T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

MODÜLER A-METRİK UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ

Doktora Tezi

Elif KAPLAN

Danışman

Prof. Dr. Servet KÜTÜKCÜ

Bu tez TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı tarafından desteklenmiştir.

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Elif KAPLAN tarafından, **Prof. Dr. Servet KÜTÜKCÜ** danışmanlığında hazırlanan **"Modüler A-Metrik Uzaylar ve Özellikleri"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 26.4.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**İmza**	**Sonuç**
Başkan	Prof. Dr. Mahir KADAKAL Giresun Üniversitesi Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı		☐ Kabul ☐ Ret
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Servet KÜTÜKCÜ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı		☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Prof. Dr. Naim TUĞLU Gazi Üniversitesi Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalı		☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Prof. Dr. İlker ERYILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı		☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Prof. Dr. Mustafa Çağatay TUFAN Ondokuz Mayıs Üniversitesi Radyolojik Bilimler Ana Bilim Dalı		☐ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
… / … / …
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

26/04/ 2021
Elif KAPLAN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : Modüler A-Metrik Uzaylar ve Özellikleri

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 30.03.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 18

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

26/04/2021
Prof. Dr. Servet KÜTÜKCÜ

ÖZET

MODÜLER A-METRİK UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ
Elif KAPLAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Doktora, Nisan/2021
Danışman: Prof. Dr. Servet KÜTÜKCÜ

Bu tez çalışmasında, modüler A-metrik uzaylar kavramı tanımlanmıştır, bu metrik uzaya ait bir takım özellikler incelenmiştir ve bu uzaylar üzerinde bağdaşabilir, alfa tip bağdaşabilir ve beta tip bağdaşabilir dönüşümlerin tanımları verilerek bu tanımlar yardımıyla bazı ortak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, metrik uzay ve sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimi ile ilgili kısa bir giriş verilmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar ön bilgi olarak sunulmuştur. İkinci bölümün ilk kısmında, metrik uzaylardan kısaca bahsedilmiştir. İkinci kısmında, sabit nokta teorisi ile ilgili bazı kavramlar verilmiştir. Son kısmında ise, ortak sabit nokta teoremlerinde kullanılan değişmeli, zayıf değişmeli ve bağdaşabilir dönüşüm kavramları verilmiştir ve bu dönüşümler arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, tezin esas kısmı için gerekli olan zemini oluşturmak adına fuzzy metrik uzaylar, A-metrik uzaylar ve modüler metrik uzaylarla ilgili bazı tanımlar verilmiştir ve bu uzaylara ait bir takım özelliklere kısaca değinilmiştir. Bu uzaylar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Tezin orijinal kısmını oluşturan bulgular ve tartışma bölümünde, modüler metrik ve A-metrik uzay kavramlarından daha genel olan modüler A-metrik uzaylar tanıtılmış ve bu uzayın çeşitli özellikleri incelenmiştir. Daha sonra modüler A-metrik uzaylar üzerinde bağdaşabilir, alfa tip bağdaşabilir ve beta tip bağdaşabilir dönüşüm tanımları yapılmıştır. Bu tanımlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Modüler A-metrik uzay üzerinde Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmesi verilmiştir. Ayrıca verilen bağdaşabilir dönüşüm tanımları yardımıyla çeşitli ortak sabit nokta teoremleri elde edilmiştir ve bu sabit noktaların varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Son bölümde, genelleştirilmiş metrik uzaylar ve sabit nokta teorisi üzerine çalışmalar yapacak araştırmacılar için detaylı öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Genelleştirilmiş metrik uzaylar, modüler A-metrik uzaylar, sabit nokta, bağdaşabilir dönüşümler.

ABSTRACT

MODULAR A-METRIC SPACES AND THEIR PROPERTIES
Elif KAPLAN
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Ph.D., April/2021
Supervisor: Prof. Dr. Servet KUTUKCU

In this thesis the concept of modular A-metric spaces is defined. Some properties of this metric space are examined and some common fixed point theorems are proved by giving the definitions of compatible, alpha type compatible and beta type compatible mappings on these spaces.

This thesis consists of five main chapters.

In the first chapter, a brief introduction to the historical development of metric space and fixed point theory is given.

In the second chapter, some basic concepts used throughout the thesis are presented as preliminary information. In the first part of the second chapter, metric spaces are briefly mentioned. In the second part, some concepts related to fixed point theory are given. In the last part, the concepts of commuting mappings, weakly commuting mappings and compatible mappings used in common fixed point theorems are given and the relationship between these mappings is mentioned.

In the third chapter, some definitions of fuzzy metric spaces, A-metric spaces and modular metric spaces are given to form the basis for the main part of the thesis, and some properties of these spaces are briefly mentioned. Finally, the relationships between these spaces are investigated.

In the findings and discussion section, which constitute the original part of the thesis, modular A-metric spaces, which are more general than modular metric and A-metric space concepts, are introduced and various properties of this space are examined. Later, compatible, alpha type compatible and beta type compatible map definitions were made on modular A-metric spaces. Relationships between these definitions have been examined. A generalization of the Banach fixed point theorem on modular A-metric space is given. In addition, various common fixed point theorems are obtained with the help of compatible mappings definitions and the existence and uniqueness of these fixed points are shown.

In the last chapter, detailed suggestions are given for researchers who will study generalized metric spaces and fixed point theory.

Keywords: Generalized metric spaces, modular A-metric spaces, fixed point, compatible maps.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince bilgisini ve anlayışını benden esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Servet Kütükcü'ye teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

Doktora süreci boyunca önerileri ile tezime katkıda bulunan hocam Sayın Prof. Dr. İlker Eryılmaz'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Desteğini ve sevgisini her an kalbimde hissettiğim değerli eşim Davut Kaplan'a, canımdan can olan biricik yavrum, güzel kızım Saniye Umay Kaplan'a, sevgili aileme ve sürekli bilgi alışverişinde bulunduğum değerli dostum Dr. Öğr. Üyesi Hande Poşul'a sevgi ve minnet duygularımı sunarım.

Ayrıca doktora çalışmalarım sırasında beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı’na teşekkürü bir borç bilirim.

Elif KAPLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar
(M,d)	Metrik uzay
$d(x,y)$	x ve y arasındaki uzaklık
$(X,M,*)$	Fuzzy metrik uzay
$M(x,y,t)$	$t-$ye göre x ve y arasındaki uzaklık
$w_\lambda(x,y)$	Modüler metrik
$A(x_1,x_2,...,x_n)$	$A-$metrik (genelleştirilmiş metrik)
(X,A)	Modüler $A-$metrik uzay
$A_\lambda(x_1,x_2,...,x_n)$	Modüler $A-$metrik
$B(x,r)$	Metrik uzayda açık yuvar
$B(x,r,t)$	Fuzzy metrik uzayda açık yuvar
$B_A(x,r)$	$A-$metrik uzayda açık yuvar
$B_{A_\lambda}(x,r)$	Modüler $A-$metrik uzayda açık yuvar
$*_M$	Minimum $t-$norm
$*_P$	Çarpım $t-$norm
$*_L$	Lukasiewicz $t-$norm
$*_D$	Drastik çarpım $t-$norm
$C([a,b])$	$[a,b]$ den $\mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyonların kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bir kümenin iki elemanı arasındaki uzaklığı ölçmeye yarayan metrik kavramı ilk olarak 20. yüzyılın başlarında M. R. Frechet tarafından verilmiştir. Kümenin elemanları arasındaki uzaklık, o küme üzerinde metrik fonksiyonunun nasıl tanımlandığına bağlı olarak değişmektedir. Örneğin; $d_{Ö}$ ve d_T, $\mathbb{R}^2$ üzerinde sırasıyla Öklid metriği ve taksi-kab metriği olsun. $x=(1,1), y=(4,5)\in\mathbb{R}^2$ için bu noktalar arasındaki uzaklık $d_{Ö}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=5$ ve $d_T(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=7$ olup birbirinden farklıdır.

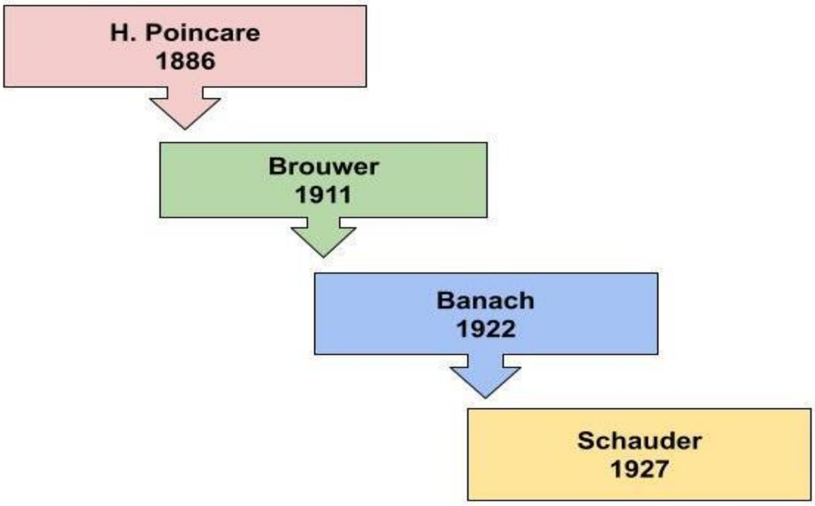
Metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlarla ilgili en dikkat çekici çalışmalardan biri sabit nokta teoremleridir. Bir fonksiyonun sabit noktası, fonksiyon tarafından kendisine eşlenen noktadır. Yani sabit nokta $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $Tx=0$ denkleminin bir kökünü bulmak değil, $Tx=x$ denkleminin bir çözümünü bulmaktır. Geometrik olarak Tx fonksiyonunun sabit noktaları, $y=Tx$ eğrisi ile $y=x$ doğrusunun kesişiminde bulunan noktalardır.

Sabit nokta teorisi ilk olarak 1886'da, Fransız matematikçi H. Poincare tarafından çalışıldı (Poincare, 1886).

20. yüzyılın ilk çeyreğinde sabit nokta teorisi üzerine farklı tanımlar yapıldı. 1911'de, Alman matematikçi L. E. Y. Brouwer tarafından "$B,\mathbb{R}^n$'de kapalı birim yuvar ve $T:B\to B$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere T'nin B'de bir sabit noktası vardır." şeklinde bir teorem verildi (Brouwer, 1911). $\mathbb{R}$'de bu teorem ara değer teoremine dönüşmektedir. Brouwer'in sabit nokta teoremi için günlük hayattan örnek verilebilir. İki tane üzerlerinde aynı şeyler olan A4 kağıdını alın ve birini kırıştırıp diğerinin üzerine koyun. Kırışmış kağıtta öyle bir nokta vardır ki kırışmamış haliyle aynı yerdedir. Yani kırışmış kağıttaki her noktayı kırışmamış olandaki yeriyle eşleyen çubuklar geçirirseniz bir çubuk kağıda dik olacaktır.

1922'de, S. Banach tarafından "Banach daralma dönüşümü" olarak bilinen ünlü teorem verildi (Banach, 1922). Bu teorem sabit nokta teorisinde kullanışlı ve basit olması sebebiyle dikkat çekicidir. Ayrıca bu teorem, sabit noktanın varlığı ve tekliğinin yanı sıra bu noktanın nasıl bulunabileceği konusunda da bilgi verir.

1927'de, Schauder tarafından "Bir Banach uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlı sürekli bir dönüşüm sabit bir noktaya sahiptir." şeklinde sonsuz boyutlu Banach uzayı üzerinde ilk sabit nokta teoremi verildi (Schauder, 1927).



Şekil 1.1. Sabit noktanın tarihsel gelişimi

20. yüzyılın son çeyreğinde, daralma şartını sağlayan dönüşümlerin ortak sabit noktalarını bulma problemi oldukça ilgi görmeye başladı. 1976'da G. Jungck tarafından "değişmeli dönüşüm" kavramı kullanılarak Banach daralma dönüşümü genelleştirildi ve ortak sabit nokta teoremi elde edildi (Jungck, 1976). Daha sonra, 1982'de S. Sessa tarafından değişmeli dönüşüm kavramından daha genel olan "zayıf değişmeli dönüşüm" kavramı tanıtıldı (Sessa, 1982). Fakat bu tanım yeteri kadar geniş bir sınıfı kapsamadığından, 1986'da Jungck tarafından daha genel bir kavram olan "bağdaşabilir dönüşüm" tanımı verildi (Jungck, 1986). Bu yeni kavram dönüşümlerin ortak sabit noktalarını elde etme konusunda oldukça kullanışlıdır. 1998'de, Jungck ve Rhoades tarafından "zayıf bağdaşabilir dönüşüm" kavramı tanıtıldı ve bağdaşabilir dönüşümlerin zayıf bağdaşabilir dönüşüm olduğu fakat ters durumun sağlanmadığı gösterildi (Jungck and Rhoades, 1998).

Bir dönüşüm verildiğinde, onun kendi karakteristik özellikleri ile üzerinde tanımlı olduğu kümenin şartları, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti etmede etkin bir rol üstlenirler. Örneğin; Brouwer sabit nokta teoreminde, $B=(-1,1)\subset\mathbb{R}$ açık aralığında tanımlı $Tx=\dfrac{x+1}{2}$ dönüşümü alınırsa, bu dönüşüm sürekli bir dönüşümdür fakat T'nin B kümesinde bir sabit noktası yoktur. Çünkü B kümesi kapalı değildir. Bu bakımdan sabit nokta teorisi verilen dönüşümün özelliklerinin yanı sıra dönüşümün tanımlı olduğu kümenin yapısı üzerindeki koşullarla da yakından ilgilidir.

Metrik uzayların koşullarında değişiklikler yapılarak çok sayıda genelleştirilmiş metrik uzay yapıları elde edilmiştir. Sürekli olarak aralarına yenileri eklenen bu yapılara Wilson tarafından tanıtılan "kuasi metrik uzaylar" (Wilson, 1931a) ve "yarı metrik uzaylar" (Wilson, 1931b), Kurepa tarafından tanıtılan "pseudo metrik uzaylar" (Kurepa, 1934), Gähler tarafından tanıtılan "2-metrik uzaylar" (Gähler, 1963), Dhage tarafından tanıtılan "D-metrik uzaylar" (Dhage, 1992), farklı yazarlar tarafından tanıtılan farklı "fuzzy metrik uzaylar" (Kramosil and Michalek, 1979; Erceg, 1979; Deng, 1982; Kaleva and Seikkala, 1984; George and Veeramani, 1994), Czerwik tarafından tanıtılan "b-metrik uzaylar" (Czerwik, 1993), Matthews tarafından tanıtılan "kısmî metrik uzaylar" (Matthews, 1994), Mustafa ve Sims tarafından tanıtılan "G-metrik uzaylar" (Mustafa and Sims, 2006), Huang ve Zhang tarafından tanıtılan "konik metrik uzaylar" (Huang and Zhang, 2007), Chistyakov tarafından tanıtılan "modüler metrik uzaylar" (Chistyakov, 2010a; 2010b), Sedghi, Shobe ve Aliouche tarafından tanıtılan "S-metrik uzaylar" (Sedghi, et al., 2012), Abbas, Ali ve Suleiman tarafından tanıtılan "A-metrik uzaylar" (Abbas, et al., 2012) ve Poşul, Kaplan ve Kutukcu tarafından tanıtılan "fuzzy konik b-metrik" uzaylar (Posul, et al., 2019) örnek olarak verilebilir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan matematiksel alt yapıya, literatürde var olan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Fransız matematikçi M. R. Fréchet tarafından 1906 yılında "Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel" adlı doktora tezinde çok önemli bir kavram olan metrik yapısı tanıtılmıştır (Fréchet, 1906). Fakat yaygın olarak kullanılan aşağıdaki tanım 1914 yılında Alman matematikçi Hausdroff tarafından verilmiştir (Hausdorff, 1914).

Tanım 2.1.1. M boştan farklı bir küme ve $d: M \times M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in M$ için,

M1) $d(x,y) \geq 0$,

M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x,y) = d(y,x)$,

M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna M üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (M,d) sıralı çiftine de bir metrik uzay denir. Burada $d(x,y)$ değerine x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Örnek 2.1.2. Reel sayılar kümesi üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ ile tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$'nin alışılmış metriği denir.

Örnek 2.1.3. $M = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ için

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan $d: M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}^n$'nin alışılmış metriği veya Öklid metriği denir.

Örnek 2.1.4. M boştan farklı bir küme olmak üzere her $x, y \in M$ için,

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x \neq y \\ 0, & x = y\end{cases}$$

ile tanımlanan $d: M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe ayrık metrik veya diskret metrik denir.

Örnek 2.1.5. $M = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ için,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

şeklinde tanımlanan $d: M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe taksi-kab metriği denir.

Tanım 2.1.6. (M,d) metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi ve bir $x \in M$ noktası verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için her $k \geq k_0$ olduğunda $d(x_k, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisi d metriğine göre x noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda x noktasına $\{x_k\}$ dizisinin limiti denir ve bu durum $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ veya $x_k \xrightarrow{d} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7. (M,d) metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için her $k, m \geq k_0$ olduğunda $d(x_k, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Herhangi bir (M,d) metrik uzayında yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar. Ayrıca (M,d) metrik uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Fakat her Cauchy dizisinin yakınsak olması gerekmez. Örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar uzayında $k \in \mathbb{N}$ için

$$\{x_k\} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$$

dizisi bir Cauchy dizisi olmasına rağmen, bu dizi $\mathbb{Q}$'nun hiçbir noktasına yakınsamaz. Bu dizi e sayısına yakınsar ve bu sayı rasyonel değildir.

Tanım 2.1.8. (M,d) metrik uzayında her Cauchy dizisi bir $x \in M$ noktasına yakınsak ise (M,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Örnek 2.1.9. Her (M,d) ayrık metrik uzayı tamdır.

Çözüm: $\{x_k\}$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $k,m \geq k_0$ özelliğindeki her $k,m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_k, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $k \geq k_0$ özelliğindeki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d\left(x_k, x_{k_0}\right) < \frac{1}{2}$$

olur. Diğer yandan $d\left(x_k, x_{k_0}\right) = 0$ veya $d\left(x_k, x_{k_0}\right) = 1$ olacağından $k \geq k_0$ özelliğindeki her $k \in \mathbb{N}$ için $d\left(x_k, x_{k_0}\right) = 0$ olur. Bu durumda $x_k = x_{k_0}$ olur ki diğer bir deyişle belirli bir terimden sonra dizi sabittir. Yani dizi

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k_0 - 1}, x_{k_0}, x_{k_0} \ldots$$

formundadır. Bu durumda bu dizi yakınsaktır ve limiti x_{k_0} dır. O halde (M,d) ayrık metrik uzayı tamdır.

Tanım 2.1.10. $(M,d), (N,d^*)$ birer metrik uzay ve bir $T: M \to N$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in M$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda

$$d^*(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa, T ye x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.11. $(M,d), (N,d^*)$ birer metrik uzay ve bir $T: M \to N$ fonksiyonu verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda

$$d^*(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnız ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.12. N bir reel vektör uzayı ve $\|\cdot\|: N \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in N$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için, N1) $\|x\| \geq 0,$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

Her normlu uzay bir metrik uzay üretir. Gerçekten her $x, y \in M$ için,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu M kümesi üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

Her metrik bir norm tarafından üretilemez. Örneğin, M boştan farklı bir küme olmak üzere $d : M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in M$ için

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

şeklinde tanımlandığında M üzerinde bir metriktir ancak hiçbir norm tarafından üretilemez. Eğer $(M, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ise

$$d(x, y) = \|x - y\| = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Fakat $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ olmak üzere

$$\|\lambda(x - y)\| = \frac{|\lambda(x - y)|}{1 + |\lambda(x - y)|} = \frac{|\lambda||x - y|}{1 + |\lambda||x - y|} \neq |\lambda| \|x - y\|$$

şartı sağlanmaz. O halde her metrik uzay bir normlu uzaydan elde edilmiş olmak zorunda değildir.

2.2. Sabit Nokta Teorisi Üzerine Bazı Kavramlar

Bu tez çalışmasının bulgular kısmında, yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay yapısı verildi ve bu yapı üzerinde bazı sabit nokta teoremleri çalışıldı. Bu kısımda sabit nokta ile ilgili bazı kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx=x$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa bu x noktasına T'nin sabit noktası denir. Yani T'nin sabit noktaları T altında değişmeyen noktalardan oluşur.

Tanım 2.2.2. X boştan farklı bir küme ve $S,T:X\to X$ iki farklı dönüşüm olsun. Eğer $Sx=Tx=x$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa bu x noktasına S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir.

Örnek 2.2.3. $X=[0,7]$ ve $Tx=x^2-4x$ ise $x=0$ ve $x=5$ noktaları T'nin sabit noktalarıdır.

Örnek 2.2.4. $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=x-70$ ise T'nin hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 2.2.5. $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=|x|$ ise T'nin sabit noktaları $\{x:x\geq 0\}$ kümesinin elemanlarıdır.

Örnek 2.2.6. $Tx=e^x$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 2.2.7. $X=[0,20]$ olsun. $Sx=\dfrac{x^3}{9}$ ve $Tx=6-x$ dönüşümleri için $x=3$ ortak sabit noktadır.

Yukarıdaki örneklerden görülebileceği üzere bir dönüşümün sabit noktasının varlığı hem küme yapısına hem de dönüşümün nasıl tanımlandığına bağlıdır. Ayrıca her dönüşümün sabit noktası olmak zorunda değildir, varsa da tek olmayabilir. Sabit nokta teorisi çalışmalarında genel olarak

- Dönüşümün sabit noktası var mıdır?
- Dönüşümün sabit noktası varsa bu nokta tek midir?
- Dönüşümün sabit noktası var ve tek ise bu sabit nokta nasıl bulunabilir?

sorularına yanıt aranmaktadır. Sabit nokta teorisinin bir çok alanda uygulamaları vardır (Border, 1985; Agarwal, et al., 2004; Farmakis,, 2013; Yeol Je,2017).

Tanım 2.2.8. (M,d) bir metrik uzay ve $T:M\rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in M$ için

$$d(Tx,Ty)\leq kd(x,y)$$

olacak şekilde $0<k<1$ özelliğine sahip bir k sabiti varsa T'ye daralma dönüşümü denir. Her daralma dönüşümü sürekli hatta düzgün süreklidir. Gerçekten, $T:M\rightarrow M$ bir daralma dönüşümü, $\varepsilon>0$ keyfi verilmiş bir pozitif sayı ve her $x,y\in M$ için $\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}$ olduğunda $d(x,y)<\delta$ için

$$d(Tx,Ty)\leq k.d(x,y)<k.\delta=k.\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$$

sağlanır.

Örnek 2.2.9. $M=\mathbb{R}$ üzerinde $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış mutlak değer metriği alınsın ve $Tx=\dfrac{1}{4}\sin x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty)=\left|\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin y\right|&=\frac{1}{4}|\sin x-\sin y|\\
&=\frac{1}{4}\left|2.\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\\
&\leq\frac{1}{2}\left|\frac{x-y}{2}\right|,\ \left(\ |\sin x|\leq|x| \text{ ve} -1\leq\cos x\leq 1\ \right)\\
&\leq\frac{1}{4}d(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir ve $k=\dfrac{1}{4}\in(0,1)$ için T bir daralma dönüşümüdür.

Aşağıdaki teorem Banach daralma teoremi olarak bilinir ve bu teorem belli koşulları sağlayan fonksiyonların sabit noktalarının varlığını ve hatta tekliğini garanti eder.

Teorem 2.2.10. M boştan farklı bir küme ve (M,d) bir tam metrik uzay olsun. $T:M\to M$ daralma dönüşümü yani her $x,y\in M$ için

$$d(Tx,Ty)\leq kd(x,y)$$

olacak şekilde en az bir $k\in(0,1)$ varolsun. Bu durumda, bu dönüşümün tek bir sabit noktası vardır, yani $x_0\in M$ için $Tx_0=x_0$ sağlanır (Banach, 1922).

Banach daralma teoreminin uygulamadaki güzel bir örneği, bu teoremin

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

diferensiyel denkleminin belirli bir başlangıç koşulunu sağlayan çözümünün varlığının ve tekliğinin kanıtlanmasında kullanılmasıdır (Joshi, 2004).

2.3. Bağdaşabilir Dönüşümler Üzerine Bazı Kavramlar

Bu kısımda, bağdaşabilir dönüşüm kavramıyla ilgili bazı tanımlar, karşılaştırmalar ve özellikler verildi. 1976'da, Jungck tarafından değişmeli dönüşüm kavramı tanıtıldı. Jungck, bu yeni kavramla birlikte Teorem 2.3.2 deki ortak sabit nokta teoremini vererek Banach'ın sabit nokta teoremini genelleştirdi.

Tanım 2.3.1. M boştan farklı bir küme ve $S,T:M\to M$ dönüşümleri verilsin. Eğer $ST=TS$ ise S ve T'ye değişmeli dönüşümler denir. $x\in M$ noktası için $STx=TSx$ sağlanırsa x noktasına S ve T dönüşümlerinin bir değişmeli noktası denir (Jungck, 1976).

Teorem 2.3.2. (M,d) tam metrik uzay ve $T:M\to M$ sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ ve $\alpha\in(0,1)$ için $S:M\to M$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $TSx=STx$

(ii) $S(M)\subset T(M)$

(iii) $d(Sx,Sy)\leq \alpha d(Tx,Ty)$

Bu takdirde, S ve T dönüşümleri için bir tek ortak sabit nokta vardır (Jungck, 1976).

Eğer bu teoremde, T birim dönüşüm olarak alınırsa Banach daralma dönüşümü elde edilir. Sabit nokta teorisinde bu tip dönüşümlerin önemi, verilen iki dönüşüm için ortak bir sabit noktanın varlığını göstermesidir. (Das and Naik, 1979), (Chang, 1981), (Fisher, 1981), (Park and Bae, 191) ve birçok matematikçi tarafından bu tip dönüşümler kullanılarak çeşitli genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Metrik uzay yapısı üzerindeki sabit nokta teorisinde daha kapsamlı sonuçlar elde etme isteği, değişmeli dönüşüm kavramının genelleştirilmesine yol açmıştır. Bu sebepten, Sessa tarafından zayıf değişmeli dönüşüm kavramı tanıtılmıştır (Sessa, 1982).

Tanım 2.3.3. (M,d) bir metrik uzay ve $S,T: M \to M$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x \in M$ için $d(STx,TSx) \le d(Sx,Tx)$ ise S ve T'ye zayıf değişmeli dönüşümler denir (Sessa, 1982).

S ve T değişmeli dönüşümü aynı zamanda zayıf değişmelidir fakat bu durumun tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Yani Tanım 2.3.3, Tanım 2.3.1'den daha geneldir (Sessa, 1982).

Bu yeni tanım her ne kadar değişmeli dönüşümler tanımının bir genelleştirmesi ise de bu tür dönüşümlerin yeteri kadar geniş bir sınıfı kapsamadığı açıktır. Dolayısıyla yapılan çalışmalar bu kısıtlama içerisinde kalmış ve yeteri kadar bir genişleme sağlanamamıştır.

Örnek 2.3.4. $M = \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in M$ için $d(x,y) = |x-y|$ olsun. $S,T: M \to M$ dönüşümleri

$$Sx = x^4 \text{ ve } Tx = 4x^3$$

olarak tanımlansın. S ve T dönüşümleri için $STx = 256x^{12} \neq 4x^{12} = TSx$ olup bu dönüşümler değişmeli değildir. Aynı zamanda $x = 1$ için zayıf değişmeli dönüşüm de değildir. Fakat $x = 0$ bu iki dönüşümün ortak sabit noktasıdır.

Bu örnekten anlaşılacağı üzere, ortak sabit nokta teoremlerinde daha geniş bir sınıfı kapsayacak yeni bir tanıma ihtiyaç duyulmuştur. Bu tanım 1986 yılında Jungck tarafından verilmiştir.

Tanım 2.3.5. (M,d) bir metrik uzay ve $S,T:M\to M$ iki dönüşüm olsun. M' deki bir $\{x_k\}$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} Sx_k=\lim_{k\to\infty} Tx_k=z\in M$ koşulu sağlandığında $\lim_{k\to\infty} d(STx_k,TSx_k)=0$ oluyorsa S ve T'ye bağdaşabilir dönüşüm denir (Jungck, 1986).

Sonuç olarak, S ve T dönüşümleri verildiğinde eğer bu iki dönüşüm zayıf değişmeli dönüşümler ise bağdaşabilir dönüşümler oldukları da açıktır. Bu durumun tersi her zaman doğru değildir. Örnek 2.3.4'te verilen $Sx=x^4$ ve $Tx=4x^3$ dönüşümlerinin değişmeli ve zayıf değişmeli olmadığı görülmüştü. Fakat M'de bir $\{x_k\}=\frac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}$ dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k=\lim_{k\to\infty} Tx_k=0\in M$$

koşulu sağlanıp

$$\lim_{k\to\infty} d(STx_k,TSx_k)=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{256}{k^{12}}-\frac{4}{k^{12}}\right|=0$$

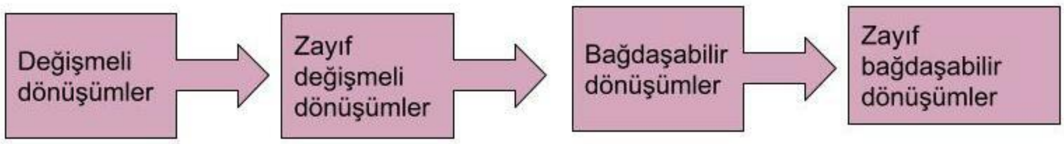
olur. Bu ise S ve T'nin bağdaşabilir dönüşümler olduğunu gösterir.

Bağdaşabilir dönüşüm tanımının verilmesinden sonra çeşitli tipte bağdaşabilir dönüşüm tanımları verildi. Bunlardan bazıları; $A-$tip bağdaşabilir dönüşümler (Jungck, et al., 1993), $B-$tip bağdaşabilir dönüşümler (Pathak and Khan, 1995), $C-$tip bağdaşabilir dönüşümler (Pathak, et al., 1998), $P-$tip bağdaşabilir dönüşümler (Pathak, et al., 1996) ve zayıf bağdaşabilir dönüşümler (Jungck, 1996) şeklindedir. Bu dönüşümler yardımıyla metrik uzaylarda ortak sabit nokta teoremi üzerine çeşitli çalışmalar yapıldı.

Tanım 2.3.6. M boştan farklı bir küme ve $S,T:M\to M$ iki dönüşüm olsun. Eğer $Sx=Tx$ olacak şekilde bir $x\in M$ noktası varsa bu x noktasına S ve T dönüşümlerinin bir çakışık noktası denir.

Tanım 2.3.7. (M,d) bir metrik uzay ve $S,T:M\to M$ iki dönüşüm olsun. Eğer S ve T dönüşümlerinin her çakışık noktası aynı zamanda bir değişmeli nokta oluyorsa yani $Sx=Tx$ olan her $x\in M$ için $STx=TSx$ sağlanıyorsa S ve T'ye zayıf bağdaşabilir dönüşümler denir (Jungck, 1996).

Değişmeli dönüşümler, zayıf değişmeli dönüşümler, bağdaşabilir dönüşümler ve zayıf bağdaşabilir dönüşümler arasında şematik olarak aşağıdaki ilişki vardır:



Şekil 2.1. Bazı dönüşümler arasındaki ilişki

Tanım 2.3.8. (M,d) bir metrik uzay ve $S,T : M \to M$ iki dönüşüm olsun. M' deki bir $\{x_k\}$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} Sx_k = \lim_{k\to\infty} Tx_k = x \in M$ koşulu sağlandığında

$$\lim_{k\to\infty} d\left(STx_k, TTx_k\right) = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} d\left(TSx_k, SSx_k\right) = 0$$

oluyorsa S ve T dönüşümlerine $A-$tip bağdaşabilir dönüşümler denir (Jungck, et al., 1993).

Tanım 2.3.9. (M,d) bir metrik uzay ve $S,T : M \to M$ iki dönüşüm olsun. M' deki bir $\{x_k\}$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} Sx_k = \lim_{k\to\infty} Tx_k = x \in M$ koşulu sağlandığında

$$\lim_{k\to\infty} d\left(SSx_k, TTx_k\right) = 0$$

oluyorsa S ve T dönüşümlerine $P-$tip bağdaşabilir dönüşümler denir (Pathak, et al., 1996).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Sabit nokta teorisi ve metrik uzayların farklı genelleştirme şekilleri birçok matematikçi için en ilgi çekici konulardan biridir. Metrik uzaylar koşullarındaki üçgen eşitsizliğinin kısıtlanması ya da genişletilmesiyle, sabit nokta teoremleri de içerdiği dönüşüm sayısının arttırılmasıyla genelleştirilmiştir. Bu kısımda sırasıyla fuzzy metrik uzaylar, $A-$metrik uzaylar ve son olarak da modüler metrik uzaylara yer verilmiştir ve bu uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

3.1. Fuzzy Metrik Uzaylar

Klasik mantıkta bir önerme "doğru" veya "yanlış"tır. Fakat gerçek dünyadaki olayların ne derecede doğru veya yanlış olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Örneğin 1.80 cm boy uzunluğuna sahip bir birey "uzun" olarak ifade edilirse 1.79 cm olan bir birey için "uzun değildir" ifadesi bu anlamda doğru olmadığı gibi yanlış da değildir. Bu nedenle önermelerin yanlış (0) ve doğru (1) değerleri arasındaki değerler de (kısa boylu, orta boylu vs.) kullanılarak 1965 yılında Zadeh tarafından fuzzy küme kavramı ortaya atılmıştır (Zadeh, 1965). Fuzzy küme teorisi az, sık, orta, düşük, çok, birçok gibi kelimeleri kullanarak dereceli veri modellemesini gerçekleştirmektedir. Klasik küme, kümeye kesinlikle ait olma ve kesinlikle ait olmama biçiminde iki grubun oluşturulması ile anlamlıdır. Fuzzy kavramı ile birlikte evrendeki bütün bireyler, üyelik derecesi değeri atanarak matematiksel olarak tanımlanabilir. Böylece bireyler, fuzzy küme içerisinde üyelik dereceleri tarafından gösterilen daha büyük ve daha küçük değerlere ait olabilirler. Bu üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında gerçel değerler ile ifade edilir.

Bu anlamda Zadeh tarafından fuzzy küme teori tanımlandıktan sonra, metrik uzayların bir genelleştirmesi olan fuzzy metrik uzaylar da farklı yazarlar tarafından farklı yöntemlerle verildi (Kramosil and Michalek, 1979; Erceg, 1979; Deng, 1982; Kaleva and Seikkala, 1984; George and Veeramani, 1994). Bu tanımlarla birlikte birçok çalışma yapıldı (Fang, 1992; Mishra, et al., 1994; Sharma, 2002; Imdad and Ali, 2006; Kutukcu, et al., 2007; Mihet, 2007; Sintunavarat and Kumam, 2011; Gregori, et al., 2017 Rakic et al., 2020).

Fuzzy metrik uzay tanımına geçmeden önce tanımda kullanılan $t-$norm ile ilgili bilgiler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $I=[0,1]$ olmak üzere $*:I\times I\to I$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa üçgensel norm veya $t-$norm olarak adlandırılır. Bu şartlar her $a,b,c\in I$ için,

T1) $a*b=b*a$ (simetri özelliği)

T2) $a*(b*c)=(a*b)*c$ (birleşme özelliği)

T3) $b\le c\Rightarrow a*b\le a*c$ (monotonluk)

T4) $a*1=a$ (sınır koşulu)

şeklindedir (Schweizer and Sklar, 1960).

Örnek 3.1.2. Her $a,b\in I$ için $a*_M b=\min\{a,b\}$ işlemi bir $t-$normdur. Her $a,b,c\in I$ için,

T1) $a*_M b=\min\{a,b\}=\min\{b,a\}=b*_M a$

T2)
$$\begin{aligned} a*_M(b*_M c)=a*_M(\min\{b,c\})=\min\{a,\min\{b,c\}\} &=\min\{a,b,c\}\\ &=\min\{\min\{a,b\},c\}\\ &=(\min\{a,b\})*_M c\\ &=(a*_M b)*_M c \end{aligned}$$

T3) 1. durum: $a\le b\le c\Rightarrow a*_M b=\min\{a,b\}=a\le a=\min\{a,c\}=a*_M c,$

2. durum: $b\le a\le c\Rightarrow a*_M b=\min\{a,b\}=b\le a=\min\{a,c\}=a*_M c,$

3. durum: $b\le c\le a\Rightarrow a*_M b=\min\{a,b\}=b\le c=\min\{a,c\}=a*_M c.$

T4) $a*_M 1=\min\{a,1\}=a$

olup tüm şartlar sağlanır. O halde, $*_M$ bir $t-$normdur.

Örnek 3.1.3. Her $a,b\in I$ için $a*b=\text{maks}\{a,b\}$ işlemi bir $t-$norm değildir. Gerçekten, her $a\in[0,1)$ için,

$$a*1=\text{maks}\{a,1\}=1\ne a$$

olup T4) şartı sağlanmaz.

Sayılamaz çoklukta $t-$norm mevcuttur. Bunlardan dört temel $t-$norm aşağıdaki gibidir:

- $a *_M b = \min\{a,b\}$ minimum $t-$norm
- $a *_P b = a.b$ çarpım $t-$norm
- $a *_L b = maks\{a+b-1,0\}$ Lukasiewicz $t-$norm
- $a *_D b = \begin{cases} min\{a,b\}, & maks\{a,b\}=1 \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$ drastik çarpım $t-$norm

Bu dört temel $t-$norm arasında aşağıdaki biçimde bir sıralama ilişkisi vardır:

$$*_D < *_L < *_P < *_M$$

(Klement, et al., 2000).

Lemma 3.1.4. Tanım 3.1.1'den, bir $t-$norm her $a \in [0,1]$ için aşağıdaki ek sınır koşullarını sağlar:

$$0 * a = a * 0 = 0$$
$$1 * a = a$$

O halde, bütün $t-$normlar $[0,1]^2$ birim karesinin sınırı üzerinde aynı değere sahiptir.

İspat: $*$ bir $t-$norm olsun. Her $a \in [0,1]$ için $a \le 1$ olduğundan

$$0 \le a*0 = 0*a \le 0*1 = 0$$

olup $a*0 = 0*a = 0$'dır. Her $a \in [0,1]$ için

$$1*a = a*1 = a$$

bulunur (Klement, et al., 2013).

Uyarı 3.1.5. $*$ bir $t-$norm ve $a,b,c,d \in [0,1]$ olsun. O zaman,

$$a \le c \text{ ve } b \le d \Rightarrow a*b \le c*d$$

sağlanır.

İspat: $a \le c$ ve $b \le d$ verilsin. O zaman,

$$a * b \leq a * d = d * a \leq d * c = c * d$$

olur (Klement, et al., 2013).

Tanım 3.1.6. $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ bir $t-$norm olsun. Eğer $\{a_n\},\{b_n\} \in [0,1]$ yakınsak dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n * b_n)$$

oluyorsa $*$ süreklidir (Klement, et al., 2013).

$[0,1]^2$ birim karesi, $\mathbb{R}^2$ reel düzleminin bir tıkız (kompakt) alt kümesi olduğundan bir $*$ $t-$normunun sürekli olması, onun düzgün sürekli olmasına denktir.

Tanım 3.1.7. X boştan farklı bir küme ve $*$ sürekli bir $t-$norm olsun. $M : X \times X \times (0,\infty) \to [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve her $t, s > 0$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

FM1) $M(x, y, t) > 0,$

FM2) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y,$

FM3) $M(x, y, t) = M(y, x, t),$

FM4) $M(x, z, t) * M(z, y, s) \leq M(x, y, t + s),$

FM5) $M(x, y, \cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

Bu durumda M fonksiyonuna X üzerinde bir fuzzy metrik, $(X, M, *)$ üçlüsüne bir fuzzy metrik uzay denir (George and Veeramani, 1994). Burada $M(x, y, t)$ değerine t'ye göre x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Örnek 3.1.8. (X, d) bir metrik uzay ve her $a, b \in [0,1]$ için $a *_P b = ab$ olmak üzere çarpım $t-$normu olsun. Her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, M_d, *_P)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Bu uzaya standart fuzzy metrik uzay denir (George and Veeramani, 1994).

Çözüm: Her $x,y,z \in X$ ve her $t,s > 0$ için,

FM1) d bir metrik fonksiyonu olduğundan her $x,y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ olup tanım gereği $M_d(x,y,t) > 0$ olur.

FM2) $M_d(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{t}{t+d(x,y)} = 1 \Leftrightarrow t + d(x,y) = t \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

dir.

FM3) $M_d(x,y,t) = \dfrac{t}{t+d(x,y)} = \dfrac{t}{t+d(y,x)} = M_d(y,x,t)$ dir.

FM4)

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ &\leq \frac{t+s}{t} d(x,z) + \frac{t+s}{s} d(z,y) \\ \frac{d(x,y)}{t+s} &\leq \frac{d(x,z)}{t} + \frac{d(z,y)}{s} \\ &= \frac{sd(x,z) + td(z,y)}{ts} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{d(x,y)}{t+s} &\leq 1 + \frac{sd(x,z) + td(z,y)}{ts} \\ \frac{t+s+d(x,y)}{t+s} &\leq \frac{ts + sd(x,z) + td(z,y)}{ts} \\ &\leq \frac{ts + sd(x,z) + td(z,y) + d(x,z)d(z,y)}{ts} \\ &= \frac{\left[t + d(x,z)\right]\left[s + d(z,y)\right]}{ts} \end{aligned}$$

olup

$$\frac{t}{t+d(x,z)} \frac{s}{s+d(z,y)} \leq \frac{t+s}{t+s+d(x,y)}$$

elde edilir ve buradan

$$M_d(x,z,t) *_P M_d(z,y,s) \leq M_d(x,y,t+s)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

FM5) $t_0 > 0$ için,

$$\lim_{t\to t_0} M_d\left(x,y,t\right) = \lim_{t\to t_0} \frac{t}{t+d\left(x,y\right)} = \frac{t_0}{t_0+d\left(x,y\right)} = M_d\left(x,y,t_0\right)$$

O halde $M_d(x,y,\cdot)$ fonksiyonunun sürekli olduğu elde edilir.

Sonuç 3.1.9. Her metrik uzay bir fuzzy metrik uzay üretir. Fakat her fuzzy metrik uzay bir metrik uzaydan elde edilmiş olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.10. $X = \mathbb{Z}^+$ olsun. Her $a,b \in [0,1]$ için $a *_P b = ab$ olmak üzere her $x,y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & x \le y \\ \dfrac{y}{x}, & y \le x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\left(X,M,*\right)$ bir fuzzy metrik uzaydır (George and Veeramani, 1994).

Bu durumda, Örnek 3.1.10 için $M(x,y,t)$ fuzzy metriğini üreten X üzerinde hiçbir d metriği yoktur. Gerçekten $x \le y$ için;

$$M\left(x,y,t\right) = \frac{x}{y} = \frac{t}{t+d\left(x,y\right)} \Rightarrow xt + xd\left(x,y\right) = yt \Rightarrow d\left(x,y\right) = \frac{t\left(y-x\right)}{x}$$

şeklinde elde edilen d fonksiyonu metrik uzayın simetrik olma şartını sağlamaz yani $d\left(x,y\right) \ne d\left(y,x\right)$ olur.

Tanım 3.1.11. $\left(X,M,*\right)$ bir fuzzy metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $0 < r < 1$ ve $t > 0$ olmak üzere,

$$B\left(x,r,t\right) = \left\{y \in X : M\left(x,y,t\right) > 1-r\right\}$$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı bir açık yuvar denir (George and Veeramani, 1994).

Tanım 3.1.12. $\left(X,M,*\right)$ fuzzy metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Her $\varepsilon \in \left(0,1\right)$ ve her $t > 0$ için her $k \ge k_0$ olduğunda

$M\left(x_k, x, t\right) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\left\{x_k\right\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir (George and Veeramani, 1994).

Tanım 3.1.13. $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon \in \left(0,1\right)$ ve her $t > 0$ için her $m,k \geq k_0$ olduğunda $M\left(x_m, x_k, t\right) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\left\{x_k\right\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (George and Veeramani, 1994).

Tanım 3.1.14. $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise $(X, M, *)$ üçlüsüne tam fuzzy metrik uzay denir (George and Veeramani, 1994).

3.2. Modüler Metrik Uzaylar

Foksiyonel analizde modüler kavramı, lineer uzay üzerinde tanımlı olan norm kavramının bir genişlemesidir. Modüler teorisi ilk olarak Nakano tarafından tanıtılmıştır (Nakano, 1950). 2008 yılında, Chistyakov tarafından F-modüler ile üretilen modüler metrik uzay kavramı tanıtılmıştır (Chistyakov, 2008) ve daha sonra bu tanım keyfi bir küme üzerinde verilerek 2010'da yayımlanan iki makalede modüler tarafından üretilen ve modüler metrik uzay olarak adlandırılan yeni bir metrik uzay teorisi geliştirilmiştir (Chistyakov, 2010a; 2010b). Bu yeni kavramın arkasındaki esas fikir modülerliğin fiziksel yorumudur. Bir küme üzerinde bir metrik yapısı kümenin herhangi iki noktası arasındaki negatif olmayan, sonlu uzaklığı bulmayı amaçlarken bir küme üzerinde bir modüler metrik yapısı, herhangi bir $\lambda > 0$ parametresiyle birlikte λ zaman olarak düşünüldüğünde $x, y \in X$ için $0 \leq w_\lambda\left(x, y\right) \leq \infty$ olmak üzere λ zamanında x ile y arasındaki hız olarak yorumlanır. Birçok araştırmacı tarafından bu yeni uzayda çeşitli sabit nokta teoremleri üzerine calışılmış ve bu uzayın diğer metrik uzaylarla ilişkileri incelenmiştir (Mongkolkeha, et al., 2011; Chaipunya, et al., 2012; Yeol Je, et al., 2012; Azadifar, et al., 2013; Abdou and Khamsi, 2014; Alfuraidan, 2016).

Bu kısımda, modüler metrik uzay tanımına geçmeden önce lineer uzay üzerinde modüler kavramı verilecektir.

Tanım 3.2.1. X bir reel lineer uzay olsun. $\rho : X \to [0,\infty]$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$\rho 1)$ $\rho(0) = 0,$

$\rho 2)$ Her $\alpha > 0$ için $\rho(\alpha x) = 0$ ise $x = 0,$

$\rho 3)$ $\rho(-x) = \rho(x),$

$\rho 4)$ Her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y).$

Bu durumda, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir modüler denir (Orlicz, 1961).

Eğer $\rho 4)$'teki eşitsizliğin yerine her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere

$$\rho(5)\ \rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa $\rho,$ X üzerinde bir konveks modüler olarak adlandırılır.

X üzerindeki konveks modülerliğin bir örneği alışılmış normdur. Gerçekten, X reel lineer uzay üzerinde tanımlı $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ normu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$

$N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleriyle bir konveks modülerdir.

Tanım 3.2.2. X boştan farklı bir küme olsun. $w : (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu her $\lambda, \mu > 0$ ve her $x, y, z \in X$ için $w(\lambda, x, y) = w_\lambda(x, y)$ şeklinde tanımlansın ve aşağıdaki şartları sağlasın:

$W1)$ $w_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

$W2)$ $w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x),$

$W3)$ $w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq w_\lambda(x, z) + w_\mu(z, y).$

Bu durumda, w' ya X üzerinde bir modüler metrik, (X,w) sıralı çiftine de bir modüler metrik uzay denir (Chistyakov, 2010a).

Eğer W3) koşulu yerine her $\lambda,\mu>0$ ve her $x,y,z\in X$ için,

$$\text{W4)}\ w_{\lambda+\mu}(x,y)\le\frac{\lambda}{\lambda+\mu}w_{\lambda}(x,z)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}w_{\mu}(z,y)$$

koşulu sağlanırsa w' ya X üzerinde bir konveks modüler metrik denir (Chistyakov, 2010a).

Önerme 3.2.3. X bir reel lineer uzay ve $\rho: X\to[0,\infty]$ fonksiyoneli X üzerinde tanımlı bir modüler olsun. Her $\lambda>0$ ve her $x,y\in X$ için,

$$w_{\lambda}(x,y)=\rho\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \tag{3.1}$$

sağlanır. O halde ρ, X üzerinde bir konveks modülerdir ancak ve ancak w, X üzerinde bir konveks modüler metriktir (Chistyakov, 2010a).

İspat: $\rho5)\Leftrightarrow W4)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$\rho5)\Rightarrow W4)$ Her $\lambda,\mu>0$ ve her $x,y,z\in X$ için,

$$\alpha=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}>0,\quad \beta=\frac{\mu}{\lambda+\mu}>0,\quad \alpha+\beta=1,\quad x^{*}=\frac{x-z}{\lambda},\quad y^{*}=\frac{z-y}{\mu}$$

alınırsa

$$\frac{x-y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x-z}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{z-y}{\mu}=\alpha x^{*}+\beta y^{*}$$

elde edilir. Böylece $3.1)$ ve $\rho5)$ eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
w_{\lambda+\mu}(x,y)&=\rho\left(\frac{x-y}{\lambda+\mu}\right)\\
&=\rho\left(\alpha x^{*}+\beta y^{*}\right)\\
&\le\alpha\rho(x^{*})+\beta\rho(y^{*})\\
&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\rho\left(\frac{x-z}{\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\rho\left(\frac{z-y}{\mu}\right)\\
&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}w_{\lambda}(x,z)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}w_{\mu}(z,y)
\end{aligned}$$

şeklinde $W4)$ eşitsizliği elde edilir.

$W4) \Rightarrow \rho 5)$ $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. Her $x, y \in X$ için $3.1)$ ve $W4)$ eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha x + \beta y) &= \rho\left(\frac{\alpha x - (-\beta y)}{\alpha + \beta}\right) \\
&= w_{\alpha+\beta}\left(\alpha x, -\beta y\right) \\
&\leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} w_{\alpha}\left(\alpha x, 0\right) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} w_{\beta}\left(0, -\beta y\right) \\
&= \alpha\rho\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) + \beta\rho\left(\frac{-\beta y}{\beta}\right) \\
&= \alpha\rho\left(x\right) + \beta\rho\left(y\right)
\end{aligned}$$

$\rho 5)$ eşitsizliği elde edilir.

Önerme 3.2.4. $\left(X, w\right)$ bir modüler metrik uzay olsun. O halde her $x, y \in X$ için $w_{\lambda}\left(x, y\right)$ fonksiyonu λ'ya göre $\left(0, \infty\right)$ üzerinde artmayandır (Chistyakov, 2010a).

İspat: Her $x, y \in X$ ve her $\lambda, \mu > 0$ için eğer $0 < \lambda < \mu$ ise

$$w_{\mu}\left(x, y\right) \leq w_{\mu-\lambda}\left(x, x\right) + w_{\lambda}\left(x, y\right) = w_{\lambda}\left(x, y\right)$$

sağlanır (Chistyakov, 2010a).

Örnek 3.2.5. $\left(X, d\right)$ bir metrik uzay ve $w : \left(0, \infty\right) \times X \times X \to \left[0, \infty\right]$ bir fonksiyon olsun. Her $\lambda > 0$ sayısı zaman ve her $x, y \in X$ için $d\left(x, y\right) \geq 0$ fonksiyonu x ile y arasındaki uzaklık olmak üzere,

$$w_{\lambda}\left(x, y\right) = \frac{d\left(x, y\right)}{\lambda}$$

alınırsa bu değer λ zamanı boyunca x'ten y'ye yol alan hareketlinin ortalama hızını verir. Bu takdirde $\left(X, w\right)$ bir modüler metrik uzaydır ve bu uzaya d metriği tarafından üretilen modüler metrik uzay veya standart modüler metrik uzay adı verilir (Chistyakov, 2010a).

Örnek 3.2.6. $X=\mathbb{N}$ olsun. $w:(0,\infty)\times X\times X\to[0,\infty]$ fonksiyonu her $x,y\in X$ ve her $\lambda>0$ için,

$$w_\lambda(x,y)=\begin{cases} y-x, & x\le y \\ x-y, & y\le x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,w) bir modüler metrik uzaydır.

Sonuç 3.2.7. Her metrik uzay bir modüler metrik uzay üretir. Fakat her modüler metrik uzay bir metrik uzaydan elde edilmiş olmak zorunda değildir. Gerçekten, standart modüler metrik uzay ile birlikte Örnek 3.2.6'ya göre her $x,y\in X$ ve her $\lambda>0$ için,

$$w_\lambda(x,y)=y-x\Leftrightarrow\frac{d(x,y)}{\lambda}=y-x\Leftrightarrow d(x,y)=\lambda(y-x)\neq\lambda(x-y)=d(y,x)$$

elde edilir. Fakat d fonksiyonu metrik tanımının simetrik olma şartını sağlamaz.

Sonuç 3.2.8. Her modüler metrik uzay bir fuzzy metrik uzaydan elde edilmiş olmak zorunda değildir. Gerçekten, Örnek 3.2.5'ten $w_\lambda(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{\lambda}$ idi. $\mathbb{R}$ üzerinde $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği için $x=6,\ y=3$ ve $\lambda=2$ alınsın. Bu durumda;

$$w_\lambda(x,y)=\frac{|x-y|}{\lambda}=\frac{|6-3|}{2}=\frac{3}{2}$$

olup $w_\lambda(x,y)=\dfrac{3}{2}>1$ olur ki $\dfrac{3}{2}\notin[0,1]$ dir.

Sonuç 3.2.9. Her fuzzy metrik uzay bir modüler metrik uzaydan elde edilmiş olmak zorunda değildir. Gerçekten, Örnek 3.1.8'e göre her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)}=w_t(x,y)$$

olmak üzere $w_t(x,y)=0\Rightarrow\dfrac{t}{t+d(x,y)}=0\Rightarrow t=0$ elde edilir. Fakat $0\notin(0,\infty)$ olduğundan her fuzzy metrik uzay bir modüler metrik uzaydan elde edilemez.

O halde modüler metrik ve fuzzy metrik arasında bir ilişki yoktur.

Tanım 3.2.10. (X, w) modüler metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. $\{x_k\}$dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda > 0$ için $k \to \infty$ iken $w_\lambda(x_k, x) \to 0$ olmasıdır (Chistyakov, 2010a).

Tanım 3.2.11. (X, w) modüler metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve her $\lambda > 0$ için her $m, k \geq k_0$ olduğunda $w_\lambda(x_k, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Chistyakov, 2010a).

Tanım 3.2.12. (X, w) modüler metrik uzayında her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, w) ikilisine bir tam modüler metrik uzay denir (Chistyakov, 2010a).

3.3. A – Metrik Uzaylar

2015 yılında Abbas ve arkadaşları tarafından yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay yapısı olarak $n-$boyutlu $A-$metrik uzay kavramı tanıtılmıştır (Abbas, et al., 2015). Bu yeni yapı üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Aydin and Kutukcu, 2017; Fernandez, et al., 2017; Priyobarta, et al., 2018; Yildirim, et al., 2018; Aydin and Kutukcu, 2020).

Tanım 3.3.1. X boştan farklı bir küme ve $n \geq 2$ sonlu bir doğal sayı olsun. $A : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $i = \overline{1, n}$ için $x_i, a \in X$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın:

A1) $A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \geq 0$,

A2) $A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$,

A3) $A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., x_i, a)$

Bu durumda, A'ya X üzerinde bir genelleştirilmiş metrik veya $A-$metrik, (X, A) ikilisine de bir genelleştirilmiş metrik uzay veya $A-$metrik uzay denir (Abbas, et al., 2015).

Örnek 3.3.2. $X=\mathbb{R}$ ve $A:X^n\to\mathbb{R}$ aşağıdaki şekilde tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned}A(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)&=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+...+|x_1-x_n|\\&+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+...+|x_2-x_n|\\&\vdots\\&+|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|+|x_{n-1}-x_n|\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|\end{aligned}$$

Bu fonksiyon X üzerinde bir $A-$metriktir (Abbas, et al., 2015). Gerçekten, her $i=\overline{1,n}$ için $x_i,a\in X$ olmak üzere

A1) $A(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)\geq 0$ olduğu açıktır.

A2) $$\begin{aligned}A(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|=0\\ \Leftrightarrow |x_i-x_j|=0\\ \Leftrightarrow x_i=x_j\\ \Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n.\end{aligned}$$

A3) $$\begin{aligned}A(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)&=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+...+|x_1-x_n|\\&+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+...+|x_2-x_n|\\&\vdots\\&+|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|\\&+|x_{n-1}-x_n|\\&\leq|x_1-a|+|a-x_2|+|x_1-a|+|a-x_3|+...+|x_1-a|+|a-x_n|\\&+|x_2-a|+|a-x_3|+|x_2-a|+|a-x_4|+...+|x_2-a|+|a-x_n|\\&\vdots\\&+|x_{n-2}-a|+|a-x_{n-1}|+|x_{n-2}-a|+|a-x_n|\\&+|x_{n-1}-a|+|a-x_n|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |x_1 - a| + |x_2 - a| + |x_1 - a| + |x_3 - a| + \dots + |x_1 - a| + |x_n - a| \\
&\;\; + |x_2 - a| + |x_3 - a| + |x_2 - a| + |x_4 - a| + \dots + |x_2 - a| + |x_n - a| \\
&\;\; \vdots \\
&\;\; + |x_{n-2} - a| + |x_{n-1} - a| + |x_{n-2} - a| + |x_n - a| \\
&\;\; + |x_{n-1} - a| + |x_n - a| \\
&= (n-1)|x_1 - a| + (n-1)|x_2 - a| + \dots + (n-1)|x_{n-1} - a| + (n-1)|x_n - a| \\
&= \left(|x_1 - x_1| + \dots + |x_1 - a|\right) + \dots + \left(|x_1 - x_1| + |x_1 - a|\right) + \left(|x_1 - a|\right) \\
&\;\; + \left(|x_2 - x_2| + \dots + |x_2 - a|\right) + \dots + \left(|x_2 - x_2| + |x_2 - a|\right) + \left(|x_2 - a|\right) \\
&\;\; \vdots \\
&\;\; + \left(|x_n - x_n| + \dots + |x_n - a|\right) + \dots + \left(|x_n - x_n| + |x_n - a|\right) + \left(|x_n - a|\right) \\
&= A(x_1, x_1, \dots, x_1, a) + A(x_2, x_2, \dots, x_2, a) + \dots + A(x_n, x_n, \dots, x_n, a)
\end{aligned}
$$

O halde $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $A-$metriktir.

Önerme 3.3.3. (X, A) $A-$metrik uzayında her $x, y \in X$ için,

$$A(x, x, \dots, x, y) = A(y, y, \dots, y, x)$$

dir. Yani her $A-$metrik uzayı simetriktir (Abbas, et al., 2015).

İspat: Her $x, y \in X$ için $A-$metrik uzay tanımının A3) koşulunda $a = x$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
A(x, x, \dots, x, y) &\le A(x, x, \dots, x, x) + \dots + A(x, x, \dots, x, x) + A(y, y, \dots, y, x) \\
&\le A(y, y, \dots, y, x)
\end{aligned}
$$

yazılır. Benzer şekilde $A-$metrik uzay tanımının A3) koşulunda $a = y$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
A(y, y, \dots, y, x) &\le A(y, y, \dots, y, y) + \dots + A(y, y, \dots, y, y) + A(x, x, \dots, x, y) \\
&\le A(x, x, \dots, x, y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $A(x, x, \dots, x, y) = A(y, y, \dots, y, x)$ dir.

Sonuç 3.3.4. (X, A) $A-$metrik uzayında her $x, y, z \in X$ için,

$$A(x, x, \dots, x, z) \le (n-1) A(x, x, \dots, x, y) + A(z, z, \dots, z, y)$$

ve

$$A(x, x, \dots, x, z) \le (n-1) A(x, x, \dots, x, y) + A(y, y, \dots, y, z)$$

eşitsizlikleri vardır (Abbas, et al., 2015).

İspat: Her $x, y, z \in X$ için $A-$metrik uzay tanımının A3) koşulunda $a = y$ alınırsa ve Önerme 3.3.3 göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} A(x,x,\ldots,x,z) &\le A(x,x,\ldots,x,y)+\ldots+A(x,x,\ldots,x,y)+A(z,z,\ldots,z,y) \\ &\le (n-1)A(x,x,\ldots,x,y)+A(z,z,\ldots,z,y) \\ &= (n-1)A(x,x,\ldots,x,y)+A(y,y,\ldots,y,z) \end{aligned}$$

sağlanır.

Tanım 3.3.5. (X,A) bir $A-$metrik uzay olsun. $x \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$B_A(x,r) = \{y \in X : A(x,x,\ldots,x,y) < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar denir (Abbas, et al., 2015).

Tanım 3.3.6. (X,A) $A-$metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için her $k \ge k_0$ olduğunda $A(x_k, x_k, x_k, \ldots, x_k, x) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisine x noktasına yakınsıyor denir ve bu yakınsama $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ veya $k \to \infty$ için $x_k \to x$ ile gösterilir (Abbas, et al., 2015).

Başka bir deyişle $k \to \infty$ için $A(x_k, x_k, x_k, \ldots, x_k, x) \to 0$ ise $\{x_k\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 3.3.7. (X,A) $A-$metrik uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için her $m,k \ge k_0$ olduğunda $A(x_k, x_k, x_k, \ldots, x_k, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Abbas, et al., 2015).

Başka bir deyişle $m,k \to \infty$ için $A(x_k, x_k, x_k, \ldots, x_k, x_m) \to 0$ ise $\{x_k\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.3.8. (X,A) $A-$metrik uzayında her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X,A) uzayına tam $A-$metrik uzay denir (Abbas, et al., 2015).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Modüler A – Metrik Uzaylar

Metrik uzay kavramı birçok farklı yönden genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bu bölümde hem modüler metrik uzaylara hem de $A-$metrik uzaylara yeni bir bakış açısı olarak modüler $A-$metrik uzaylar tanıtılmıştır ve bu uzaya ait bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 4.1.1. X boştan farklı bir küme ve $n \geq 2$ sonlu bir doğal sayı olsun. $A_\lambda : (0,\infty) \times X^n \to [0,\infty]$ fonksiyonu $i = \overline{1,n}$ olmak üzere her $\lambda, \lambda_i > 0$ ve her $x_i, a \in X$ için $A(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n) = A_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n)$ şeklinde tanımlansın ve aşağıdaki şartları sağlasın.

MA1) $A_\lambda(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \geq 0$,

MA2) $A_\lambda(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$,

MA3) $$\begin{aligned} A_{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \leq\, & A_{\lambda_1}(x_1, x_1, ..., x_1, a) \\ & + A_{\lambda_2}(x_2, x_2, ..., x_2, a) \\ & \vdots \\ & + A_{\lambda_n}(x_n, x_n, ..., x_n, a) \end{aligned}$$

Bu durumda, A_λ fonksiyonuna X üzerinde bir modüler $A-$metrik, (X, A) sıralı çiftine de bir modüler $A-$metrik uzay denir. Bu yeni kavramın fiziksel yorumu şu şekildedir; $i = \overline{1,n}$ olmak üzere $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için bu noktalar arasındaki mesafe $\lambda > 0$ zamanı için negatif olmayan (sonsuz değer de alabilir) $A_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n)$ hızı ile alınır.

Lemma 4.1.2. (X, A) bir modüler $A-$metrik uzay olsun. Eğer her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için $A(\cdot, x_1, x_2, ..., x_n) : (0,\infty) \to [0,\infty]$ sürekliyse her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için,

$$A_\lambda(x, x, ..., x, y) = A_\lambda(y, y, ..., y, x)$$

eşitliği vardır.

İspat: Her $\lambda \in (0,\infty)$ için $0 < (n-1)\varepsilon < \lambda$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır. O halde modüler $A-$metrik uzay tanımının MA3) koşulunda $a = x$ alınırsa,

$$A_\lambda(x,x,...,x,y) \le A_\varepsilon(x,x,...,x,x) \\ +A_\varepsilon(x,x,...,x,x) \\ +A_\varepsilon(x,x,...,x,x) \\ \vdots \\ +A_\varepsilon(x,x,...,x,x) \\ +A_{\lambda-(n-1)\varepsilon}(y,y,...,y,x) \\ = A_{\lambda-(n-1)\varepsilon}(y,y,...,y,x) \tag{4.1}$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için (4.1) eşitsizliğinin limiti alınırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\lambda(x,x,...,x,y) \le \lim_{\varepsilon\to 0} A_{\lambda-(n-1)\varepsilon}(y,y,...,y,x) \\ A_\lambda(x,x,...,x,y) \le A_\lambda(y,y,...,y,x) \tag{4.2}$$

elde edilir. Benzer şekilde MA3) koşulunda $a = y$ alınırsa,

$$A_\lambda(y,y,...,y,x) \le A_\varepsilon(y,y,...,y,y) \\ +A_\varepsilon(y,y,...,y,y) \\ +A_\varepsilon(y,y,...,y,y) \\ \vdots \\ +A_\varepsilon(y,y,...,y,y) \\ +A_{\lambda-(n-1)\varepsilon}(x,x,...,x,y) \\ = A_{\lambda-(n-1)\varepsilon}(x,x,...,x,y) \tag{4.3}$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için (4.3) eşitsizliğinin limiti alınırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\lambda(y,y,...,y,x) \le \lim_{\varepsilon\to 0} A_{\lambda-(n-1)\varepsilon}(x,x,...,x,y) \\ A_\lambda(y,y,...,y,x) \le A_\lambda(x,x,...,x,y) \tag{4.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.2) ve (4.4)'ten istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 4.1.3. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve her $x_1,x_2,...,x_n \in X$ için $A(\cdot,x_1,x_2,...,x_n):(0,\infty)\to[0,\infty]$ sürekli olsun. O halde her $x,y,z \in X$ için

$$A_\lambda(x,x,...,x,z) \le (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}(x,x,...,x,y) + A_{\frac{\lambda}{n}}(z,z,...,z,y)$$

ve

$$A_\lambda(x,x,...,x,z) \le (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}(x,x,...,x,y) + A_{\frac{\lambda}{n}}(y,y,...,y,z)$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat: Modüler $A-$metrik uzay tanımının MA3) koşulunda $a=y$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$A_{\lambda}\left(x,x,...,x,z\right)\leq \underbrace{A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,y\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,y\right)}_{\text{(n-1) tane}}+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z,z,...,z,y\right)$$
$$=(n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,y\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z,z,...,z,y\right).$$

Ayrıca Lemma 4.1.2'den

$$A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z,z,...,z,y\right)=A_{\frac{\lambda}{n}}\left(y,y,...,y,z\right)$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$A_{\lambda}\left(x,x,...,x,z\right)\leq(n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,y\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(y,y,...y,z\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 4.1.4. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve her $x_1,x_2,...,x_n\in X$ için $A(\cdot,x_1,x_2,...,x_n):(0,\infty)\to[0,\infty]$ sürekli olsun. O halde $\frac{\lambda}{n^2}\leq\frac{\lambda}{n}\leq\lambda$ için,

$$A_{\lambda}\left(x,x,...,x,y\right)\leq A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,y\right)\leq A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(x,x,...,x,y\right)$$

sağlanır.

İspat: Modüler $A-$metrik uzay tanımının MA3) koşulunda $a=x$ alınır ve Lemma 4.1.3'teki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}A_{\lambda}\left(x,x,...,x,y\right)\quad &\leq(n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,x\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(y,y,...y,x\right)\\ &=A_{\frac{\lambda}{n}}\left(y,y,...y,x\right)\\ &\leq\left(n-1\right)A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(y,y,...y,y\right)+A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(x,x,...,x,y\right)\\ &=A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(x,x,...,x,y\right)\end{aligned}$$

yazılır. O halde, Lemma 4.1.2 ile birlikte

$$A_{\lambda}\left(x,x,...,x,y\right)\leq A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,x,...,x,y\right)\leq A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(x,x,...,x,y\right)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.5. $X=\mathbb{R}$ olsun. $A_\lambda :(0,\infty)\times X^n \to [0,\infty]$ fonksiyonu her $\lambda>0$ ve $x_1,x_2,...,x_n \in X$ için,

$$\begin{aligned}A_\lambda(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n) &= \frac{\lambda}{n}\Big(|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+...+|x_1-x_n| \\ &\quad +|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+...+|x_2-x_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad +|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n| \\ &\quad +|x_{n-1}-x_n| \Big) \\ &= \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X,A) bir modüler $A-$metrik uzaydır. Gerçekten, her $i=\overline{1,n}$ için $x_i, a \in X$ olmak üzere

MA1) $A_\lambda(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)\geq 0$ olduğu açıktır.

MA2) $$\begin{aligned}A_\lambda(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n) &= \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i-x_j|=0 \\ &\Leftrightarrow x_i=x_j \\ &\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n\end{aligned}$$

MA3) $$\begin{aligned}A_\lambda(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n) &= \frac{\lambda}{n}\Big(|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+...+|x_1-x_n| \\ &\quad +|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+...+|x_2-x_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad +|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n| \\ &\quad +|x_{n-1}-x_n| \Big) \\ &\leq \frac{\lambda}{n}\Big(|x_1-a|+|a-x_2|+|x_1-a|+|a-x_3|...+|x_1-a|+|a-x_n| \\ &\quad +|x_2-a|+|a-x_3|+|x_2-a|+|a-x_4|...+|x_2-a|+|a-x_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad +|x_{n-2}-a|+|a-x_{n-1}|+|x_{n-2}-a|+|a-x_n| \\ &\quad +|x_{n-1}-a|+|a-x_n| \Big)\end{aligned}$$

$$=\frac{\lambda}{n}\left[(n-1)|x_1-a|+(n-1)|x_2-a|+...+(n-1)|x_n-a|\right]$$
$$=\frac{\lambda}{n}\left[(|x_1-x_1|+|x_1-x_1|+...+|x_1-a|)+...+(|x_1-x_1|+|x_1-a|)+(|x_1-a|)\right]$$
$$+\frac{\lambda}{n}\left[(|x_2-x_2|+|x_2-x_2|+...+|x_2-a|)+...+(|x_2-x_2|+|x_2-a|)+(|x_2-a|)\right]$$
$$\vdots$$
$$+\frac{\lambda}{n}\left[(|x_n-x_n|+|x_n-x_n|+...+|x_n-a|)+...+(|x_n-x_n|+|x_n-a|)+(|x_n-a|)\right]$$
$$=A_\lambda\left(x_1,x_1,...,x_1,a\right)+A_\lambda\left(x_2,x_2,...,x_2,a\right)+...+A_\lambda\left(x_n,x_n,...,x_n,a\right)$$
$$\leq A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x_1,x_1,...,x_1,a\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x_2,x_2,...,x_2,a\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x_n,x_n,...,x_n,a\right)$$

O halde, $A_\lambda\left(x_1,x_2,x_3,...,x_{n-1},x_n\right)=\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir modüler $A-$metriktir.

Örnek 4.1.6. $I=[0,1]$ olmak üzere $C(I)=\{f\mid f:I\to\mathbb{R}\text{ sürekli}\}$ olsun. $i=\overline{1,n}$ için $f_i\in C(I)$ olmak üzere

$$A_\lambda\left(f_1,f_2,...,f_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\int_0^1\left|f_i(x)-f_j(x)\right|dx$$

şeklinde tanımlanan $A_\lambda:(0,\infty)\times\left(C(I)\right)^n\to[0,\infty)$ fonksiyonu $C(I)$ üzerinde bir modüler $A-$metriktir. Gerçekten; $i=\overline{1,n}$ ve $i<j$ için her $f_i,f_j,g\in C(I)$ ve her $x\in I$ olsun.

MA1) $\left|f_i(x)-f_j(x)\right|\geq 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\int_0^1\left|f_i(x)-f_j(x)\right|dx=A_\lambda\left(f_1,f_2,...,f_{n-1},f_n\right)\geq 0$$

dır.

MA2) $A_\lambda\left(f_1,f_2,...,f_{n-1},f_n\right)=0$ olsun. O halde

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\int_0^1\left|f_i(x)-f_j(x)\right|dx=0\Rightarrow\int_0^1\left|f_i(x)-f_j(x)\right|dx=0$$

dır. $i=\overline{1,n}$ ve $i<j$ olmak üzere $F_{ij}:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonları her $x,t\in I$ için

$$F_{ij}(x)=\int_0^x \left| f_i(t)-f_j(t)\right| dt$$

olsun. İntegral Hesabın 1. Temel Teoremi'nden F_{ij} fonksiyonlarının her biri türevlenebilirdir ve türevi

$$F_{ij}^{'}(x)=\left| f_i(x)-f_j(x)\right|$$

dir. Ayrıca İntegral Hesabın 2. Temel Teoremi'nden

$$\int_0^1 \left| f_i(x)-f_j(x)\right| dx=F_{ij}(1)-F_{ij}(0)$$

olup her $x\in I$ için $F_{ij}(1)-F_{ij}(0)=0$ dır. Böylece F_{ij} artan bir fonksiyon olduğundan her $x\in I$ için $F_{ij}(1)=F_{ij}(0)=c$ $(c\,\text{sabit})$ şeklinde sabit bir fonksiyon olur. Bu ise, her $x\in I$ için $F_{ij}^{'}(x)=\left| f_i(x)-f_j(x)\right|=0$ ve dolayısıyla her $x\in I$ için $f_i(x)=f_j(x)$ yani $f_i=f_j$ dir.

Tersine olarak $f_i=f_j$ olsun. Her $t\in I$ için,

$$\begin{aligned}
f_i(t)=f_j(t)\Rightarrow f_i(t)-f_j(t)=0 \quad &\Rightarrow \int_0^1 \left| f_i(t)-f_j(t)\right| dt=0\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\int_0^1 \left| f_i(t)-f_j(t)\right| dt=0\\
&\Rightarrow A_\lambda(f_1,f_2,\ldots,f_{n-1},f_n)=0
\end{aligned}$$

dır. Böylece $A_\lambda(f_1,f_2,\ldots,f_{n-1},f_n)=0\Leftrightarrow f_1=f_2=\ldots=f_{n-1}=f_n$ dır.

MA3) $$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\left| f_i(x)-f_j(x)\right| dx &=\int_0^1 \left| f_1(x)-f_2(x)\right| dx+\ldots+\int_0^1 \left| f_1(x)-f_n(x)\right| dx\\
&+\int_0^1 \left| f_2(x)-f_3(x)\right| dx+\ldots+\int_0^1 \left| f_2(x)-f_n(x)\right| dx\\
&\ \vdots\\
&+\int_0^1 \left| f_{n-1}(x)-f_n(x)\right| dx
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 |f_1(x)-g(x)|dx+\ldots+\int_0^1 |g(x)-f_n(x)|dx$$
$$+\int_0^1 |f_2(x)-g(x)|dx+\ldots+\int_0^1 |g(x)-f_n(x)|dx$$
$$\vdots$$
$$+\int_0^1 |f_{n-1}(x)-g(x)|dx+\int_0^1 |g(x)-f_n(x)|dx$$
$$=(n-1)\int_0^1 |f_1(x)-g(x)|dx+\ldots+(n-1)\int_0^1 |f_n(x)-g(x)|dx$$
$$\leq A_{\frac{\lambda}{n}}(f_1,f_1,\ldots,f_1,g)+A_{\frac{\lambda}{n}}(f_2,f_2,\ldots,f_2,g)+\cdots+A_{\frac{\lambda}{n}}(f_n,f_n,\ldots,f_n,g)$$

Bu durumda $(C(I),A)$ bir modüler $A-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.7. $X=[0,6)$ olmak üzere $A_\lambda:(0,\infty)\times X^n\to[0,\infty]$ fonksiyonu her $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ ve her $\lambda>0$ için

$$A_\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\frac{|e^{x_i}-e^{x_j}|}{\lambda}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, (X,A) bir modüler $A-$metrik uzaydır. Gerçekten, her $i=\overline{1,n}$ ve $i<j$ için her $x_i,x_j\in X$ ve her $\lambda,\lambda_i>0$ olmak üzere,

MA1) $|e^{x_i}-e^{x_j}|\geq 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\frac{|e^{x_i}-e^{x_j}|}{\lambda}=A_\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq 0$$

dır.

MA2) $A_\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\frac{|e^{x_i}-e^{x_j}|}{\lambda}=0\Leftrightarrow|e^{x_i}-e^{x_j}|=0\Leftrightarrow e^{x_i}=e^{x_j}\Leftrightarrow x_i=x_j$

MA3) $A_{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\dfrac{\left|e^{x_1}-e^{x_2}\right|+\left|e^{x_1}-e^{x_3}\right|+...+\left|e^{x_{n-1}}-e^{x_n}\right|}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}$

$$\leq\frac{\left|e^{x_1}-e^{a}\right|+\left|e^{a}-e^{x_2}\right|+...+\left|e^{x_{n-1}}-e^{a}\right|+\left|e^{a}-e^{x_n}\right|}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}$$

$$=\frac{(n-1)\left|e^{x_1}-e^{a}\right|}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}+\frac{(n-1)\left|e^{a}-e^{x_2}\right|}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}+...+\frac{(n-1)\left|e^{a}-e^{x_n}\right|}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}$$

$$\leq\frac{(n-1)\left|e^{x_1}-e^{a}\right|}{\lambda_1}+\frac{(n-1)\left|e^{x_2}-e^{a}\right|}{\lambda_2}+...+\frac{(n-1)\left|e^{x_n}-e^{a}\right|}{\lambda_n}$$

$$=A_{\lambda_1}\left(x_1,...,x_1,a\right)+A_{\lambda_2}\left(x_2,...,x_2,a\right)+...+A_{\lambda_n}\left(x_n,...,x_n,a\right).$$

Bu durumda, (X,A) bir modüler $A-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.8. (X,d) bir metrik uzay ve $A_{\lambda_d}:(0,\infty)\times X^n\to[0,\infty]$ fonksiyonu her $\lambda>0$ ve $x_1,x_2,...,x_n\in X$ için,

$$A_{\lambda_d}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}d\left(x_i,x_n\right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,A) bir modüler $A-$metrik uzaydır. Gerçekten her $i=\overline{1,n}$ için $x_i,a\in X$ ve $\lambda,\lambda_i>0$ olmak üzere,

MA1) d bir metrik uzay olduğundan $d\left(x_i,x_n\right)\geq 0$ olup tanım gereği $A_{\lambda_d}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\geq 0$ olur.

MA2) $A_{\lambda_d}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}d\left(x_i,x_n\right)=0$

$$\Leftrightarrow d\left(x_i,x_n\right)=0,\quad i=\overline{1,n-1}$$

$$\Leftrightarrow x_i=x_n,\quad i=\overline{1,n-1}$$

MA3) $A_{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\dfrac{1}{\lambda_1+...+\lambda_n}\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_n)$

$$=\frac{1}{\lambda_1+...+\lambda_n}\left[d(x_1,x_n)+d(x_2,x_n)+...+d(x_{n-1},x_n)\right]$$
$$\leq\frac{1}{\lambda_1+...+\lambda_n}\left[d(x_1,a)+d(a,x_n)+...+d(a,x_n)\right]$$
$$=\frac{1}{\lambda_1+...+\lambda_n}d(x_1,a)+...+\frac{(n-1)}{\lambda_1+...+\lambda_n}d(a,x_n)$$
$$\leq\frac{(n-1)}{\lambda_1}d(x_1,a)+\frac{(n-1)}{\lambda_2}d(x_2,a)+...+\frac{(n-1)}{\lambda_n}d(x_n,a)$$
$$=A_{\lambda_1}(x_1,...,x_1,a)+A_{\lambda_2}(x_2,...,x_2,a)+...+A_{\lambda_n}(x_n,...,x_n,a)$$

Bu durumda, $A_{\lambda_d}(x_1,x_2,...,x_n)=\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_n)$ fonksiyonu X üzerinde bir modüler $A-$metriktir. $A_{\lambda_d}-$metriğine d metriği tarafından üretilen modüler $A-$metrik denir.

Her d metriği için $A_{\lambda_d}\neq A_\lambda$ olacak şekilde bir modüler $A-$metrik vardır.

Örnek 4.1.9. X boştan farklı bir küme, $n\geq 3$ ve $A_\lambda:(0,\infty)\times X^n\to[0,\infty]$ fonksiyonu her $\lambda>0$ ve $x_1,x_2,...,x_n\in X$ için,

$$A_\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|+\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)\right|\right]$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, (X,A) bir modüler $A-$metriktir. MA1) ve MA2) koşulları kolaylıkla görülebilir. Her $i=\overline{1,n}$ için $x_i,a\in X$ ve $\lambda_i>0$ olmak üzere,

MA3) $A_{\lambda_1+...+\lambda_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\dfrac{1}{\lambda_1+...+\lambda_n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|+\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)\right|\right]$

$$\leq\frac{1}{\lambda_1+...+\lambda_n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|+\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|\right]$$
$$\leq\frac{2}{\lambda_1+...+\lambda_n}\left[|x_1-a|+|a-x_n|+...+|x_{n-1}-a|+|a-x_n|\right]$$

$$\leq \frac{(n-1)}{\lambda_1}|x_1-a|+\frac{(n-1)}{\lambda_2}|x_2-a|+...+\frac{(n-1)}{\lambda_n}|x_n-a|$$
$$=A_{\lambda_1}(x_1,...,x_1,a)+A_{\lambda_2}(x_2,...,x_2,a)+...+A_{\lambda_n}(x_n,...,x_n,a)$$

koşulu da sağlanır. Fakat bu modüler $A-$metrik d metriği tarafından elde edilemez. Bu durumun aksi kabul edilsin ve bir d metriği bu modüler $A-$metriği üretsin. O halde,

$$A_\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|+\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)\right|\right]$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_n)\right]$$

olacak şekilde bir d metriği vardır. Bu takdirde her $i=\overline{1,n}$ için $x_i\in X$ ve $\lambda>0$ olmak üzere,

$$A_\lambda(x_i,x_i,...,x_n)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|+\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)\right|\right]$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left[(n-1)|x_i-x_n|+(n-1)|x_i-x_n|\right] \quad \textbf{(4.5)}$$
$$=\frac{2}{\lambda}(n-1)|x_i-x_n|$$

ve

$$A_\lambda(x_i,x_i,...,x_n)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_n)$$
$$=\frac{1}{\lambda}(n-1)d(x_i,x_n) \quad \textbf{(4.6)}$$

olup (4.5) ve (4.6)'dan

$$\frac{1}{\lambda}(n-1)d(x_i,x_n)=\frac{2}{\lambda}(n-1)|x_i-x_n|$$
$$d(x_i,x_n)=2|x_i-x_n|$$

bulunur. Böylece modüler $A-$metrik d metriğinden üretildiğine göre

$$A_\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|+|x_1+x_2+...+x_{n-1}-(n-1)x_n|\right]=\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|$$
$$\Rightarrow|x_1+x_2+...+x_{n-1}-(n-1)x_n|=\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_n|$$

olmalıdır. Fakat bu son eşitlik bir çelişkidir. Dolayısıyla verilmiş olan modüler $A-$ metrik bir metrik tarafından üretilemez.

Eğer bu çelişki ortaya çıkmasaydı yani her modüler $A-$metrik bir metrik tarafından üretilseydi modüler $A-$metrik uzayların metrik uzaylardan pek bir farkı olmayacaktı. Doğal olarak modüler $A-$metrik uzay kavramı önemini yitirecekti.

Tanım 4.1.10. (X, A) bir modüler $A-$metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için $B_{A_\lambda}(x_0, r)$ açık yuvarı ve $B_{A_\lambda}[x_0, r]$ kapalı yuvarı sırasıyla

$$B_{A_\lambda}(x_0, r) := \{y \in X : A_\lambda(y, ..., y, x_0) < r\}$$

ve

$$B_{A_\lambda}[x_0, r] := \{y \in X \ : \ A_\lambda(y, ..., y, x_0) \le r\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 4.1.11. (X, A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $Y \subset X$ olsun.

i. Eğer her $\lambda > 0$ ve her $x \in Y$ için $B_{A_\lambda}(x, r) \subset Y$ olacak şekilde bir $r_x > 0$ sayısı varsa, Y kümesine X'in bir açık alt kümesi denir.

ii. $\tau_A := \{Y \subset X : \forall x \in Y$ için $\exists\, r > 0$ vardır öyle ki $B_{A_\lambda}(x, r) \subset Y\}$

olsun. Bu durumda τ_A'ya modüler $A-$metriğin X üzerinde ürettiği topoloji denir.

Teorem 4.1.12. (X, A) bir modüler $A-$metrik uzay olsun. Bu durumda, (X, τ_A) bir Hausdorff uzaydır.

İspat: $x, y \in X$ için $x \neq y$ ve $c = A_\lambda(x, x, ..., x, y)$ olsun. $U = B_{A_{\frac{\lambda}{n}}}(x, \frac{c}{2(n-1)})$ ve $V = B_{A_{\frac{\lambda}{n}}}(y, \frac{c}{2})$ kümeleri alınsın. Bu durumda, $x \in U$ ve $y \in V$'dir. $U \cap V = \phi$ olduğu gösterilmelidir. Bu durumun aksi kabul edilsin ve $z \in U \cap V$ olsun. Bu durumda, $z \in B_{A_{\frac{\lambda}{n}}}(x, \dfrac{c}{2(n-1)})$ ve $z \in B_{A_{\frac{\lambda}{n}}}(y, \dfrac{c}{2})$ dir. O halde açık yuvar tanımından,

$$A_{\frac{\lambda}{n}}(z, z, z, ..., z, x) < \frac{c}{2(n-1)}$$
$$A_{\frac{\lambda}{n}}(z, z, z, ..., z, y) < \frac{c}{2}$$

eşitsizlikleri yazılır. Lemma 4.1.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
c &= A_\lambda(x,x,...,x,y) \\
&\le (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}(z,z,...,z,x) + A_{\frac{\lambda}{n}}(z,z,...,z,y) \\
&< (n-1)\frac{c}{2(n-1)} + \frac{c}{2} \\
&= c
\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. O halde, $U \cap V = \varnothing$'dir. Böylece (X, τ_A) bir Hausdorff uzaydır.

Tanım 4.1.13. (X, A) modüler $A-$metrik uzayında $\{x_k\}$ dizisi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve her $\lambda > 0$ için her $k \ge k_0$ olduğunda $A_\lambda(x_k, x_k, ..., x_k, x) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisi x noktasına $A_\lambda -$ yakınsaktır denir.

Diğer bir ifadeyle, eğer her $\lambda > 0$ için $k \to \infty$ iken $A_\lambda(x_k, x_k, ..., x_k, x) \to 0$ oluyorsa $\{x_k\}$ dizisi x noktasına $A_\lambda -$ yakınsaktır.

Tanım 4.1.14. (X, A) modüler $A-$metrik uzayında $\{x_k\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve her $\lambda > 0$ için her $m, k \ge k_0$ olduğunda $A_\lambda(x_k, x_k, ..., x_k, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisine bir $A_\lambda -$ Cauchy dizisi denir.

Diğer bir ifadeyle, eğer her $\lambda > 0$ için $m, k \to \infty$ iken $A_\lambda(x_k, x_k, ..., x_k, x_m) \to 0$ oluyorsa $\{x_k\}$ dizisine bir $A_\lambda -$ Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.1.15. (X, A) modüler $A-$ metrik uzayında her $A_\lambda -$ Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, A) uzayına tam modüler $A-$metrik uzay denir.

Örnek 4.1.16. $X = [0,6)$ uzayı üzerinde tanımlı modüler A-metrik, Örnek 4.1.7'de tanımlandığı gibi verilsin. $\{x_k\}$ dizisi $\{x_k\} = 6 - \frac{1}{k}$ olarak alınsın. Bu dizi bu uzayda

$$\begin{aligned}
A_\lambda\left(x_k, x_k, \ldots, x_k, x_m\right) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} \frac{\left|e^{x_i} - e^{x_j}\right|}{\lambda} \\
&= \frac{(n-1)}{\lambda}\left|e^{x_k} - e^{x_m}\right| \\
&= \frac{(n-1)}{\lambda}\left|e^{6-\frac{1}{k}} - e^{6-\frac{1}{m}}\right| \xrightarrow{k,m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

olduğundan bir $A_\lambda -$Cauchy dizisidir fakat

$$x_k = \left(6 - \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} 6 \notin X$$

olduğundan X'te yakınsak bir dizi değildir. Böylece (X, A) bir tam modüler $A-$metrik uzay değildir.

Teorem 4.1.17. (X, A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $\{x_k\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\{x_k\}$ dizisi X'te bir x noktasına $A_\lambda -$yakınsıyorsa, bu x noktası tektir.

İspat: X'te bir $\{x_k\}$ dizisi birbirinden farklı x ve y noktalarına $A_\lambda -$yakınsasın. Her $\varepsilon > 0$ ve $i = \overline{1,n}$ için her $\lambda_i > 0$ olmak üzere her $k \geq k_1$ için,

$$A_{\lambda_i}(x_k, x_k, \ldots, x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}, \quad i = \overline{1,(n-1)}$$

ve her $k \geq k_2$ için,

$$A_{\lambda_n}(x_k, x_k, \ldots, x_k, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $k_0 = \text{maks}\{k_1, k_2\}$ seçilsin. Böylece her $k \geq k_0$ için,

$$\begin{aligned}
A_{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}(x, \ldots, x, y) &\leq A_{\lambda_1}(x, \ldots, x, x_k) + A_{\lambda_2}(x, \ldots, x, x_k) + \ldots + A_{\lambda_n}(y, \ldots y, x_k) \\
&= A_{\lambda_1}(x_k, \ldots, x_k, x) + A_{\lambda_2}(x_k, \ldots, x_k, x) + \ldots + A_{\lambda_n}(x_k, \ldots, x_k, y) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(n-1)} + \frac{\varepsilon}{2(n-1)} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= (n-1)\frac{\varepsilon}{2(n-1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için bu eşitsizlik sağlandığından $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa $A_{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}(x,...,x,y) = 0$ elde edilir. Modüler $A-$metrik uzay tanımının MA2) koşulundan $x = y$'dir.

Teorem 4.1.18. (X, A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $\{x_k\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\{x_k\}$ dizisi X'te $A_\lambda-$yakınsak bir diziyse, $\{x_k\}$ bir $A_\lambda-$Cauchy dizisidir.

İspat: $\{x_k\}$, X'te $A_\lambda-$yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için $k \to \infty$ iken $A_\lambda(x_k,...,x_k,x) \to 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ ve $i = \overline{1,n}$ için $\lambda_i > 0$ olmak üzere her $k \geq k_1$ için,

$$A_{\lambda_i}(x_k,...,x_k,x) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)},\ i = \overline{1,(n-1)}$$

ve her $m \geq k_2$ için,

$$A_{\lambda_n}(x_m,...,x_m,x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $k_0 = \text{maks}\{k_1,k_2\}$ seçilsin. Her $m,k \geq k_0$ için,

$$\begin{aligned}
A_{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}(x_k,...,x_k,x_m) &\leq A_{\lambda_1}(x_k,...,x_k,x) + A_{\lambda_2}(x_k,...,x_k,x) \\
&\quad + A_{\lambda_3}(x_k,...,x_k,x) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + A_{\lambda_n}(x_m,...,x_m,x) \\
&< (n-1)\frac{\varepsilon}{2(n-1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{x_k\}$ bir $A_\lambda-$ Cauchy dizisidir.

Tanım 4.1.19. (X, A) ve (X^*, A^*) birer modüler $A-$metrik uzay ve $f : X \to X^*$ bir fonksiyon olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $A_\lambda(x,x,...,x,a) < \delta$ olduğunda $A^*_\lambda(f(x), f(x),..., f(x), f(a)) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında $A_\lambda-$süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesinin her bir noktasında $A_\lambda -$sürekli ise f fonksiyonu X üzerinde $A_\lambda -$süreklidir denir.

Tanım 4.1.20. (X,A) ve (X^*,A^*) birer modüler $A-$metrik uzay ve $f:X\to X^*$ bir fonksiyon olsun. X'teki her $\{x_k\}$ dizisi için $x_0\in X$ olmak üzere $A_\lambda(x_k,...,x_k,x_0)\to 0$ iken $A_\lambda^*(f(x_k),...,f(x_k),f(x_0))\to 0$ oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında $A_\lambda -$dizisel süreklidir denir.

Lemma 4.1.21. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve her $x_1,x_2,...,x_n\in X$ için $A(\cdot,x_1,x_2,...,x_n):(0,\infty)\to[0,\infty]$ sürekli olsun. Eğer $x_k\to x$ ve $y_k\to y$ olacak şekilde $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ dizileri varsa

$$A_\lambda(x_k,...,x_k,y_k)\to A_\lambda(x,...,x,y)$$

dir.

İspat: $x_k\to x$ ve $y_k\to y$ olacak şekilde $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ dizileri alınsın. O zaman her $\varepsilon>0$ ve her $\delta>0$ için her $k\geq k_1$ olduğunda

$$A_\delta(x_k,...,x_k,x)<\frac{\varepsilon}{2(n-1)}$$

ve her $k\geq k_2$ olduğunda

$$A_\delta(y_k,...,y_k,y)<\frac{\varepsilon}{2(n-1)}$$

olacak şekilde en az bir $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ vardır. $k_0=\text{maks}\{k_1,k_2\}$ alınırsa her $k\geq k_0$ için,

$$A_{\lambda+2(n-1)\delta}(x_k,...,x_k,y_k)\leq(n-1)A_\delta(x_k,...,x_k,x)+(n-1)A_\delta(y_k,...,y_k,y)+A_\lambda(x,...,x,y)$$

yazılır. Buradan

$$A_{\lambda+2(n-1)\delta}(x_k,...,x_k,y_k)<(n-1)\frac{\varepsilon}{2(n-1)}+(n-1)\frac{\varepsilon}{2(n-1)}+A_\lambda(x,...,x,y)$$

$$A_{\lambda+2(n-1)\delta}(x_k,...,x_k,y_k)-A_\lambda(x,...,x,y)<\varepsilon$$

elde edilir. $\delta\to 0$ için limit alınırsa,

$$A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)-A_\lambda\left(x,\ldots,x,y\right)<\varepsilon \qquad \textbf{(4.7)}$$

bulunur. Diğer yandan

$$A_{\lambda+2(n-1)\delta}\left(x,\ldots,x,y\right)\leq\left(n-1\right)A_\delta\left(x,\ldots,x,x_k\right)+\left(n-1\right)A_\delta\left(y,\ldots,y,y_k\right)+A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)$$

yazılır. Buradan

$$A_{\lambda+2(n-1)\delta}\left(x,\ldots,x,y\right)<\left(n-1\right)\frac{\varepsilon}{2\left(n-1\right)}+\left(n-1\right)\frac{\varepsilon}{2\left(n-1\right)}+A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)$$

$$A_{\lambda+2(n-1)\delta}\left(x,\ldots,x,y\right)-A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)<\varepsilon.$$

elde edilir. $\delta\to 0$ için limit alınırsa,

$$A_\lambda\left(x,\ldots,x,y\right)-A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)<\varepsilon \qquad \textbf{(4.8)}$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) eşitsizliklerinden

$$\left|A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)-A_\lambda\left(x,\ldots,x,y\right)\right|<\varepsilon$$

olduğu görülür ve buradan da

$$A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,y_k\right)\to A_\lambda\left(x,\ldots,x,y\right)$$

şeklinde istenilen sonuç elde edilir.

4.2. Modüler $A-$ Metrik Uzaylarda Bağdaşabilir Dönüşümler

Bu kısımda $A-$tip ve $P-$tip bağdaşabilir dönüşüm kavramlarından yararlanılarak daha önce tanımlanan modüler $A-$metrik uzaylar üzerinde bağdaşabilir, $\alpha-$tip bağdaşabilir ve $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşümler tanıtıldı ve bu dönüşümler arasındaki ilişkiler incelendi.

Tanım 4.2.1. (X,A) bir modüler $A-$ metrik uzay ve $S,T:X\to X$ iki dönüşüm olsun. X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Tx_k\}$ ve $\{Sx_k\}$ dizileri aynı $z\in X$ noktasına $A_\lambda-$yakınsasın. Eğer

$$\lim_{k\to\infty}A_\lambda\left(STx_k,\ldots,STx_k,TSx_k\right)=0$$

sağlanıyorsa S ve T'ye bağdaşabilir dönüşümler denir.

Örnek 4.2.2. $X=\mathbb{R}$ olmak üzere $A_\lambda:(0,\infty)\times X^n\to[0,\infty]$ fonksiyonunun her $x_1,x_2,...,x_n\in X$ ve her $\lambda>0$ için $A_\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|$ şeklinde tanımlandığında X üzerinde bir modüler $A-$metrik olduğu Örnek 4.1.5'te gösterildi. Her $x\in X$ için $S,T:X\to X$ dönüşümleri $S(x)=x^2$ ve $T(x)=x^3$ olacak şekilde tanımlansın ve $\mathbb{R}$'de $\{x_k\}=\frac{1}{k}, k=1,2,...$ şeklinde tanımlı olan bir $\{x_k\}$ dizisi alınsın. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}=0$$
$$\lim_{k\to\infty} Tx_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^3}=0$$

olup $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri $0\in\mathbb{R}$ noktasına $A_\lambda-$yakınsar. Ayrıca $STx_k=\frac{1}{k^6}$ ve $TSx_k=\frac{1}{k^6}$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}A_\lambda(STx_k,...,STx_k,TSx_k)&=\lim_{k\to\infty}A_\lambda\left(\frac{1}{k^6},...,\frac{1}{k^6},\frac{1}{k^6}\right)\\&=\frac{\lambda}{n}\lim_{k\to\infty}0\\&=0\end{aligned}$$

olduğundan S ve T bağdaşabilirdir.

Örnek 4.2.3. $X=[0,2]$ olmak üzere $A_\lambda:(0,\infty)\times X^n\to[0,\infty]$ fonksiyonu her $x_1,x_2,...,x_n\in X$ ve her $\lambda>0$ için $A_\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\frac{\left|e^{x_i}-e^{x_j}\right|}{\lambda}$ şeklinde tanımlandığında X üzerinde bir modüler $A-$metriktir. Ayrıca her $x\in X$ için $S,T:X\to X$ dönüşümleri,

$$S(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ \frac{x+1}{2}, & x\in(1,2]\end{cases}\qquad T(x)=\begin{cases}2, & x=1\\ \frac{x+3}{4}, & x\neq 1\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın ve X'te $\{x_k\}=1-\frac{1}{k},k=1,2,...$ şeklinde tanımlı olan bir $\{x_k\}$ dizisi alınsın. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4} = 1$$

olup $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri $1 \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsar. Ayrıca $STx_k = 1$ ve $TSx_k = 2$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(1,...,1,2\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{|e-e|}{\lambda}+...+\frac{|e-e|}{\lambda}+\frac{|e-e^2|}{\lambda}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}(n-1)\frac{|e-e^2|}{\lambda} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan S ve T bağdaşabilir değildir.

Tanım 4.2.4. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T : X \to X$ iki dönüşüm olsun. X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Tx_k\}$ ve $\{Sx_k\}$ dizileri aynı $z \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsasın. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k, TTx_k ..., TTx_k, TTx_k\right) = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(TSx_k, SSx_k ..., SSx_k, SSx_k\right) = 0$$

sağlanıyor ise S ve T'ye $\alpha-$tip bağdaşabilir dönüşümler denir.

Örnek 4.2.5. $X = [0,6]$ olmak üzere $A_\lambda : (0,\infty)\times X^n \to [0,\infty]$ fonksiyonu her $x_1,x_2,...,x_n \in X$ ve her $\lambda > 0$ için $A_\lambda\left(x_1,x_2,...,x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\frac{\left|e^{x_i}-e^{x_j}\right|}{\lambda}$ şeklinde tanımlandığında X üzerinde bir modüler $A-$metriktir. Ayrıca her $x \in X$ için $S,T : X \to X$ dönüşümleri,

$$S(x) = \begin{cases} x, & x\in[0,3) \\ 6, & x\in[3,6] \end{cases} \qquad T(x) = \begin{cases} 6-x, & x\in[0,3) \\ 6, & x\in[3,6] \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın ve X'te $\{x_k\} = 3-\frac{1}{k^2}, k = 1,2,...$ şeklinde tanımlı olan bir $\{x_k\}$ dizisi alınsın. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k = \lim_{k\to\infty} 3 - \frac{1}{k^2} = 3$$
$$\lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty} 6 - 3 + \frac{1}{k^2} = 3$$

olup $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri $3 \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsar. Ayrıca $STx_k = 6$, $SSx_k = 3 - \frac{1}{k^2}$, $TSx_k = 6 - 3 + \frac{1}{k^2} = 3 + \frac{1}{k^2}$, $TTx_k = 6$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k, TTx_k, ..., TTx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(6, 6, ..., 6\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|e^6 - e^6\right| + \left|e^6 - e^6\right| + ... + \left|e^6 - e^6\right|}{\lambda}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(TSx_k, SSx_k, ..., SSx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(3 + \frac{1}{k^2}, 3 - \frac{1}{k^2}, ..., 3 - \frac{1}{k^2}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|e^{3+\frac{1}{k^2}} - e^{3-\frac{1}{k^2}}\right| + \left|e^{3+\frac{1}{k^2}} - e^{3-\frac{1}{k^2}}\right| + ... + \left|e^{3-\frac{1}{k^2}} - e^{3-\frac{1}{k^2}}\right|}{\lambda}\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan S ve T, $\alpha -$tip bağdaşabilirdir.

Örnek 4.2.6. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $A_\lambda : (0,\infty) \times X^n \to [0,\infty]$ fonksiyonunun her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve her $\lambda > 0$ için $A_\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} \left|x_i - x_j\right|$ şeklinde tanımlandığında $\mathbb{R}$ üzerinde bir modüler $A-$metrik olduğu Örnek 4.1.5'te gösterildi. Ayrıca her $x \in X$ için $S, T : X \to X$ dönüşümleri

$$S(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \end{cases} \qquad T(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ \frac{1}{x^5}, & x \neq 0 \end{cases}$$

olacak şeklinde tanımlansın ve X' te $\{x_k\} = k, k = 1, 2, ...$ şeklinde tanımlı olan $\{x_k\}$ dizisi alınsın. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^3} = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^5} = 0$$

olup $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri $0 \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsar. Ayrıca $STx_k = k^{15}$, $TSx_k = k^{15}$, $TTx_k = k^{25}$, $SSx_k = k^9$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(k^{15},...,k^{15},k^{15}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda}{n}\left[\left|k^{15}-k^{15}\right| + ... + \left|k^{15}-k^{15}\right| + \left|k^{15}-k^{15}\right|\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup S ve T bağdaşabilirdir. Fakat

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k,TTx_k,...,TTx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(k^{15},k^{25},...,k^{25}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda}{n}\left[\ \left|k^{15}-k^{25}\right| + \left|k^{15}-k^{25}\right| + ... + \left|k^{25}-k^{25}\right|\ \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda}{n}(n-1)\left|k^{15}-k^{25}\right| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(TSx_k,SSx_k,...,SSx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(k^{15},k^{9},...,k^{9}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda}{n}\left[\left|k^{15}-k^{9}\right| + \left|k^{15}-k^{9}\right| + ... + \left|k^{9}-k^{9}\right|\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda}{n}(n-1)\left|k^{15}-k^{9}\right| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı S ve T, $\alpha -$tip bağdaşabilir değildir.

Önerme 4.2.7. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T : X \to X$ dönüşümleri $A_\lambda -$sürekli olsun. Eğer S ve T bağdaşabilir ise aynı zamanda $\alpha -$tip bağdaşabilirdir.

İspat: X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri aynı $z \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsasın ve S ile T dönüşümleri bağdaşabilir olsun. S ve T dönüşümleri $A_\lambda -$sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} SSx_k &= \lim_{k\to\infty} STx_k = Sz \\
\lim_{k\to\infty} TSx_k &= \lim_{k\to\infty} TTx_k = Tz
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca S ve T bağdaşabilir olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right) = 0$$

dır.

$$A_{\lambda}\left(TSx_k,...,SSx_k,SSx_k\right)=A_{\lambda}\left(TSx_k,...,TSx_k,SSx_k\right)$$
$$\leq A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TSx_k,...,TSx_k,STx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TSx_k,...,STx_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right)$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}\left(TSx_k,SSx_k,...,SSx_k\right)=0$$

dır. Benzer şekilde

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}\left(STx_k,TTx_k,...,TTx_k\right)=0$$

dır. Böylece S ve T, $\alpha-$tip bağdaşabilir dönüşümlerdir.

Önerme 4.2.8. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T:X\to X$ dönüşümleri $\alpha-$tip bağdaşabilir olsun. Eğer S veya T' den en az biri $A_{\lambda}-$sürekli ise S ve T bağdaşabilirdir.

İspat: T dönüşümü $A_{\lambda}-$sürekli ve X 'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ aynı $z\in X$ noktasına $A_{\lambda}-$yakınsak olsun. Bu durumda, T $A_{\lambda}-$sürekli olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} TSx_k=\lim_{k\to\infty} TTx_k=Tz$$

dir. Modüler $A-$metrik uzay tanımının MA3) koşulundan

$$\begin{aligned}A_{\lambda}\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right)&\leq A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,TTx_k\right)\\&\vdots\\&+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,TTx_k\right)\\&+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TSx_k,...,TSx_k,TTx_k\right)\end{aligned}\qquad\textbf{(4.9)}$$

yazılır. S ve T, $\alpha-$tip bağdaşabilir olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TSx_k,SSx_k,...,SSx_k\right)=0$$
$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,TTx_k,...,TTx_k\right)=0$$

dır. Böylece (4.9) eşitsizliğinden,

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right)=0$$

olup S ve T, (X,A) modüler $A-$metrik uzayında bağdaşabilirdir.

Sonuç 4.2.9. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T : X \to X$ dönüşümleri $A_\lambda -$sürekli olsun. S ve T bağdaşabilirdir ancak ve ancak S ve T, $\alpha -$tip bağdaşabilirdir.

Tanım 4.2.10. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T : X \to X$ iki dönüşüm olsun. X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Tx_k\}$ ve $\{Sx_k\}$ dizileri aynı $z \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsasın. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right)=0$$

sağlanıyorsa S ve T'ye, $\beta -$tip bağdaşabilir dönüşümler denir.

Örnek 4.2.11. $X=\mathbb{R}$ olmak üzere $A_\lambda : (0,\infty)\times X^n \to [0,\infty]$ fonksiyonunun her $x_1, x_2,...,x_n \in X$ ve her $\lambda > 0$ için $A_\lambda\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\dfrac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\left|x_i - x_j\right|$ şeklinde tanımlandığında X üzerinde bir modüler $A-$metrik olduğu Örnek 4.1.5'te gösterildi. Ayrıca her $x \in X$ için $S,T : X \to X$ dönüşümleri

$$S(x)=\begin{cases} 5, & x=0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \end{cases} \qquad T(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ \dfrac{1}{x^3}, & x\neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve X'te $\{x_k\}=k, k=1,2,...$ şeklinde tanımlı olan bir $\{x_k\}$ dizisi alınsın. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}=0$$
$$\lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^3}=0$$

dır. Ayrıca $STx_k = k^6$, $TSx_k = k^6$, $TTx_k = k^9$, $SSx_k = k^4$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right) &= \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(k^6,...,k^6,k^6\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left[\ \left|k^6-k^6\right|+...+\left|k^6-k^6\right|\ \right]\\ &=0\end{aligned}$$

olup S ve T bağdaşabilirdir. Fakat

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right)=\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(k^4,...,k^4,k^9\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left[\left|k^4-k^4\right|+...+\left|k^4-k^4\right|+\left|k^4-k^9\right|\right]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda}(n-1)\left|k^4-k^9\right|$$
$$=\infty$$

olduğundan dolayı S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilir değildir.

Örnek 4.2.12. Örnek 4.2.3'te verilen modüler $A-$metrik fonksiyonu ile S ve T dönüşümleri alınsın. Bu dönüşümlerin bağdaşabilir olmadığı gösterildi. Aynı zamanda $\alpha-$tip bağdaşabilir dönüşüm de değildir. Fakat $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşümdür. Gerçekten, her $x\in X$ için $S,T:X\to X$ aşağıdaki şekilde verilen

$$S(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ \dfrac{x+1}{2}, & x\in(1,2]\end{cases}\qquad T(x)=\begin{cases}2, & x=1\\ \dfrac{x+3}{4}, & x\neq 1\end{cases}$$

dönüşümleri ile $\{x_k\}=1-\dfrac{1}{k},k=1,2,...$ şeklinde tanımlı olan $\{x_k\}$ dizisi için,

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k=1$$
$$\lim_{k\to\infty} Tx_k=\lim_{k\to\infty}\frac{4k-1}{4k}=1$$

olup $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri $1\in X$ noktasına $A_\lambda-$yakınsar. Ayrıca $SSx_k=1,\ STx_k=1,\ TTx_k=\dfrac{16k-1}{16k},\ TSx_k=2$ dir. Bu dönüşümlerin bağdaşabilir olmadığı Örnek 4.2.3'te gösterilmiştir. Burada $\alpha-$tip bağdaşabilir olmadığı fakat $\beta-$tip bağdaşabilir olduğu gösterilecektir. Tanım 4.2.4'ten,

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k,TTx_k,...,TTx_k\right)=\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(1,\frac{16k-1}{16k},...,\frac{16k-1}{16k}\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|e-e^{\frac{16k-1}{16k}}\right|+\left|e-e^{\frac{16k-1}{16k}}\right|+...+\left|e^{\frac{16k-1}{16k}}-e^{\frac{16k-1}{16k}}\right|}{\lambda}$$
$$=\frac{(n-1)}{\lambda}\lim_{k\to\infty}\left(e-e^{\frac{16k-1}{16k}}\right)$$
$$=0$$

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(TSx_k, SSx_k, \ldots, SSx_k\right) = \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(2,1,\ldots,1\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|e^2-e\right|+\left|e^2-e\right|+\ldots+\left|e-e\right|}{\lambda}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(n-1)}{\lambda}\left|e^2-e\right|$$
$$= \frac{(n-1)}{\lambda}\left|e^2-e\right|$$

olup S ve T, $\alpha-$tip bağdaşabilir değildir. Tanım 4.2.10'dan,

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(SSx_k, \ldots, SSx_k, TTx_k\right) = \lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(1,\ldots,1,\frac{16k-1}{16k}\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\left|e-e\right|}{\lambda}+\ldots+\frac{\left|e-e\right|}{\lambda}+\frac{\left|e-e^{\frac{16k-1}{16k}}\right|}{\lambda}\right]$$
$$= \frac{(n-1)}{\lambda}\lim_{k\to\infty}\left|e-e^{\frac{16k-1}{16k}}\right|$$
$$=0$$

olup S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

Önerme 4.2.13. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T: X\to X$ dönüşümleri $A_\lambda-$sürekli iki dönüşüm olsun. Eğer S ve T bağdaşabilir dönüşüm ise aynı zamanda $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

İspat: S ile T bağdaşabilir dönüşümler ve X 'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ aynı $z\in X$ noktasına $A_\lambda-$yakınsak olsun. Bu durumda, S ve T dönüşümleri $A_\lambda-$sürekli olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} SSx_k = \lim_{k\to\infty} STx_k = Sz$$
$$\lim_{k\to\infty} TSx_k = \lim_{k\to\infty} TTx_k = Tz$$

vardır. Ayrıca S ve T bağdaşabilir olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(STx_k, \ldots, STx_k, TSx_k\right)=0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}A_{\lambda}\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right) &\le A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TTx_k,...,TTx_k,STx_k\right)\\ &\le A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right)\\ &\quad +A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(TTx_k,...,TTx_k,TSx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(TTx_k,...,TTx_k,TSx_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right)\end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}\left(SSx_k,SSx_k,...,TTx_k\right)=0$$

elde edilir. Böylece S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşümlerdir.

Önerme 4.2.14. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T:X\to X$ dönüşümleri $\beta-$tip bağdaşabilir olsun. Eğer S ve T dönüşümleri $A_{\lambda}-$sürekli ise bağdaşabilirdir.

İspat: S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşümler ve X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri aynı $z\in X$ noktasına $A_{\lambda}-$yakınsak olsun. Bu durumda S ve T $A_{\lambda}-$sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} SSx_k &= \lim_{k\to\infty} STx_k = Sz\\ \lim_{k\to\infty} TSx_k &= \lim_{k\to\infty} TTx_k = Tz\end{aligned}$$

dir. Böylece modüler $A-$metrik uzay tanımının MA3) koşulundan

$$\begin{aligned}A_{\lambda}\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right) &\le A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,SSx_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,SSx_k,SSx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TSx_k,...,TSx_k,SSx_k\right)\\ &\le A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,SSx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,SSx_k\right)\\ &\quad +A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(TSx_k,...,TSx_k,TTx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(TSx_k,...,TSx_k,TTx_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right)\end{aligned}$$

yazılır.

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}\left(STx_k,...,STx_k,TSx_k\right)=0$$

elde edilir. Böylece S ve T, (X,A) modüler $A-$metrik uzayında bağdaşabilirdir.

Sonuç 4.2.15. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T:X\to X$ dönüşümleri $A_{\lambda}-$sürekli iki dönüşüm olsun. S ve T bağdaşabilirdir ancak ve ancak S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

Önerme 4.2.16. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T:X\to X$ dönüşümleri $A_\lambda-$sürekli iki dönüşüm olsun. Eğer S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilir ise aynı zamanda $\alpha-$tip bağdaşabilirdir.

İspat: S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşümler ve X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri aynı $z\in X$ noktasına $A_\lambda-$yakınsak olsun. Bu durumda, S ve T dönüşümleri $A_\lambda-$sürekli olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} SSx_k=\lim_{k\to\infty} STx_k=Sz$$
$$\lim_{k\to\infty} TSx_n=\lim_{k\to\infty} TTx_k=Tz$$

olur. Ayrıca S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilir olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right)=0$$

dır. Böylece

$$A_\lambda\left(STx_k,...,STx_k,TTx_k\right)\le A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,...,STx_k,SSx_k\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TTx_k,...,TTx_k,SSx_k\right)$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k,...,STx_k,TTx_k\right)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(TSx_k,...,TSx_k,SSx_k\right)=0$$

bulunur. Böylece S ve T, $\alpha-$tip bağdaşabilirdir.

Önerme 4.2.17. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T:X\to X$ dönüşümleri $\alpha-$tip bağdaşabilir olsun. Eğer S ve T dönüşümlerinden en az biri $A_\lambda-$sürekli ise S ve T, $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

İspat: S dönüşümü $A_\lambda-$sürekli bir dönüşüm ve X'te bir $\{x_k\}$ dizisi için $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri aynı $z\in X$ noktasına $A_\lambda-$yakınsak olsun. Bu durumda S dönüşümü $A_\lambda-$sürekli olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} SSx_k=\lim_{k\to\infty} STx_k=Sz$$

dır. Modüler $A-$metrik uzay tanımının MA3) koşulundan

$$\begin{aligned} A_{\lambda}\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right) &\leq A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right) \\ &\vdots \\ &+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(SSx_k,...,SSx_k,STx_k\right) \\ &+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TTx_k,...,TTx_k,STx_k\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

yazılır. S ve T, $\alpha-$tip bağdaşabilir olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n}}\left(TSx_k,SSx_k,...,SSx_k\right)=0$$
$$\lim_{k\to\infty} A_{\frac{\lambda}{n}}\left(STx_k,TTx_k,...,TTx_k\right)=0$$

dır. Böylece (4.10) eşitsizliğinden,

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}\left(SSx_k,...,SSx_k,TTx_k\right)=0$$

olup S ve T, (X,A) modüler $A-$metrik uzayında $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

Sonuç 4.2.18. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $S,T:X\to X$ dönüşümleri $A_{\lambda}-$sürekli iki dönüşüm olsun. S ve T, $\alpha-$tip bağdaşabilirdir ancak ve ancak $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

4.3. Modüler $A-$Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda modüler $A-$metrik uzaylarda tarafımızca elde edilen bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

4.3.1. Modüler $A-$Metrik Uzaylar İçin Banach Sabit Nokta Teoremi

Tanım 4.3.1.1. (X,A) bir modüler $A-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ ve her $\lambda>0$ için

$$A_{\lambda}\left(Tx,Tx,...,Tx,Ty\right)\leq qA_{\lambda}\left(x,x,...,x,y\right)$$

olacak şekilde $0\leq q<1$ varsa T'ye daralma dönüşümü denir.

Banach sabit nokta teoreminin modüler $A-$metrik uzaylar için genelleştirmesi Teorem 4.3.1.2'deki gibidir.

Teorem 4.3.1.2. (X,A) bir tam modüler $A-$metrik uzay ve $T: X \to X$ daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T, X'te tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $x \in X$ için $\{T^k x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya $A_\lambda -$ yakınsar.

İspat : x_0, X'te keyfi bir nokta olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_k\}$ dizisi alınsın. Her $\lambda > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
A_\lambda(x_{k+1},...,x_{k+1},x_k) &= A_\lambda(Tx_k,...,Tx_k,Tx_{k-1}) \\
&\le qA_\lambda(x_k,...,x_k,x_{k-1}) \\
&= qA_\lambda(Tx_{k-1},...,Tx_{k-1},Tx_{k-2}) \\
&\le q^2 A_\lambda(x_{k-1},...,x_{k-1},x_{k-2}) \\
&\;\;\vdots \\
&\le q^k A_\lambda(x_1,...,x_1,x_0)
\end{aligned}$$

yazılır. Her $\lambda > 0$ için $\lim_{k\to\infty} A_\lambda(x_{k+1},...,x_{k+1},x_k) \le \lim_{k\to\infty} q^k A_\lambda(x_1,...,x_1,x_0) = 0$ dır.

Her $k,m \in \mathbb{N}$ ve $m > k$ için,

$$\begin{aligned}
A_\lambda(x_k,...,x_k,x_m) &\le (n-1)\sum_{i=k}^{m-2} A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_i,...,x_i,x_{i+1}) + A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_{m-1},...,x_{m-1},x_m) \\
&\le (n-1)\sum_{i=k}^{m-2} q^i A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_1,...,x_1,x_0) + q^{m-1} A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_1,...,x_1,x_0) \\
&= (n-1)\left[q^k + q^{k+1} + ... + q^{m-1}\right] A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_1,...,x_1,x_0) \\
&= (n-1)q^k \left(\frac{1-q^{m-k}}{1-q}\right) A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_1,...,x_1,x_0) \\
&\le (n-1)\left(\frac{q^k}{1-q}\right) A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(x_1,...,x_1,x_0)
\end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(x_k,\ldots,x_k,x_m\right) \le \lim_{k\to\infty}(n-1)\left(\frac{q^k}{1-q}\right)A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(x_1,\ldots,x_1,x_0\right)$$
$$=0$$

elde edilir. Böylece $\{x_k\}$ bir $A_\lambda-$Cauchy dizisidir. X'in tam uzay olması ile birlikte bu $\{x_k\}$ dizisi X'te bir x noktasına $A_\lambda-$yakınsar. Modüler $A-$metrik ve daralma dönüşüm tanımları birlikte düşünüldüğünde her $\lambda>0$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için

$$A_\lambda\left(Tx,\ldots,Tx,x\right) \le A_{\frac{\lambda}{n}}\left(Tx,\ldots,Tx,Tx_k\right)+\ldots+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(Tx,\ldots,Tx,Tx_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,\ldots,x,Tx_k\right)$$
$$\le qA_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,\ldots,x,x_k\right)+\ldots+qA_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,\ldots,x,x_k\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(x,\ldots,x,x_{k+1}\right)$$

olup $k\to\infty$ için limit alınırsa $A_\lambda\left(Tx,\ldots,Tx,x\right)=0$ olur ki, buradan $Tx=x$ bulunur. Yani x, T'nin sabit noktasıdır. Şimdi x'in tek sabit nokta olduğu gösterilsin. T'nin x'ten farklı olacak şekilde bir diğer sabit noktası z olsun. Her $\lambda>0$ için

$$A_\lambda\left(x,x,\ldots,x,z\right)=A_\lambda\left(Tx,Tx,\ldots,Tx,Tz\right)$$
$$\le qA_\lambda\left(x,x,\ldots,x,z\right)$$

olup

$$(1-q)A_\lambda\left(x,x,\ldots,x,z\right) \le 0$$

yazılır. $0\le q<1$ olduğundan $A_\lambda\left(x,x,\ldots,x,z\right)=0$ olur. O halde $x=z$ bulunur. Böylece x, T'nin tek bir sabit noktasıdır.

4.3.2. Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, modüler $A-$metrik uzaylarda bağdaşabilir olma özelliğinden faydalanılarak bir ortak sabit nokta teoremi ispatlandı ve bu teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verildi.

Teorem 4.3.2.1. (X,A) tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $T,S:X\to X$ dönüşümleri her $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ ve $0\le q<1$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $T(X)\subset S(X)$,

(ii) T ya da S dönüşümü $A_\lambda-$ sürekli,

(iii) T ve S bağdaşabilir dönüşümler,

(iv) $A_\lambda\left(Tx_1,Tx_2,...,Tx_k\right) \le qA_\lambda\left(Sx_1,Sx_2,...,Sx_k\right)$

Bu durumda T ve S, X'te tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X'te keyfi bir nokta olsun. $T(X) \subset S(X)$ olduğundan $Tx_0 = Sx_1$ olacak şekilde X'te bir x_1 noktası seçilebilir. Bu durum genellenerek $k = 0,1,2,...$ için

$$y_k = Tx_k = Sx_{k+1}$$

olacak şekilde bir $\{x_{k+1}\}$ dizisi oluşturabilir. (iv) numaralı koşul ile birlikte

$$\begin{aligned} A_\lambda\left(Tx_k,...,Tx_k,Tx_{k+1}\right) &\le qA_\lambda\left(Sx_k,...,Sx_k,Sx_{k+1}\right) \\ &= qA_\lambda\left(Tx_{k-1},...,Tx_{k-1},Tx_k\right) \\ &\le q^2 A_\lambda\left(Sx_{k-1},...,Sx_{k-1},Sx_k\right) \\ &= q^2 A_\lambda\left(Tx_{k-2},...,Tx_{k-2},Tx_{k-1}\right) \\ &\;\vdots \\ &\le q^k A_\lambda\left(Sx_1,...,Sx_1,Sx_2\right) \\ &= q^k A_\lambda\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right) \end{aligned}$$

yazılır. $k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(Tx_k,...,Tx_k,Tx_{k+1}\right) \le \lim_{k\to\infty} q^k A_\lambda\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right) = 0$$

elde edilir. Her $k, m \in \mathbb{N}$ ve $m > k$ için

$$\begin{aligned} A_\lambda\left(Tx_k,...,Tx_k,Tx_m\right) &\le (n-1)\sum_{i=k}^{m-2} A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_i,...,Tx_i,Tx_{i+1}\right) + A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_{m-1},...,Tx_{m-1},Tx_m\right) \\ &\le (n-1)\sum_{i=k}^{m-2} q^i A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right) + q^{m-1} A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right) \\ &\le (n-1)\left[q^k + q^{k+1} + ... + q^{m-2} + q^{m-1}\right] A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right) \\ &\le (n-1)q^k\left(\frac{1-q^{m-k}}{1-q}\right) A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_0,...,Tx_0,x_1\right) \\ &\le (n-1)\left(\frac{q^k}{1-q}\right) A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(Tx_k,...,Tx_k,Tx_m\right) \leq \lim_{k\to\infty}(n-1)\left(\frac{q^k}{1-q}\right)A_{\frac{\lambda}{n^{n-2}}}\left(Tx_0,...,Tx_0,Tx_1\right)$$
$$=0$$

elde edilir. O halde $\{Tx_k\}$ bir $A_\lambda -$ Cauchy dizisidir. (X, A) bir tam modüler $A-$ metrik uzay olduğundan $\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty} Sx_{k+1} = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. T ya da S'den biri $A_\lambda -$sürekli olduğundan (kabul edilsin ki S $A_\lambda -$sürekli olsun) $\lim_{k\to\infty} STx_k = Sz$ dir. Ayrıca S ve T bağdaşabilir dönüşümler olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(STx_k, STx_k,...,STx_k,TSx_k\right) = 0$$

olur ve buradan $\lim_{k\to\infty} TSx_k = Sz$ olduğu görülür. (iv) numaralı koşuldan,

$$A_\lambda\left(Sz,...Sz,z\right) = A_\lambda\left(TSx_k,...,TSx_k,Tx_k\right) \leq qA_\lambda\left(SSx_k,...,SSx_k,Sx_k\right)$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa $Sz = z$ elde edilir.Yine (iv) numaralı koşuldan,

$$A_\lambda\left(Tx_k,Tx_k,...,Tz\right) \leq q.A_\lambda\left(Sx_k,Sx_k,...,Sx_k,Sz\right)$$

olur ve $k \to \infty$ için limit alınırsa $z = Tz$ elde edilir. Böylece $Tz = Sz = z$ olduğu görülür ve z, T ve S'nin ortak sabit noktasıdır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için T ve S'nin $z \neq v$ olacak şekilde farklı bir ortak sabit noktası olduğu kabul edilsin. (iv) numaralı koşuldan,

$$\begin{aligned} A_\lambda\left(z,...,z,v\right) = A_\lambda\left(Tz,...,Tz,Tv\right) &\leq qA_\lambda\left(Sz,...,Sz,Sv\right) \\ &= qA_\lambda\left(z,...,z,v\right) \\ &< A_\lambda\left(z,...,z,v\right) \end{aligned}$$

yazılır. Bu bir çelişki olup $z = v$ olur ve ortak sabit nokta tektir.

Örnek 4.3.2.2. $X = [-1,1]$ olmak üzere $A_\lambda : (0,\infty)\times X^n \to [0,\infty]$ fonksiyonu her $x_1, x_2,..., x_n \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$A_\lambda\left(x_1,x_2,...,x_n\right) = \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\left|x_i - x_j\right|$$

şeklinde tanımlandığında X üzerinde bir modüler $A-$metriktir. Ayrıca her $x \in X$ için $S,T : X \to X$ dönüşümleri $Sx = \dfrac{x}{3}$ ve $Tx = \dfrac{x}{7}$ olacak şekilde tanımlansın. Burada T ile S dönüşümleri $A_\lambda -$süreklidir ve $T(X) \subset S(X)$'tir. Ayrıca her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve $\dfrac{3}{7} \le q < 1$ için

$$A_\lambda\left(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n\right) \le qA_\lambda\left(Sx_1, Sx_2, ..., Sx_n\right)$$

dir. X'te $\{x_k\} = \dfrac{1}{k}$, $k = 1,2,3,...$ şeklinde tanımlı olan bir $\{x_k\}$ dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} Sx_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3k} = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{7k} = 0$$

olup $\{Sx_k\}$ ve $\{Tx_k\}$ dizileri $0 \in X$ noktasına $A_\lambda -$yakınsar ve S ile T dönüşümleri bağdaşabilirdir. Böylece Teorem 4.3.2.1'in tüm şartları sağlanır ve 0, T ile S nin tek ortak sabit noktasıdır.

4.3.3. $\alpha -$Tip Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde, modüler $A-$metrik uzaylarda dört tane dönüşüm için bağdaşabilir dönüşümlerin bir alt sınıfı olan $\alpha -$tip bağdaşabilir olma özelliğinden faydalanılarak tek değerli dönüşümler için ortak sabit nokta teoremi ispatlandı ve sonuçları incelendi.

Teorem 4.3.3.1. (X, A) bir tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $P,S,T,Q : X \to X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $PT(X) \cup QS(X) \subset ST(X)$,

(ii) Her $x, y \in X$, $\lambda > 0$ ve $p + q < 1$ olacak şekilde $0 < p,q < 1$ için

$$A_\lambda^2\left(Px,...,Px,Qy\right) + \left[A_\lambda\left(Sx,...,Sx,Px\right)A_\lambda\left(Ty,...,Ty,Qy\right)\right]$$
$$+A_\lambda^2\left(Ty,...,Ty,Qy\right) \le pA_\lambda^2\left(Sx,...,Sx,Px\right) + qA_\lambda^2\left(Sx,...,Sx,Ty\right),$$

(iii) S,T dönüşümleri $A_\lambda -$sürekli ve $ST = TS$,

(iv) (P,S) ve (Q,T) çiftleri $\alpha-$tip bağdaşabilirdir.

Bu takdirde P,S,T ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat: x_0, X'in keyfi bir noktası olsun. (i) koşulu ile birlikte

$$PTx_{2k}=STx_{2k+1},\quad QSx_{2k+1}=STx_{2k+2},\quad k=0,1,2,...$$

şeklinde bir $\{x_k\}$ dizisi inşa edilebilir. $STx_k=z_k$ olsun. $x=Tx_{2k}$ ve $y=Sx_{2k+1}$ için (ii) koşulundan,

$$\begin{aligned}&A_\lambda^2\left(PTx_{2k},...,PTx_{2k},QSx_{2k+1}\right)+\left[A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},PTx_{2k}\right)A_\lambda\left(TSx_{2k+1},...,TSx_{2k+1},QSx_{2k+1}\right)\right]\\&+A_\lambda^2\left(TSx_{2k+1},...,TSx_{2k+1},QSx_{2k+1}\right)\le pA_\lambda^2\left(STx_{2k},...,STx_{2k},PTx_{2k}\right)+qA_\lambda^2\left(STx_{2k},...,STx_{2k},TSx_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}&A_\lambda^2\left(STx_{2k+1},...,STx_{2k+1},STx_{2k+2}\right)+\left[A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},STx_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},STx_{2k+2}\right)\right]\\&+A_\lambda^2\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},STx_{2k+2}\right)\le pA_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},STx_{2k+1}\right)+qA_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&A_\lambda^2\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)+\left[A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\right]\\&+A_\lambda^2\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\le pA_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)+qA_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}&2A_\lambda^2\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)+\left[A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\right]\\&\le(p+q)A_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\\&+A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\\&\le(p+q)A_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\left[2A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)+A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\right]\\&\le(p+q)A_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\\&\le(p+q)A_\lambda^2\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $t=p+q<1$ için

$$A_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)\le tA_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)$$

yazılır. Benzer şekilde

$$A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right) \le tA_\lambda\left(z_{2k-1},...,z_{2k-1},z_{2k}\right)$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right) &\le tA_\lambda\left(z_{2k-1},...,z_{2k-1},z_{2k}\right) \\ &\vdots \\ &\le t^{2k}A_\lambda\left(z_0,...,z_0,z_1\right) \end{aligned}$$

bulunur. Her $k,m \in \mathbb{N}$ ve $m>k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_\lambda\left(z_k,...,z_k,z_m\right) &\le (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z_k,...,z_k,z_{k+1}\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z_m,...,z_m,z_{k+1}\right) \\ &= (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z_k,...,z_k,z_{k+1}\right)+A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z_{k+1},...,z_{k+1},z_m\right) \\ &\le (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}\left(z_k,...,z_k,z_{k+1}\right)+(n-1)A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(z_{k+1},...,z_{k+1},z_{k+2}\right)+A_{\frac{\lambda}{n^2}}\left(z_{k+2},...,z_{k+2},z_m\right) \\ &\le (n-1)\left[A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(z_k,...,z_k,z_{k+1}\right)+A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(z_{k+1},...,z_{k+1},z_{k+2}\right)+...+A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(z_{m-1},...,z_{m-1},z_m\right)\right] \\ &\le (n-1)\left[t^k+t^{k+1}+...+t^{m-1}\right]A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(z_0,...,z_0,z_1\right) \\ &= (n-1)t^k\left[1+t+...+t^{m-1-k}\right]A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(z_0,...,z_0,z_1\right) \\ &\le (n-1)t^k\frac{1}{1-t}A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}\left(z_0,...,z_0,z_1\right) \end{aligned}$$

olup $k\to\infty$ için $A_\lambda\left(z_k,...,z_k,z_m\right)\to 0$ elde edilir. O halde $\{z_k\}$ bir $A_\lambda-$Cauchy dizisidir. (X,A) tam modüler $A-$metrik uzay olduğundan $\{z_k\}$ dizisi X'te bir z noktasına $A_\lambda-$yakınsar. PTx_{2k} ve QSx_{2k+1}, $\{z_k\}$'nın alt dizileri olduğundan $k\to\infty$ için $PTx_{2k}\to z$ ve $QSx_{2k+1}\to z$ dir.

$k=1,2,...$ için $y_k=Tx_k$ ve $w_k=Sx_k$ olsun. Bu durumda $k\to\infty$ için $Py_{2k}\to z$, $Sy_{2k}\to z$, $Tw_{2k+1}\to z$ ve $Qw_{2k+1}\to z$'dir. (P,S) ve (Q,T) çiftleri $\alpha-$ tip bağdaşabilir dönüşümler olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}A_\lambda\left(PSy_{2k},...,PSy_{2k},SSy_{2k}\right)=0$$
$$\lim_{k\to\infty}A_\lambda\left(SPy_{2k},...,SPy_{2k},PPy_{2k}\right)=0$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(QTw_{2k+1},...,QTw_{2k+1},TTw_{2k+1}\right)=0$$
$$\lim_{k\to\infty} A_\lambda\left(TQw_{2k+1},...,TQw_{2k+1},QQw_{2k+1}\right)=0$$

olur. Ayrıca T'nin $A_\lambda-$sürekli ve (Q,T) çiftinin $\alpha-$tip bağdaşabilir dönüşüm olmasından dolayı $k\to\infty$ için $QTw_{2k+1}\to Tz$ ve $TTw_{2k+1}\to Tz$'dir. Eğer (ii) koşuluda $x=y_{2k}$ ve $y=Tw_{2k+1}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&A_\lambda^2\left(Py_{2k},...,Py_{2k},QTw_{2k+1}\right)+\left[A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Py_{2k}\right)A_\lambda\left(TTw_{2k+1},...,TTw_{2k+1},QTw_{2k+1}\right)\right]\\
&+A_\lambda^2\left(TTw_{2k+1},...,TTw_{2k+1},QTw_{2k+1}\right)\\
&\le pA_\lambda^2\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Py_{2k}\right)+qA_\lambda^2\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},TTw_{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&A_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)+\left[A_\lambda\left(z,...,z,z\right)A_\lambda\left(Tz,...,Tz,Tz\right)\right]+A_\lambda^2\left(Tz,...,Tz,Tz\right)\\
&\le pA_\lambda^2\left(z,...,z,z\right)+qA_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)
\end{aligned}$$

olup sonuç olarak

$$A_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)\le qA_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)$$
$$(1-q)A_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)\le 0$$

bulunur. $0<q<1$ için $A_\lambda^2\left(z,z,...,z,Tz\right)=0$ olur ki, buradan $z=Tz$'dir. Benzer şekilde $Sz=z$'dir.

Eğer (ii) koşulunda $x=y_{2k}$ ve $y=z$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&A_\lambda^2\left(Py_{2k},...,Py_{2k},Qz\right)+\left[A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Py_{2k}\right)A_\lambda\left(Tz,...,Tz,Qz\right)\right]+A_\lambda^2\left(Tz,...,Tz,Qz\right)\\
&\le pA_\lambda^2\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Py_{2k}\right)+qA_\lambda^2\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Tz\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
&A_\lambda^2\left(z,...,z,Qz\right)+\left[A_\lambda\left(z,...,z,z\right)A_\lambda\left(z,...,z,Qz\right)\right]+A_\lambda^2\left(z,...,z,Qz\right)\\
&\le pA_\lambda^2\left(z,...,z,z\right)+qA_\lambda^2\left(z,...,z,z\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $2A_\lambda^2\left(z,z,....,z,Qz\right)\le 0$ olup $Qz=z$'dir. Benzer şekilde $Pz=z$'dir. Böylece z, P,Q,S ve T'nin ortak sabit noktasıdır.

$v \in X$ noktası P,S,T ve Q dönüşümlerinin z' den farklı olacak şekilde bir ortak sabit noktası olsun. Bu durumda (ii) koşulunda $x = z$ ve $y = v$ yazılırsa,

$$A_\lambda^2(Pz,...,Pz,Qv) + \left[A_\lambda(Sz,...,Sz,Pz)A_\lambda(Tv,...,Tv,Qv)\right] + A_\lambda^2(Tv,...,Tv,Qv)$$
$$\leq pA_\lambda^2(Sz,...,Sz,Pz) + qA_\lambda^2(Sz,...,Sz,Tv)$$

elde edilir ve buradan

$$A_\lambda^2(z,...,z,v) + \left[A_\lambda(z,...,z,z)A_\lambda(v,...,v,v)\right] + A_\lambda^2(v,...,v,v)$$
$$\leq pA_\lambda^2(z,...,z,z) + qA_\lambda^2(z,...,z,v)$$

olup bu son eşitsizlik düzenlenirse

$$\mathrm{A}_\lambda^2(\mathrm{z},...,\mathrm{z},\mathrm{v}) \leq q\mathrm{A}_\lambda^2(\mathrm{z},...,\mathrm{z},\mathrm{v})$$
$$(1\text{-q})\mathrm{A}_\lambda^2(\mathrm{z},...,\mathrm{z},\mathrm{v}) \leq 0$$

elde edilir. $0 < q < 1$ için $z = v$ olduğu görülür. Böylece bu dört dönüşümün ortak sabit noktası tektir.

Eğer teoremde $S = T$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.3.2. (X, A) bir tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $P,S,Q : X \to X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $P(X) \cup Q(X) \subset S(X)$,

(ii) Her $x, y \in X$, $\lambda > 0$ ve $p + q < 1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için

$$A_\lambda^2(Px,...,Px,Qy) + \left[A_\lambda(Sx,...,Sx,Px)A_\lambda(Sy,...,Sy,Qy)\right]$$
$$+A_\lambda^2(Sy,...,Sy,Qy) \leq pA_\lambda^2(Sx,...,Sx,Px) + qA_\lambda^2(Sx,...,Sx,Sy),$$

(iii) S dönüşümü $A_\lambda -$sürekli,

(iv) (P,S) ve (Q,S) çiftleri $\alpha -$tip bağdaşabilirdir.

Bu takdirde P,S ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Eğer teoremde $S = T$ ve $P = Q$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.3.3. (X, A) bir tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $P,S : X \to X$ dönüşümleri verilen şartları sağlasın :

(i) $P(X)\subset S(X)$,

(ii) Her $x,y\in X$, $\lambda>0$ ve $p+q<1$ olacak şekilde $0<p,q<1$ için

$$A_\lambda^2(Px,...,Px,Py)+\left[A_\lambda(Sx,...,Sx,Px)A_\lambda(Sy,...,Sy,Py)\right]$$
$$+A_\lambda^2(Sy,...,Sy,Py)\le pA_\lambda^2(Sx,...,Sx,Px)+qA_\lambda^2(Sx,...,Sx,Sy),$$

(iii) S dönüşümü $A_\lambda-$sürekli,

(iv) P ve S $\alpha-$tip bağdaşabilirdir.

Bu takdirde, P ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

4.3.4. $\beta-$Tip Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde, modüler $A-$metrik uzaylarda dört tane dönüşüm için bağdaşabilir dönüşümlerin bir alt sınıfı olan $\beta-$tip bağdaşabilir olma özelliğinden faydalanılarak tek değerli dönüşümler için ortak sabit nokta teoremi ispatlandı ve sonuçları incelendi.

Teorem 4.3.4.1. (X,A) bir tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $P,S,T,Q:X\to X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $PT(X)\cup QS(X)\subset ST(X)$,

(ii) Her $x,y\in X$, $\lambda>0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekilde $0<p,q<1$ ve $0\le a,b<1$ için

$$\left[A_\lambda(Qy,...,Qy,Px)A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy)\right]+a.A_\lambda(Ty,...,Ty,Qy)A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy)$$
$$\le b\left[pA_\lambda(Sx,...,Sx,Px)+qA_\lambda(Sx,...,Sx,Ty)\right]A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy),$$

(iii) S,T dönüşümleri $A_\lambda-$sürekli ve $ST=TS$,

(iv) (P,S) ve (Q,T) çiftleri $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

Bu takdirde P,S,T ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat: x_0, X'in keyfi bir noktası olsun. (i) koşulu ile birlikte

$$PTx_{2k}=STx_{2k+1},\quad QSx_{2k+1}=STx_{2k+2},\quad k=0,1,2,...$$

şeklinde bir $\{x_k\}$ dizisi inşa edilebilir. $STx_k = z_k$ olsun. Ayrıca $x = Tx_{2k}$ ve $y = Sx_{2k+1}$ için (ii) koşulundan

$$\begin{aligned}&\left[A_\lambda\left(QSx_{2k+1},...,QSx_{2k+1},PTx_{2k}\right)A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},QSx_{2k+1}\right)\right]\\&+aA_\lambda\left(TSx_{2k+1},...,TSx_{2k+1},QSx_{2k+1}\right)A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},QSx_{2k+1}\right)\\&\leq b\left[pA_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},PTx_{2k}\right)+qA_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},TSx_{2k+1}\right)\right]A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},QSx_{2k+1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&\left[A_\lambda\left(STx_{2k+2},...,STx_{2k+2},STx_{2k+1}\right)A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},STx_{2k+2}\right)\right]\\&+aA_\lambda\left(STx_{2k+1},...,STx_{2k+1},STx_{2k+2}\right)A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},STx_{2k+2}\right)\\&\leq b\left[pA_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},STx_{2k+1}\right)+qA_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},STx_{2k+1}\right)\right]A_\lambda\left(STx_{2k},...,STx_{2k},STx_{2k+2}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left[A_\lambda\left(z_{2k+2},...,z_{2k+2},z_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+2}\right)\right]+aA_\lambda\left(z_{2k+1},...,z_{2k+1},z_{2k+2}\right)A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+2}\right)\\&\leq b\left[pA_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)+qA_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\right]A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+2}\right)\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}&(1+a)\left[A_\lambda\left(z_{2k+2},...,z_{2k+2},z_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+2}\right)\right]\\&\leq b(p+q)A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve $p+q-a=1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$A_\lambda\left(z_{2k+2},...,z_{2k+2},z_{2k+1}\right)\leq bA_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)\leq bA_\lambda\left(z_{2k-1},...,z_{2k-1},z_{2k}\right)$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}A_\lambda\left(z_{2k},...,z_{2k},z_{2k+1}\right)&\leq bA_\lambda\left(z_{2k-1},...,z_{2k-1},z_{2k}\right)\\&\ \vdots\\&\leq b^{2k}A_\lambda\left(z_0,...,z_0,z_1\right)\end{aligned}$$

bulunur. Her $k,m\in\mathbb{N}$ ve $m>k$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
A_{\lambda}(z_k,...,z_k,z_m) &\leq (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}(z_k,...,z_k,z_{k+1}) + A_{\frac{\lambda}{n}}(z_m,...,z_m,z_{k+1}) \\
&= (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}(z_k,...,z_k,z_{k+1}) + A_{\frac{\lambda}{n}}(z_{k+1},...,z_{k+1},z_m) \\
&\leq (n-1)A_{\frac{\lambda}{n}}(z_k,...,z_k,z_{k+1}) + (n-1)A_{\frac{\lambda}{n^2}}(z_{k+1},...,z_{k+1},z_{k+2}) + A_{\frac{\lambda}{n^2}}(z_{k+2},...,z_{k+2},z_m) \\
&\leq (n-1)\left[A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_k,...,z_k,z_{k+1}) + ... + A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_{m-2},...,z_{m-2},z_{m-1})\right] + A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_{m-1},...,z_{m-1},z_m) \\
&\leq (n-1)\left[A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_k,...,z_k,z_{k+1}) + ... + A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_{m-1},...,z_{m-1},z_m)\right] \\
&\leq (n-1)\left[b^k + b^{k+1} + ... + b^{m-1}\right]A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_0,...,z_0,z_1) \\
&= (n-1)b^k\left[1 + b + ... + b^{m-1-k}\right]A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_0,...,z_0,z_1) \\
&\leq (n-1)b^k\frac{1}{1-b}A_{\frac{\lambda}{n^{m-k}}}(z_0,...,z_0,z_1)
\end{aligned}
$$

$k \to \infty$ için $A_{\lambda}(z_k,...,z_k,z_m) \to 0$ elde edilir. O halde $\{z_k\}$ bir $A_{\lambda}-$Cauchy dizisidir. (X,A) tam modüler $A-$metrik uzay olduğundan $\{z_k\}$ dizisi X'te bir z noktasına $A_{\lambda}-$yakınsar. PTx_{2k} ve QSx_{2k+1}, $\{z_k\}$'nın alt dizileri olduğundan $k \to \infty$ için $PTx_{2k} \to z$ ve $QSx_{2k+1} \to z$ dir.

$k = 1,2,...$ için $y_k = Tx_k$ ve $w_k = Sx_k$ olsun. Bu durumda $k \to \infty$ için $Py_{2k} \to z$, $Sy_{2k} \to z$, $Tw_{2k+1} \to z$ ve $Qw_{2k+1} \to z$ dir. (P,S) ve (Q,T) çiftleri $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşümler olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}(PPy_{2k},...,PPy_{2k},SSy_{2k}) = 0$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} A_{\lambda}(QQw_{2k+1},...,QQw_{2k+1},TTw_{2k+1}) = 0$$

dır. Ayrıca T'nin $A_{\lambda}-$sürekli ve (Q,T) çiftinin $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşüm olmasından dolayı $k \to \infty$ için $TQw_{2k+1} \to Tz$ ve $QQw_{2k+1} \to Tz$ dir. Eğer (ii) koşulunda $x = y_{2k}$ ve $y = Qw_{2k+1}$ alınırsa,

$$\left[A_\lambda\left(QQw_{2k+1},...,QQw_{2k+1},Py_{2k}\right)A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},QQw_{2k+1}\right)\right]$$
$$+aA_\lambda\left(TQw_{2k+1},...,TQw_{2k+1},QQw_{2k+1}\right)A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},QQw_{2k+1}\right)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Py_{2k}\right)+qA_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},TQw_{2k+1}\right)\right]A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},QQw_{2k+1}\right)$$

bulunur ve buradan,

$$\left[A_\lambda\left(Tz,...,Tz,z\right)A_\lambda\left(z,...,z,Tz\right)\right]+aA_\lambda\left(Tz,...,Tz,Tz\right)A_\lambda\left(z,...,z,Tz\right)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda\left(z,...,z,z\right)+qA_\lambda\left(z,...,z,Tz\right)\right]A_\lambda\left(z,...,z,Tz\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$A_\lambda^2\left(Tz,...,Tz,z\right)\leq bqA_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)$$
$$\left(1-bq\right)A_\lambda^2\left(z,...,z,Tz\right)\leq 0$$

olur. $0\leq bq<1$ olduğundan $A_\lambda^2\left(z,z,...,z,Tz\right)=0$ olur ki, buradan $z=Tz'$dir. Benzer şekilde $Sz=z'$dir.

Eğer (ii) koşulunda $x=y_{2k}$ ve $y=z$ alınırsa,

$$\left[A_\lambda\left(Qz,...,Qz,Py_{2k}\right)A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Qz\right)\right]+aA_\lambda\left(Tz,...,Tz,Qz\right)A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Qz\right)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Py_{2k}\right)+qA_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Tz\right)\right]A_\lambda\left(Sy_{2k},...,Sy_{2k},Qz\right)$$

olur ve buradan,

$$\left[A_\lambda\left(Qz,...,Qz,z\right)A_\lambda\left(z,...,z,Qz\right)\right]+aA_\lambda\left(z,...,z,Qz\right)A_\lambda\left(z,...,z,Qz\right)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda\left(z,...,z,z\right)+qA_\lambda\left(z,...,z,z\right)\right]A_\lambda\left(z,...,z,Qz\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlik düzenlenirse

$$\left(1+a\right)A_\lambda^2\left(z,...,z,Qz\right)\leq 0$$

olduğu görülür. Ancak bu durum sadece $A_\lambda^2\left(z,z,....,z,Qz\right)=0$ olması ile mümkündür. O halde $Qz=z'$dir. Benzer şekilde $Pz=z'$dir. Böylece z, P,Q,S ve T'nin ortak sabit noktasıdır.

Bu ortak sabit noktanın tekliğinin gösterilmesi için $z\neq v$ olacak şekilde $v\in X$ alınsın. Bu durumda (ii) koşulunda $x=z$ ve $y=v$ yazılırsa,

$$\left[A_\lambda(Qv,...,Qv,Pz)A_\lambda(Sz,...,Sz,Qv)\right]+aA_\lambda(Tv,...,Tv,Qv)A_\lambda(Sz,...,Qv)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda(Sz,...,Sz,Pz)+qA_\lambda(Sz,...,Sz,Tv)\right]A_\lambda(Sz,...,Sz,Qv)$$

elde edilir ve buradan

$$\left[A_\lambda(v,...,v,z)A_\lambda(z,...,z,v)\right]+aA_\lambda(v,...,v,v)A_\lambda(z,...,z,v)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda(z,...,z,z)+qA_\lambda(z,...,z,v)\right]A_\lambda(z,...,z,v)$$

olup bu eşitsizlik düzenlenirse

$$A_\lambda^2(v,...,v,z)\leq bqA_\lambda^2(z,...,z,v)$$
$$(1-bq)A_\lambda^2(v,...,v,z)\leq 0$$

elde edilir. Burada $0\leq bq<1$ olup $A_\lambda^2(v,...,v,z)=0$ olur ki, $z=v'$ dir. Böylece bu dört dönüşümün ortak sabit noktası tektir.

Eğer teoremde $S=T$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.4.2. (X,A) bir tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $P,S,Q:X\to X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın :

(i) $P(X)\cup Q(X)\subset S(X)$,

(ii) Her $x,y\in X$, $\lambda>0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekildeki $0<p,q<1$, $0\leq a,b<1$ için

$$\left[A_\lambda(Qy,...,Qy,Px)A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy)\right]+aA_\lambda(Sy,...,Sy,Qy)A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda(Sx,...,Sx,Px)+qA_\lambda(Sx,...,Sx,Sy)\right]A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy),$$

(iii) S dönüşümü $A_\lambda-$sürekli,

(iv) (P,S) ve (Q,S) çiftleri $\beta-$tip bağdaşabilirdir.

Bu takdirde P,S ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Eğer teoremde $S=T$ ve $P=Q$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.4.3. (X,A) bir tam modüler $A-$metrik uzay olsun ve $P,S:X\to X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $P(X) \subset S(X)$,

(ii) Her $x, y \in X$, $\lambda > 0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekildeki $0 < p, q < 1$, $0 \leq a, b < 1$ için

$$\left[A_\lambda(Qy,...,Qy,Qx)A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy)\right] + aA_\lambda(Sy,...,Sy,Qy)$$
$$\leq b\left[pA_\lambda(Sx,...,Sx,Qx) + qA_\lambda(Sx,...,Sx,Sy)\right]A_\lambda(Sx,...,Sx,Qy),$$

(iii) S dönüşümü $A_\lambda -$sürekli,

(iv) P ve S $\beta -$tip bağdaşabilirdir.

Bu takdirde, P ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında, metrik uzayların önemli bir genelleştirmesi olan modüler $A-$metrik uzaylar tarafımızca tanıtıldı, metrik uzaylarda olan birçok özellik incelendi ve asıl çalışmalar bu uzay üzerinde yapıldı. Banach daralma dönüşümünün bu yeni uzay için bir genelleştirmesi verildi. Bağdaşabilir dönüşüm, $\alpha-$tip bağdaşabilir dönüşüm ve $\beta-$tip bağdaşabilir dönüşüm kavramları bu yeni uzay için tanıtıldı, bu dönüşümler arasındaki ilişkiler incelendi ve gerekli ters örneklemeler yapıldı. Tanıtılan bu dönüşümler yardımıyla modüler $A-$metrik uzaylar üzerinde ortak sabit nokta teoremlerinin varlık ve teklik durumları incelendi. Bu teoremlerin özel durumları da sonuç olarak sunuldu.

Bu yeni uzay üzerinde farklı tipte bağdaşabilir dönüşüm kavramları tanımlanabilir ve bu tanımlar yardımıyla ortak sabit nokta teoremleri ispatlanabilir.

Modüler $A-$metrik uzay tanımında yer alan üçgen eşitsizliği şartı değiştirilerek, bu şarttan daha güçlü bir şart olan Archimedean olmayan özelliği kullanılarak Archimedean olmayan modüler $A-$metrik uzaylar yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay yapısı olarak tanımlanabilir ve bu uzaya ait topolojik özellikler araştırılabilir.

Sabit nokta teorisini genelleştirmek amacıyla $S-$metrik uzaylarda elde edilen sabit çember sonuçları kullanılarak, modüler $A-$metrik uzaylar üzerinde klasik sabit nokta teorisinden farklı olacak şekilde sabit çember teorisi çalışılabilir. Bu amaçla, modüler $A-$metrik uzaylarda bir fonksiyonun sabit çemberlerinin var olabilmesi için gerekli koşullar araştırılıp bu çemberlerin tekliği için uygun koşullar incelenebilir. Hatta sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini eğrisi ve sabit Apollonius çemberi kavramları da yeni tanımlanan modüler A-metrik uzaylarda araştırılıp bu geometrik nesnelerin bu uzayda varlık ve teklik koşulları araştırılabilir. Böylelikle klasik sabit nokta çalışmalarının ötesinde özellikle genelleştirilmiş metrik uzaylarda geometri yapılmasının yolu da açılmış olur.

Sonuç olarak, bu tezde elde edilen bulgular genelleştirilmiş metrik uzaylarda ve sabit nokta teorisi alanında çalışmalar yürüten araştırmacılara farklı bir bakış açısı katmış olur.

KAYNAKLAR

Abbas, M., Ali, B. and Suleiman, Y. I. (2015). "Generalized coupled common fixed point results in partially ordered A-metric spaces". *Fixed Point Theory and Applications*. doi:10.1186/s13663-015-0309-2

Abdou, A. A. and Khamsi, M. A. (2014). "Fixed points of multivalued contraction mappings in modular metric spaces". *Fixed Point Theory and Applications,* 2014(1), 249.

Alfuraidan, M. R. (2016). "The contraction principle for multivalued mappings on a modular metric space with a graph". *Canadian Mathematical Bulletin,* 59(1), 3-12.

Aydin, E. and Kutukcu, S. (2017). "Modular A-metric spaces". *Journal of Science and Arts,* 17(3), 423-432.

Azadifar, B.; Sadeghi, G.; Saadati, R. and Park, C. (2013). "Integral type contractions in modular metric spaces". *Journal of Inequalities and Applications,* 2013(1), 483. doi:10.1186/1029-242x-2013-483

Banach, S. (1922). "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales". *Fund. math,* 3(1), 133-181.

Border, K. C. (1985). *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Branciari, A. (2000). "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces".

Brouwer, L. E. J. (1911). "Über abbildung von mannigfaltigkeiten". *Mathematische annalen,* 71(1), 97-115.

Chaipunya, P.; Cho, Y. J. and Kumam, P. (2012). "Geraghty-type theorems in modular metric spaces with an application to partial differential equation". *Advances in Difference Equations,* 2012(1), 83.

Chang, S.-S. (1981). "A common fixed point theorem for commuting mappings". *Proceedings of the American Mathematical Society*, 645-652.

Chistyakov, V. V. (2008). "Modular metric spaces generated by F-modulars". *Folia Math,* 14(3).

Chistyakov, V. V. (2010a). "Modular metric spaces, I: Basic concepts". *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 72(1), 1-14.

Chistyakov, V. V. (2010b). "Modular metric spaces, II: Application to superposition operators". *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 72(1), 15-30.

Cho, Y. J.; Pathak, H. K.; Kang, S. M. and Jung, J. S. (1998). "Common fixed points of compatible maps of type (beta) on fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems,* 93(1), 99-111. doi:10.1016/s0165-0114(96)00200-x

Cho, Y. J.; Saadati, R. and Sadeghi, G. (2012). "Quasi-contractive mappings in modular metric spaces". *Journal of Applied Mathematics,* 2012.

Czerwik, S. (1993). "Contraction mappings in b-metric spaces". *Acta mathematica et informatica universitatis ostraviensis,* 1(1), 5-11.

Das, K. and Naik, K. V. (1979). "Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space". *Proceedings of the American Mathematical Society,* 369-373.

Deng, Z. (1982). "Fuzzy pseudo-metric spaces". *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 86(1), 74-95.

Dhage, B. C. (1992). "Generalised metric space and mappings with fixed point". *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,* 84, 329-336.

Erceg, M. A. (1979). "Metric spaces in fuzzy set theory". *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 69(1), 205-230.

Fang, J.-x. (1992). "On fixed point theorems in fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems,* 46(1), 107-113.

Farmakis, I. and Moskovitz, M. (2013). *Fixed Point Theorems and Their Applications*. World Scientific.

Fernandez, J., Saelee, S.,Saxena, K., Malviya, N. and Kumam, P. (2017). "The A-cone metric space over Banach algebra with applications". *Cogent Mathematics,* 4(1), 1282690.

Fisher, B. (1981). "Common fixed point theorems for commuting mappings". *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica,* 9, 399-406.

Fisher, B. (1983). "Common fixed points of four mappings". *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica,* 11, 103-113.

Fréchet, M. M. (1906). "Sur quelques points du calcul fonctionnel". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940),* 22(1), 1-72.

Gähler, S. (1963). "2-metrische Räume und ihre topologische Struktur". *Mathematische Nachrichten,* 26(1-4), 115-148.

George, A. and Veeramani, P. (1994). "On some results in fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems,* 64(3), 395-399.

Gregori, V., Miñana, J.-J., Morillas, S. and Sapena, A. (2017). "Cauchyness and convergence in fuzzy metric spaces". *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas,* 111(1), 25-37.

Hausdorff, F. (1914.) *Grundzüge der mengenlehre* (Vol. 7): von Veit.

Huang, L.-G. and Zhang, X. (2007). "Cone metric spaces and fixed point theorems for contractive mappings". *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 332, 1468-1476.

Imdad, M. and Ali, J. (2006). "Some common fixed point theorems in fuzzy metric spaces". *Mathematical Communications,* 11(2), 153-163.

Joshi, K. D. (2004). *Introduction to General Topology*. New Delhi: New Age International Limited.

Jungck, G. (1976). "Commuting mappings and fixed points". *The American Mathematical Monthly,* 83(4), 261-263.

Jungck, G. (1986). "Compatible mappings and common fixed points". *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* 9(4), 771-779.

Jungck, G. (1996). "Common fixed points for noncontinuous nonself maps on nonmetric spaces". *Far Eastern Journal of Mathematics and Science, 4*(2), 199-215.

Jungck, G.; Murthy, P. P. and Cho, Y. J. (1993). "Compatible mappings of type (A) and common fixed points". *Mathematica Japonica, 38*(2), 381–390.

Jungck, G. and Rhoades, B. E. (1998). "Fixed points for set valued functions without continuity". *Indian Journal Of Pure And Applied Mathematics, 29*, 227-238.

Kaleva, O. and Seikkala, S. (1984). "On fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets And Systems, 12*(3), 215-229.

Kaplan, E. and Kütükcü, S. (2020). *A common fixed point theorem in A-metric spaces*, Ruşen Aydın ve Sadık Alper Yıldızel (ed.). International Studies on Natural and Engineering Sciences (s. 87-96). Ankara:Gece Kitaplığı.

Klement, E. P.; Mesiar, R. and Pap, E. (2013). *Triangular norms,* (Vol. 8): Springer Science & Business Media.

Kramosil, I. and Michálek, J. (1975). "Fuzzy metrics and statistical metric spaces". *Kybernetika, 11*(5), (336)-344.

Kurepa, D. R. (1934). "Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés". *Comptes Rendus de L'Academie des Sciences, 198*, 1563-1565.

Kutukcu, S.; Sharma, S. and Tokgoz, H. (2007). "A fixed point theorem in fuzzy metric spaces". *International Journal of Mathematical Analysis, 1*(18), 861-872.

Matthews, S. G. (1994). "Partial metric topology". *Annals of the New York Academy of Sciences-Paper Edition, 728*, 183-197.

Miheţ, D. (2007). "On fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems, 158*(8), 915-921.

Mishra, S.; Sharma, N. and Singh, S. (1994). "Common fixed points of maps on fuzzy metric spaces". *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 17*(2), 253-258.

Mongkolkeha, C.; Sintunavarat, W. and Kumam, P. (2011). "Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces". *Fixed Point Theory and Applications, 2011*(1), 1-9.

Mustafa, Z. and Sims, B. (2006). "A new approach to generalized metric spaces". *Journal of Nonlinear and convex Analysis, 7*(2), 289.

Nakano, H. (1950). *Modulared semi-ordered linear spaces*: Maruzen Company.

Orlicz W (1961). "A note on modular spaces". *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques Split into,*(9): 157-162. Reprinted in (2): 1142-1147.

Park, J. H. (2004). "Intuitionistic fuzzy metric spaces". *Chaos, Solitons & Fractals, 22*(5), 1039-1046.

Park, S. and Bae, J. S. (1981). "Extensions of a fixed point theorem of Meir and Keeler". *Arkiv för Matematik, 19*(1), 223-228.

Pathak, H.; Cho, Y.; Kang, S. and Madharia, B. (1998). "Compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type". *Demonstratio Mathematica, 31*(3), 499-518.

Pathak, H. and Khan, M. (1995). "Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Greguš type". *Czechoslovak Mathematical Journal, 45*(4), 685-698.

Pathak, H. K.; Cho, Y. J.; Chang, S. S. and Kang, M. S. (1996). "Compatible mappings of type (P) and fixed point theorems in metric spaces and probabilistic metric spaces". *Novi Sad Journal of Mathematics, 26*(2), 87-109.

Poincare, H. (1886). "Surless courbes define barles equations differentiate less". *Journal de Mathematiiques Pures et Appliquees, 2,* 54-65.

Poşul, H.; Kaplan, E. and Kutukcu, S. (2019). "Fuzzy cone b-metric spaces". *Sigma Journal of Engineering & Natural Sciences/Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi, 37*(4).

Priyobarta, N.; Rohen, Y. and Radenovic, S. (2018). "Fixed point theorems on parametric A-metric space". *American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 6*(1), 1-5.

Rahman, S.; Rohen, Y. and Singh, M. P. (2013). "Generalised Common Fixed Point Theorems of A-Compatible and S-Compatible Mappings". *American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 1*(2), 27-29.

Rakić, D.; Došenović, T.; Mitrović, Z. D.; de la Sen, M. and Radenović, S. (2020). "Some Fixed Point Theorems of Ćirić Type in Fuzzy Metric Spaces". *Mathematics, 8*(2), 297.

Ravi P. Agarwal, Maria Meehan, Donal O'regan. (2004). *Fixed Point Theory and Applications*: Cambridge University Press.

Schauder, J. (1927). "Zur theorie stetiger abbildungen in funktionalräumen". *Mathematische Zeitschrift, 26*(1), 47-65.

Schweizer, B. and Sklar, A. (1960). "Statistical metric spaces". *Pacific Journal of Mathematics, 10*(1), 313-334.

Sedghi, S.; Shobe, N. and Aliouche, A. (2012). "A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces". *Matematicki Vesnik., 64.*

Sessa, S. (1982). "On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations". *Publications de L'Institut Mathematique, 32*(46), 149-153.

Sharma, S. (2002). "Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems, 127*(3), 345-352.

Sintunavarat, W. and Kumam, P. (2011). "Common fixed point theorems for a pair of weakly compatible mappings in fuzzy metric spaces". *Journal of Applied Mathematics, 2011*.

Wilson, W. A. (1931a). "On quasi-metric spaces". *American Journal of Mathematics, 53*(3), 675-684.

Wilson, W. A. (1931b). "On semi-metric spaces". *American Journal of Mathematics, 53*(2), 361-373.

Yeol Je, C. (2017)." Survey on Metric Fixed Point Theory and Applications". *Advances in Real and Complex Analysis with Applications*, 183-241.

Yildirim, I.; Onsod, W. and Kumam, P. (2018). "Fixed Point Theorems of Contractive Mappings in A-cone Metric Spaces over Banach Algebras". *Beyond Traditional Probabilistic Methods in Economics, 809*, 262.

Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control*, *8*(3), 338-353.

ÖZ GEÇMİŞ

Elif Kaplan, 01.04.1989 tarihinde Giresun'da doğdu. Giresun Yabancı Dil Ağırlıklı Liseyi (Süper Lise) bitirdikten sonra Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi'nden 2012 yılında mezun oldu. 2015 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programını bitirdi. Yüksek Lisans mezuniyetinden bu yana Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapan Elif Kaplan iyi derecede (B2) İngilizce bilmektedir. Temel ilgi alanları Topoloji, Metrik Uzaylar, Sabit Nokta Teorisidir (26.04.2021).

İletişim Bilgileri

E mail : elifaydinkaplan@gmail.com

Telefon : +90 537 256 91 33

ORCID : *0000-0002-7620-3387*

Yayımlanmış Çalışmalar:

1. **Kaplan, E** and Kutukcu, S. (2021). "Common Fixed Points of w-Compatible Maps in Modular A-metric Spaces." *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math.* 28(2).

2. Posul, H., **Kaplan**, **E.** and Kutukcu, S. (2019). "Fuzzy Cone b-Metric Spaces." *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*. 37(4). 1297-1310.

3. **Aydin, E.** and Kutukcu, S. (2017). "Modular A-metric Spaces." *Journal of Science and Arts*. 17(3). 423-432.

4. **Kutukcu, S. and Aydin, E.** (2016). "Classfications in Fuzzy Pseudometric Spaces." *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*. 4(4). 198-201.

Kitap Bölümü:

1. **Kaplan, E.** and Kütükcü, S. (2020). "A common fixed point theorem in A-metric spaces", Ruşen Aydın ve Sadık Alper Yıldızel (ed.). International Studies on Natural and Engineering Sciences (s. 87-96). Ankara:Gece Kitaplığı.

Bildiriler:

1. **Kaplan, E.,** Poşul, H. ve Kütükcü, S. (2019, Eylül). "Modüler A-metrik uzaylarda bağdaşabilir dönüşümler." *32. Ulusal Matematik Sempozyumu*. Samsun.
2. Poşul, H., **Kaplan, E.** ve Kütükcü, S. (2019, Eylül). "Genelleştirilmiş metrik uzaylarda bağdaşabilir dönüşüm tipleri." *32. Ulusal Matematik Sempozyumu,* Samsun.
3. **Aydın, E.,** Poşul, H. ve Kütükcü, S. (2017, Aralık). "Modüler Metrik Uzaylarda Bağdaşabilir Dönüşümler." *2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress,* Adana.
4. **Aydın, E.,** Ergün, A. ve Kütükcü, S. (2017, Kasım). "Compatible Maps of B-Type on Fuzzy Metric Spaces." *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences*, Samsun.
5. **Aydın, E.,** Poşul, H. ve Kütükcü, S. (2017, Kasım). "A Fixed Point Theorem in Modular A-metric Spaces." *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences,* Samsun.
6. Poşul, H., **Aydın, E.** ve Kütükcü, S. (2017, Kasım). "A fixed point theorem in complete A-metric spaces and an application." *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences,* Samsun.
7. Poşul, H., **Aydın, E.** ve Kütükcü, S. (2017, Aralık). "N-cone Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Sonuçları." *2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress.* Adana.
8. **Aydın, E.** (2016, Mayıs). "Some Fixed Point Theorems in D*-metric Spaces." *III.Kadın Matematikçiler Çalıştayı*, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

9. **Aydın, E.** ve Kütükcü, S. (2016, Haziran). "On Fuzzy Pseudometric Spaces." *International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal*, Bursa.

Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar:

1. TÜBİTAK BİDEB 2211 E Doğrudan Yurt İçi Doktora Bursu
2. TÜBİTAK BİDEB 2210 A Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu
3. Akademik Teşvik (2017)
4. YLSY, Yurt Dışına Lisansüstü Öğrenim Amacıyla Gönderilecek Öğrencileri Seçme ve Yerleştirme (Burs kazanıldı fakat kullanılmadı) (MEB) (2014)
5. Lisans Öğrenimi Bursu (Bölüme en yüksek ÖSS puanı ile girmek) (KYK) (2009-2012)