2012).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Materyal

Reaksiyon-difüzyon sistemleri, çeşitli fiziksel olayları matematiksel olarak modelleyen sistemlerdir. Bu tez çalışmasında reaksiyon-difüzyon sistemlerinin özel hali olan Newell-Whitehead-Segel denklemleri incelenecektir.

NWS denklemi, iki boyutlu sistemlerde şerit desenlerinin görünümünü tanımlamak için kullanılan lineer olmayan sistemlerde önemli bir role sahiptir. Aynı zamanda madde derişimindeki konumsal ve zamana bağıli değişikliği modelleyen denklemdir. NWS denklemi ayrıca ikili sıvı kombinasyonunda Rayleigh-Bénard konveksiyonunun çatallanma noktasına yakın dinamik eylemi belirler. Rayleigh-Bénard konveksiyonu, alttan ısıtılan Bénard hücreleri adı verilen pürüzsüz bir sıvı içinde yükselir ve hücrelerin tutarlı bir düzenini oluşturur. Bu formlar, kendiliğinden organize olan lineer olmayan sistemlerin en iyi incelenen örneğidir.

$0 < \alpha \leq 1$, $1 < \gamma \leq 2$ zaman ve konum türevlerinin mertebesini tanımlayan parametreler, $c, d, k > 0$ reel sayılar, $p \geq 2$ pozitif tamsayı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan kesirli kısmi diferansiyel denkleme, kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemi adı verilir.

Kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denkleminin $\alpha = 1$ durumunda analitik çözümlerinin bulunması oldukça zorlu bir işlemdir. Bunun yerine yapılan çalışmalarda gezen dalga çözümleri analitik çözüm olarak verilmiştir.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = k \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} + cu - du^p \\ u(x, t_0) = \xi(x) \\ u(a, t) = \zeta(t), \quad u(b, t) = \psi(t) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilen kesirli NWS denkleminin $\alpha = 1$ durumundaki gezen dalga çözümlerinden bazıları aşağıdaki gibi verilir (Polyanin and Zaitsev, 2004).

$$u_{1,2}(x, t) = (\beta + Ce^{(\lambda t \pm \mu x)})^{\frac{2}{(1-p)}} \quad (3.1.2)$$

$$u_{3,4}(x, t) = (-\beta + Ce^{(\lambda t \pm \mu x)})^{\frac{2}{(1-p)}} \quad (3.1.3)$$

Bu tez çalışmasında kesirli NWS denkleminde $p = 2, 3, 4$ ve 5 alınarak ayrı ayrı durumlar değerlendirilmiştir. Burada C keyfi sabittir. $c, d \in \mathbb{R}$, $2 \leq p \in \mathbb{N}$ dir. λ, μ, β değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\lambda = \frac{c(1-p)(p+3)}{2(p+1)}, \mu = \sqrt{\frac{c(1-p)^2}{2(p+1)}}, \beta = \sqrt{\frac{d}{c}}$$

3.2. Metot

3.2.1. Sonlu-Fark Metotları

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b] \quad (3.2.1.1)$$

başlangıç-değer problemiyle verilmiş diferansiyel denklem ele alınsın. Bu diferansiyel denklemi nümerik olarak çözmek için kullanılan metotlardan bir tanesi de sonlu-fark metodudur. Oldukça etkili ve kullanışlı olan bu metotta türevler için fark yaklaşımları mevcuttur. Bunun için fark yaklaşımları şöyle ifade edilebilir.

$\Delta t = \frac{b-a}{K}$, $t_k = t_0 + k\Delta t$, $y(t_k) = y_k$ olmak üzere; I. mertebeden türev için ileri, geri ve merkezi yönlü fark yaklaşımları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\Delta_t y_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t}, \quad \nabla_t y_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t}, \quad \delta_t y_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta t}$$

II. mertebeden fark yaklaşımı ise ;

$$\Delta_t^2 y_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta t^2}$$

şeklindedir. Verilen adi diferansiyel denklemde I. mertebeden türev için fark yaklaşımları, t_k ve y_k değerleri yerine yazılırsa;

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, K$$

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} = f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, K$$

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta t} = f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, K$$

şeklinde elde edilen şemalara sırasıyla ileri yönlü, geri yönlü ve merkezi yönlü sonlu-fark şemaları adı verilir.

Adi diferansiyel denklemler için sonlu-fark şemalarına benzer olarak $[a, b] \times [t_0, T]$ bölgesi üzerinde tanımlanmış iki değişkenli $y(x, t)$ fonksiyonu için, Δx x -yönündeki adım büyüklüğü, Δt zaman adım büyüklüğü olmak üzere aşağıdaki biçimde ifade

edilebilir.

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{N_x}, \quad x_m = x_L + m\Delta x, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$\Delta t = \frac{(T-t_0)}{N_T}, \quad t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

Burada M ve K pozitif tamsayılardır. $y(x_m, t_k)$ nın yaklaşımı y_m^k ile gösterilirse bazı fark yaklaşımları şöyledir:

$$\Delta_t y_m^k = \frac{y_m^{k+1} - y_m^k}{\Delta t} \quad (\text{ileri yönlü}), \quad \nabla_t y_m^k = \frac{y_m^k - y_m^{k-1}}{\Delta t} \quad (\text{geri yönlü})$$

$$\Delta_x y_m^k = \frac{y_{m+1}^k - y_m^k}{\Delta x} \quad (\text{ileri yönlü}), \quad \nabla_x y_m^k = \frac{y_m^k - y_{m-1}^k}{\Delta x} \quad (\text{geri yönlü})$$

$$\delta_x y_m^k = \frac{y_{m+1}^k - y_{m-1}^k}{2\Delta x} \quad (\text{merkezi yönlü}), \quad \delta_t y_m^k = \frac{y_m^{k+1} - y_m^{k-1}}{2\Delta t} \quad (\text{merkezi yönlü})$$

$$\Delta_x^2 y_m^k = \frac{y_{m+1}^k - 2y_m^k + y_{m-1}^k}{\Delta x^2} \quad \Delta_t^2 y_m^k = \frac{y_m^{k+1} - 2y_m^k + y_m^{k-1}}{\Delta t^2}$$

Burada δ_x , δ_t x ve t yönündeki I. mertebeden merkezi fark operatörleri, Δ_x^2 ve Δ_t^2 ise x ve t yönündeki II. mertebeden fark operatörleridir.

3.2.2. Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Sonlu-Fark Metotları

Kesirli adi veya kısmi diferansiyel denklemler için sonlu fark şemaları oluştururken Riemann-Liouville ya da Caputo anlamında tanımlanmış kesirli türevler için nümerik yaklaşım yapıldığında kullanılacak en uygun yaklaşım Grünwald-Letnikov yaklaşımıdır.

$[a, b] \times [t_0, T]$ bölgesi üzerinde tanımlanmış iki değişkenli $y(x, t)$ fonksiyonu için ${}^{RL}D_t^\alpha y(x_m, t_k)$ zaman-kesirli türevinin Grünwald-Letnikov yaklaşımı ${}^{RL}D_t^\alpha \widetilde{y}(x_m, t_k)$ şöyledir:

$${}^{RL}D_t^\alpha y(x_m, t_k) \approx {}^{RL}D_t^\alpha \widetilde{y}(x_m, t_k) = \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=0}^k \omega_j^\alpha y_m^{k-j}$$

$y(x, t)$ fonksiyonu için ${}^{RL}D_x^\alpha y(x_m, t_k)$ konum-kesirli türevinin Grünwald-Letnikov yaklaşımı ${}^{RL}D_x^\alpha \widetilde{y}(x_m, t_k)$ şöyledir:

$${}^{RL}D_x^\alpha y(x_m, t_k) \approx {}^{RL}D_x^\alpha \widetilde{y}(x_m, t_k) = \Delta x^{-\alpha} \sum_{j=0}^k \omega_j^\alpha y_{m-j}^k$$

3.2.3. Newton Tipi Lineerleştirme Metodu

Lineer olmayan adi, kısmi ya da kesirli diferansiyel denklemler için sonlu-fark metodu oluşturulurken alternatif yollardan bir tanesi de lineer olmayan denklemi lineerleştirerek sonlu-fark şeması oluşturmaktır. Bunun için aşağıdaki yol izlenir:

u_1, u_2, \dots, u_N 'ler bağımlı değişkenler olmak üzere $f_i, i = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonlar olsun.

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_N) = 0, i = 1, 2, \dots, N$$

N tane denklemden oluşan lineer olmayan denklem sistemi verilsin. $V_i, i = 1, 2, \dots, N$ değerleri ise u_i değerleri için bilinen yaklaşımlar olsun. $u_i = V_i + \varepsilon_i$ şeklinde yazılırsa ve $f_i, i = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonları için V_i civarında Taylor serisine açılırsa;

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_N) = f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_N} \varepsilon_N \right] \Bigg|_{u_i=V_i} + \dots$$

şeklinde yazılabilir. I. türevden sonrasını ihmal edilirse;

$$f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_N} \varepsilon_N \right] \Bigg|_{u_i=V_i} = 0, i = 1, 2, \dots, N$$

bulunur. Böylece lineer olmayan denklem sistemi, N tane $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ bilinmeyenlerinden oluşan bir lineer denklem sistemine dönüşür. Lineer olmayan denklem sisteminden yukarıda verilen Taylor serisi yöntemiyle lineer denklem sistemi elde etmeye yarayan metoda Newton tipi lineerleştirme metodu adı verilir. Bu süreç istenilen doğruluk derecesi bulununcaya kadar devam ettirilebilir.

3.2.4. Standart Olmayan Sonlu-Fark Metotları

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi ele alınırsa, bu denklemi;

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y_k)$$

şeklinde standart ayrıştırma yapılabilir. Burada $\Phi(h) = h$ payda fonksiyonu klasik formdadır. Φ_1, Φ_2 fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

$$\Phi_1(h) = h + o(h^2), \quad \Phi_2(h) = h + o(h^2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + \Phi_1(h)) - y(t)}{\Phi_2(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + h + o(h^2)) - y(t)}{h + o(h^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

türev tanımı olarak yazılabilir. Verilen tanımın sol tarafının davranışı, h adım büyüklüğünün sonlu değeri için klasik türev tanımından farklı olacaktır. Buradan yola çıkarak, klasik formlar yerine $\Phi_1(h)$ ve $\Phi_2(h)$ gibi payda fonksiyonlarını genel olarak düşünersek;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Phi(h)}$$

şeklinde yazılır. λ_1, λ_2 parametreler olmak üzere,

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 y - \lambda_2 y^2, \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer problemiyle verilmiş lojistik diferansiyel denklemin istenilen koşulu sağlayan çözümü;

$$y(t) = \frac{\lambda_1 y_0}{(\lambda_1 - \lambda_2 y_0)e^{-\lambda_1(t-t_0)} + \lambda_2 y_0}$$

şeklinde verilir. Şimdi lojistik diferansiyel denklem için bir sonlu-fark şeması elde etmek amacıyla aşağıdaki temsiller kullanılsın:

$$y(t) \rightarrow y_{k+1}, \quad y_0 \rightarrow y_k, \quad t_0 \rightarrow t_k, \quad t \rightarrow t_{k+1}$$

Bu temsiller diferansiyel denklemin çözümünde yerine yazılırsa;

$$y_{k+1} = \frac{\lambda_1 y_k}{(\lambda_1 - \lambda_2 y_k)e^{-\lambda_1 h} + \lambda_2 y_k}, \quad (t_{k+1} - t_k = h) \quad (3.2.4.1)$$

ayrık modeli elde ederiz. Bu ifadeyi kullanarak bazı cebirsel işlemler yaparsak;

$$\lambda_1 y_{k+1} - \lambda_2 y_{k+1} y_k = \lambda_1 y_k e^{\lambda_1 h} - \lambda_2 y_{k+1} y_k e^{\lambda_1 h}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafından $\lambda_1 y_k$ terimini çıkartırsak;

$$\lambda_1 y_{k+1} - \lambda_1 y_k = -\lambda_1 y_k + \lambda_2 y_{k+1} y_k - (\lambda_2 y_{k+1} y_k - \lambda_1 y_k) e^{\lambda_1 h}$$

$$y_{k+1} - y_k = (\lambda_1 y_k - \lambda_2 y_{k+1} y_k) \frac{(e^{\lambda_1 h} - 1)}{\lambda_1}$$

elde edilir. Her iki tarafı $\frac{(e^{\lambda_1 h} - 1)}{\lambda_1}$ ifadesine bölersek;

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{(e^{\lambda_1 h} - 1)}{\lambda_1}} = \lambda_1 y_k - \lambda_2 y_{k+1} y_k \quad (3.2.4.2)$$

bulunur. Elde edilen bu fark şeması lojistik diferansiyel denklem için yazılan

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \lambda_1 y_k - \lambda_2 y_k^2, \quad \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \lambda_1 y_k - \lambda_2 y_k^2$$

ileri yönlü ve geri yönlü sonlu-fark şemalarından farklıdır. (3.2.4.2) ayrık modeli, (3.2.4.1) denklemini için tam sonlu-fark şemasıdır. Yani $\forall h$ için $y_{k+1} = y(t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, dir.

Lojistik diferansiyel denklem için oluşturulan tam sonlu-fark şeması, standart anlamda oluşturulan ileri yönlü ve geri yönlü sonlu-fark şemalarından farklıdır. Buradaki farklılık $\Phi(h) = \frac{(e^{\lambda_1 h} - 1)}{\lambda_1}$ payda fonksiyonunun $\Phi(h) = h$ payda fonksiyonu yerine kullanılması ve $y_{k+1}y_k$ lokal olmayan teriminin y_k^2 yerine kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Aslında temsillerin bu tipleri standart olmayan sonlu-fark şemalarının en önemli özelliklerinden biridir. Ayrıca herhangi bir diferansiyel denklem için lineer olmayan terimlerin lokal olmayan modellenmesi, tutarlı ayrık modeller oluşturduğunu garanti etmez. Bunun ana sebebi lineer olmayan terimin lokal olmayan birden çok temsillerinin var olmasından kaynaklanır.

Örneğin

$$\begin{cases} y_k \rightarrow \frac{y_k^2}{(y_{k+1} + y_k)}, & \frac{(y_{k+1} + y_k)}{2} \\ y^2 \rightarrow y_{k+1}y_k, & y_k \left(\frac{y_{k+1} + y_k}{2} \right) \\ y^3 \rightarrow y_{k+1}y_k^2, & y_{k+1}y_k \left(\frac{y_{k+1} + y_k}{2} \right) \end{cases}$$

Ayrıca, uygun bir payda fonksiyonu oluşturmak, diferansiyel denklem içindeki lineer olmayan terimler için uygun bir model bulmak tutarlı sonuçlar elde etmek için çok önemlidir. Ancak bunu yapmak için özel bir yöntem yoktur. Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi payda fonksiyonları her bir diferansiyel denklem için farklılık gösterir. Adi diferansiyel denklemler için standart olmayan sonlu-fark şemaları oluşturulurken genelde kullanılan payda fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\Phi(h) = 1 - e^{-h}, \quad \Phi(h) = \sin\left(\frac{h}{2}\right), \quad \Phi(h) = \sin(h)^2, \quad \Phi(h) = \frac{e^h - 1}{2}$$

$$\Phi(h) = 4\left(e^{\frac{h}{2}} - 1\right)^2, \quad \Phi(h) = 4\left(1 - e^{\frac{-h}{4}}\right), \quad \Phi(h) = \frac{1 - e^{-2h}}{2}$$

$\Phi(h)$ payda fonksiyonları $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Phi(h) \rightarrow 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Aksi takdirde standart olmayan sonlu-fark şemalarında nümerik kararsızlıklar meydana gelir ve tutarsız sonuçlar elde edilir. Standart olmayan fark şemalarını elde etmek için bir diferansiyel denklemin analitik çözümünün bulunması gerekmez. Ancak tam

sonlu-fark şemasının bulunması için verilen diferansiyel denklemin istenilen koşulları sağlayan analitik çözümünün bilinmesi gerekir. Standart olmayan sonlu-fark metotları lineer olmayan diferansiyel denklemler için kullanılmasının yanı sıra lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri için de kullanılır.

x -yönündeki payda fonksiyonu $\Phi(\Delta x)$, t -yönündeki payda fonksiyonu $\Psi(\Delta t)$ ile gösterilsin. $\Phi(\Delta x)$, $\Psi(\Delta t)$ payda fonksiyonları; değeri, sistemin en küçük zaman ve konum ölçeğinden daha büyük olmayan fonksiyonlardır. $\Phi(\Delta x)$, $\Psi(\Delta t)$ uygun seçildiğinde kararsızlık ortadan kalkar. $\Phi(\Delta x)$, $\Psi(\Delta t)$ payda fonksiyonları Δx , Δt zaman ve konum-adımını belirlediği için değil, kararlılığı belirlediği için etkilidir. Genel lineer olmayan terimler, grid noktaları üzerinde lokal olmayan ayrık ifadelerle modellenbilmesi de önemli bir konudur. Örneğin lojistik denklemdeki u^2 lineer olmayan terimi, $u^2 \rightarrow u_{k+1}u_k$ ile yer değiştirirken geleneksel metot da $u^2 \rightarrow u_k^2$ kullanılır. Buna benzer durum tek yönlü dalga denklemi içinde düzenlenir. Şöyle ki; $u^2 \rightarrow u_{m-1}^k u_m^{k+1}$ dir. Burada u ' nun her kuvveti, farklı ayrık konum ve zaman değişkenlerinde değerlendirilir. Bu ve diğer ilgili sonuçlar baz alındığında, diferansiyel denklemler için standart olmayan şemaları inşa ederken aşağıdaki kurallar seçilir.

- Ayrık türevin mertebesi, diferansiyel denklemin türevine karşılık gelen mertebeye eşit olmalıdır. Aksi takdirde ayrık türevin mertebesi daha büyük olursa nümerik kararsızlık meydana gelir.
- Türevin ayrık temsillerinde, genelde klasik anlamdaki dışında payda fonksiyonları kullanılır.
- Lineer olmayan terimler genelde lokal olmayan ayrık temsillerle gösterilmelidir.
- Diferansiyel denklemin çözümleri için düzenlenen koşullar sonlu-fark şemasının çözümleri için de düzenlenmelidir. Yoksa sonlu-fark şemaları, diferansiyel denklemlere karşılık gelen önemli koşulları sağlamazsa nümerik kararsızlık meydana gelir. Örneğin dinamik sistemlerde pozitiflik koşulu bağımlı değişkene göre düzenlenir. Nümerik şemalarda pozitiflik koşulunun ihmal edildiği çözümler elde edilirse nümerik kararsızlık oluşur.

Yukarıdaki verilen kurallar, diferansiyel denklemlerin tek ayrık temsili olduğu anlamına gelmez. Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin önemli özelliklerinin bilinmesiyle, olası ayrık modeli büyük ölçüde kısıtlanır.

3.2.5. Kesirli Mertebeden Türev İçeren Diferansiyel Denklemler İçin Standart Olmayan Sonlu-Fark Metotları

Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi kesirli mertebeden türev içeren denklemler için de benzer işlemler yapılır. Payda fonksiyonu kesirli mertebeye genişletilir, Riemann-Liouville anlamında türev operatörü; lokal olmayan türev operatörüyle değiştirmek için Grünwald-Letnikov tanımı kullanılır. Standart anlamda Riemann-Liouville kesirli türevi Grünwald-Letnikov tanımı cinsinden yazarsak;

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^\alpha f(t - jh) \quad (3.2.5.1)$$

şeklindedir. Caputo anlamında kesirli mertebeden türev operatörü lokal olmayan türev operatörüyle değiştirmek için Caputo ve Riemann-Liouville arasındaki aşağıdaki ilişki kullanılır. $n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[{}^C D_t^k f(t)]|_{t=a} (t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

eğer $0 \leq \alpha < 1$ ise $n = 1$ olacağından

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^\alpha f(t) - \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

şeklinde değiştirilebilir. (3.2.5.1) yaklaşımında h payda fonksiyonu $\Phi(h, \lambda)$ ile değiştirirsek;

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{\Phi(h, \lambda)} \sum_{j=0}^n \omega_j^\alpha f(t - jh)$$

şeklinde Riemann-Liouville kesirli türev operatörü lokal olmayan hal alır. Burada

$$\Phi(h, \lambda) = h^\alpha + o(h^p), \quad p > \alpha, \quad h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Phi(h, \lambda) \rightarrow 0$$

olur. Kesirli mertebeden türev içeren lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlerde en sık kullanılan $\Phi(h, \lambda)$ payda fonksiyonları genelde aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Phi(h, \lambda) &= h^\alpha, \quad \Phi(h, \lambda) = \frac{\sin(h^\alpha \lambda)}{\lambda}, \quad \Phi(h, \lambda) = \left(\frac{\sin(h\lambda)}{\lambda} \right)^\alpha \\ \Phi(h, \lambda) &= \frac{1 - e^{-h^\alpha \lambda}}{\lambda}, \quad \Phi(h, \lambda) = \left(\frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} \right)^\alpha, \quad \Phi(h, \lambda) \\ &= \Gamma(1 + \alpha) \frac{(E_\alpha(-h^\alpha \lambda) - 1)}{\lambda} \end{aligned}$$

$\Phi(h, \lambda)$ payda fonksiyonu, eğer $0 < \Phi(h, \lambda) < \frac{2^\alpha}{\lambda}$ koşulunu sağlarsa kararlı bir davranış gösterir (Ongun vd, 2013).

Benzer şekilde Caputo kesirli türevi içinde lokal olmayan değişim yapılırsa;

$${}^c D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{\Phi(h, \lambda)} \sum_{j=0}^n \omega_j^\alpha f(t - jh) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[{}^c D_t^k f(t)]|_{t=a} (t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

Caputo kesirli türev için standart olmayan yaklaşım elde edilir. Kesirli mertebeden türev içeren lineer veya lineer olmayan denklemlerin standart olmayan sonlu-fark ayrışımı yapılırken Riemann-Liouville ve Caputo anlamındaki kesirli türevler, nümerik şema elde etmekte kolaylık sağlayan Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımıyla değiştirilir. Standart olmayan sonlu-fark metodu, genelde lineer olmayan adi, kısmi, kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerde kullanılmasının yanı sıra, kesirli türev içeren lineer diferansiyel denklemler ve denklem sistemlerinde de kullanılır.

3.3. Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemini İçin Sonlu-Fark Şemaları

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^p \\ u(x, 0) = \xi(x) \\ u(0, t) = \zeta(t), \quad u(1, t) = \psi(t) \end{cases}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

başlangıç-sınır değer problemiyle verilmiş yukarıdaki kesirli NWS denklemini için sonlu-fark metodu (SFDM) ile fark şemasını oluşturalım:

Kesirli türev ve II. mertebeden türevi, aşağıdaki fark yaklaşımları ile temsil edilsin.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2}$$

Bu ifadeler kesirli NWS denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2} + u_m^k - (u_m^k)^p$$

bulunur. Her iki taraf Δt^α ile çarpılırsa;

$$\sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^p$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse ve u_m^{k+1} çekilirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{k+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^p \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \\ m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

bulunur. Bulunan bu şemaya kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemi için sonlu-fark şeması (SFDM şeması) adı verilir.

3.4. Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemi İçin Newton Tipi Lineerleştirme Metoduyla Elde Edilen Sonlu-Fark Şemaları

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^p \\ u(x, 0) = \xi(x) \\ u(0, t) = \zeta(t), \quad u(1, t) = \psi(t) \end{array} \right. , \quad 0 < \alpha \leq 1$$

biçiminde verilen lineer olmayan kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemini lineerleştirmek için Newton tipi lineerleştirme metodu kullanılarak sonlu-fark şemasını bulalım:

Kesirli türev ve II. mertebeden türevi, aşağıdaki fark yaklaşımları ile temsil edilsin.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2}$$

Bu ifadeler kesirli NWS denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2} + u_m^{k+1} - (u_m^{k+1})^p$$

bulunur. Her iki taraf Δt^α ile çarpılırsa;

$$\sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + \Delta t^\alpha u_m^{k+1} - \Delta t^\alpha (u_m^{k+1})^p$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(u_m^{k+1}) = u_m^{k+1} - \Delta t^\alpha u_m^{k+1} + \Delta t^\alpha (u_m^{k+1})^p + \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} - \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) = 0$$

$$u_m^{k+1} = V_m^k + \varepsilon_m^k, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

şeklinde yazılabilir. Burada V_m^k bilinen değerler, ε_m^k bilinmeyen değerlerdir. f fonksiyonu $u_m^{k+1} = V_m^k$ civarında I. mertebeden türeve kadar Taylor serisine açılırsa;

$$f(u_m^{k+1}) = f(V_m^k) + (1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^{k+1})^{p-1}) \Big|_{u_m^{k+1}=V_m^k} \varepsilon_m^k = 0$$

elde edilir. Düzenlenirse;

$$\varepsilon_m^k = \frac{-V_m^k + \Delta t^\alpha V_m^k - \Delta t^\alpha (V_m^k)^p - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (V_m^k)^{(p-1)}}$$

$$V_m^k = u_m^k$$

$$u_m^{k+1} = V_m^k + \varepsilon_m^k, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M-1, k = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

olduğundan yukarıdaki denklemlerden u_m^{k+1} çekilirse;

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)}} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu şemaya Newton tipi lineerleştirme metoduyla elde edilmiş sonlu-fark şeması (NTLM şeması) adı verilir.

3.5. Kesirli Newell-Whitehead-Segel Denklemi İçin Standart Olmayan Sonlu-Fark Şemaları

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^p \\ u(x, 0) = \xi(x) \\ u(0, t) = \zeta(t), \quad u(1, t) = \psi(t) \end{cases}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

başlangıç-sınır değer problemiyle verilmiş yukarıdaki kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemini için standart olmayan sonlu-fark şemasını oluşturalım:

u, u^p terimleri için lokal olmayan temsilleri aşağıdaki gibi alınsın:

$$u_m^k = 2u_m^k - u_m^k \rightarrow 2\tilde{u}_m^k - u_m^{k+1}, \quad (u_m^k)^p \rightarrow (\tilde{u}_m^k)^{p-1} u_m^{k+1}$$

$$\tilde{u}_m^k = \frac{u_{m+1}^k + u_{m-1}^k}{2}$$

Kesirli türev ve II. mertebeden türevi, aşağıdaki fark yaklaşımları ile temsil edilsin. Burada klasik anlamda payda fonksiyonları kullanılmıştır.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2}$$

Bu ifadeler kesirli NWS denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2} + 2\tilde{u}_m^k - u_m^{k+1} - (\tilde{u}_m^k)^{p-1} u_m^{k+1}$$

bulunur. Her iki taraf Δt^α ile çarpılırsa;

$$\sum_{j=0}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k - \Delta t^\alpha u_m^{k+1} - \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} u_m^{k+1}$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse ve u_m^{k+1} çekilirse;

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (3.5.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeması bulunur. Bulunan bu şemaya kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemi için standart olmayan sonlu-fark şeması (NSFDM şeması) adı verilir.

3.6. Kesirli NWS Denklemi İçin Sonlu-Fark Metotlarının Yakınsaklığının İncelenmesi

3.6.1. Sonlu-Fark Metotları için Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Koşulu

Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) koşulu, akışkan dinamiği denklemlerini, parabolik ve hiperbolik türden kısmi diferansiyel denklemleri veya sistemlerini nümerik olarak daha tutarlı ve doğru çözümler sağlayabilmesi için kararlı ve yakınsak nümerik şemalar elde etmekte kullanılır. CFL koşulu, II. mertebeden parabolik denklemler için açık nümerik şemalarda verilen çözüm elemanının yerel zaman adımı üzerinde bir üst sınırın varlığını ifade eder. Yani

$$C_{CFL} = \sigma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq C_{max}$$

Burada σ dalga hızı, hız büyüklüğü gibi denklemde ortaya çıkan katsayıdır. C_{CFL} , Courant sayısı olarak adlandırılan boyutsuz bir sayıdır. C_{max} kapalı veya açık şemalarda farklı değerler alabilen bir sayıdır. Genellikle açık şemalarda $C_{max} = 1$ olarak alınır.

Teorem 3.6.1.1 CFL koşulu; lineer, lineer olmayan, değişken katsayı içeren, başlangıç- sınır değer problemleri ile verilmiş veya herhangi bir norma göre oluşturulan vs. kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik yaklaşımlarının yakınsaklığı için gerekli koşuldur (Trefethen, 1996).

Teorem 3.6.1.2. Sonlu-fark yaklaşımı, iyi konumlanmış lineer başlangıç-sınır değer problemi için tutarlı bir nümerik yaklaşım olsun. CFL koşulu, sonlu-fark yaklaşımının kararlılığı için gerekli koşuldur (Trefethen, 1996).

CFL koşulu, nümerik sonlu-fark şemalarının kararlı ve yakınsak olması için gerekli koşuldur. Ancak yeterli koşul değildir. Bu durum da CFL koşulunun dezavantajıdır.

3.6.2. Kesirli NWS Denklemi İçin Sonlu-Fark Metodunun Yakınsaklığının İncelenmesi

Sonlu-fark metodunun tekrarlama bağıntısında ((3.3.1) denkleminde) $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2}$ olmak üzere u_m^{k+1} yeniden düzenlenirse;

$$u_m^{k+1} = R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + (\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^p$$

şeklinde yazılabilir.

Not 3.6.2.1. $\omega_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) \omega_{j-1}^\alpha$, $\omega_0^\alpha = 1$ fark denklemleri için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} \omega_j^\alpha &= \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) \left(1 - \frac{1+\alpha}{j-1}\right) \left(1 - \frac{1+\alpha}{j-2}\right) \dots (-\alpha).1 \\ &= \left(\frac{j-1-\alpha}{j}\right) \left(\frac{j-2-\alpha}{j-1}\right) \left(\frac{j-3-\alpha}{j-2}\right) \dots (-\alpha).1 \\ &= \left(\frac{j-1}{j} - \frac{\alpha}{j}\right) \left(\frac{j-2}{j-1} - \frac{\alpha}{j-1}\right) \left(\frac{j-3}{j-2} - \frac{\alpha}{j-2}\right) \dots (-\alpha).1 \\ &\leq \frac{j-1}{j} \cdot \frac{j-2}{j-1} \cdot \frac{j-3}{j-2} \dots (-\alpha).1 = \frac{-\alpha}{j} \end{aligned}$$

$0 < \alpha \leq 1$ olduğundan $|\omega_j^\alpha| \leq \frac{1}{j}$ eşitsizliği elde edilir.

SFDM şemanın pozitif ve sınırlı olma koşullarını inceleyelim. Bunun için $0 \leq u_m^k \leq 1$ olduğunu varsayalım.

$0 \leq u_m^k \leq 1 \Rightarrow (u_m^k)^p \leq u_m^k$ olduğundan $\Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^p \geq 0$ dır. Bundan dolayı u_m^{k+1} in pozitif olması için $(\alpha - 2R) \geq 0$ koşulunun sağlanması gereklidir.

$$(\alpha - 2R) \geq 0 \Leftrightarrow R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

u_m^{k+1} in sınırlılığı için ise $0 \leq u_m^k \leq 1$ iken $0 \leq u_m^{k+1} \leq 1$ olduğunu göstermek gerekir.

$0 \leq u_m^k \leq \frac{1}{2}$ ve $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ koşulları sağlansın. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
\|u_m^{k+1}\| &= \left\| R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + (\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^p \right\| \\
&\leq \|R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k)\| + \|(\alpha - 2R)u_m^k\| + \left\| \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} \right\| + \|\Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^p\| \\
&\leq R + \frac{(\alpha - 2R)}{2} + \sum_{j=2}^{k+1} |\omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}| + |\Delta t^\alpha| \|u_m^k - (u_m^k)^p\| \\
&\leq R + \frac{(\alpha - 2R)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k+1} |\omega_j^\alpha| + |\Delta t^\alpha| \|u_m^k\| \\
&\leq R + \frac{(\alpha - 2R)}{2} + \frac{1}{4}k + \frac{\Delta t^\alpha}{2}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$, $0 < \alpha \leq 1$ koşulu sağlandığı için $\Delta t^\alpha \leq \frac{\alpha \Delta x^2}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$ elde edilir. Yukarıda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|u_m^{k+1}\| &\leq R + \frac{(\alpha - 2R)}{2} + \frac{1}{4}k + \frac{\Delta t^\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}k + \frac{\alpha}{4}, k = 1, 2, 3, \dots \\
&\Rightarrow \|u_m^{k+1}\| \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4}, 0 < \alpha \leq 1 \\
&\Rightarrow \|u_m^{k+1}\| \leq \max_{0 < \alpha \leq 1} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $R \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $0 \leq u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında u_m^{k+1} hem pozitif hem de sınırlıdır. Bu koşullar altında u_m^{k+1} şeması tutarlıdır.

Bu takdirde $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında CFL koşulu sağlanmış olur. Teorem 3.6.1.1 ve 3.6.1.2 göre SFDM şeması hem kararlı hem de yakınsaktır.

3.6.3. Kesirli NWS Denklemi İçin Newton Tipi Lineerleştirme Metodunun Yakınsaklığının İncelenmesi

(3.4.1) ifadesinde $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2}$ alınarak u_m^{k+1} yeniden düzenlenirse;

$$u_m^{k+1} = \frac{(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + (\alpha - 2R)u_m^k + R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)}}$$

şeklinde yazılabilir.

Not 3.6.3.1. $p \geq 2, p \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $px^{p+1} \leq (p-1)x^p$ eşitsizliği vardır.

İspat: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ olduğundan $x \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{3}{4} \leq \dots \leq \frac{p-1}{p}$ eşitsizliği yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse $x \leq \frac{p-1}{p} \Rightarrow px \leq p-1 \Rightarrow px^{p+1} \leq (p-1)x^p$ elde edilir.

Sonuç 3.6.3.2. $p \geq 2, p \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $\frac{1}{1+(p-1)x^p} \leq \frac{1}{1+px^{p+1}}$ eşitsizliği elde edilir.

NTLM şemasının pozitif ve sınırlı olma koşullarını inceleyelim. Bunun için $0 \leq u_m^k \leq 1$ olduğunu varsayalım. u_m^{k+1} in pozitif olması için $(\alpha - 2R) \geq 0$ koşulunun sağlanması yeterlidir.

$$(\alpha - 2R) \geq 0 \Leftrightarrow R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Δx yeterince küçük seçildiğinde $\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \Delta t^\alpha \leq \frac{\alpha}{2} \Delta x^2 \leq \frac{\alpha}{2}, 0 < \alpha \leq 1$ yazılabilir. Dolayısıyla u_m^{k+1} in pozitif olması koşulu $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}, 0 < \alpha \leq 1$ koşuluna bağlıdır.

u_m^{k+1} in sınırlılığı için ise $0 \leq u_m^k \leq 1$ iken $0 \leq u_m^{k+1} \leq 1$ olduğunu göstermek gerekir. Sınırlılığın ilk aşamasında $(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p < 1 - \Delta t^\alpha$ koşulu sağlanmalıdır.

$$(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p < 1 - \Delta t^\alpha \Leftrightarrow (p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + \Delta t^\alpha < 1 \Leftrightarrow \Delta t^\alpha < \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}$$

$(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p < 1 - \Delta t^\alpha$ koşulunun sağlanması $\Delta t^\alpha < \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}$ koşulunun sağlanmasına denktir.

İkinci aşamada $2 \leq p \in \mathbb{N}, R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}, 0 < \alpha \leq 1$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında

$\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}$ olduğunu tümevarım yardımıyla ispatlayalım.

$(u_m^k)^2 < 1$ ve $0 < \alpha \leq 1$ eşitsizliklerini kullanarak $0 < \alpha + \alpha(u_m^k)^2 < 2$ olur. Buradan düzenleme yapılırsa $\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(u_m^k)^2}$ elde edilir. $p = 2$ için doğrudur. $p = r$ için verilen eşitsizlik doğru olsun. Yani $\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(r-1)(u_m^k)^r}$ olsun. Gösterelim ki verilen eşitsizlik $p = r + 1$ için de doğrudur.

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \dots < \frac{r-1}{r}$ eşitsizliği kullanılarak $u_m^k \leq \frac{1}{2} < \dots < \frac{r-1}{r}$ olduğundan $ru_m^k < r-1$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $(u_m^k)^r$ ile çarpılırsa $r(u_m^k)^{r+1} < (r-1)(u_m^k)^r$ bulunur.

$\Rightarrow 1 + r(u_m^k)^{r+1} < 1 + (r-1)(u_m^k)^r$ olup $\frac{1}{1+(r-1)(u_m^k)^r} < \frac{1}{1+r(u_m^k)^{r+1}}$ elde edilir.

O halde $\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(r-1)(u_m^k)^r} < \frac{1}{1+r(u_m^k)^{r+1}}$ sonucu bulunur. Yani $p = r + 1$ için de doğrudur.

Sonuç 3.6.3.2. ye göre aşağıdaki ilişki yazılabilir:

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(u_m^k)^2} < \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}, \quad p = 2, 3, \dots$$

bulunur.

$$R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + (\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = B(\alpha)$$

denirse, $\alpha = 1, R = 0.5, u_{m+1}^k = u_{m-1}^k = 0$ alındığında $B(\alpha) = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned} |B(\alpha)| &= \left| R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + (\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} \right| \\ &\leq R + \frac{\alpha - 2R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k+1} |\omega_j^\alpha| \leq R + \frac{\alpha - 2R}{2} + \frac{k}{4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |B(\alpha)| \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{k}{4}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ yazılabilir. $B(\alpha) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{k}{4}$, $0 < \alpha \leq 1$ olduğundan buradan $0 \leq B(\alpha) < 1$ bulunur.

$\Rightarrow 1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)} \leq 1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)} + B(\alpha)$ olduğundan

$$\frac{1}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)} + B(\alpha)} \leq \frac{1}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)}}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliği kullanırsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)} + B(\alpha)} \leq \frac{(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{(p-1)}} \quad (3.6.3.3)$$

Son aşamada $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında $\forall B(\alpha)$ için $(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha) \leq 1 - \Delta t^\alpha$ olduğunu göstereyim. Çelişki ile ispat için

$(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha) > 1 - \Delta t^\alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\forall B(\alpha)$ için bu eşitsizlik sağlanacağından $B(\alpha) = 0$ için de sağlamaktır.

O zaman $(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p > 1 - \Delta t^\alpha$ yazılabilir. Buradan $\Delta t^\alpha > \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}$ bulunur.

Bu ifade $\Delta t^\alpha \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}$ ile çelişir. Kabul yanlıştır. $\Delta t^\alpha \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{1+(p-1)(u_m^k)^p}$ koşulu sağlandığında $\forall B(\alpha)$ için $(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha) \leq 1 - \Delta t^\alpha$ elde edilir.

$$(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha) \leq 1 - \Delta t^\alpha \leq 1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{p-1}$$

eşitsizliği yazılabildiğinden dolayı (3.6.3.3) ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\frac{(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{p-1} + B(\alpha)} \leq u_m^{k+1} = \frac{(p-1)\Delta t^\alpha (u_m^k)^p + B(\alpha)}{1 - \Delta t^\alpha + p\Delta t^\alpha (u_m^k)^{p-1}} \leq 1$$

elde edilir. Sonuç olarak $R \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında $0 \leq u_m^k \leq 1$ iken $0 \leq u_m^{k+1} \leq 1$ bulunur. Böylece $R \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında u_m^{k+1} hem pozitif hem de sınırlıdır. Bu koşullar altında u_m^{k+1} şeması tutarlıdır.

Bu takdirde $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında CFL koşulu sağlanmış olur. Teorem 3.6.1.1 ve 3.6.1.2 göre NTLM şeması hem kararlı hem de yakınsaktır.

3.6.4. Kesirli NWS Denklemi İçin Standart Olmayan Sonlu-Fark Metodunun Yakınsaklığının İncelenmesi

(3.4.1) standart olmayan sonlu-fark metodunun tekrarlama bağıntısında $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2}$ yazılarak u_m^{k+1} düzenlenirse;

$$u_m^{k+1} = \frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + (\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}}$$

tekrarlama bağıntısı elde edilir. Bu çözüm şemasının pozitiflik ve sınırlılık koşullarını inceleyelim. Bunun için $0 \leq u_m^k \leq 1$ olduğunu varsayalım.

u_m^{k+1} in pozitif olması için $(\alpha - 2R) \geq 0$ koşulunun sağlanması yeterlidir.

$$(\alpha - 2R) \geq 0 \Leftrightarrow R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

u_m^{k+1} in sınırlılığı için ise $0 \leq u_m^k \leq 1$ iken $0 \leq u_m^{k+1} \leq 1$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için ilk önce $R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k \leq 1 + \Delta t^\alpha$ koşulu sağlanmalıdır.

$0 \leq u_{m+1}^k \leq 1$, $0 \leq u_{m-1}^k \leq 1$ olduğundan $0 \leq u_{m+1}^k + u_{m-1}^k \leq 2$ yazılabilir. Buradan $R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) \leq 2R \leq \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olduğundan $R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) \leq 1$ dir.

$R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k \leq 1 + \Delta t^\alpha$ koşulunun sağlanması ile $2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k \leq \Delta t^\alpha$ koşulunun sağlanması denktir. O halde $\Delta t^\alpha > 0$ olduğundan $\tilde{u}_m^k \leq \frac{1}{2}$ olmalıdır.

Ayrıca $R \leq \frac{\alpha}{2}$ koşulu sağlandığında $R \leq \tilde{u}_m^k \leq \frac{\alpha}{2}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için kabul edelim ki $R > \tilde{u}_m^k$ olsun. Bu takdirde $R > \max\{\tilde{u}_m^k\} = \frac{1}{2}$ olduğundan $R > \frac{1}{2}$ yazılabilir. Bu ifade $R \leq \frac{\alpha}{2}$ olmasıyla çelişir. Kabul yanlıştır. $R \leq \frac{\alpha}{2}$ koşulu sağlandığında $R \leq \tilde{u}_m^k \leq \frac{\alpha}{2}$ koşulu da sağlanır.

$(\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} = A(\alpha)$ denirse, $\alpha = 1, R = 0.5$ alındığında $A(\alpha) = 0$ bulunur.

$$|A(\alpha)| = \left| (\alpha - 2R)u_m^k - \sum_{j=2}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} \right| \leq \alpha - 2R + \sum_{j=2}^{k+1} |\omega_j^\alpha| \leq \alpha - 2R + k$$

$\Rightarrow |A(\alpha)| \leq \alpha - 2R + k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ yazılabilir. Bu durum $\forall (\alpha - 2R) \geq 0$ olduğunda sağlanması gerektiğinden $A(\alpha) \leq k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ olmalıdır.

$\Rightarrow \{A(\alpha) \leq k, k = 1, 2, 3, \dots\} = \min\{A(\alpha) \leq 1, A(\alpha) \leq 2, A(\alpha) \leq 3, \dots\} = A(\alpha) \leq 1$ bulunur. $\Rightarrow 0 \leq A(\alpha) \leq 1$ elde edilir.

$\Rightarrow 1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} \leq 1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} + A(\alpha)$ olduğundan

$$\frac{1}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} + A(\alpha)} \leq \frac{1}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliği kullanırsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha)}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} + A(\alpha)} \leq \frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha)}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}} \quad (3.6.4.1)$$

Son aşamada $R \leq \tilde{u}_m^k \leq \frac{\alpha}{2}$ koşulu sağlandığında $R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) \leq 1 + \Delta t^\alpha$ olduğunu gösterelim. $R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) \leq 1$ olduğundan $2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) \leq \Delta t^\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) > \Delta t^\alpha$ olsun.

Bu takdirde $\forall A(\alpha), \alpha \in (0,1]$ için $2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) > \Delta t^\alpha$ sağlanacağından $A(\alpha) = 0$ için de sağlanmak zorundadır. O halde $2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k > \Delta t^\alpha$ yazılabilir. $\Delta t^\alpha > 0$ olduğundan $\tilde{u}_m^k > \frac{1}{2}$ bulunur. Bu ifade $\tilde{u}_m^k \leq \frac{\alpha}{2}$ koşulu ile çelişir. Kabul yanlıştır. O halde $2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) \leq \Delta t^\alpha$ eşitsizliği sağlanır.

$$R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) \leq 1 + \Delta t^\alpha$$

olduğundan eşitsizlik daha da büyütülürse;

$$\begin{aligned} R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha) &\leq 1 + \Delta t^\alpha \leq 1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} \\ \Rightarrow \frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha)}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}} &\leq 1 \end{aligned}$$

yazılır. (3.6.4.1) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha)}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1} + A(\alpha)} &\leq \frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha)}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}} \leq 1 \\ u_m^{k+1} &= \frac{R(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k + A(\alpha)}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^{p-1}} \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $R \leq \frac{\alpha}{2}$, $\tilde{u}_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında $0 \leq u_m^{k+1} \leq 1$ bulunur. Böylece verilen koşullar sağlandığında u_m^{k+1} hem pozitif hem de sınırlıdır.

Bu koşullar altında u_m^{k+1} şeması tutarlıdır. Bu takdirde $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $\tilde{u}_m^k \leq \frac{1}{2}$ koşulları sağlandığında CFL koşulu sağlanmış olur. Teorem 3.6.1.1 ve 3.6.1.2 göre NSFDM şeması hem kararlı hem de yakınsaktır.

4.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemleri için 4 tane örnek alınarak standart sonlu-fark, Newton tipi lineerleştirme ve standart olmayan sonlu-fark metotları ile çözümleri yapılmıştır. Bu tezdeki bütün örnekler için, (3.1.1) kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminde $k = 1, c = 1, d = 1, \gamma = 2$ olarak alınmıştır. Çözümler farklı α değerleri için tablolar ve grafikler halinde gösterilmiştir. Programlama Maple 12 programı kullanılarak kodlanmıştır.

4.1.Örnek 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^2 \\ u(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2} \\ u(0, t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{-5t}{6}}\right)^2}, u(1, t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{1-\sqrt{6}-5t}{6}}\right)^2} \end{array} \right. \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklindeki kesirli NWS denklemi göz önüne alalım. Bu denklem (3.1.1) kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminde $p = 2, \xi(x) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2},$

$\zeta(t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{-5t}{6}}\right)^2}, \psi(t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{1-\sqrt{6}-5t}{6}}\right)^2}$ alınması durumunda elde edilir. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x-\sqrt{6}-5t}{6}}\right)^2}.$$

şeklinde verilir (Zulfiqar vd., 2019). Bu problemi sonlu-fark metodu, Newton tipi lineerleştirme metodu ve standart olmayan sonlu-fark metodu ile çözelim. Örnek 1 için (3.3.1) standart sonlu-fark şeması (SFDM şeması)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{k+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^2 \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), u_M^k = \psi(t_k) \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklinde elde edilir.

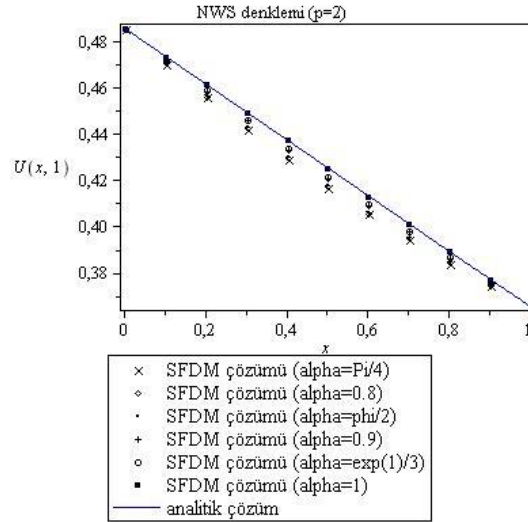
(4.1.1) SFDM şemasında $t = 1, \Delta x = \frac{1}{10}, \Delta t = \frac{1}{1000}, M = 10, K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.1.2.a $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457
0.1	0.4738528457	0.4738525856	0.4724561945	0.4723675052
0.2	0.4617820225	0.4617814412	0.4593319606	0.4591764817
0.3	0.4496921627	0.4496912543	0.4465204545	0.4463193077
0.4	0.4375965071	0.4375953147	0.4340232812	0.4337968030
0.5	0.4255085007	0.4255071124	0.4218417318	0.4216094496
0.6	0.4134417432	0.4134402827	0.4099764778	0.4097570693
0.7	0.4014099287	0.4014085519	0.3984273634	0.3982386030
0.8	0.3894267963	0.3894256811	0.3871933006	0.3870520054
0.9	0.3775060651	0.3775054065	0.3762722631	0.3761942406
1.0	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806

Çizelge 4.1.2.b $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457
0.1	0.4738528457	0.4711050558	0.4709870677	0.4707992221
0.2	0.4617820225	0.4569680396	0.4567621852	0.4564335786
0.3	0.4496921627	0.4434672503	0.4432019869	0.4427802986
0.4	0.4375965071	0.4305900428	0.4302922976	0.4298173765
0.5	0.4255085007	0.4183237736	0.4180190672	0.4175350982
0.6	0.4134417432	0.4066552761	0.4063678150	0.4059094798
0.7	0.4014099287	0.3955704933	0.3953232563	0.3949306408
0.8	0.3894267963	0.3850542777	0.3848690839	0.3845738090
0.9	0.3775060651	0.3750903443	0.3749879137	0.3748251679
1.0	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806



Şekil 4.1.3 $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

(3.4.1) Newton tipi lineerleştirme metoduyla oluşturulan sonlu-fark şeması

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{\Delta t^\alpha (u_m^k)^2 - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + 2\Delta t^\alpha u_m^k} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

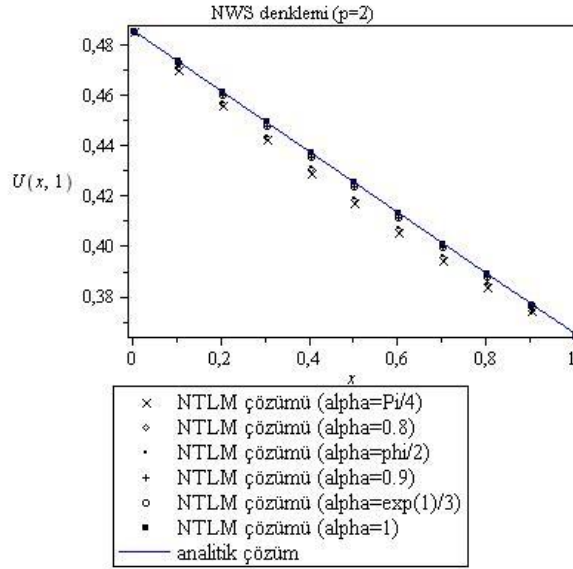
şeklinde elde edilir. (4.1.4) NTLM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.1.5.a $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457
0.1	0.4738528457	0.4738856794	0.4732948535	0.4732294208
0.2	0.4617820225	0.4618702204	0.4608292604	0.4607140288
0.3	0.4496921627	0.4498464941	0.4484921509	0.4483423340
0.4	0.4375965071	0.4378162487	0.4362816189	0.4361120206
0.5	0.4255085007	0.4257817550	0.4241965144	0.4240215394
0.6	0.4134417432	0.4137458037	0.4122364145	0.4120700663
0.7	0.4014099287	0.4017117059	0.4004015839	0.4002574629
0.8	0.3894267963	0.3896832894	0.3886929661	0.3885842596
0.9	0.3775060651	0.3776648965	0.3771121514	0.3770516284
1.0	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806

Çizelge 4.1.5.b $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457
0.1	0.4738528457	0.4715459108	0.4712808496	0.4708106577
0.2	0.4617820225	0.4577496019	0.4572828984	0.4564186095
0.3	0.4496921627	0.4444893013	0.4438827815	0.4428103019
0.4	0.4375965071	0.4317525740	0.4310665139	0.4297932698
0.5	0.4255085007	0.4195275125	0.4188205660	0.4175725667
0.6	0.4134417432	0.4078023849	0.4071314533	0.4058857803
0.7	0.4014099287	0.3965653812	0.3959854221	0.3949615516
0.8	0.3894267963	0.3858044667	0.3853682780	0.3845596719
0.9	0.3775060651	0.3755073216	0.3752653166	0.3748373601
1.0	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806



Şekil 4.1.6. $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

(3.5.1) standart olmayan sonlu-fark şeması ; (NSFDM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.1.7)$$

$$\tilde{u}_m^k = \frac{u_{m+1}^k + u_m^k + u_{m-1}^k}{3}$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

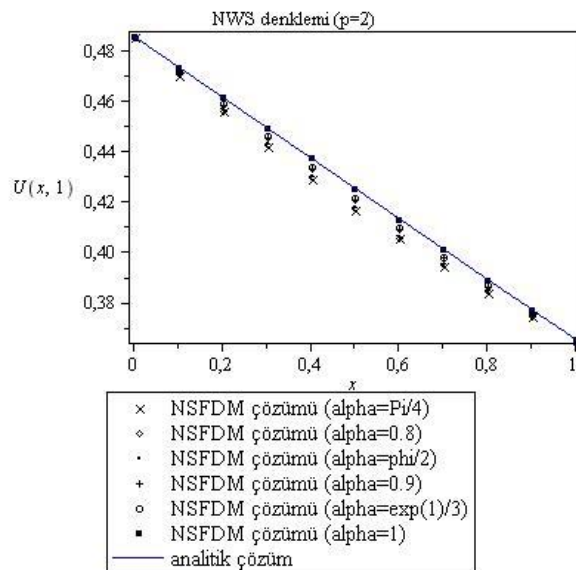
şeklinde elde edilir. (4.1.7) NSFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.1.8.a $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457
0.1	0.4738528457	0.4738375446	0.4724490351	0.4723608435
0.2	0.4617820225	0.4617550437	0.4593195207	0.4591649222
0.3	0.4496921627	0.4496570317	0.4465044468	0.4463044467
0.4	0.4375965071	0.4375566609	0.4340052821	0.4337801027
0.5	0.4255085007	0.4254672975	0.4218232162	0.4215922725
0.6	0.4134417432	0.4134024664	0.4099588542	0.4097407138
0.7	0.4014099287	0.4013757960	0.3984120116	0.3982243440
0.8	0.3894267963	0.3894009623	0.3871816087	0.3870411313
0.9	0.3775060651	0.3774916270	0.3762656627	0.3761880913
1.0	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806

Çizelge 4.1.8.b $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457	0.4858916457
0.1	0.4738528457	0.4711052172	0.4709878449	0.4708007417
0.2	0.4617820225	0.4569684917	0.4567637175	0.4564372618
0.3	0.4496921627	0.4434679920	0.4432041243	0.4427840311
0.4	0.4375965071	0.4305909720	0.4302947994	0.4298230760
0.5	0.4255085007	0.4183247315	0.4180216387	0.4175394637
0.6	0.4134417432	0.4066560922	0.4063701580	0.4059149460
0.7	0.4014099287	0.3955710340	0.3953251132	0.3949339685
0.8	0.3894267963	0.3850544952	0.3848702903	0.3845770150
0.9	0.3775060651	0.3750903235	0.3749884399	0.3748263281
1.0	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806	0.3656613806



Şekil 4.1.9. $p = 2$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

$p = 2$ durumunda kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemini $\alpha = 1, \frac{e}{3}, 0.9, \frac{\varphi}{2}, 0.8, \frac{\pi}{4}$ için sonlu-fark metodu (SFDM), Newton lineerleştirme metoduyla (NTLM) ve standart olmayan sonlu-fark metodu (NSFDM) ile nümerik olarak çözülmüştür. Yukarıdaki tablolardan ve grafiklerden $\alpha = 1$ durumunda, analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki hata değerlerinin çok az olduğu gözlemlenmiştir. Zaman değeri arttıkça hesaplama hacmi artmasına rağmen nümerik değerlerin analitik değerlerle uyumlu olduğu hem tablolardan hem de grafiklerden yorumlanabilir.

4.2.Örnek 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3 \\ u(x, 0) = \frac{-1 + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{1 + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}} \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2e^{-\frac{3t}{2}}} \end{array} \right. \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklinde başlangıç-sınır değer problemlili kesirli NWS denklemini inceleyelim. Bu denklem (3.1.1) kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminde $p = 3$, $\xi(x) = \frac{-1+e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{1+e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}$, $\zeta(t) = 0$, $\psi(t) = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}+2e^{-\frac{3t}{2}}}$ alınmasıyla elde edilir. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} + 2e^{-\frac{3t}{2}}}$$

biçimindedir (Zulfiqar vd., 2019). Örnek 2 için (3.3.1) standart sonlu-fark şeması (SFDM şeması)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{k+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^3 \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

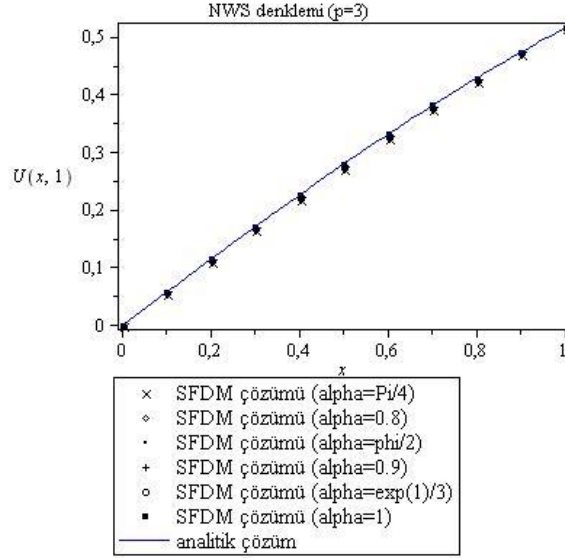
şeklinde elde edilir.(4.2.1) SFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.2.2.a $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Anolitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0	0	0	0
0.1	0.0577413647	0.0577862482	0.0569761573	0.0569113196
0.2	0.1150659662	0.1151515091	0.1135792095	0.1134538683
0.3	0.1715694731	0.1716876301	0.1694494539	0.1692721766
0.4	0.2268716326	0.2270112925	0.2242528522	0.2240362442
0.5	0.2806264256	0.2807744316	0.2776913663	0.2774517934
0.6	0.3325301859	0.3326725003	0.3295109292	0.3292681962
0.7	0.3823273369	0.3824502235	0.3795069154	0.3792839210
0.8	0.4298136205	0.4299047209	0.4275271273	0.4273495377
0.9	0.4748369009	0.4748860980	0.4734724930	0.4733684669
1.0	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920

Çizelge 4.2.2.b $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Anolitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0	0	0	0
0.1	0.0577413647	0.0559249266	0.0558294532	0.0556774487
0.2	0.1150659662	0.1115480722	0.1113636014	0.1110672091
0.3	0.1715694731	0.1665790538	0.1663183484	0.1659030896
0.4	0.2268716326	0.2207493736	0.2204311347	0.2199197396
0.5	0.2806264256	0.2738213918	0.2734697948	0.2729092565
0.6	0.3325301859	0.3255954955	0.3252396563	0.3246676790
0.7	0.3823273369	0.3759153628	0.3755888087	0.3750674933
0.8	0.4298136205	0.4246713785	0.4244115637	0.4239937553
0.9	0.4748369009	0.4718023511	0.4716502793	0.4714070780
1.0	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920



Şekil 4.2.3. $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

(3.4.1) Newton tipi lineerleştirme metoduyla oluşturulan sonlu-fark şeması (NTLM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{2\Delta t^\alpha (u_m^k)^3 - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + 3\Delta t^\alpha (u_m^k)^2} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.2.4)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

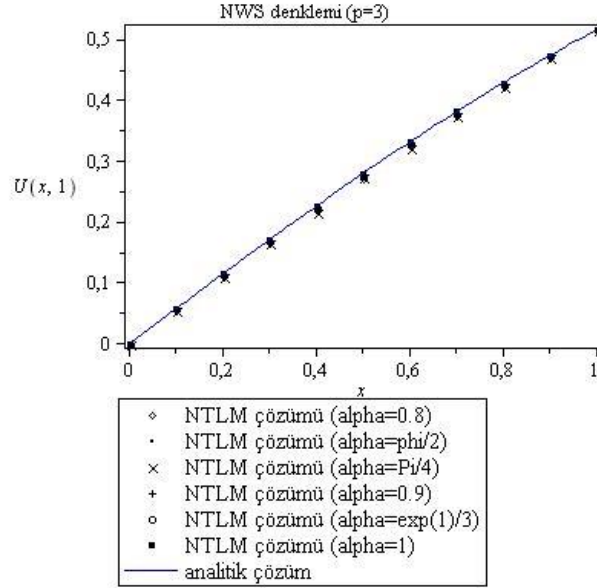
şeklinde elde edilir.(4.2.4) NTLM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırşa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.2.5.a $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0	0	0	0
0.1	0.0577413647	0.0577882904	0.0569782605	0.0569134305
0.2	0.1150659662	0.1151554103	0.1135832318	0.1134579061
0.3	0.1715694731	0.1716930394	0.1694550404	0.1692777848
0.4	0.2268716326	0.2270177201	0.2242595036	0.2240429213
0.5	0.2806264256	0.2807812879	0.2776984746	0.2774589298
0.6	0.3325301859	0.3326791432	0.3295178285	0.3292751227
0.7	0.3823273369	0.3824560078	0.3795129312	0.3792899601
0.8	0.4298136205	0.4299090461	0.4275316295	0.4273540568
0.9	0.4748369009	0.4748884530	0.4734749448	0.4733709277
1.0	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920

Çizelge 4.2.5.b $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Anolitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0	0	0	0
0.1	0.0577413647	0.0559271748	0.0558317182	0.0563405527
0.2	0.1150659662	0.1115523753	0.1113679363	0.1098178257
0.3	0.1715694731	0.1665850368	0.1663243766	0.1676337250
0.4	0.2268716326	0.2207565039	0.2204383200	0.2179078096
0.5	0.2806264256	0.2738290204	0.2734774814	0.2750366871
0.6	0.3325301859	0.3256029055	0.3252471240	0.3226690413
0.7	0.3823273369	0.3759218266	0.3755953236	0.3767776209
0.8	0.4298136205	0.4246762159	0.4244164399	0.4227665491
0.9	0.4748369009	0.4718049831	0.4716529318	0.4720570996
1.0	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920



Şekil 4.2.6 $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

(3.5.1) standart olmayan sonlu-fark şeması (NSFDM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^2} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.2.7)$$

$$\tilde{u}_m^k = \frac{u_{m+1}^k + u_{m-1}^k}{2}$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

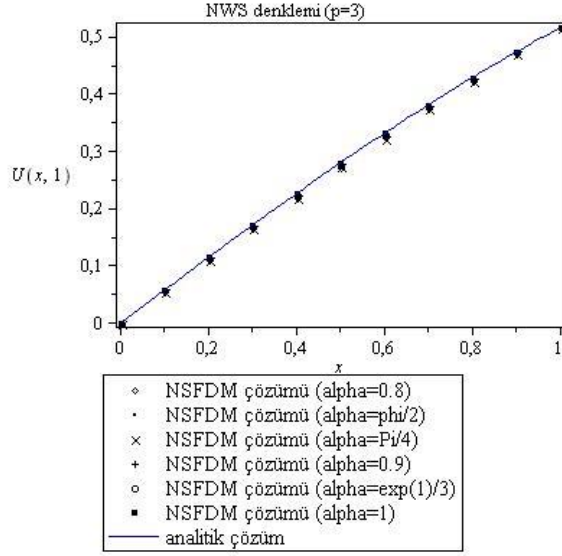
şeklinde elde edilir. (4.2.7) NSFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.2.8.a $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0	0	0	0
0.1	0.0577413647	0.05772550132	0.0569237744	0.0568597102
0.2	0.1150659662	0.1150347213	0.1134785746	0.1133547187
0.3	0.1715694731	0.1715239435	0.1693085684	0.1691333689
0.4	0.2268716326	0.2268137742	0.2240831093	0.2238690005
0.5	0.2806264256	0.2805593830	0.2775069034	0.2772700422
0.6	0.3325301859	0.3324586604	0.3293278989	0.3290878520
0.7	0.3823273369	0.3822579499	0.3793427430	0.3791221524
0.8	0.4298136205	0.4297552220	0.4273998171	0.4272240872
0.9	0.4748369009	0.4748007858	0.4734000503	0.4732970798
1.0	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920

Çizelge 4.2.8.b $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0	0	0	0
0.1	0.0577413647	0.0558850025	0.0557906250	0.0561047709
0.2	0.1150659662	0.1114713505	0.1112889837	0.1101133289
0.3	0.1715694731	0.1664715961	0.1662138341	0.1670153282
0.4	0.2268716326	0.2206198222	0.2203051246	0.2183775438
0.5	0.2806264256	0.2736804960	0.2733327417	0.2742683455
0.6	0.3325301859	0.3254555682	0.3251035368	0.3231245037
0.7	0.3823273369	0.3757897271	0.3754665837	0.3761484975
0.8	0.4298136205	0.4245738476	0.4243166745	0.4230349575
0.9	0.4748369009	0.4717467910	0.4715962197	0.4718106723
1.0	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920	0.5172957920



Şekil 4.2.9. $p = 3$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

$p = 3$ durumunda kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemi $\alpha = 1, \frac{e}{3}, 0.9, \frac{\varphi}{2}, 0.8, \frac{\pi}{4}$ için sonlu-fark metodu (SFDM), Newton lineerleştirme metod (NTLM) ve standart olmayan sonlu-fark metodu (NSFDM) ile nümerik olarak çözülmüştür. Yukarıdaki tablolardan ve grafiklerden $\alpha = 1$ durumunda, analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki hata değerlerinin çok az olduğu gözlemlenmiştir. Nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldığında sonuçların analitik değerlerle uyumlu olduğu hem tablolardan hem de grafiklerden yorumlanabilir.

4.3.Örnek 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^4 \\ u(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}} \\ u(0, t) = \left(\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{21t}{20}\right) + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad u(1, t) = \left(\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{-3}{2\sqrt{10}} + \frac{21t}{20}\right) + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \end{array} \right. \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer problemiyle verilmiş kesirli NWS denklemini inceleyelim. Bu denklem (3.1.1) kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminde $p = 4$,

$$\xi(x) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}}, \quad \zeta(t) = \left(\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{21t}{20}\right) + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$\psi(t) = \left(\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{-3}{2\sqrt{10}} + \frac{21t}{20}\right) + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ şeklinde alınarak elde edilir. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{-3}{2\sqrt{10}}\left(x - \frac{7t}{\sqrt{10}}\right)\right) + \frac{1}{2}^{\frac{2}{3}}$$

olarak verilir (Zulfiqar vd., 2019). Örnek 3 için (3.3.1) standart sonlu-fark şeması (SFDM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^4 \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

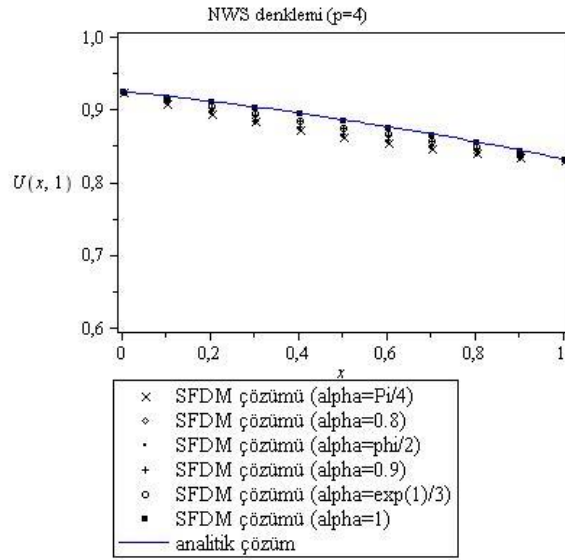
şeklinde elde edilir.(4.3.1) SFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.3.2.a $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028
0.1	0.9192365524	0.9192433025	0.9155358566	0.9152970793
0.2	0.9120702733	0.9120825191	0.9055614096	0.9051419344
0.3	0.9043500324	0.9043664512	0.8958793672	0.8953340476
0.4	0.8960475153	0.8960666992	0.8864295593	0.8858110088
0.5	0.8871354786	0.8871559196	0.8771643483	0.8765237050
0.6	0.8775882553	0.8776083340	0.8680467792	0.8674343026
0.7	0.8673823111	0.8674002876	0.8590491996	0.8585147443
0.8	0.8564968414	0.8565108512	0.8501522907	0.8497456817
0.9	0.8449144011	0.8449224573	0.8413444563	0.8411158086
1.0	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520

Çizelge 4.3.2.b $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Anolitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028
0.1	0.9192365524	0.9118376067	0.9115077789	0.9110097234
0.2	0.9120702733	0.8990783864	0.8985018250	0.8975206674
0.3	0.9043500324	0.8874664540	0.8867199958	0.8856046353
0.4	0.8960475153	0.8769005816	0.8760566485	0.8746134335
0.5	0.8871354786	0.8673057816	0.8664338370	0.8651367348
0.6	0.8775882553	0.8586286419	0.8577963634	0.8563730334
0.7	0.8673823111	0.8508339138	0.8501081837	0.8490261476
0.8	0.8564968414	0.8439021789	0.8433499508	0.8424100304
0.9	0.8449144011	0.8378284351	0.8375175520	0.8370501661
1.0	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520



Şekil 4.3.3. $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

(3.4.1) Newton tipi lineerleştirme metoduyla oluşturulan sonlu-fark şeması (NTLM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{3\Delta t^\alpha (u_m^k)^4 - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + 4\Delta t^\alpha (u_m^k)^3} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.3.4)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklinde elde edilir. (4.3.4) NTLM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$,

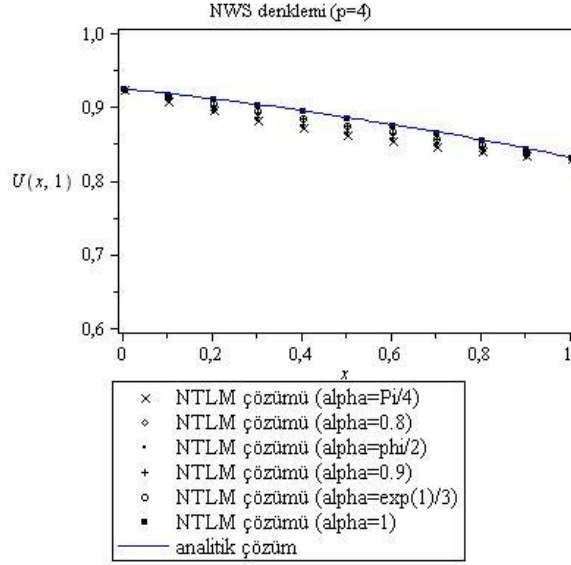
$M = 10, K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.3.5.a $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028
0.1	0.9192365524	0.9192296090	0.9155227292	0.9152839901
0.2	0.9120702733	0.9120581185	0.9055380919	0.9051186898
0.3	0.9043500324	0.9043342929	0.8958487145	0.8953034979
0.4	0.8960475153	0.8960297316	0.8863943913	0.8857759632
0.5	0.8871354786	0.8871171274	0.8771274929	0.8764869797
0.6	0.8775882553	0.8775707682	0.8680111087	0.8673987582
0.7	0.8673823111	0.8673670925	0.8590176680	0.8584833228
0.8	0.8564968414	0.8564852873	0.8501279723	0.8497214461
0.9	0.8449144011	0.8449079120	0.8413305837	0.8411019802
1.0	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520

Çizelge 4.3.5.b $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028
0.1	0.9192365524	0.9118251063	0.9114953379	0.9109675807
0.2	0.9120702733	0.8990562619	0.8984798127	0.8975553992
0.3	0.9043500324	0.8874374516	0.8866911487	0.8854984459
0.4	0.8960475153	0.8768673746	0.8760236246	0.8746716383
0.5	0.8871354786	0.8672710195	0.8663992705	0.8650072299
0.6	0.8775882553	0.8585950018	0.8577629124	0.8564302124
0.7	0.8673823111	0.8508041508	0.8500785847	0.8489202150
0.8	0.8564968414	0.8438791776	0.8433270704	0.8424428886
0.9	0.8449144011	0.8378152697	0.8375044519	0.8370080196
1.0	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520



Şekil 4.3.6. $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

(3.5.1) standart olmayan sonlu-fark şeması (NSFDM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^3} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \\ \tilde{u}_m^k = \frac{u_{m+1}^k + u_{m-1}^k}{2} \end{cases} \quad (4.3.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklinde elde edilir. (4.3.7) NSFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$,

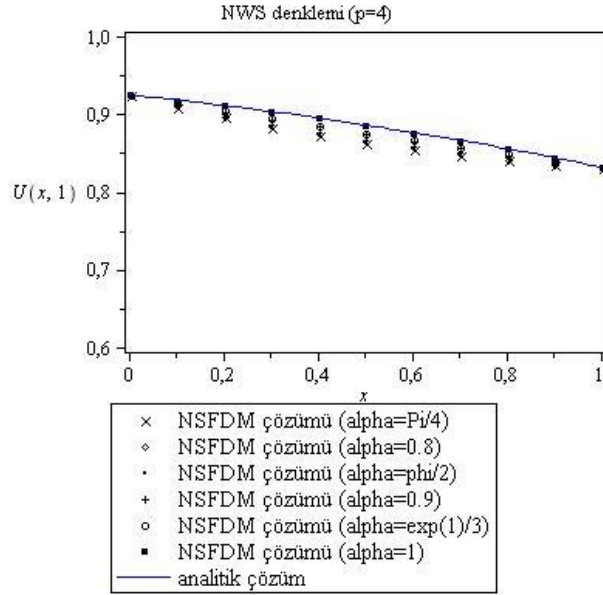
$M = 10, K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.3.8.a $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Anolitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028
0.1	0.9192365524	0.9192300400	0.9155228369	0.9152841488
0.2	0.9120702733	0.9120579107	0.9055383548	0.9051191163
0.3	0.9043500324	0.9043327657	0.8958490175	0.8953040993
0.4	0.8960475153	0.8960265863	0.8863945655	0.8857765594
0.5	0.8871354786	0.8871124315	0.8771273864	0.8764873844
0.6	0.8775882553	0.8775649396	0.8680106453	0.8673988448
0.7	0.8673823111	0.8673608818	0.8590168906	0.8584830677
0.8	0.8564968414	0.8564797490	0.8501270642	0.8497209608
0.9	0.8449144011	0.8449043697	0.8413298835	0.8411015298
1.0	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520

Çizelge 4.3.8.b $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028	0.9258778028
0.1	0.9192365524	0.9118262403	0.9114965780	0.9109688674
0.2	0.9120702733	0.8990595226	0.8984833690	0.8975596784
0.3	0.9043500324	0.8874429828	0.8866971790	0.8855049465
0.4	0.8960475153	0.8768747568	0.8760316860	0.8746811895
0.5	0.8871354786	0.8672794952	0.8664085430	0.8650173619
0.6	0.8775882553	0.8586036265	0.8577723729	0.8564414183
0.7	0.8673823111	0.8508119248	0.8500871394	0.8489296830
0.8	0.8564968414	0.8438851405	0.8433336593	0.8424507305
0.9	0.8449144011	0.8378185816	0.8375081269	0.8370121498
1.0	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520	0.8326215520



Şekil 4.3.9. $p = 4$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

$p = 4$ durumunda kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemi $\alpha = 1, \frac{e}{3}, 0.9, \frac{\varphi}{2}, 0.8, \frac{\pi}{4}$ için sayısal çözümleri Çizelge 4.3.2.a-b, 4.3.5.a-b, 4.3.8.a-b ve Şekil 4.3.3, 4.3.6, 4.3.9 ile birlikte verilmiştir.

4.4.Örnek 4

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^5 \\ u(x, 0) = \frac{1}{(1 + 4e^{\frac{2\sqrt{3}x}{3}})^{\frac{1}{2}}} \\ u(0, t) = \frac{1}{(1 + 4e^{-\frac{8t}{3}})^{\frac{1}{2}}}, \quad u(1, t) = \frac{1}{(1 + 4e^{\frac{-8t}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}})^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right. \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer problemlili kesirli NWS denklemi göz önüne alalım. Bu denklem (3.1.1) kesirli Newell-Whitehead-Segel denkleminde $p = 5$,

$$\xi(x) = \frac{1}{(1 + 4e^{\frac{2\sqrt{3}x}{3}})^{\frac{1}{2}}}, \quad \zeta(t) = \frac{1}{(1 + 4e^{-\frac{8t}{3}})^{\frac{1}{2}}}, \quad \psi(t) = \frac{1}{(1 + 4e^{\frac{-8t}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{alınarak elde edilir.}$$

Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + 4e^{\frac{-8t}{3} + \frac{2\sqrt{3}x}{3}})^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde verilir (Polyanin and Zaitsev, 2004). Örnek 4 için (3.3.1) standart sonlu-fark şeması (SFDM şeması)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{k+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \Delta t^\alpha u_m^k - \Delta t^\alpha (u_m^k)^5 \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

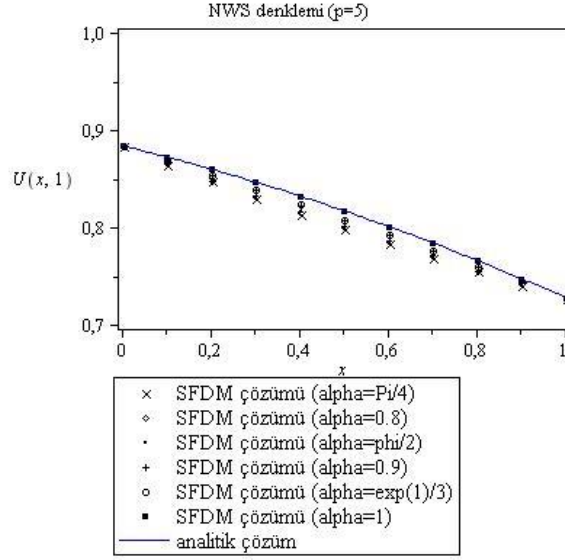
şeklinde elde edilir.(4.4.1) SFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.4.2.a $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305
0.1	0.8730534569	0.8730657593	0.8698475815	0.8696457373
0.2	0.8606194576	0.8606413122	0.8550401261	0.8546892644
0.3	0.8472770659	0.8473057479	0.8400902856	0.8396388502
0.4	0.8330163019	0.8330490904	0.8249386628	0.8244318367
0.5	0.8178370596	0.8178712264	0.8095480604	0.8090285590
0.6	0.8017501230	0.8017829286	0.7939007313	0.7934093429
0.7	0.7847779318	0.7848066293	0.7779961644	0.7775720998
0.8	0.7669550296	0.7669768753	0.7618492536	0.7615303537
0.9	0.7483281457	0.7483404142	0.7454887417	0.7453115954
1.0	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678

Çizelge 4.4.2.b $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305
0.1	0.8730534569	0.8667829866	0.8665158019	0.8660906960
0.2	0.8606194576	0.8497245524	0.8492624564	0.8485240786
0.3	0.8472770659	0.8332641221	0.8326722207	0.8317320445
0.4	0.8330163019	0.8172877674	0.8166258159	0.8155689328
0.5	0.8178370596	0.8017170391	0.8010407611	0.7999677798
0.6	0.8017501230	0.7865022118	0.7858642369	0.7848463418
0.7	0.7847779318	0.7716171239	0.7710676688	0.7701963800
0.8	0.7669550296	0.7570552311	0.7566425938	0.7559845964
0.9	0.7483281457	0.7428266304	0.7425975615	0.7422343008
1.0	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678



Şekil 4.4.3. $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin SFDM ile nümerik çözümleri

(3.4.1) Newton tipi lineerleştirme metoduyla oluşturulan sonlu-fark şeması (NTLM şeması)

$$\begin{cases} u_m^{k+1} = \frac{4\Delta t^\alpha (u_m^k)^5 - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1} + \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k)}{1 - \Delta t^\alpha + 5\Delta t^\alpha (u_m^k)^4} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \end{cases} \quad (4.4.4)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

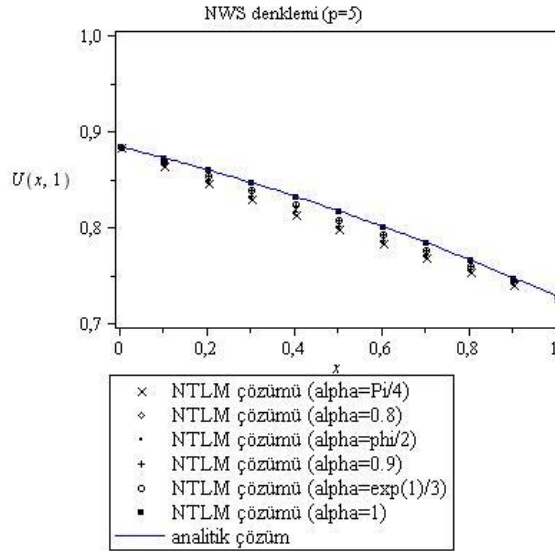
şeklinde elde edilir.(4.4.4) NTLM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$, $M = 10$, $K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.4.5.a $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Anolitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305
0.1	0.8730534569	0.8730500198	0.8698327042	0.8696309111
0.2	0.8606194576	0.8606145021	0.8550149222	0.8546641565
0.3	0.8472770659	0.8472719978	0.8400586972	0.8396073895
0.4	0.8330163019	0.8330120576	0.8249041157	0.8243974367
0.5	0.8178370596	0.8178341454	0.8095135428	0.8089941929
0.6	0.8017501230	0.8017486620	0.7938688641	0.7933776182
0.7	0.7847779318	0.784777161	0.7779692683	0.7775453224
0.8	0.7669550296	0.7669555842	0.7618294158	0.7615106021
0.9	0.7483281457	0.7483288053	0.7454778939	0.7453007932
1.0	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678

Çizelge 4.4.5.b $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305
0.1	0.8730534569	0.8667688756	0.8665017542	0.8660849709
0.2	0.8606194576	0.8497007699	0.8492387929	0.8484849073
0.3	0.8472770659	0.8332344351	0.8326426920	0.8317245345
0.4	0.8330163019	0.8172553946	0.8165936230	0.8155112721
0.5	0.8178370596	0.8016847510	0.8010086576	0.7999632792
0.6	0.8017501230	0.7864724230	0.7858346191	0.7847908544
0.7	0.7847779318	0.7715919673	0.7710426543	0.7701939916
0.8	0.7669550296	0.7570366435	0.7566241090	0.7559499285
0.9	0.7483281457	0.7428164359	0.7425874203	0.7422328756
1.0	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678



Şekil 4.4.6. $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NTLM ile nümerik çözümleri

(3.5.1) standart olmayan sonlu-fark şeması (NSFDM şeması)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{k+1} = \frac{\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k) + 2\Delta t^\alpha \tilde{u}_m^k - \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j^\alpha u_m^{k-j+1}}{1 + \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (\tilde{u}_m^k)^\alpha} \\ u_m^0 = \xi(x_m) \\ u_0^k = \zeta(t_k), \quad u_M^k = \psi(t_k) \\ \tilde{u}_m^k = \frac{u_{m+1}^k + u_{m-1}^k}{2} \end{array} \right. \quad (4.4.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklinde elde edilir. (4.4.7) NSFDM şemasında $t = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$, $\Delta t = \frac{1}{1000}$,

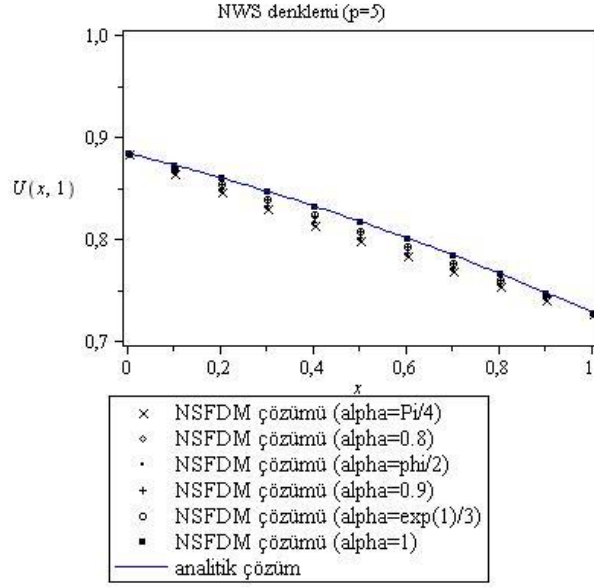
$M = 10, K = 1000$ alınırsa aşağıdaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.4.8.a $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{e}{3}$	$\alpha = 0.9$
0	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305
0.1	0.8730534569	0.8730412658	0.8698278534	0.8696263340
0.2	0.8606194576	0.8605954351	0.8550045633	0.8546543939
0.3	0.8472770659	0.8472425320	0.8400427245	0.8395923262
0.4	0.8330163019	0.8329735167	0.8248830979	0.8243775848
0.5	0.8178370596	0.8177891945	0.8094887830	0.8089707621
0.6	0.8017501230	0.8017011983	0.7938424079	0.7933525302
0.7	0.7847779318	0.7847327249	0.7779438664	0.7775211870
0.8	0.7669550296	0.7669189461	0.7618084534	0.7614906470
0.9	0.7483281457	0.7483070482	0.7454652757	0.7452887587
1.0	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678

Çizelge 4.4.8.b $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

x_m	Analitik	$\alpha = \frac{\varphi}{2}$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
0	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305	0.8845977305
0.1	0.8730534569	0.8667679489	0.8665011444	0.8660824723
0.2	0.8606194576	0.8496990229	0.8492377473	0.8484895178
0.3	0.8472770659	0.8332316047	0.8326409316	0.8317181450
0.4	0.8330163019	0.8172512125	0.8165908118	0.8155180754
0.5	0.8178370596	0.8016791606	0.8010046260	0.7999537910
0.6	0.8017501230	0.7864657088	0.7858295106	0.7847958269
0.7	0.7847779318	0.7715848275	0.7710370010	0.7701841985
0.8	0.7669550296	0.7570302079	0.7566188569	0.7559512582
0.9	0.7483281457	0.7428122541	0.7425839287	0.7422279779
1.0	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678	0.7289558678



Şekil 4.4.9 $p = 5$ için kesirli NWS denkleminin NSFDM ile nümerik çözümleri

$p = 5$ durumunda kesirli Newell-Whitehead-Segel denklemini $\alpha = 1, \frac{e}{3}, 0.9, \frac{\varphi}{2}, 0.8, \frac{\pi}{4}$ için sayısal çözümler Çizelge 4.4.2.a-b, 4.4.5.a-b, 4.4.8.a-b ve Şekil 4.4.3, 4.4.6, 4.4.9 ile birlikte verilmiştir. $p = 5$ durumu için literatürde daha önce herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu tezde ilk defa bu durum için sayısal çözümler üç farklı sonlu-fark metoduyla bulunmuş ve $\alpha = 1$ durumunda analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerden olan kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemi için $p = 2,3,4,5$ durumları incelenmiştir. Kesirli NWS denklemi için sonlu-fark, Newton tipi lineerleştirme yöntemiyle elde edilmiş sonlu-fark şemaları ve standart olmayan sonlu-fark şemaları oluşturulmuştur.

Daha sonra oluşturulan kesirli NWS denklemi için sonlu-fark şemalarının pozitiflik, sınırlılık, tutarlılık, yakınsaklık ve kararlılıkları için koşullar elde edilmiştir. Bu koşullar sonlu-fark metodu için $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$, Newton tipi lineerleştirme metodu için $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $u_m^k \leq \frac{1}{2}$, standart olmayan sonlu-fark metodu için $R = \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$ ve $\tilde{u}_m^k \leq \frac{1}{2}$ şeklinde elde edilmiştir. Kararlılık koşullarını sağlayacak şekilde zaman ve konum adım büyüklükleri seçilip Maple ortamında sonlu-fark şemaları programlanmıştır. Programlama yardımıyla kesirli NWS denklemi için sonlu-fark şemaları nümerik olarak çözülmüştür ve analitik değerlerle karşılaştırılmıştır. Kesirli NWS denklemi için sonlu-fark şemaları kesirli, irrasyonel ve tam mertebeden çeşitli α değerleri için sayısal çözümlerin tablo ve grafikleri oluşturulmuştur.

$p = 2$ için;

Kesirli NWS denklemi için SFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1231 sn gibi bir sürede ve 13,49 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ olduğunda analitik çözümle farklılıklarında hızlı bir düşüş gerçekleşmektedir. $\alpha = 1$ için maksimum hata 1.4605×10^{-6} civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NTLM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1296 sn gibi bir sürede ve 13,37 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $3,0406 \times 10^{-4}$ civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NSFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1317 sn gibi bir sürede ve 14,62 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $4,1203 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Bu değerler göz önüne alındığında $p = 2$ için SFDM diğer metotlara göre daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

$p = 3$ için;

Kesirli NWS denklemi için SFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1211 sn gibi bir sürede ve

13,06 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ olduğunda analitik çözümle tam bir uyum sergilemektedir. $\alpha = 1$ için maksimum hata 1.4800×10^{-4} civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NTLM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1273 sn gibi bir sürede ve 12,93 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata 1.5486×10^{-4} civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NSFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1301 sn gibi bir sürede ve 14,24 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $7,1525 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Bu değerler göz önüne alındığında $p = 3$ için NSFDM diğer metotlara göre daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

$p = 4$ için;

Kesirli NWS denklemi için SFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1282 sn gibi bir sürede ve 13,87 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ olduğunda hata değerlerinde hızlı bir düşüş gerçekleşmektedir. $\alpha = 1$ için maksimum hata $2,0441 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NTLM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1341 sn gibi bir sürede ve 13,80 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $1,8351 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NSFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1363 sn gibi bir sürede ve 14,99 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $2,3315 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Bu değerler göz önüne alındığında $p = 4$ için NTLM diğer metotlara göre daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

$p = 5$ için;

Kesirli NWS denklemi için SFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1285 sn gibi bir sürede ve 13,49 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ olduğunda hata değerlerinde ciddi anlamda bir azalma gözlemlenmiştir. $\alpha = 1$ için maksimum hata $3,4166 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NTLM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1313 sn gibi bir sürede ve 13,43 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $5,0681 \times 10^{-6}$ civarındadır.

Kesirli NWS denklemi için NSFDM yardımıyla Maple ortamında çeşitli α değerleri için nümerik sonuç bulan program yaklaşık 1338 sn gibi bir sürede ve 14,68 M gibi bir bellek kullanarak tamamlanmıştır. $\alpha = 1$ için maksimum hata $4,8924 \times 10^{-5}$ civarındadır.

Bu değerler göz önüne alındığında $p = 5$ için de NTLM diğer metotlara göre daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak elde edilen tablo ve grafiklerden görüldüğü üzere ele alınan üç metot da yakınsak sonuçlar vermiştir. $\alpha = 1$ olduğunda; $p = 2$ için SFDM, $p = 3$ için NSFDM, $p = 4, 5$ için de NTLM en iyi sonuçları vermiş olsa da, genel olarak bu üç metodun ortalama hatası 10^{-5} civarında olduğu bulunmuştur.

Elde edilen kararlılık koşulu zaman adım büyüklüğü, konum adım büyüklüğü ve α değerlerine bağlı olup, sayısal sonuç elde etmede yeterli esnekliği içeren koşullardır. α -kesirli türev değerlerinin bazı tamsayı, rasyonel ve irrasyonel değerleri için sonuç alınmış ve $\alpha = 1$ durumunda sonuçların literatürle hem nitelik hem de nicelik olarak uyumlu olduğu görülmüştür.

İlerleyen çalışmalarda standart olmayan sonlu-fark metodunu geliştirmek için farklı payda fonksiyonları kullanarak çözümler iyileştirilebilir. Ayrıca daha büyük p değerleri alınarak kararlılık özellikleri örneklenebilir.

KAYNAKLAR

Aderogba, A. A. , Chapwanya, M., (2018). Positive and bounded nonstandard finite difference scheme for the Hodgkin-Huxley equations. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 35(10), DOI:10. 1007/s13160-018-0302-3.

Akcagil, S., Aydemir, T., (2016). New exact solutions for the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov, the Newell-Whitehead-Segel and the Rabinovich wave equations by using a new modification of the tanh-coth method. *Cogent Mathematics*. Vol. 3: 1193104.

Alderremy, A. A., Mohamed, M, S., Gepreel, K. A., Aly, S., (2019). Numerical solutions of the Newell-Whitehead-Segel nonlinear fractional differential equation using modified reduced differential transform method. *Sylwan*, 162(10). ISI Indexed.

Amirali, G. ve H. Duru, (2002). *Nümerik Analiz*. Pegem A Yayıncılık, Ankara.

Anguelov, R., Kama, P., Lubuma, J. M-S., (2005). On non-standard finite difference models of reaction–diffusion equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 175 (2005) 11–29.

Anonymous, 2020. Reaction–diffusion system.

https://en.wikipedia.org/wiki/Reaction-diffusion_system#One-component_reaction-diffusion_equations (Available date: 14.04.2020).

Appadu,A. R., Chapwanya, M., Jejeniwa, O. A. , Lubuma, J. M-S., (2018). An explicit nonstandard finite difference scheme for the FitzHugh-Nagumo equations, *International Journal of Computer Mathematics*. 96(10):1-20, doi:10.1080/00207160.2018.1546849.

Appadu, A. R., İnan, B.,Tijani, Y. O., (2019). Comparative Study of Some Numerical Methods for the Burgers–Huxley Equation, *Symmetry*. 11, 1333; doi:10.3390/sym11111333.

Appadu, A. R., (2013). Numerical Solution of the 1D Advection-Diffusion Equation Using Standard and Nonstandard Finite Difference Schemes, *Journal of Applied Mathematics* Volume 2013,Article ID 734374, 14 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/734374>.

Dutykh, D., (2020). How to overcome the Courant-Friedrichs-Lewy condition of explicit discretizations? *Numerical Methods for Diffusion Phenomena in Building Physics* , Springer, doi:10.1007/978-3-030-31574-05.

Ehrhardt, M., Mickens. R. E., (2013). A nonstandard finite difference scheme for convection–diffusion equations having constant coefficients, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, DOI: 10.1016/j.amc.2012.12.068.

Feng, B-F., Mitsui, T., (1998). A Finite Difference Method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 90 (1998) 95-116.

Ghazizadeh, H. R., Maerfat, M., Azimi, A., (2010). Explicit and implicit finite difference schemes for fractional Cattaneo equation, *Journal of Computational Physics*. 229 (2010) 7042–7057.

Hilal, N., Injrou, S., Karroum, R., (2020). Exponential finite difference methods for solving Newell–Whitehead–Segel equation. *Arabian Journal of Mathematics*. [Doi.org/10.1007/s40065-020-00280-3](https://doi.org/10.1007/s40065-020-00280-3).

Hwang, C., Cheng, Y.C., (2006). A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems. *Automatica*, 42: 5, pp. 825–831.

Jankowska, M. A., Marciniak, A., Hoffman, (2015). On an application of an interval backward finite difference method for solving the one-dimensional heat conduction problem, *Control and Cybernetics* vol. 44 (2015) No. 4.

Jneid, M., Chaouk, A., (2020). The conformable reduced differential transform method for solving Newell-Whitehead-Segel Equation with non-integer order. *Journal of Analysis and Applications* Vol. 18 (2020), No.1, pp.35-51, ISSN: 0972-5954.

Jordan, P. M., (2003). A Nonstandard Finite Difference Scheme for Nonlinear Heat Transfer in a Thin Finite Rod, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 9, No. 11, November 2003, pp. 1015–1021.

Kheiri, H., Alipour, N., Dehghani, R., (2011). Homotopy analysis and homotopy Padé methods for the modified Burgers-Korteweg-de Vries and the Newell-Whitehead equations. *Mathematical Sciences*, Vol. 5, No. 1, 33-50.

Kolmogorov, A., Petrovskii, I. and Piskunov, N., (1937). Study of a diffusion equation that is related to the growth of a quality of matter and its application to a biological problem. *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol:1, pp. 1-26.

Korkmaz, A., (2018). Complex Wave Solutions to Mathematical Biology Models I: Newell-Whitehead-Segel and Zeldovich Equations. *Preprints*, doi: 10.20944/preprint201801.0018.v1.

Koroğlu, C., (2020). Exact and nonstandard finite difference schemes for the generalized KdV–Burgers equation. *Advances in Difference Equations*, 2020:134.

Li, C., Zeng, F., (2012). Finite difference methods for fractional differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 22, No:4, 1230014 (28 pages).

- Mahgoub, M. M. A., Sedeeg, A. K. H., (2016). On The solution of Newell-Whitehead-Segel equation. *American Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 1(1): pp. 21-24.
- Malik, A., Chand, F., Kumar, H., Mishra, S. C., (2011). Exact solutions of some physical models using the (G^2/G) -expansion method. *Journal of Physics*, vol. 78, No. 4, pp. 513–529.
- Manabe, S., (2003). Early development of fractional order control, *Proceeding of DETC'03(ASME), DETC2003/VIB-48370*, pp. 609-616.
- Meerschaert, M. M., Tadjeran, C., (2004). Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 172 (2004) 65–77
- Mickens, Ronald E., (2002). Nonstandard finite difference schemes for differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 8: 9, pp.823-847.
- Moaddy, K., Momani, S., Hashim, I., (2011). The non-standard finite difference scheme for linear fractional PDEs in fluid mechanics, *Computers and Mathematics with Applications* 61 (2011) 1209–1216.
- Momani, S., Rqayiq, A.A., Baleanu, D., (2012). A Nonstandard Finite Difference Scheme For Two-sided Space-Fractional Partial Differential Equations, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 22, No. 4, 1250079,5 pg., doi:10.1142/S0218127412500794.
- Namjoo, M., Zibaei, S., (2019). Approximation of the Huxley equation with nonstandard finite-difference scheme, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, Vol. 9, No. 1, pp 17-35, DOI:10. 22067/ijnao.v9i1.61735.
- Newell, A. C., Whitehead, J. A., (1969). Finite bandwidth, finite amplitude convection. *Journal of Fluid Mechanics*. Cambridge University Press Vol:38(2), pp. 279–303.
- Nourazar, S. S., Soori, M., Nazari-Golshan, A., (2011). On The exact solution of Newell-Whitehead-Segel equation using the homotopy perturbation method. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(8): 1400-1411, ISSN 1991-8178.
- Ongun, M. Y., Arslan, D., Garrappa. R., (2013). Nonstandard finite difference schemes for a fractional-order Brusselator system. *Advance in Differential Equations*, 2013:102, 13 pages, doi:10.1186/1687-1847-2013-102.
- Podlubny, I., (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- Polyanin, A. D and Zaitsev, V. F., (2004). *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equation*. A CRC Press Company, Boca Raton.

- Prakash, A., Goyal, M., Gupta, S., (2019), Fractional variational iteration method for solving time-fractional Newell-Whitehead-Segel equation. *Nonlinear Engineering*; 8: pp. 164–171.
- Prakash, A., Verma, V., (2019). Numerical method for fractional model of Newell-Whitehead-Segel equation. *Frontiers in Physics*, doi: 10.3389/fphy.2019.00015.
- R. A. Fisher, (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*. Vol. 7, pp. 355–369.
- Saadeh, R., Alaroud ,M., Al-Smadi, M., Ahmad , R. R., Din, U. K. S., (2019). Application of fractional residual power series algorithm to solve Newell–Whitehead–Segel equation of fractional order. *Symmetry*, 11, 1431; doi:10.3390/sym11121431.
- Salkuyeh, D. K., (2006). On the finite difference approximation to the convection–diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation* 179 (2006) 79–86.
- Saravanan, A., Magesh, N., (2013). A comparison between the reduced differential transform method and the Adomian decomposition method for the Newell–Whitehead–Segel equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 21, 259–265.
- Sebaa, N. Z., Fellah, E. A., Lauriks, W., Depollier, C., (2006). Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone. *Signal Processing archive*, Volume 86, Issue 10, pp. 2668 - 2677.
- Segel, Lee A., (1969). Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *Journal of Fluid Mechanics*. Cambridge University Press. Vol:38 (1), pp.203–224.
- Singh, P., Sharma, D., (2018). Convergence and error analysis of series solution of nonlinear partial differential equation, *Nonlinear Engineering*; 7(4): pp. 303–308.
- Singh, P., Sharma, D., (2020). Comparative study of homotopy perturbation transformation with homotopy perturbation Elzaki transform method for solving nonlinear fractional PDE. *Nonlinear Engineering* 2020; 9: pp. 60–71.
- Smith, G. D., (1985). *Numeric Solution of Partial Differential Equations:Finite Difference Methods* (Third edition). Oxford University Press, New York.
- Sousa, E., (2012). A second order explicit finite difference method for the fractional advection diffusion equation, *Computers and Mathematics with Applications* 64 (2012) 3141–3152.

Suleiman, T. A., Yokus, A., Gulluoglu, N., Baskonus, H. M., (2018). Regarding the numerical solutions of the Sharma-Tasso-Olver equation, *International Congress On Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-3)*, 04-06 May, 22, 01036 (2018) <https://doi.org/10.1051/itmconf/20182201036> , ITM Web of Conferences, Girne, Cyprus.

Sweilam, N.H. , Al-Mekhlafi, S. M., Baleanu, D., (2020), Nonstandard finite difference method for solving complex-order fractional Burgers' equations. *Journal of Advanced Research*,in Press.

Sweilam, N. H. , Hasan, N. M. A., Albalawi, A.O., (2018). Numerical Solutions of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation Via Nonstandard Finite Difference Scheme, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*,Vol. 6(2) July 2018, pp. 237-245. ISSN: 2090-729X (online) .

Sweilam, N. H. , Khader, M. M., Nagy, A. M., (2011). Numerical solution of two-sided space-fractional wave equation using finite difference method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (2011) 2832–2841.

Temimi, H. , Ben-Romdhane, M., (2016). An iterative finite difference method for solving Bratu's problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 292 (2016) 76–82.

Trefethen, L. N., (1996). *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. <https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdetext.html>, unpublished text

Vinagre, B.M., Feliu, V., Feliu, J.J., (1998). Frequency Domain Identification of a Flexible Structure with Piezoelectric Actuators Using Irrational Transfer Function Models, in: *Proc. 37th IEEE Conf. Decis. Control*, Tampa, Florida USA, pp. 1278–1280.

Vinagre B. M., Su'arez J. I., Calder'on A. J. , Monje C. A. and Chen, Y. Q., (2004). Using fractional calculus for lateral and longitudinal control of autonomous vehicles lecture notes in Computer Science, Springer Berlin / Heidelberg, Volume 2809/.

Westerlund, S., Ekstam, L., (1994). Capacitor theory, *IEEE Trans. Dielectr. Electron. Insul.*, 1:5 pp. 826–839.

Yokus,A., Bulut, H., (2019). On the numerical investigations to the Cahn-Allen equation by using finite difference method, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, ISSN: 2146-0957 eISSN: 2146-5703,Vol.9, No.1, pp.18-23 (2019), <https://doi.org/10.11121/i jocta.01.2019.00561>.

Yokus, A., Suleiman, T. A., Baskonus, H. M., Atmaca, S. P., (2018), On the exact and numerical solution to a nonlinear model arising in mathematical biology, *International Congress On Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-3)*, 04-06 May, 22, 01061, <https://doi.org/10.1051/itmconf/20182201061>, ITM Web of Conferences, Girne, Cyprus.

Yusuf, A., Ghanbari, B., Qureshi, S., Inc, M., Baleanu, D., (2019). Symmetry analysis and some new exact solutions of the Newell-Whitehead-Segel and Zeldovich equations. *Results in Nonlinear Analysis*. Vol. 2, no. 4, 182–192.

Zahra, W. K., Ouf, W. A., El-Azab, M. S., (2014). Cubic B-spline collocation algorithm for the numerical solution of Newell-Whitehead-Segel type equations. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 2(2) July, pp. 81-100. ISSN: 2090-792X (online).

Zeldovich Y., Frank-Kamenetsky D., (1938). A theory of thermal propagation of flame. *Acta Physicochim USSR* 9, pp.341–350.

Zhang. L., Wang. L., Ding, X., (2014). Exact Finite Difference Scheme and Nonstandard Finite Difference Scheme for Burgers and Burgers-Fisher Equations, *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2014, Article ID 597926, 12 pg, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/597926>.

Zulfiqar, A., Ahmad, J., Ul-Hassan, Q. M., (2019). Analytical study of fractional Newell-Whitehead-Segel equation using an efficient method. *Journal of Science and Arts*, No:4(49), pp.8739-850.

ÖZ GEÇMİŞ

Fotoğraf

Emre AYDIN 18.07.1992 tarihinde Samsun'da doğdu. Bursa Yıldırım Bayezid Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nden 2015 yılında mezun oldu. 2018 yılında OMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tezsiz Yüksek Lisans programını bitirdi. Orta derecede İngilizce bilmektedir.

İletişim Bilgileri

E mail : emr_aydn_55@outlook.com

Telefon : 05326860561

Öğrenci No : 18210059

ORCID ID : <https://orcid.org/0000-0001-7480-0965>

Yayınlanmış Çalışmalar:

Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar

