



**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**$E^3$  DE VERİLEN REGÜLER BİR YÜZEYİN İNVERSLERİNİN  
FOKALLERİN GEOMETRİSİ**

Yüksek Lisans Tezi

**Mehmet FİDAN**

Danışman  
**Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL**

SAMSUN  
2021

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**$E^3$  DE VERİLEN REGÜLER BİR YÜZEYİN İNVERSLERİNİN  
FOKALLERİN GEOMETRİSİ**

Yüksek Lisans Tezi

**Mehmet FİDAN**

Danışman

**Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL**

**SAMSUN**  
2021

## TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet FİDAN tarafından, Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL danışmanlığında hazırlanan “ $E^3$  de Verilen Regüler Bir Yüzeyin İnversonlarının Fokallerin Geometrisi” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 26.7.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Ayhan TUTAR Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı		<input type="checkbox"/>
			Ret
Üye	Dr. Öğr.Üyesi Feray BAYAR Samsun Üniversitesi Temel Bilimler Anabilim Dalı		<input checked="" type="checkbox"/>
			Kabul
			<input type="checkbox"/>
			Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY  
... / ... / ...  
Prof. Dr. Ali BOLAT  
Enstitü Müdürü

## **BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI**

Hazırladığım yüksek lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklarda gösterilenlerden oluştuğunu, enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığımı taahhüt ve beyan ederim.

26 / 07 / 2021

Mehmet FİDAN

## **TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI** **E<sup>3</sup> DE VERİLEN REGÜLER BİR YÜZEYİN İNVERSLERİNİN** **FOKALLERİN GEOMETRİSİ**

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 14/06/2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 10

Tek kaynak oranı : % 3 çıkmıştır.

26 / 07 / 2021

Danışman Adı SOYADI

**Prof.Dr.Ayhan SARIOĞLUGİL**

## ÖZET

### $E^3$ DE VERİLEN REGÜLER BİR YÜZEYİN İNVERSLERİNİN FOKALLERİN GEOMETRİSİ

Mehmet FİDAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Yüksek Lisans, Temmuz/2021

Danışman: Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

Bu tez dört bölüm ve üç kesimden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezimizi konu olan problemin ortaya konulduğu, tarihsel ve bilimsel açıdan değerlendirilmelerin yapıldığı giriş kısmıdır. İkinci bölüm çalışmamız boyunca referans alacağımız tanım ve teoremlerin yer aldığı temel kavramlardan oluşmaktadır. Bu bölüm, sırasıyla "Eğriler ve Yüzeyler Teorisine Ait Temel Kavramlar", " Invers Yüzeyle Ait Temel Kavramlar" ve " Fokal Yüzeyle Ait Temel Kavramlar" olmak üzere üç kesim halinde düzenlenmiştir. Üçüncü bölüm ise tezimizin orijinal kısmıdır. Bu bölümde regüler yüzeyin inversinin fokal yüzeyleri tanımlanarak, destek fonksiyonları, normal vektörleri, temel formları ve katsayıları ile asli, Gauss ve ortalama eğrilikleri gibi karakterizasyonları invers yüzeyin karakterizasyonlarına bağlı olarak ifade edilmiştir. Akabinde iddialarımızı gerçekleyen örnekler vererek, elde edilen yüzeylerin grafikleri Maple yazılım programında çizdirilmiştir. Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Yüzey, İvers yüzey, Fokal yüzey, Eğrilikler

## ABSTRACT

### GEOMETRY OF FOCALS OF THE INVERSES OF A REGULAR SURFACE IN $E^3$

Mehmet FIDAN

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematic

Master, July/2021

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan SARIOGLUGIL

This thesis consists of four parts and three segments. The first part is the introduction part where the problem subject to our thesis is revealed and historical and scientific evaluations are made. The second part consists of basic concepts including definitions and theorems that we will reference throughout our study. This section is organized into three segments: "Basic Concepts of Curves and Surfaces Theory", "Basic Concepts of Invers Surfaces" and "Basic Concepts of Focal Surfaces", respectively. The third part is the original part of our thesis. In this section, we have identified focal surfaces of the inverse of the regular surface. In this definition, support functions, normal vectors, basic forms, and coefficients, , Gauss and mean curvatures are expressed depending on the characterizations of the inverse surface. Subsequently, the graphics of the obtained surfaces are drawn in the Maple software program by giving examples that make our claims. In the last chapter, the results obtained in the thesis are included.

**Keywords:** Surface, Inverse Surface, Focal Surface, Curvatures.

## **ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR**

Akademik çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL'e, lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu zamanlarında desteğini esirgemeyen ve her konuda bana yardımcı olan değerli hocalarıma, çalışma arkadaşlarıma, çalışmalarım boyunca varlığı ve sevgisi ile gücüme güç katan en büyük desteğim kardeşime, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan annem ve babama yürekten teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI .....	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI .....	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Eğriler ve Yüzeyler Teorisine Ait Temel Kavramlar.....	3
2.2. İnvrs Yüzeyle Ait Temel Kavramlar.....	17
2.3. Fokal Yüzeyle Ait Temel Kavramlar .....	20
3. REGÜLER YÜZEYİN İNVERSLERİNİN FOKALLERİN GEOMETRİSİ.....	23
4. SONUÇLAR.....	39
KAYNAKLAR .....	40
ÖZGEÇMİŞ.....	43



## SİMGELER VE KISALTMALAR

- $\mathbb{R}$ : Reel sayılar kümesi  
 $E^3$ : Üç boyutlu Öklid uzayı  
 $T_{E^n}(P)$ :  $E^n$  nin tanjant vektörlerinin kümesi  
 $\chi(E^n)$ :  $E^n$  nin vektör alanlarının kümesi  
 $\langle , \rangle$ : İç çarpım fonksiyonu  
 $\wedge$ : Vektörel çarpım  
 $M$ :  $E^3$  de bir regüler yüzey  
 $T_M(P)$ :  $M$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki tanjant uzayı  
 $X$ :  $M$  yüzeyinin konum(yer) vektörü  
 $X_u$ :  $M$  yüzeyinin  $u$  –parametre eğrisinin teğet vektörü  
 $X_v$ :  $M$  yüzeyinin  $v$  –parametre eğrisinin teğet vektörü  
 $N$ :  $M$  yüzeyinin birim normal vektörü  
 $S$ :  $M$  yüzeyinin şekil operatörü  
 $K$ :  $M$  yüzeyinin Gauss eğriliği  
 $H$ :  $M$  yüzeyinin ortalama eğriliği  
 $\bar{M}$ :  $M$  nin  $S^2$  birim küresine göre inversi  
 $\tilde{M}_i$ :  $\bar{M}_i$  nin invers yüzeyinin  $i$ . fokal yüzeyi  
 $\tilde{R}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin konum vektörü  
 $\tilde{N}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin normali  
 $\tilde{h}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin destek fonksiyonu  
 $\tilde{I}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin birinci temel formu  
 $\tilde{II}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin ikinci temel formu  
 $\tilde{K}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin Gauss eğriliği  
 $\tilde{H}_i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin ortalama eğriliği  
 $\tilde{k}_{1,2}^i$ :  $\tilde{M}_i$  fokal yüzeyinin birinci ve ikinci asli eğriliği

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2. 1. $E^n$ de bir eğri.....	5
Şekil 2. 2. $C$ uzay eğrisinin oskulator,normal ve rektifyan düzlemleri .....	6
Şekil 2. 3. $E^n$ de bir eğri-hiperyüzey çifti .....	8
Şekil 2. 4. Yüzey üzerinde parametre eğrileri.....	9
Şekil 2. 5. Gauss dönüşümü .....	12
Şekil 2. 6. Gauss denklemi.....	15
Şekil 2. 7. Yüzey üzerinde Darboux çatısı.....	16
Şekil 2. 8: Bir noktanın çembere göre inversi( $k \in R^+$ ).....	19
Şekil 2. 9: Bir $M$ yüzeyinin $S^2$ birim küresine göre inversi.....	20
Şekil 2. 10: $E^3$ de bir doğru kongruansı.....	21
Şekil 2. 11: Yüzey ile Fokal Yüzeyleri.....	22
Şekil 3. 1: İverslerinin Fokal yüzeyleri .....	34
Şekil 3. 2: İverslerinin Fokal yüzeyleri .....	35
Şekil 3. 3: İverslerinin Fokal yüzeyleri .....	38

# 1. GİRİŞ

Bu bölüme, tezimizin zemini oluşturan diferansiyel geometri hakkında kısa bilgiler vererek başlayalım. Geometri dönüşümler altında geometrik nesnelerin (eğri, yüzey, manifold vb.) değişmeyen (invariant) özelliklerini inceleyen bir bilim dalıdır. Diferansiyel geometri ise diferansiyellenebilir dönüşümler altında geometrik nesnelerin invariant kalan özelliklerini inceler. Diferansiyel geometri bu işlevini yerine getirirken, matematiğin reel analiz, diferansiyel denklemler, ölçüm teorisi, kompleks ve konveks geometri, cebir, analitik geometri, topoloji, varyasyonlar hesabı vb. gibi bir çok branşından beslenir. Bu kadar zengin materyal ve yöntemle sahip olan diferansiyel geometri matematikçilere olduğu kadar, fizikçilere, mühendislere ve diğer disiplinlerdeki çok sayıda araştırmacıya önemli olanaklar sunar. Kökleri derinde olan diferansiyel geometrinin en parlak dönemini en parlak dönemini 18. ve 19. yüzyıllarda yaşamıştır. Bu dönemlerde G. Monge(1746-1818) , C. F. Gauss(1777-1855) , G. F. B. Riemann (1826-1866), E. B. Christoffel(1829-1900) , G. R. Curbastro(1853-1925), vb. gibi çok sayıda bilim adamları çok önemli katkılar yaparak bize zengin bir miras bırakmışlardır. Diferansiyel geometride eğriler ve yüzeyler teorisi önemli bir yere sahiptir. Buna ek olarak invers yüzeyler ve özel bir kongruans yüzeyi olan fokal yüzeyler de diferansiyel geometri de büyük bir öneme sahip olup, hem teknikte ve hem de diğer bilim dallarında çok sayıda uygulama alanlarına sahiptir. Bu nedenle çok sayıda araştırmacı tarafından çalışılmıştır Örneğin; (Alexiou,2001), (Amur,1962), (Behari, 1934), (Gay, 1978), (Hagen, 19992a,1993b, 1995c), (Hahmann, 1999), (Röthe, 1912), (Sarıoğlugil, 1994), (Tul, 2021) vb. gibi.

Biz de bu iki önemli yüzeyi bir arada kullanmak gayesiyle, tezimizin adını " $E^3$  de Verilen Regüler Yüzeyin Inversinin Fokallerinin Geometrisi" olarak belirledik ve tezimizi dört bölüm ve üç kesimden oluşacak şekilde düzenledik. Birinci bölüm tezimizi konu olan problemin ortaya konulduğu,tarihsel ve bilimsel açıdan değerlendirmelerin yapıldığı giriş kısmıdır. İkinci bölüm çalışmamız boyunca referans alacağımız tanım ve teoremlerin yer aldığı temel kavramlardan oluşmaktadır. Bu bölüm, sırasıyla "Eğriler ve Yüzeyler Teorisine Ait Temel Kavramlar" , "İnvers Yüzeylere Ait Temel Kavramlar" ve "Fokal Yüzeylere Ait Temel Kavramlar" olmak üzere üç kesim halinde düzenlenmiştir. Üçüncü bölüm ise tezimizin orijinal kısmıdır. Bu bölümde regüler yüzeyin inversinin fokal yüzeyleri tanımlanarak, destek fonksiyonları, normal vektörleri, temel formları ve katsayıları, asli, Gauss ve ortalama

eğrilikleri gibi karakterizasyonları invers yüzeyin karakterizasyonlarına bağlı olarak ifade edilmiştir. Akabinde iddialarımızı gerçekleyen örnekler vererek, elde edilen yüzeylerin grafikleri Maple yazılım programında çizdirilmiştir. Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar yer verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, sırasıyla "Eğriler ve Yüzeyler Teorisine Ait Temel Kavramlar" "Invers Yüzeyle Ait Temel Kavramlar" ve "Fokal Yüzeyle Ait Temel Kavramlar" olmak üzere üç kesim halinde düzenlenmiştir.

### 2. 1. Eğriler ve Yüzeyler Teorisine Ait Temel Kavramlar

Tanım 2. 1.1 :  $A \neq \emptyset$  ve  $V$  bir  $K$  cismi üzerinde  $n$  – boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V \quad (2. 1. 1)$$

fonksiyonu varsa  $A$  ya  $V$  ile birleşen bir afin uzay denir (Hacısalıhoğlu,1982).

$$(A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(A2)  $\forall P \in A$  ve  $\alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.

Tanım 2. 1. 2 :  $V$  reel vektör uzayı ile birleşen afin uzay  $A$  olsun.

$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A$  için  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  vektör sistemi  $V$  reel vektör uzayının bir bazı ise

$$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (2. 1. 2)$$

kümesine  $A$  afin uzayında başlangıç noktası  $P_0$  olan bir afin çatı denir (Hacısalıhoğlu, 1982 ).

Tanım 2. 1. 3 :  $n$  –boyutlu  $V$  reel iç çarpım uzayı ile birleşen afin uzaya Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir(Hacısalıhoğlu,1982).

Tanım 2. 1. 4 :  $n$  –boyutlu  $V$  reel iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı  $E^n$  olsun.

$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in E^n$  için  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  vektör sistemi  $V$  reel iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise

$$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (2. 1. 3)$$

kümesine,  $E^n$  Öklid uzayında başlangıç noktası  $P_0$  olan bir Öklid çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1982 ).

Tanım 2. 1. 5 :  $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} \quad (2. 1. 4)$$

limiti varsa bu limit değerine  $f$ 'nin  $a \in E^n$  noktasındaki türevi denir. Bu durumda  $f$ 'ye  $a \in E^n$ 'de türevlenebilirdir veya diferensiyellenebilirdir denir.

$a \in E^n$  de diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$$C(a, \mathbb{R}) = \{f | f: E^n \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ } a \in E^n \text{ de diferensiyellenebilir}\}$$

ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1982).

Ayrıca  $\forall a \in E^n$  için  $f \in C(a, \mathbb{R})$  ise diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi  $C(E^n, \mathbb{R})$  şeklinde ifade edilir. Eğer  $f$ 'nin  $k$ . mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler  $f$  ye  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyon adı verilir ve bu fonksiyonların kümesi  $C^k(E^n, \mathbb{R})$  ile gösterilir.

Tanım 2. 1. 6 :  $f \in C(E^n, \mathbb{R})$  ve  $V_P \in T_{E^3}(P)$  verilsin. Bu durumda

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n), Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in E^n$  ve  $V_P = \overrightarrow{PQ}$  olmak üzere

$$V_P(f) = \frac{d}{dt} [f(p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_n + t(q_n - p_1))] |_{t=0} \quad (2.1.5)$$

reel sayısına  $f$  fonksiyonunun  $V_P$  tanjant vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalihoglu, 1982).

Teorem 2. 1. 1:  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, P \in E^n$  olmak üzere,  $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$

bir diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. Bu takdirde,

$$V_P(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P \quad (2.1.6)$$

dir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2. 1. 7:  $X \in \chi(E^n)$  ve  $f \in C(E^n, \mathbb{R})$  olsun.  $\forall P \in E^n$

$$(X(f))(P) = X_P(f) \quad (2.1.7)$$

olmak üzere,  $X(f) \in C(E^n, \mathbb{R})$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun  $X$  vektör alanı yönündeki türevi denir (Hacısalihoglu, 1982).

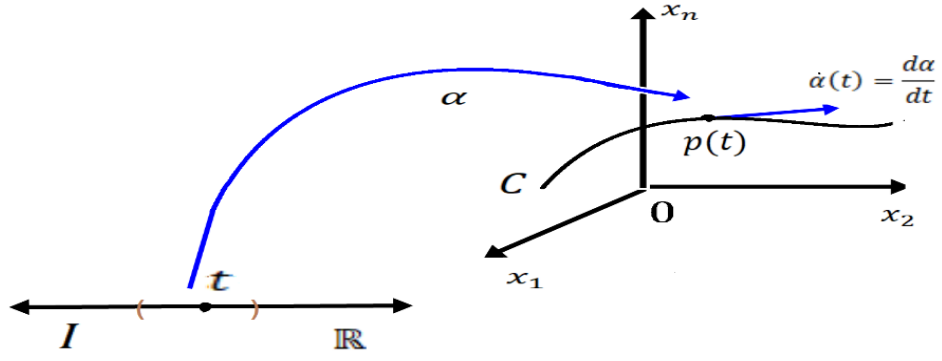
Tanım 2. 1. 8:

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \quad (2.1.8)$$

dönüşümü  $E^n$  de bir eğri veya regüler eğri,  $I \subset \mathbb{R}$  parametre aralığı ve  $t \in \mathbb{R}$  sayısında parametre adı verilir (Hacısalihoglu, 1982).

$E^n$  de lokal koordinat sistemi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olmak üzere eğriyi aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 2. 1:  $E^n$  de bir eğri

Burada

$$\dot{\alpha}(t) = \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_P = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \in T_{E^3}(P) \quad (2.1.9)$$

vektörüne  $C$  eğrisinin  $P$  noktasındaki hız vektörü ve  $\|\dot{\alpha}(t)\| \in \mathbb{R}$  değerine de  $C$  eğrisinin  $P$  noktasındaki hızı denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Diğer taraftan hız vektörünün türevi alınırsa

$$\ddot{\alpha}(t) = \left. \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right|_P = \left( \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right) \in T_{E^3}(P) \quad (2.1.10)$$

bulunur ve  $C$  eğrisinin  $P$  noktasında ki ivme vektörü adını alır.

Eğer  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$  ise  $C$  eğrisine birim hızlı eğri ve  $t \in \mathbb{R}$  parametresine de yay parametresi adı verilir.  $C$  eğrisinin yay parametresi  $s$  ile gösterilir.  $C$  eğrisinin yer vektörünün ardışık türevleri alınırsa  $\{\dot{\alpha}, \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$  lineer bağımsız vektör sistemi bulunur.

Bu sisteme Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$\{V_1, V_2, \dots, V_r\} \quad (2.1.11)$$

sistemi elde edilir. Bu vektör sistemine Serret-Frenet  $r$ -ayaklısı denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

$n = 3$  için, bu vektör sistemi  $\{T, n, B\}$  ile gösterilir.

**Teorem 2. 1. 2:**  $C \dots \alpha = \alpha(t)$ ,  $E^3$  de bir eğri olsun. Bu durumda herhangi bir  $t \in \mathbb{R}$  parametresi için

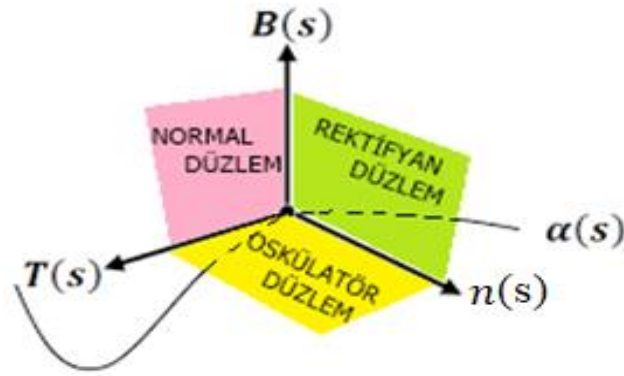
$$\begin{cases} T = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \\ n = B \wedge T \\ B = \frac{1}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|} \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

dir.  $t$  bir yay parametresi, yani  $t = s$  ise

$$\begin{cases} T = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\alpha} \\ n = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \ddot{\alpha} \\ B = T \wedge n \end{cases} \quad (2.1.13)$$

olarak elde edilir (Blaschke,1945 )

Tanım 2. 1. 9:  $C \dots \alpha = \alpha(s)$ ,  $E^n$  de bir eğri olsun.  $\{T, n, B\}$  Serret-Frenet çatısının ürettiği uzayın, 2 –boyutlu  $Sp\{T, n\}$ ,  $Sp\{T, B\}$  ve  $Sp\{n, B\}$  alt uzaylarına, sırasıyla oskütör düzlem, normal düzlem ve rektifyan düzlem adı verilir, (Abbena, 2017).



Şekil 2. 2:  $C$  uzay eğrisinin oskütör,normal ve rektifyan düzlemleri

Tanım 2. 1. 10  $C \dots \alpha = \alpha(s)$ ,  $E^n$  de bir eğri olsun. Bu takdirde

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R} \\ s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i, V_{i+1} \rangle \quad (2.1.14)$$

biçiminde tanımlanan  $k_i$  fonksiyonuna  $i$ . eğrilik fonksiyonu,  $k_i(s) \in \mathbb{R}$  de  $C$  eğrisinin  $i$ . eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

$n = 3$  için,  $k_1 = \kappa$  ve  $k_2 = \tau$  ile gösterilir ve sırasıyla eğrilik ve burulma adı verilir.

Teorem 2. 1. 3:  $C \dots \alpha = \alpha(s)$ ,  $E^3$  de bir eğri olsun. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{n} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ B \end{bmatrix} \quad (2.1.15)$$

dir. Bu formüllere Serret-Frenet türev formülleri denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Teorem 2. 1. 4:  $C \dots \alpha = \alpha(t)$ ,  $E^3$  de bir eğri olsun. Bu durumda herhangi bir  $t \in \mathbb{R}$  parametresi için



$$\begin{cases} \kappa = \frac{\|\dot{\alpha}\wedge\ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3} \\ \tau = \frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha}\wedge\ddot{\alpha}\|^2} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

dir (Hacısalihoglu, 1982).

Teorem 2. 1. 5:  $E^3$  de bir eğri  $C$  olsun.  $C$  nin bir doğru olması için gerek ve yeter şart  $\kappa = 0$  olmasıdır (Hacısalihoglu, 1982).

Teorem 2. 1. 6:  $E^3$  de bir eğri  $C$  olsun.  $C$  nin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart  $\tau = 0$  olmasıdır (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2. 1. 11:  $E^n$ , n-boyutlu Öklid uzayında,  $\nabla f|_P \neq 0$  olmak üzere

$f: U \subset E^n \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}$  için

$$M = \{P \in E^n: f(P) = c\} \quad (2.1.17)$$

biçiminde tanımlanan kümeye  $E^n$  de  $(n - 1) -$  boyutlu bir yüzey veya kısaca  $(n - 1)$  yüzey adı verilir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2. 1. 12:  $E^n$  de bir hiperyüzey ve lokal koordinat sistemi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olsun.  $f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$  olmak üzere,  $\forall P \in M$  için

$$f(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P)) = c = \text{sabit} \quad (2.1.18)$$

ise

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \quad (2.1.19)$$

veya

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.1.20)$$

denklemlerine  $M$  hiperyüzeyinin kapalı formdaki denklemi denir (Abbena, 2017).

Tanım 2. 1. 13:  $E^n$  de bir hiperyüzey ve lokal koordinat sistemi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olsun.  $U \subset E^{n-1}$  olmak üzere,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \in U \subset E^{n-1}$  için

$$\varphi: U \subset E^{n-1} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n \quad (2.1.21)$$

$u \rightarrow \varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u))$  dönüşümüne  $M$  hiperyüzeyinin parametrik gösterimi denir (Abbena, 2017).

Tanım 2. 1. 14:  $E^n$  de bir  $M$  hiperyüzeyi  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  denklemi ile verilsin. Bu denklemin çözümünden

$$x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_{n-1} = u_{n-1} \quad (2.1.22)$$

olmak üzere

$$x_n = h(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \quad (2.1.23)$$

elde edilir. (2. 1. 21), (2. 1. 22) ve (2. 1. 23) den



fonksiyonu  $u_i$  değişkenine bağlı olup  $M$  hiperyüzeyi üzerinde bir eğri tanımlar ve bu eğriye  $u_i$  parametre eğrisi adı verilir (Abbena, 2017).

$n = 3$  için,  $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq u_1 \leq b, c \leq u_2 \leq d\} \subset E^2$  olmak üzere  $\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2), \varphi_3(u_1, u_2))$  yüzey denklemini ele alalım.

$u_2 = \text{sabit}$  için,  $u_1$  –parametre eğrisinin denklemi

$(u_1, u_2 = \text{sabit}) = (\alpha_1(u_1), \alpha_2(u_1), \alpha_3(u_1)) = \alpha(u_1)$  ve

$u_1 = \text{sabit}$  için,  $u_2$  –parametre eğrisinin denklemi

$\varphi(u_1 = \text{sabit}, u_2) = (\beta_1(u_2), \beta_2(u_2), \beta_3(u_2)) = \beta(u_2)$  biçiminde yazılabilir. Bu eğrilerin teğet vektörleri, sırasıyla

$$\dot{\alpha}(u_1) = \frac{d\alpha}{du_1} = \varphi_{u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \right) \in T_M(p)$$

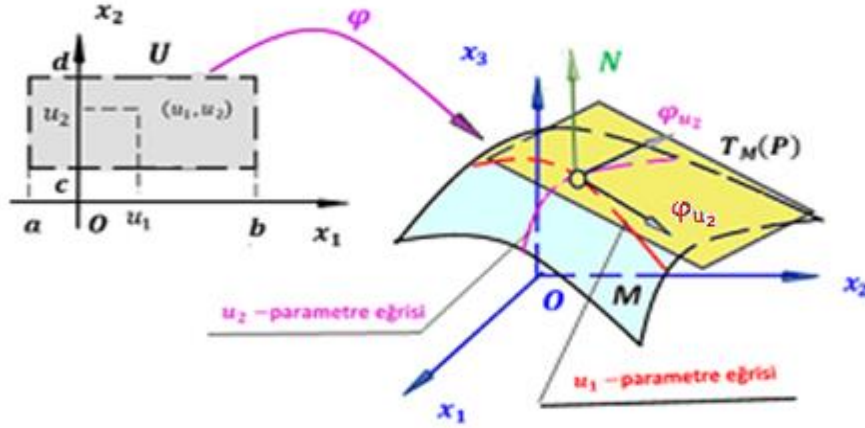
ve

$$\dot{\beta}(u_2) = \frac{d\beta}{du_2} = \varphi_{u_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \right) \in T_M(p)$$

dir. Buradan  $\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2} \perp T_M(p)$  olacağından  $M$  yüzeyinin birim normal

$$N = \frac{1}{\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|} \varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2} \quad (2.1.27)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2. 4: Yüzey üzerinde parametre eğrileri

Tanım 2. 1. 18:  $M, E^n$ 'de hiperyüzey olsun.  $N$  ve  $X$ , sırasıyla  $M$ 'nin birim normal ve konum vektörleri olmak üzere

$h: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \rightarrow h(P) = \langle X_P, N_P \rangle \quad (2.1.28)$$

biçiminde tanımlanan  $h$  fonksiyonuna  $M$  hiperyüzeyini destek fonksiyonu denir (Sarioğlugil, 1994).

Diğer bir ifadeyle,  $X$  konum vektörünün  $N$  birim normal vektörü üzerine dik izdüşümünün uzunluğudur.

Tanım 2. 1. 19:  $M, E^n$ 'de hiperyüzey olsun.  $N$  ve  $D$  sırasıyla  $M$ 'nin birim normal vektörü ve bir afin konneksiyonu olmak üzere,  $\forall x \in \chi(M)$  için  $S: \chi(M) \rightarrow \phi(M)$

$$X \rightarrow S(X) = D_X N \quad (2. 1. 29)$$

dönüşümüne şekil operatörü denir (Hacısalihoglu,1982).

Teorem 2. 1. 6 :  $M, E^n$ 'de hiperyüzey olsun.  $S$  dönüşümüne  $M$  üzerinde bir şekil operatörü denir (Hacısalihoglu,1982).

Şekil operatörü bir lineer ve self adjoint dönüşümdür (Hacısalihoglu,1982).

O halde şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \frac{-\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\|^3 \|\varphi_v\|} & -\frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2} \\ -\frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2} & -\frac{\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|^3} \end{bmatrix} \quad (2. 1. 30)$$

dir.

Tanım 2. 1. 20 :  $M, E^n$ 'de bir hiperyüzey ve  $S$ 'de  $M$ 'nin şekil operatörü olsun.  $S$  lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine  $M$ 'nin  $O$  noktadaki asli eğrilikleri denir. Yani;  $P \in M$  için

$$S_P(X_P) = kX_P \quad (2. 1. 31)$$

olacak şekilde  $X_P \neq 0$  varsa  $k$ 'ya  $P \in M$ 'deki asli eğrilik,  $X_P$  'ye de buna karşılık gelen asli eğrilik doğrultusu denir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2. 1. 21 :  $M, E^n$ 'de bir hiperyüzey ve  $\alpha$ 'da  $M$  üzerinde bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $T$  teğet vektörü bir karakteristik vektöre karşılık geliyorsa yani;

$$S(T) = kT \quad (2. 1. 32)$$

olacak şekilde  $k \in \mathbb{R}$  varsa  $\alpha$  eğrisine  $M$  üzerinde bir eğrilik çizgisi denir (Hacısalihoglu, 1982).

$T_M(p) = Sp\{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$  uzayının elemanları birer asli doğrultu vektörü ise

$$\begin{cases} S(\varphi_{u_1}) = N_{u_1} = k_1 \varphi_{u_1} \\ S(\varphi_{u_2}) = N_{u_2} = k_2 \varphi_{u_2} \end{cases} \quad (2. 1. 33)$$

elde edilir. Bu eşitliklere Olin de Rodrigues formülleri denir. (Hacısalihoglu,1982).

Bu durumda şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.34)$$

olarak elde edilir.

Tanım 2. 1. 22:  $M, E^n$ 'de hiperyüzey ve  $S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$   $M$ 'nin şekil operatörü olsun. O halde,  $1 \leq q \leq n$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} I^q: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

ile tanımlı  $I^q$  fonksiyonuna  $M$  üzerinde  $q$ -uncu temel form denir (Hacısalihoglu, 1982).

Özel olarak;  $n = 3$  için temel formları açık biçimde yazılırsa,

- $q = 1$  için

$$\begin{aligned} I: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I(X, Y) = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

olup,  $M$ 'nin birinci temel formu adını alır.

- $q = 2$  için

$$\begin{aligned} II: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle \end{aligned}$$

olup,  $M$ 'nin ikinci temel formu adını alır.

- $q = 3$  için

$$\begin{aligned} III: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow III(X, Y) = \langle S^2(X), Y \rangle \end{aligned}$$

olup,  $M$ 'nin üçüncü temel formu adını alır.

$n = 3$  için; birinci, ikinci ve üçüncü temel formların katsayıları, sırasıyla

$$\begin{cases} g_{11} = \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_1} \rangle \\ g_{12} = \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \rangle \\ g_{22} = \langle \varphi_{u_2}, \varphi_{u_2} \rangle \end{cases} \quad (2.1.36)$$

$$\begin{cases} b_{11} = -\langle \varphi_{u_1}, N_{u_1} \rangle = \langle \varphi_{u_1 u_1}, N \rangle \\ b_{12} = -\langle \varphi_{u_1}, N_{u_2} \rangle = \langle \varphi_{u_1 u_2}, N \rangle \\ b_{22} = -\langle \varphi_{u_2}, N_{u_2} \rangle = \langle \varphi_{u_2 u_2}, N \rangle \end{cases} \quad (2.1.37)$$

ve

$$\begin{cases} n_{11} = \langle N_{u_1}, N_{u_1} \rangle \\ n_{12} = \langle N_{u_1}, N_{u_2} \rangle \\ n_{22} = \langle N_{u_2}, N_{u_2} \rangle \end{cases} \quad (2.1.38)$$

olarak yazılabilir. O halde (2. 1. 36), (2. 1. 37) ve (2. 1. 38) bağıntılarından

$$\begin{cases} I = g_{11}(du_1)^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}(du_2)^2 \\ II = b_{11}(du_1)^2 + 2b_{12}du_1du_2 + b_{22}(du_2)^2 \\ III = n_{11}(du_1)^2 + 2n_{12}du_1du_2 + n_{22}(du_2)^2 \end{cases} \quad (2. 1. 39)$$

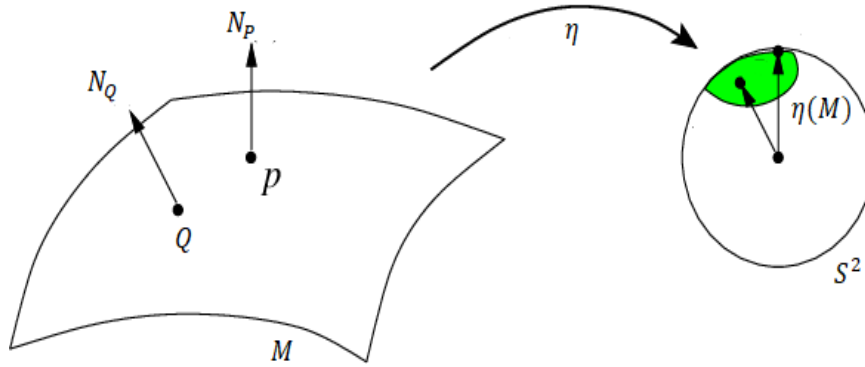
dir.

**Teorem 2. 1. 7:**  $M, E^3$  de yönlendirilmiş bir yüzey olsun.  $M$  nin parametre eğrilerinin birer eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $g_{12} = b_{12} = 0$  olmasıdır (Abbena, 2017).

**Tanım 2. 1. 23:**  $M, E^n$  de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve  $N$ 'de  $M$ 'nin birim normal vektör alanı olsun.  $S^{n-1}$  birim hiperküre olmak üzere;

$$\begin{aligned} \eta: M &\rightarrow S^{n-1} \\ P &\rightarrow \eta(P) = N_P \end{aligned} \quad (2. 1. 40)$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne Gauss dönüşümü denir (Hacısalıhoğlu, 1982).



Şekil 2. 5: Gauss dönüşümü

**Tanım 2. 1. 24:**  $M, E^n$  de bir hiperyüzey ve  $S$ 'de  $M$ 'nin şekil operatörü olsun.

$$\begin{aligned} K: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S_P \end{aligned} \quad (2. 1. 41)$$

fonksiyonuna Gauss eğrilik fonksiyonu,  $K(P) \in \mathbb{R}$  ye de  $P \in M$  noktasındaki Gauss eğriliği denir (Abbena,2017) .

(2. 1. 34) ve (2. 1. 41) eşitliklerinden

$$K(P) = k_1 k_2 \quad (2. 1. 42)$$

elde edilir.

Eğer,  $M$  yüzeyinin Gauss eğriliği sıfıra eşit ise  $M$  ye açılabilir yüzey adı verilir.

Teorem 2. 1. 8:  $M, E^3$  de yönlendirilmiş bir yüzey olsun.  $M$  nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{b_{11}b_{22}-(b_{12})^2}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2} \quad (2. 1. 43)$$

dir (Blaschke, 1945) .

Tanım 2.1. 25:  $M, E^n$ 'de bir hiperyüzey ve  $S'$ 'de  $M$ 'nin şekil operatörü olsun.

$$\begin{aligned} H: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = \text{İz } S_P \end{aligned} \quad (2. 1. 44)$$

fonksiyonuna ortalama eğrilik fonksiyonu,  $H(P) \in \mathbb{R}$  ye de  $P \in M$  deki ortalama eğriliği denir (Abbena, 2017).

(2. 1. 34) ve (2. 1. 44) eşitliklerinden

$$H(P) = k_1 + k_2 \quad (2. 1. 45)$$

elde edilir.

Teorem 2. 9:  $M, E^3$  de yönlendirilmiş bir yüzey olsun.  $M$  nin Gauss eğriliği

$$H = \frac{b_{11}g_{22}-2b_{12}g_{12}+g_{11}b_{22}}{2(g_{11}g_{22}-(g_{12})^2)} \quad (2. 1. 46)$$

dir (Blaschke, 1945).

Eğer,  $M$  yüzeyinin ortalama eğriliği sıfıra eşit ise  $M$  ye minimal yüzey adı verilir.

Teorem 2. 1. 10:  $M, E^3$  te parametrik ifadesi verilmiş yönlendirilmiş bir yüzey olsun.  $M$ ' nin parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması durumunda  $M$ ' nin  $k_1$  ve  $k_2$  asli eğrilikleri

$$\begin{cases} k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}} \\ k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}} \end{cases} \quad (2. 1. 47)$$

şeklindedir (Şemin, 1987).

Tanım 2. 1. 26:  $M, E^n$ 'de bir hiperyüzey ve  $M$  üzerinde lokal koordinat sistemi de  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$  olsun. O halde  $M$  nin birinci temel formunun (metrik tensörünün) katsayıları  $g_{ij}, 1 \leq i, j \leq n - 1$ , olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kh} \left( \frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h} \right), 1 \leq h, k \leq n - 1, \quad (2. 1. 48)$$

biçiminde tanımlanan  $\Gamma_{ij}^k \in C(M, \mathbb{R})$  fonksiyonlarına ikinci tipten Christoffel sembolleri denir (Abbena, 2017).

Burada  $[g^{ji}] = [g_{ij}]^{-1}$  dir. Benzer şekilde

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right), 1 \leq k \leq n - 1, \quad (2. 1. 48)$$

biçiminde tanımlanan  $\Gamma_{ij,k} \in C(M, \mathbb{R})$  fonksiyonlarına da birinci tipten Christoffel sembolleri denir. Ayrıca Christoffel sembolleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1.  $\Gamma_{ij}^k = g^{kh}\Gamma_{ij,h}$  veya  $\Gamma_{ij,h} = g_{hk}\Gamma_{ij}^k$ .
2.  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  ve  $\Gamma_{ij,h} = \Gamma_{j,i,h}$ .

Teorem 2. 1. 11:  $M, E^3$  de yönlendirilmiş bir yüzey olsun.  $M$  nin ikinci tipten Christoffel sembolleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{g_{22}(g_{11})_{u_1} - 2g_{12}(g_{12})_{u_1} + g_{12}(g_{11})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{g_{22}(g_{11})_{u_2} - g_{12}(g_{22})_{u_1}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22}(g_{22})_{u_1} - 2g_{22}(g_{12})_{u_1} + g_{12}(g_{22})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{g_{12}(g_{11})_{u_1} - 2g_{11}(g_{12})_{u_1} + g_{11}(g_{11})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{g_{12}(g_{11})_{u_2} - g_{11}(g_{22})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{g_{11}(g_{22})_{u_2} - 2g_{12}(g_{12})_{u_2} + g_{12}(g_{22})_{u_1}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \end{array} \right. \quad (2.1.50)$$

dir (Abbena, 2017).

Eğer  $M$  nin parametre eğrileri ortogonal ise,  $g_{12} = 0$  olacağından

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{(g_{11})_{u_1}}{2g_{11}} \quad , \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{(g_{11})_{u_2}}{2g_{22}} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{(g_{11})_{u_2}}{2g_{11}} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{(g_{22})_{u_2}}{2g_{22}} \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{(g_{22})_{u_1}}{2g_{11}} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{(g_{22})_{u_2}}{2g_{22}} \end{array} \right. \quad (2.1.51)$$

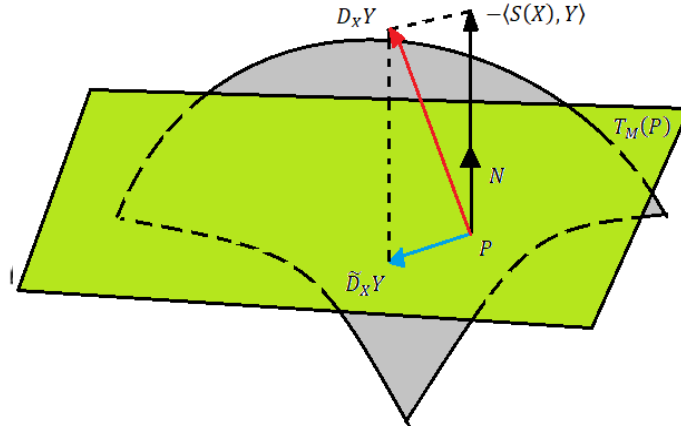
şeklinde ifade edilir.

Tanım 2. 1. 27:  $M, E^{n'}$  de bir hiperyüzey ve  $M$  nin birim normal vektörü  $N$  olsun.  $E^n$  ile  $M$  nin afin konneksiyonları  $D$  ve  $\tilde{D}$  olmak üzere,  $\forall X, Y \in T_M(P)$  için

$$D_X Y = \tilde{D}_X Y - \langle S(X), Y \rangle N \quad (2.1.52)$$

ifadesine Gauss denklemi denir (Hacısalıhoğlu, 1982).





Şekil 2. 6: Gauss denklemi

$n = 3$  için; Gauss denklemleri  $T_M(p) = Sp\{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$  bazına göre

$$\begin{cases} D_{\varphi_{u_1}} \varphi_{u_1} = \varphi_{u_1 u_1} = \Gamma_{11}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{u_2} + b_{11} N \\ D_{\varphi_{u_1}} \varphi_{u_2} = \varphi_{u_2 u_1} = \Gamma_{21}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{21}^2 \varphi_{u_2} + b_{21} N \\ D_{\varphi_{u_2}} \varphi_{u_1} = \varphi_{u_1 u_2} = \Gamma_{12}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \varphi_{u_2} + b_{12} N \\ D_{\varphi_{u_2}} \varphi_{u_2} = \varphi_{u_2 u_2} = \Gamma_{22}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{22}^2 \varphi_{u_2} + b_{22} N \end{cases} \quad (2.1.53)$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2. 1. 28 :  $M, E^n$  de bir hiperyüzey ve  $M$  üzerinde teğet vektörü  $T$  olan  $C^\infty$  sınıftan bir eğri  $(\alpha)$  olsun.  $(\alpha)$  eğrisi üzerinde olan bir  $Y \in \chi(M)$  vektör alanı için eğri boyunca

$$\bar{D}_T Y = 0 \quad (2.1.54)$$

ise  $Y \in \chi(M)$  vektör alanına  $C$  eğrisi boyunca Levi- Civita anlamında paralel vektör alanı denir (Abbena, 2017).

Eğer

$$\bar{D}_T T = 0 \quad (2.1.55)$$

ise  $(\alpha)$  eğrisine  $M$  hiperyüzeyi üzerinde bir jeodezik eğri denir

Teorem 2. 1. 12:  $M, E^n$  de  $M, E^n$  de bir hiperyüzey ve  $M$  üzerinde teğet vektörü  $T$  olan  $C^\infty$  sınıftan bir eğri  $C \dots \alpha = \alpha(s)$  olsun.

Bu takdirde  $C$  eğrisinin  $M$  üzerinde jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$\alpha_i = u_i(s)$  olmak üzere

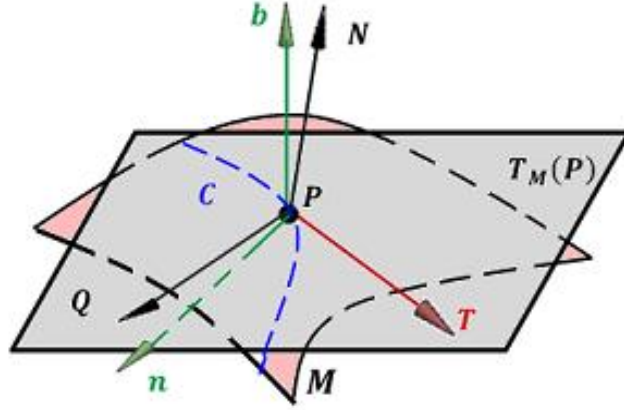
$$\frac{d^2 \alpha_k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_j}{ds} \frac{d\alpha_i}{ds}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n-1, \quad (2.1.56)$$

dır (Abbena, 2017).

Tanım 2. 1. 29:  $M, E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M$  üzerinde  $C^\infty$  sınıftan birim teğet vektörü  $T$  olan birim hızlı bir eğri ( $C$ ) olsun  $Q = T \wedge N$  olmak üzere,

$$\{T, Q = T \wedge N, N\} \quad (2.1.57)$$

vektör sistemi  $M$  üzerinde bir çatı meydana getirir. Bu çatıya  $M$  yüzeyi üzerindeki ( $C$ ) eğrisinin  $P = \alpha(s)$  noktasındaki Darboux çatısı adı verilir (Weateburn, 1955).



Şekil 2. 7: Yüzey üzerindeki bir eğrinin Darboux çatısı

$\angle(n, Q) = \theta$  olmak üzere,  $\{T, n, b\}$  Serret-Frenet çatısı ile  $\{T, Q = T \wedge N, N\}$  Darboux çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ Q \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.1.58)$$

matrisel ifadesiyle verilir.

Teorem 2. 1. 13:  $M, E^3$  de  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M$  üzerinde  $C^\infty$  sınıftan birim hızlı bir eğri ( $C$ ) ...  $\alpha = \alpha(s)$  olsun.  $M$  yüzeyi üzerindeki ( $C$ ) eğrisinin  $P = \alpha(s)$  noktasındaki  $\{T, Q = T \wedge N, N\}$  Darboux çatısı için

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{Q} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Q \\ N \end{bmatrix} \quad (2.1.59)$$

dir. Bu formüllere Darboux türev formülleri adı verilir (Blaschke, 1945).

Burada

$$\begin{cases} k_g = \kappa \cos\theta \\ k_n = \kappa \sin\theta \\ \tau_g = \tau + \theta \end{cases} \quad (2.1.60)$$

olup, sırasıyla  $k_g, k_n$  ve  $\tau_g$  notasyonları ile  $(C)$  eğrisinin jeodezik eğriliğini, normal eğriliğini ve jeodezik burulmasını (veya torsiyonunu) göstermektedir.

Teorem 2. 1. 14:  $M \dots X = X(u; v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $T_M(p) = Sp\{X_u, X_v\}$  olmak üzere

$$X = hN - \frac{\rho}{W^2} \{(\rho_v g_{12} - \rho_u g_{22})X_u + (\rho_u g_{12} - \rho_v g_{11})X_v\} \quad (2. 1. 61)$$

dir (Sarioğlugil, 1994).

Burada  $\rho = \|X\|$ ,  $h = \langle X, N \rangle$  ve  $W^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$ .

Tanım 2. 1. 30:  $M$  regüler yüzeyinin birinci temel formu

$$I = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{I}{V}(h) = \frac{g_{11}h_v^2 - 2g_{12}h_u h_v + g_{22}h_u^2}{W^2} \quad (2. 1. 62)$$

biçiminde tanımlanan operatöre  $M$  yüzeyinin birinci Beltrami diferensiyel operatörü denir (Blaschke, 1945).

Teorem 2. 1. 15:  $M$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler mevcuttur (Şemin, 1987).

$$1) N \wedge X_u = \frac{1}{W} [g_{11}X_v - g_{12}X_u] \quad (2. 1. 63)$$

$$2) N \wedge X_v = \frac{1}{W} [g_{12}X_v - g_{22}X_u] \quad (2. 1. 64)$$

$$3) N \wedge [N \wedge X_u] = -X_u \quad (2. 1. 65)$$

$$4) N \wedge [N \wedge X_v] = -X_v \quad (2. 1. 66)$$

$$5) X_u \wedge [N \wedge X_u] = g_{11}N \quad (2. 1. 67)$$

$$6) X_v \wedge [N \wedge X_u] = g_{12}N \quad (2. 1. 68)$$

$$7) X_u \wedge [N \wedge X_v] = g_{12}N \quad (2. 1. 69)$$

$$8) X_v \wedge [N \wedge X_v] = g_{22}N \quad (2. 1. 70)$$

Teorem 2. 1. 16:  $M$  regüler yüzeyinin yer vektörünün uzunluğu

$$\rho^2 = \frac{h^2}{1 - \frac{I}{V}(\rho)} \quad (2.1.70)$$

dir (Sarioğlugil, 1994).

## 2.2. İnvrs Yüzeylere Ait Kavramlar

Bu kesimde invrs yüzeyler ile ilgili literatür özeti ile temel kavramlara yer verilmiştir.

Bu kesime ilk olarak inversiyon dönüşümü hakkında bilgiler vererek başlayalım. Bilindiği gibi çember ve küre geometride çok önemli geometrik yapıdır. Düzlem

geometride bir doğruya göre yansıma kavramının, çember ve küreye göre yeniden yorumlanmasıdır. Dolayısı ile inversiyon geometri, çember ve küre bazlı bir geometridir. Bu nedenle inversiyon dönüşümüne çembere (veya küreye) göre yansıma dönüşümü de denir. İncersiyon dönüşümünü ilk önce düzlemde tanımlayıp, daha sonra 3- boyutlu  $E^3$  Öklid uzayına genelleştireceğiz. İncersiyonla ilgili ilk çalışmanın Pergeli Apollinius'a ait olduğunu Rosenfeld 1988 de yayımlanan " A History of Non-Euclidean Space " adlı eserinden öğreniyoruz (Rosenfeld, 1988). Çemberin inversiyonuna ilişkin bir gelişme de Alman matematikçi ve fizikçi Julius Plücker' in 1834 yılında yayımlanan " Analytisch - geometrie Aphorismen " isimli çalışmasında verilmiştir (Plücker,1834) .J. Plücker bu çalışmasında inversiyon dönüşümünün konformal olduğunu göstermiştir. 1836 da Giusto Bellavitis " Teoria della figure inverse, e loro uso nella geometria elementare " adlı eserinde stereografik izdüşümün bir inversiyon olduğunu göstermiştir. İncersiyon teorisine J. Steiner, B. Riemann ve A. Ferdinand Mobius v.b. gibi çok sayıda matematikçinin çok büyük katkıları olmuştur. Günümüzde de çok sayıda geometrici tarafından çalışmalar sürdürölmektedir. Örneğın; (Sarıoğlugil,1994), (Tul, 2020), (Röthe, 1912) v.b. gibi. Sentetik geometriden diferensiyel geometriye kadar uzanan tarihsel gelişimine kısaca değindiğimiz inversiyon geometri; matematik tıp, mühendislik, fizik, geometrik modelleme ve astronomi v.b bilim dallarında önemli uygulamalara sahiptir.

Tanım 2. 2. 1:  $E^2$  de doğrusal üç nokta  $O, P$  ve  $Q$  olsun.  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\overline{OP} \overline{OQ} = k, k = \text{sabit}, \quad (2. 2. 1)$$

koşulu sağlanıyorsa,  $Q$  noktasına  $P$  noktasının  $O$  ya göre inversi ve  $O$  noktasına da inversiyon merkezi denir (Gay, 1912).

Burada  $k \in \mathbb{R}$  sayısı için iki durum söz konusudur.

1.  $k \in \mathbb{R}^+$  ise,  $P$  ve  $Q$  noktaları  $O$  inversiyon merkezine göre aynı tarafta bulunurlar.
2.  $k \in \mathbb{R}^-$  ise,  $P$  ve  $Q$  noktaları  $O$  inversiyon merkezine göre aynı tarafta bulunmazlar.

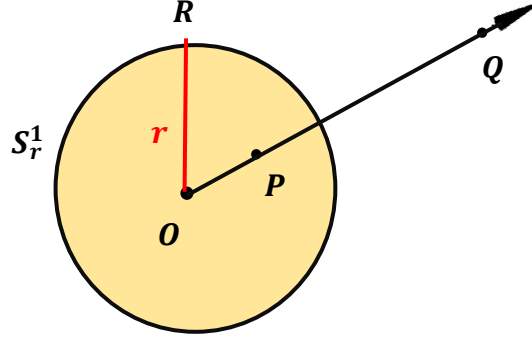
Tanım 2. 2. 2:  $E^2$  de  $O$  merkezli  $r \in \mathbb{R}$  yarıçaplı bir çember

$$S_r^1 = \{X \in E^2: \overline{OX} = \|\overline{OX}\| = r = \sqrt{k}\} \quad (2. 2. 2)$$

olsun.  $O, P, Q \notin S_r^1$  doğrusal üç nokta olmak üzere

$$\overline{OP} \overline{OQ} = r^2 \quad (2. 2. 3)$$

koşulu sağlanıyorsa  $Q$  noktasına  $P$  nin  $S_r^1$  çemberine göre inversi,  $S_r^1$  e inversiyon çemberi,  $O$  noktasına inversiyon çemberinin merkezi ve  $r \in \mathbb{R}$  sayısına da inversiyon çemberinin yarıçapı denir, (Gay, 1912).



Şekil 2. 8: Bir noktanın çembere göre inversi( $k \in \mathbb{R}^+$ )

O halde aşağıdaki özellikler verilebilir.

- i.  $P$  noktası inversiyon çemberinin bir dış (iç) noktası ise,  $P$  nin  $Q$  invers noktası inversiyon çemberinin içinde (dışında) yer alır.
- ii. İversiyon çemberi üzerindeki her noktanın inversi kendisidir.
- iii.  $P$  noktası inversiyon merkezine yaklaştıkça  $Q$  invers noktası sonsuza doğru uzaklaşır. Buna göre inversiyon merkezinin inversi sonsuzdadır.

Benzer şekilde bir küreye göre invers nokta tanımı yapılabilir.

Tanım 2. 2. 3:  $E^2$  de  $O$  merkezli  $r \in \mathbb{R}$  yarıçaplı bir çember

$$S_r^1 = \{X \in E^2: \overline{OX} = \|\overline{OX}\| = r = \sqrt{k}\}$$

olsun.  $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  olmak üzere

$$f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$P \rightarrow f(P) = \left( \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) \quad (2.3.5)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme düzlemde  $S_r^1$  çemberine göre bir inversiyon dönüşümü denir, (Blair,2000):

Benzer şekilde  $P = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  olmak üzere

$$f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P \rightarrow f(P) = \left( \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \frac{r^2 z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right) \quad (2.3.4)$$

dönüşümüne de  $\mathbb{R}^3$  de  $S_r^2$  küresine göre inversiyon dönüşümü denir, (Blair,2000).

Tanım 2. 2. 4:  $M, E^3$  de

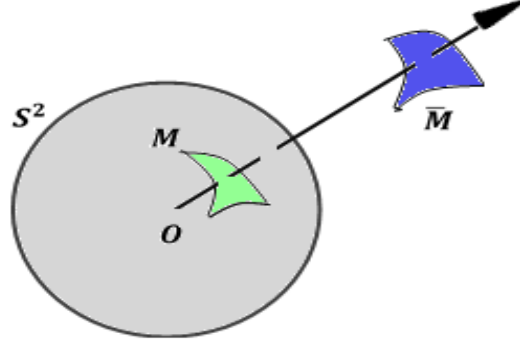
$$X: D \subset E^2 \mapsto E^3$$

$$(u, v) \mapsto X = X(u, v)$$

parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun . $P \in M$  ve  $\rho = \|X\|$  olmak üzere konum vektörü

$$\bar{X} = \frac{1}{\rho^2} X \quad (2.3.5)$$

olan yüzeye  $M$  nin  $S^2$  birim küresine göre inversi denir ve  $\bar{M}$  ile gösterilir (Sarioğlugil, 1994).



Şekil 2. 9: Bir  $M$  yüzeyinin  $S^2$  birim küresine göre inversi

**Teorem 2. 2. 1:**  $M$ ,  $E^3$ de regüler yüzey olsun.  $\bar{M}$  invers yüzeyinin birim normal vektörü

$$\bar{N} = 2 \frac{h}{\rho^2} X - N \quad (2.2.6)$$

dir. Burada  $h$ ,  $M$  yüzeyinin destek fonksiyonudur, (Sarioğlugil,1994).

**Teorem 2. 2. 2:**  $M$ ,  $E^3$ de regüler yüzey olsun.  $\bar{M}$  invers yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\bar{k}_i = -(2h + \rho^2 k_i) \quad (2.2.7)$$

dir, (Sarioğlugil, 1994).

### 2.3. Fokal Yüzeylere Ait Kavramlar

Bu kesimde fokal yüzeyler ile ilgili kısa bir literatür özeti ile bazı temel kavramlar yer vericektir.

Fokal yüzeyler özel doğrusal kongrüans yüzeyleri olarak bilinirler. Bu durumda doğrusal kongrüans yüzey kavramının açıklanması zorunluluğu ortaya çıkar. Kongrüans yüzeyler ilgili ilk çalışmalar G. Monge tarafından yapılmıştır, (Monge,1850). Monge tarafından ortaya konan bu yüzeyler bilim dünyasında karşılık bulmuş ve (Taliaferro,1901), (Ogura,1918), (Behari, 1934), (Mıshra,1951), (Srinivasiengar, 1951), (Amur,1962), (Nirmala, 1963), (Alexiou vd, 2001) ve (Papadopoulou, 2003) v.b. gibi çok sayıda bilim adamı tarafından çalışılmış,

günümüzde de halen çalışılmaya devam etmektedir. O halde bu kısa tarihsel bilgiden sonra kongruans yüzeyinin tanımını verelim.

Tanım 2. 2. 1:  $M$ ,  $E^3$  de parametrik ifadesi

$$X : D \subset E^2 \rightarrow X(D) \subset E^3 \quad (2. 3. 1)$$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

olan regüler yüzey olsun. O halde  $M$  yüzeyinin  $P = X(u, v)$  noktasından geçen doğruların ailesini de

$$\mathcal{F} = \{ \xi_P \in T_{E^3}(P) : \|\xi_P\| = 1 \}$$

ile gösterelim. O halde

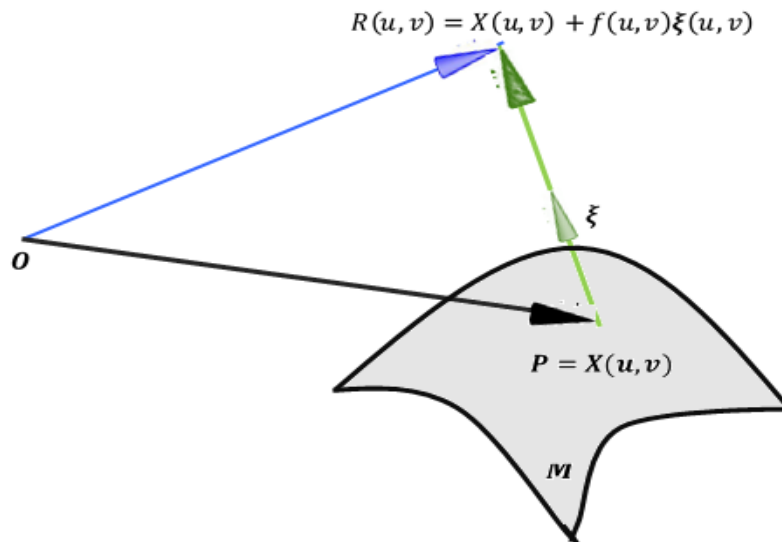
$$\tilde{M} \dots R(u, v, f) = R(u, v) = X(u, v) + f(u, v)\xi(u, v) \quad (2. 2. 2)$$

denklemlerle tanımlanan  $R(u, v)$  noktalarının geometrik yerine doğrusal kongruans denir. Bu denklem bir yüzey tanımlar ve bu yüzey, iki bağımsız parametreye bağlı diferensiyellenebilir doğrular ailesinin (yani  $\mathcal{F}$  ailesinin) ürettiği yüzeydir. Burada

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2. 2. 3)$$

$$P \rightarrow f(P) = \|\overrightarrow{PR}\|$$

biçiminde tanımlanan uzaklık fonksiyonudur. Bu fonksiyona offset fonksiyonu da denir, (Hagen, 1992a, 1995c).



Şekil 2. 10:  $E^3$  de bir doğru kongruansı

(2. 2. 2) denkleminde  $\xi$  yerine yüzeyin  $N$  birim normal vektörü alınırsa,

$$\tilde{M} \dots R(u, v) = X(u, v) + f(u, v)N(u, v) \quad (2. 3. 4)$$

elde edilir. Bu durumda bu kongruansa normaller kongruansı denir (Hagen et al, 1992a; Hagen et al, 1993b). Eğrilik kavramı diferensiyel geometri açısından çok

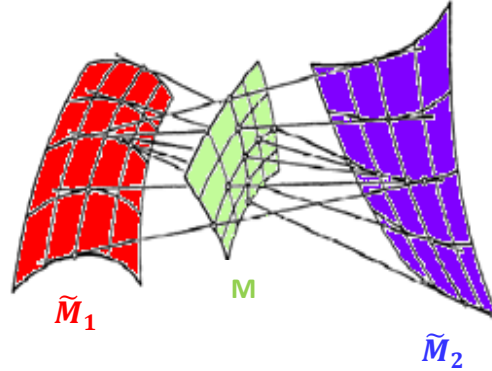
önemli bir kavramdır. Çünkü eğrilikler sayesinde yüzeyin geometrik yapısı hakkında bize net bilgiler verir. Yüzeyin şekil operatörünün karakteristik veya normal eğriligi ekstremum değerleri olan  $k_i, 1 \leq i \leq 2$ , ile gösterilen asli eğrilikler yüzeyin geometrisinin ortaya konulmasında büyük rol oynar ve ayrıca yüzeyin Gauss ile ortalama eğrilikleri ,sırasıyla  $K = k_1 k_2$  ve  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  dir. Hagen ve Hahmann, uzaklık(offset) fonksiyonunu  $f(u, v) = \frac{1}{k_i}$  almak suretiyle

$$\tilde{M} \dots \tilde{R}(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{k_i} N(u, v) \quad (2.3.5)$$

özel normaller kongruansını elde etmişlerdir (Hahmann,1999). (2.2.5) denkleminde verilen yüzeye fokal yüzey adı verilir. Akabinde Hagen ve Hahmann ,  $s \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\tilde{M} \dots \tilde{R}(u, v) = X(u, v) + s f(k_1, k_2) N(u, v) \quad (2.3.6)$$

normaller kongruansını tanımlayarak, genelleştirilmiş fokal yüzeylerin elde etmişlerdir(Hahmann,1999).



Şekil 2. 11: Fokal yüzeyler

Bu yüzeylerin şekil analizi bir yaklaşım yöntemidir. Fokal yüzeyler, optik, mimarlık, otomotiv ve bilgisayar destekli tasarım ve imalat sanayi vb. gibi birçok alanda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Yüzeyle farklı yaklaşım metodları da vardır. Örneğin Maekawa ve arkadaşları Monge parametrizasyonuna sahip yüzeylerin şekil analizi için, yüzeyin umbilik noktalarında asli eğrilik fonksiyonlarının davranışlarını esas alan bir yöntem kullanmışlardır, (Maekawa et al,1999). Bu alanda yapılan çalışmalar artarak devam etmektedir. Biz çalışmamızda (2.3.5) denklemini kullanarak bir yüzeyin inversinin fokallerini araştıracağız.



### 3. REGÜLER YÜZEYİN İNVERSLERİNİN FOKALLERİN GEOMETRİSİ

Tanım 3. 1 :  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeyleri için

$$\tilde{M}_1 \dots \tilde{R}_1(u, v) = \bar{X}(u, v) + \left(\frac{1}{\bar{k}_1}\right)\bar{N}(u, v) \quad (3.1)$$

Ve

$$\tilde{M}_2 \dots \tilde{R}_2(u, v) = \bar{X}(u, v) + \left(\frac{1}{\bar{k}_2}\right)\bar{N}(u, v) \quad (3.2)$$

yazılır.  $M$  yüzeyi üzerinde parametre eğrileri birer eğrilik çizgileri olsunlar. Bu durumda  $\bar{b}_{12} = \bar{g}_{12} = 0$  olduğundan

$$\begin{cases} \bar{N}_u = -\bar{k}_1 \bar{X}_u \\ \bar{N}_v = -\bar{k}_2 \bar{X}_v \end{cases} \quad (3.3)$$

elde edilir.

Teorem 3. 1 :  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin birim normal vektörleri

$$\tilde{N}_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \bar{X}_u \quad (3.4)$$

ve

$$\tilde{N}_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \bar{X}_v \quad (3.5)$$

dir.

*İspat:* (3. 1) ve (3. 2) denklemlerinin "u" ve "v" parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} (\tilde{R}_1)_u = \bar{X}_u - \frac{(\bar{k}_1)_u}{(\bar{k}_1)^2} \bar{N} + \frac{1}{\bar{k}_1} \bar{N}_u \\ (\tilde{R}_1)_v = \bar{X}_v - \frac{(\bar{k}_1)_v}{(\bar{k}_1)^2} \bar{N} + \frac{1}{\bar{k}_1} \bar{N}_v \end{cases} \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{cases} (\tilde{R}_2)_u = \bar{X}_u - \frac{(\bar{k}_2)_u}{(\bar{k}_2)^2} \bar{N} + \frac{1}{\bar{k}_2} \bar{N}_u \\ (\tilde{R}_2)_v = \bar{X}_v - \frac{(\bar{k}_2)_v}{(\bar{k}_2)^2} \bar{N} + \frac{1}{\bar{k}_2} \bar{N}_v \end{cases} \quad (3.7)$$

elde edilir. (3. 3) , (3. 6) ve (3. 7) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{cases} (\tilde{R}_1)_u = -\frac{(\bar{k}_1)_u}{(\bar{k}_1)^2} \bar{N} \\ (\tilde{R}_1)_v = \frac{1}{(\bar{k}_1)^2} [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \bar{X}_v + (\bar{k}_1)_v \bar{N} \end{cases} \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{cases} (\tilde{R}_2)_u = \frac{1}{(\bar{k}_2)^2} [(\bar{k}_2)^2 - \bar{K}] \bar{X}_v + (\bar{k}_2)_v \bar{N} \\ (\tilde{R}_2)_v = -\frac{(\bar{k}_2)_v}{(\bar{k}_2)^2} \bar{N} \end{cases} \quad (3.9)$$

elde edilir. Şimdi, sırası ile  $(\tilde{R}_1)_u \wedge (\tilde{R}_1)_v$  ve  $(\tilde{R}_2)_u \wedge (\tilde{R}_2)_v$  vektörleri hesap edilirse

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_1)_u \wedge (\tilde{R}_1)_v &= -\frac{(\bar{k}_1)_u}{(\bar{k}_1)^4} \left[1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right] \bar{N} \wedge \bar{X}_v \\ &= -\frac{(\bar{k}_1)_u}{(\bar{k}_1)^2} \left[1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right] \bar{g}_{11} \bar{X}_v \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_2)_u \wedge (\tilde{R}_2)_v &= -\frac{(\bar{k}_2)_v}{(\bar{k}_2)^2} \left[1 - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right] \bar{N} \wedge \bar{X}_v \\ &= -\frac{(\bar{k}_2)_v}{(\bar{k}_2)^2} \left[1 - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right] \frac{1}{W} \bar{g}_{22} \bar{X}_u \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur. O halde buradan

$$\begin{cases} \left\| (\tilde{R}_1)_u \wedge (\tilde{R}_1)_v \right\| = \lambda \sqrt{\bar{g}_{11}} \\ \left\| (\tilde{R}_2)_u \wedge (\tilde{R}_2)_v \right\| = \mu \sqrt{\bar{g}_{22}} \end{cases} \quad (3.12)$$

elde edilir. Böylece (2. 1. 27) den  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin birim normal vektörleri

$$\tilde{N}_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \bar{X}_u \quad (3.13)$$

ve

$$\tilde{N}_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \bar{X}_v \quad (3.14)$$

olarak elde edilir.

**Teorem 3. 2 :**  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin normallerinin türevleri

$$\begin{cases} (\tilde{N}_1)_u = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \left( \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{11}} + \bar{\Gamma}_{11}^1 \right) \bar{X}_u + \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{X}_v + \bar{b}_{11} \bar{N} \right) \\ (\tilde{N}_1)_v = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \left( \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{11}} + \bar{\Gamma}_{12}^1 \right) \bar{X}_u + \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{X}_v \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

ve

$$\begin{cases} (\tilde{N}_2)_u = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \left( \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{X}_u + \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{22}} + \bar{\Gamma}_{12}^2 \right) \bar{X}_v + \bar{b}_{11} \bar{N} \right) \\ (\tilde{N}_2)_v = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \left( \bar{\Gamma}_{22}^1 \bar{X}_u + \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{22}} + \bar{\Gamma}_{22}^2 \right) \bar{X}_v + \bar{b}_{22} \bar{N} \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

dir.

İspat: (3.3) bağıntısından  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  normallerinin "u" ve "v" ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse

$$(\tilde{N}_1)_u = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \left( -\frac{1}{2\bar{g}_{11}} X_u + X_{uu} \right) \quad (3.17)$$

ve

$$(\tilde{N}_1)_v = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \left( -\frac{1}{2\bar{g}_{11}} X_u + X_{uv} \right) \quad (3.18)$$

bulunur.

Gauss denklelerinden  $X_{uu}$  ve  $X_{uv}$  nin değerleri sırasıyla (3.17) ve (3.18) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} (\tilde{N}_1)_u = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \left( \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{11}} + \bar{\Gamma}_{11}^1 \right) \bar{X}_u + \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{X}_v + \bar{b}_{11} \bar{N} \right) \\ (\tilde{N}_1)_v = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \left( \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{11}} + \bar{\Gamma}_{12}^1 \right) \bar{X}_u + \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{X}_v \right) \end{cases}$$

elde edilir.

$\tilde{M}_2$  normallerinin "u" ve "v" ye göre türevleri alınır ve gerekli düzenlemeler ile

$$(\tilde{N}_2)_u = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \left( \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{22}} \right) \bar{X}_v + \bar{X}_{vu} \right) \quad (3.19)$$

ve

$$(\tilde{N}_2)_v = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \left( \left( \frac{-1}{2\bar{g}_{22}} \right) \bar{X}_v + \bar{X}_{vv} \right) \quad (3.20)$$

bulunur. Gauss denklelerinden  $X_{uu}$  ve  $X_{uv}$  nin değerleri sırasıyla (3.19) ve (3.20) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} (\tilde{N}_2)_u = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left( \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{X}_u + \left( \frac{-1}{2g_{22}} + \bar{\Gamma}_{12}^2 \right) \bar{X}_v + \bar{b}_{11} \bar{N} \right) \\ (\tilde{N}_2)_v = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left( \bar{\Gamma}_{22}^1 \bar{X}_u + \left( \frac{-1}{2g_{22}} + \bar{\Gamma}_{22}^2 \right) \bar{X}_v + \bar{b}_{22} \bar{N} \right) \end{cases}$$

elde edilir.

**Teorem 3. 3 :**  $M \dots X = X(u, v), E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin destek fonksiyonları

$$\tilde{h}_1 = \frac{\bar{\rho} \bar{\rho}_v}{\sqrt{g_{22}}} \quad (3.21)$$

ve

$$\tilde{h}_2 = \frac{\bar{\rho} \bar{\rho}_u}{\sqrt{g_{11}}} \quad (3.22)$$

dır.

**İspat:** (2. 1. 28) bağıntısından  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin destek fonksiyonları için

$$\tilde{h}_1 = \langle \tilde{R}_1(u, v), \tilde{N}_1(u, v) \rangle \quad (3.23)$$

ve

$$\tilde{h}_2 = \langle \tilde{R}_2(u, v), \tilde{N}_2(u, v) \rangle \quad (3.24)$$

yazılır. (3. 1), (3. 2), (3. 4) ve (3. 5) eşitlikleri (3. 23) , (3. 24) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \langle \bar{X}, X_v \rangle \quad (3.25)$$

ve

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \langle \bar{X}, X_u \rangle \quad (3.26)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{cases} \bar{\rho} \bar{\rho}_u = \langle \bar{X}, \bar{X}_u \rangle \\ \bar{\rho} \bar{\rho}_v = \langle \bar{X}, \bar{X}_v \rangle \end{cases} \quad (3.27)$$

olduğundan

$$\tilde{h}_1 = \frac{\bar{\rho} \bar{\rho}_v}{\sqrt{g_{22}}}$$

ve

$$\tilde{h}_2 = \frac{\bar{\rho} \bar{\rho}_u}{\sqrt{g_{11}}}$$

elde edilir.

Teorem 3.4 :  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin birinci temel formlarının katsayıları sırasıyla

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^1 = \frac{(\bar{k}_1)^2 u}{(\bar{k}_1)^4} \\ \tilde{g}_{12}^1 = \frac{(\bar{k}_1)_u (\bar{k}_1)_v}{(\bar{k}_1)^4} = \tilde{g}_{21}^1 \\ \tilde{g}_{22}^1 = \frac{1}{(\bar{k}_1)^4} \left[ (\bar{k}_1)^2 - ((\bar{k}_1)^2 - K)^2 \bar{g}_{22} + (\bar{k}_1)_v^2 \right] \end{cases} \quad (3.28)$$

ve

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^2 = \frac{1}{(\bar{k}_2)^4} \left[ (\bar{k}_2)^2 - ((\bar{k}_2)^2 - K)^2 \bar{g}_{11} + (\bar{k}_1)_v^2 \right] \\ \tilde{g}_{12}^2 = \frac{(\bar{k}_2)_u (\bar{k}_2)_v}{(\bar{k}_2)^4} = \tilde{g}_{21}^2 \\ \tilde{g}_{22}^2 = \frac{(\bar{k}_2)^2 u}{(\bar{k}_2)^4} \end{cases} \quad (3.29)$$

dir.

İspat:  $M$  nin  $M_1$  ve  $M_2$  fokal yüzeylerinin birinci temel formlarının katsayıları için

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^1 = \langle (\tilde{R}_1)_u, (\tilde{R}_1)_u \rangle \\ \tilde{g}_{12}^1 = \langle (\tilde{R}_1)_u, (\tilde{R}_1)_v \rangle = \tilde{g}_{21}^1 \\ \tilde{g}_{22}^1 = \langle (\tilde{R}_1)_v, (\tilde{R}_1)_v \rangle \end{cases} \quad (3.30)$$

ve

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^2 = \langle (\tilde{R}_2)_u, (\tilde{R}_2)_u \rangle \\ \tilde{g}_{12}^2 = \langle (\tilde{R}_2)_u, (\tilde{R}_2)_v \rangle = \tilde{g}_{21}^2 \\ \tilde{g}_{22}^2 = \langle (\tilde{R}_2)_v, (\tilde{R}_2)_v \rangle \end{cases} \quad (3.31)$$

yazılır. Buradan (3. 8) ve (3. 9) eşitlikleri (3. 30) ve (3. 31) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^1 = \frac{(\bar{k}_2)^2 u}{(\bar{k}_1)^4} \\ \tilde{g}_{12}^1 = \frac{(\bar{k}_1)_u (\bar{k}_1)_v}{(\bar{k}_1)^4} = \tilde{g}_{21}^1 \\ \tilde{g}_{22}^1 = \left[ 1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \right] \bar{g}_{22} + \frac{(\bar{k}_2)^2 v}{(\bar{k}_1)^4} \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^2 = \left[ 1 - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right] \bar{g}_{11} + \frac{(\bar{k}_2)^2 u}{(\bar{k}_1)^4} \\ \tilde{g}_{12}^2 = \frac{(\bar{k}_1)_u (\bar{k}_1)_v}{(\bar{k}_2)^4} = \tilde{g}_{21}^2 \\ \tilde{g}_{22}^2 = \frac{(\bar{k}_2)^2 v}{(\bar{k}_1)^4} \end{cases}$$

bulur ve aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1:  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin birinci temel formları

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 = & \frac{(\bar{k}_1)_u^2}{(\bar{k}_1)^4} du^2 + 2 \frac{(\bar{k}_1)_u (\bar{k}_1)_v}{(\bar{k}_1)^4} dudv \\ & + \frac{1}{(\bar{k}_1)^4} \left[ (\bar{k}_1)^2 - \left( (\bar{k}_1)^2 - K \right)^2 \bar{g}_{22} + (\bar{k}_1)_v^2 \right] dv^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 = & \frac{1}{(\bar{k}_2)^4} \left[ (\bar{k}_2)^2 - \left( (\bar{k}_2)^2 - K \right)^2 \bar{g}_{22} \right. \\ & \left. + (\bar{k}_2)_v^2 \right] du^2 + 2 \frac{(\bar{k}_2)_u (\bar{k}_2)_v}{(\bar{k}_2)^4} dudv + \frac{(\bar{k}_2)_u^2}{(\bar{k}_2)^4} dv^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

dir.

Sonuç 3. 2:  $\bar{M}$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin parametre eğrilerinin ortogonal olması için  $\bar{M}$  nin asli eğrilik çizgileri sabit eğrilikli olmasıdır.

Teorem 3. 5:  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin ikinci temel formlarının katsayıları sırasıyla

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \bar{b}_{11} \\ \tilde{b}_{12}^1 = 0 \\ \tilde{b}_{22}^1 = \frac{(\bar{g}_{11})_v [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \bar{g}_{22}^2}{2(\bar{k}_1)^2 (\bar{g}_{11})^{3/2}} \end{cases} \quad (3.34)$$

ve

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}^2 = -\frac{(\bar{g}_{22})_u [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \bar{g}_{11}^2}{2(\bar{k}_2)^2 (\bar{g}_{22})^{3/2}} \\ \tilde{b}_{12}^2 = 0 \\ \tilde{b}_{22}^2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \bar{b}_{22} \end{cases} \quad (3.35)$$

dir.

İspat:  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin ikinci temel formlarının katsayıları için

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}^1 = \langle (\tilde{R}_1)_u, (\tilde{N}_1)_u \rangle \\ \tilde{b}_{12}^1 = \langle (\tilde{R}_1)_u, (\tilde{N}_1)_v \rangle \\ \tilde{b}_{22}^1 = \langle (\tilde{R}_1)_v, (\tilde{N}_1)_v \rangle \end{cases} \quad (3.36)$$

ve

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}^2 = \langle (\tilde{R}_2)_u, (\tilde{N}_2)_u \rangle \\ \tilde{b}_{12}^2 = \langle (\tilde{R}_2)_u, (\tilde{N}_2)_v \rangle \\ \tilde{b}_{22}^2 = \langle (\tilde{R}_2)_v, (\tilde{N}_2)_v \rangle \end{cases} \quad (3.37)$$

yazılır. (3. 8) ve (3. 9) denklemleri (3. 36) ve (3. 37) de yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \bar{b}_{11} \\ \tilde{b}_{12}^1 = 0 \\ \tilde{b}_{22}^1 = \frac{(g_{11})_v [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \tilde{g}_{22}^2}{2(\bar{k}_1)^2 (\bar{g}_{11})^{3/2}} \end{cases} \quad (3.38)$$

ve

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}^2 = -\frac{(g_{22})_u [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \tilde{g}_{11}^2}{2(\bar{k}_2)^2 (\bar{g}_{22})^{3/2}} \\ \tilde{b}_{12}^2 = 0 \\ \tilde{b}_{22}^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \bar{b}_{22} \end{cases} \quad (3.39)$$

elde edilir.

O halde buradan ikinci temel formlarını için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3. 3:  $M \dots X = X(u, v), E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin ikinci temel formu

$$\tilde{I}_1 = \left[ \frac{\bar{b}_{11}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \right] du^2 + \frac{(g_{11})_v [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \tilde{g}_{22}^2}{2(\bar{k}_1)^2 (\bar{g}_{11})^{3/2}} dv^2 \quad (3.40)$$

ve

$$\tilde{I}_2 = -\frac{(g_{22})_u [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \tilde{g}_{11}^2}{2(\bar{k}_2)^2 (\bar{g}_{22})^{3/2}} du^2 + \left[ \frac{\bar{b}_{22}}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \right] dv^2 \quad (3.41)$$

elde edilir.

Teorem 3. 6 :  $M \dots X = X(u, v), E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin Gauss eğriliği

$$\tilde{K}_1 = \frac{(\bar{k}_1)^4}{2(\bar{g}_{11})^2} \quad (3.42)$$

ve

$$\tilde{K}_2 = \frac{(\bar{k}_2)^4}{2(\bar{g}_{22})^2} \quad (3.43)$$

İspat: (2.1.43) bağıntısında

$$w_1^2 = \tilde{g}_{11}^1 \tilde{g}_{22}^1 - (\tilde{g}_{12}^1)^2 \quad (3.44)$$

ifadesini (3.28) değerleri yerine yazılarak

$$w_1^2 = \frac{1}{(\bar{k}_1)^8} \left[ (\bar{k}_1)_u^2 \right] ((\bar{k}_1)^2 - \bar{K})^2 \bar{g}_{22} \quad (3.45)$$

bulunur. Aynı şekilde (2.1.43) bağıntısında (3.28) değerleri yazılarak

$$\tilde{b}_{11}^1 \tilde{b}_{22}^1 - (\tilde{b}_{12}^1)^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \bar{b}_{11} \frac{(g_{11})_v [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \tilde{g}_{22}^2}{2(\bar{k}_1)^2 (\bar{g}_{11})^{3/2}} \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.45) ve (3.51) bu değerler (2.1.43) bağıntısında yerine yazılarak gerekli işlemler yapılarak

$$\widetilde{K}_1 = \frac{(\bar{k}_1)^4}{2(\bar{g}_{11})^2}$$

dir.

$\tilde{M}_2$  fokal yüzeyinin Gauss eğriliği için (2.1.43) bağıntısında

$$w_2^2 = \tilde{g}_{11}^2 \tilde{g}_{22}^2 - (\tilde{g}_{12}^2)^2 \quad (3.47)$$

ifadesinde (3.29) değerler yerilerine yazılırsa

$$w_2^2 = \frac{1}{(\bar{k}_2)^8} \left[ (\bar{k}_2)_u^2 \right] ((\bar{k}_2)^2 - \bar{K})^2 \bar{g}_{11} \quad (3.48)$$

ve

$$\tilde{b}_{11}^2 \tilde{b}_{22}^2 - (\tilde{b}_{12}^2)^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \bar{b}_{22} \frac{(g_{22})_u [(\bar{k}_2)^2 - \bar{K}] \tilde{g}_{22}^2}{2(\bar{k}_1)^2 (\bar{g}_{11})^{3/2}} \quad (3.49)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.48) ve (3.49) eşitlikleri (2.1.43) bağıntısında yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\widetilde{K}_2 = \frac{(\bar{k}_2)^4}{2(\bar{g}_{22})^2}$$

dir.

**Teorem 3.7 :**  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$\widetilde{H}_1 = \frac{(\bar{k}_1)^4}{2\sqrt{\bar{g}_{11}}(\bar{b}_{11})^2} [2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v] \quad (3.50)$$

ve



$$\widetilde{H}_2 = \frac{(\bar{k}_2)^4}{2\sqrt{\bar{g}_{22}(\bar{b}_{22})^2}} [2(\bar{b}_{22})^3 + (\bar{g}_{22})_u] \quad (3.51)$$

dir.

İspat: (2.1.46) bağıntısından  $\widetilde{M}_1$  ve  $\widetilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$\widetilde{H}_1 = \frac{\bar{b}_{11}\bar{g}_{22}^1 - 2\bar{b}_{12}^1\bar{g}_{12}^1 + \bar{g}_{11}^1\bar{b}_{11}^1}{2(\bar{g}_{11}^1\bar{g}_{22}^1 - (\bar{g}_{12}^1)^2)} \quad (3.52)$$

ve

$$\widetilde{H}_2 = \frac{\bar{b}_{11}^2\bar{g}_{22}^2 - 2\bar{b}_{12}^2\bar{g}_{12}^2 + \bar{g}_{11}^2\bar{b}_{11}^2}{2(\bar{g}_{11}^2\bar{g}_{22}^2 - (\bar{g}_{12}^2)^2)} \quad (3.53)$$

dir. (3.28) ile (3.34) ve (3.29) ile (3.35) eşitlikleri sırasıyla (3.52) ve (3.53) eşitliklerinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1 &= \frac{\bar{b}_{11}^1\bar{g}_{22}^1 + \bar{g}_{11}^1\bar{b}_{11}^1}{2(\bar{g}_{11}^1\bar{g}_{22}^1 - (\bar{g}_{12}^1)^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \bar{b}_{11} \frac{1}{(\bar{k}_1)^4} \left( \left[ 1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \right] \bar{g}_{22} + \frac{(\bar{k}_2)^2 v}{(\bar{k}_1)^4} \right) + \frac{(\bar{k}_2)^2 u}{(\bar{k}_1)^4} \left[ 1 - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right] \bar{g}_{11} + \frac{(\bar{k}_2)^2 u}{(\bar{k}_1)^4}}{2 \frac{1}{(\bar{k}_1)^8} [((\bar{k}_1)^2 u (\bar{k}_1)^2 - \bar{K})^2 \bar{g}_{22}]}]} \\ &= \frac{(\bar{k}_1)^4}{2\sqrt{\bar{g}_{11}(\bar{b}_{11})^2}} [2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_2 &= \frac{\bar{b}_{11}^2\bar{g}_{22}^2 + \bar{g}_{11}^2\bar{b}_{11}^2}{2(\bar{g}_{11}^2\bar{g}_{22}^2 - (\bar{g}_{12}^2)^2)} \\ &= \frac{\frac{(g_{22})_u [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \bar{g}_{11}^2 (\bar{k}_2)^2 u}{2(\bar{k}_2)^2 (\bar{g}_{22})^{3/2}} \frac{1}{(\bar{k}_2)^4} \frac{1}{(\bar{k}_2)^4} [(\bar{k}_2)^2 - ((\bar{k}_2)^2 - K)^2 \bar{g}_{11} + (\bar{k}_1)^2 v] \frac{(g_{22})_u [(\bar{k}_1)^2 - \bar{K}] \bar{g}_{11}^2}{2(\bar{k}_2)^2 (\bar{g}_{22})^{3/2}}}{2 \left( \frac{1}{(\bar{k}_2)^4} [(\bar{k}_2)^2 - ((\bar{k}_2)^2 - K)^2 \bar{g}_{11} + (\bar{k}_1)^2 v] \frac{(\bar{k}_2)^2 u}{(\bar{k}_2)^4} - \left( \frac{(\bar{k}_2) u (\bar{k}_2) v}{(\bar{k}_2)^4} \right)^2 \right)} \\ &= \frac{(\bar{k}_2)^4}{2\sqrt{\bar{g}_{22}(\bar{b}_{22})^2}} [2(\bar{b}_{22})^3 + (\bar{g}_{22})_u] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4 :  $M \dots X = X(u, v)$ ,  $E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $M$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun . O halde  $M$  nin  $\widetilde{M}_1$  ve  $\widetilde{M}_2$  fokal yüzeylerinin asli eğrilikleri sırasıyla  $\tilde{k}_{1,2}^1$  ve  $\tilde{k}_{1,2}^2$  olmak üzere

$$\tilde{k}_{1,2}^1 = \widetilde{K}_1 ([2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v] \mp \sqrt{([2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v])^2 - \frac{1}{(\bar{K}_1)^2}}) \quad (3.54)$$

ve

$$\tilde{k}_{1,2}^2 = \widetilde{K}_2([2(\bar{b}_{22})^3 + (\bar{g}_{22})_u] \mp \sqrt{([2(\bar{b}_{22})^3 + (\bar{g}_{22})_u])^2 - \frac{1}{(\widetilde{K}_2)^2}}) \quad (3.55)$$

dır.

İspat: (2. 1. 46) dan

$$\tilde{k}_{1,2}^1 = \widetilde{H}_1 \mp \sqrt{(\widetilde{H}_1)^2 - \widetilde{K}_1} \quad (3.56)$$

için (3. 42) , (3. 50) bağıntıları yerine yazılarak

$$\tilde{k}_{1,2}^1 = \frac{(\bar{k}_1)^4}{2\sqrt{\bar{g}_{11}(\bar{b}_{11})^2}} [2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v] + \sqrt{\left(\frac{(\bar{k}_1)^4}{2\sqrt{\bar{g}_{11}(\bar{b}_{11})^2}} [2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v]\right)^2 - \frac{(\bar{k}_1)^4}{2(\bar{g}_{11})^2}} \quad (3.57)$$

bulunur. (3. 57) ifadesinde (3. 42) eşitliği yerine yazılarak

$$\tilde{k}_{1,2}^1 = \widetilde{K}_1([2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v] \mp \sqrt{([2(\bar{b}_{11})^3 + (\bar{g}_{11})_v])^2 - \frac{1}{(\widetilde{K}_1)^2}})$$

elde edilir. Benzer şekilde (2. 1. 46) dan  $\tilde{k}_{1,2}^2 = \widetilde{H}_2 \mp \sqrt{(\widetilde{H}_2)^2 - \widetilde{K}_2}$  için

(3. 43) , (3. 51) bağıntıları yerine yazılarak

$$\tilde{k}_{1,2}^2 = \widetilde{K}_2([2(\bar{b}_{22})^3 + (\bar{g}_{22})_u] \mp \sqrt{([2(\bar{b}_{22})^3 + (\bar{g}_{22})_u])^2 - \frac{1}{(\widetilde{K}_2)^2}})$$

elde edilir.

*Örnek 3. 1* :  $M \dots X = X(u, v) = (2 \cos v, 2 \sin v, u), E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $\bar{M}$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun  $M$  nin  $\bar{M}_1$  ve  $\bar{M}_2$  fokalleri için (2. 3. 5) ifadesinden

$$\bar{X}(u, v) = \frac{1}{u^2+4} (2 \cos v, 2 \sin v, u) \quad (3.59)$$

(3. 70) ifadesi "u" ve "v" parametresine bağlı olarak türev alınırsa

$$(\bar{X})_u = \frac{1}{(u^2+4)^2} (-4u \cos v, -4u \sin v, 4 - u^2) \quad (3.60)$$

ve

$$(\bar{X})_v = \frac{1}{u^2+4} (-2 \sin v, 2 \cos v, 0) \quad (3.61)$$

bulunur. (3.60) ,(3.72) ifadelerin vektörel çarpılır ve normu alınırsa

$$(\bar{X})_u \times (\bar{X})_v = \frac{1}{(u^2+4)^3} (-2(4 - u^2) \cos v, -2(4 - u^2) \sin v, -8u) \quad (3.62)$$

ve

$$\|(\bar{X})_u \times (\bar{X})_v\| = \frac{2\sqrt{4+15u^2}}{(u^2+4)^3} \quad (3.63)$$

elde edilir. (3. 62) ve (3. 63) değerleri (2. 1. 27) de yerine yazılırsa

$$\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{4+15u^2}} ((u^2 - 4) \cos v, (u^2 - 4) \sin v, -4u) \quad (3.64)$$

bulunur. Buradan (3. 28) dan

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11}^1 = \frac{1}{(u^2+4)^2} \\ \tilde{g}_{12}^1 = 0 \\ \tilde{g}_{22}^1 = \frac{4}{(u^2+4)^2} \end{cases} \quad (3. 65)$$

olur. Bu ifadeler (3. 44) de yerine yazılırsa

$$w_1^2 = \frac{4}{(u^2+4)^4} \quad (3. 66)$$

dır. (3. 64) "u" ve "v" parametresine bağlı olarak türev alınırsa

$$\begin{cases} (\bar{N})_u = \frac{u}{(4+15u^2)^{3/2}} ((68 + 15u^2)u \cos v, (68 + 15u^2)u \sin v, -16) \\ (\bar{N})_v = \frac{1}{\sqrt{4+15u^2}} (-(68 + 15u^2)u \sin v, (68 + 15u^2)u \cos v, 0) \end{cases} \quad (3. 67)$$

dır. (3. 60) ve (3. 61) ifadeleri aşağıdaki ifadelerde yerlerine yazılarak

$$\begin{cases} \bar{b}_{11} = -\langle \bar{X}_u, \bar{N}_u \rangle = \frac{4}{(u^2+4)\sqrt{4+15u^2}} \\ \bar{b}_{12} = -\langle \bar{X}_u, \bar{N}_v \rangle = 0 \\ \bar{b}_{22} = -\langle \bar{X}_v, \bar{N}_v \rangle = \frac{2(4-u^2)}{(u^2+4)\sqrt{4+15u^2}} \end{cases} \quad (3. 68)$$

bulunur. (3. 65) ve (3. 68) değerleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{b}_{11}}{\bar{g}_{11}} = \frac{4(u^2+4)}{\sqrt{4+15u^2}} \quad (3. 69)$$

ve

$$\bar{k}_2 = \frac{\bar{b}_{11}}{\bar{g}_{11}} = \frac{16-u^4}{2\sqrt{4+15u^2}} \quad (3. 70)$$

dır. Bulduğumuz (3. 59), (3. 64), (3. 69), (3. 70) ifadeleri (3.1) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılarak

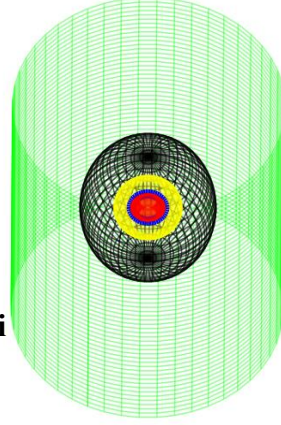
$$\tilde{R}_1(u, v) = \left( \frac{1}{4} \cos v, \frac{1}{4} \cos v, 0 \right)$$

ve

$$\tilde{R}_2(u, v) = \frac{1}{u^2+4} \left( \cos v, \sin v, \frac{u^3}{u^2-4} \right)$$

bulunur.

- $M : E^3$  de regüler yüzey
- $S_1^2 : E^3$  de birim küre
- $\bar{M} : M$  nin invers yüzeyi
- $\tilde{M}^1 : \bar{M}$  nin birinci fokali
- $\tilde{M}^2 : \bar{M}$  nin ikinci fokali



Şekil 3. 1: İnverslerinin Fokal yüzeyleri

Örnek 3. 2 :  $M \dots X = X(u, v) = (\cosh u \sin v, \sinh v, \cosh u \cos v), E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $\bar{M}$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokali için (2. 3. 5) ifadesinden

$$\bar{M}: \bar{X}(u, v) = \frac{1}{2 \cosh^2 u - 1} (\cosh u \sin v, \sinh v, \cosh u \cos v) \quad (3. 71)$$

bulunur. (2. 2. 6) ifadesinden de

$$\bar{N} = 2 \frac{-1}{(2 \cosh^2 u + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} (-2 \cosh^2 v + 3) \cosh u \sin v \\ (-2 \cosh^2 v + 3) \sinh u \\ -(2 \cosh^2 v + 1) \cosh u \cos v \end{pmatrix} \quad (3. 72)$$

elde edilir. (3. 71) ve (3. 72) ifadeleri gerekli işlemler yapılarak (2. 2. 7) ifadesinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\bar{k}_1 = \frac{2 \cosh^2 u + 1}{\sqrt{2 \cosh^2 v - 1}} \quad (3. 73)$$

$$\bar{k}_2 = \frac{-2 \cosh^2 u + 3}{\sqrt{2 \cosh^2 u - 1}} \quad (3. 74)$$

elde edilir. (3. 71), (3. 72), (3. 74) ve (3. 75) değerler sırasıyla (3. 1) de yerine yazılırsa

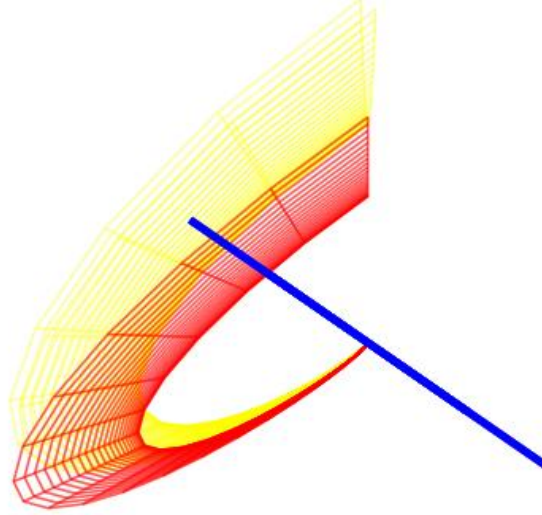
$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(u, v) &= \bar{M} + \frac{1}{\bar{k}_1} \bar{N}(u, v) \\ &= \frac{1}{(2 \cosh^2 u + 1)} \begin{pmatrix} 2 \cosh u \sin u \\ 0 \\ 2 \cosh u \cos v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3. 75)$$

ve

$$\tilde{R}_2(u, v) = \bar{M} + \frac{1}{\bar{k}_2} \bar{N}(u, v)$$

$$= \frac{2}{(3-2 \cosh^2 u)} \begin{pmatrix} 0, \\ -2 \sinh u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

elde edilir. Şimdi bu yüzeyler (3.75) ve (3.76) ifadelerine göre çizilerek aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 3. 2 : İnversonun Fokal yüzeyleri

Örnek 3. 3 :  $M \dots X = X(u, v) = (f(u) \sin v, u, f(u) \cos v)$  (3.77)

$E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M \dots X = X(u, v)$  de  $\bar{M}$  nin bir  $S^2$  birim küresine göre inversi olsun  $M$  nin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokalleri için

$$\bar{M}: \bar{X}(u, v) = \frac{1}{(u^2 + f^2)} (f(u) \sin v, u, f(u) \cos v) \quad (3.78)$$

bulunur. (3.78) ifadesi için "u" ve "v" parametresine bağlı olarak türev alınırsa

$$X_u = (f_u \sin v, 1, f_u \cos v) \quad (3.79)$$

$$X_v = (f \cos v, 0, -f \sin v) \quad (3.80)$$

elde edilir. Buradan (3.79) ve (3.80) ifadeleri vektörel olarak çarpılır ve normu alınır

$$X_u \wedge X_v = f(-\sin v, f_u, -\cos v) \quad (3.81)$$

ve

$$\|X_u \wedge X_v\| = f \sqrt{1 + f_u^2} \quad (3.82)$$

elde edilir.

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2}} (-\sin v, f_u, -\cos v) \quad (3.83)$$

Eğer (2.1.36) bağıntısında (3.80) ve (3.81) ifadelerine (2.1.36)

bağıntısında yerine yazılarak

$$\begin{cases} g_{11} = 1 + f_u^2 \\ g_{12} = 0 \\ g_{22} = f^2 \end{cases} \quad (3.84)$$

bulunur. (3.78) ve (3.79) ifadeleri "u" ve "v" parametrelerine bağlı olarak türev alınır

$$\begin{cases} X_{uu} = (f_{uu} \sin v, 0, f_{uu} \cos v) \\ X_{uv} = (f_u \cos v, 1, -f_u \sin v) \\ X_{vv} = -f(\sin v, 0, \cos v) \end{cases} \quad (3.85)$$

elde edilir. (3.85) ifadesi (2.1.37) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılarak düzenlenirse

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{-f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2}} \\ b_{12} = 0 \\ b_{22} = \frac{f}{\sqrt{1+f_u^2}} \end{cases} \quad (3.86)$$

bulunur. (2.1.37) ifadesinde (3.84) ve (3.86) değerleri yerlerine yazılarak

$$k_1 = -\frac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.87)$$

$$k_2 = \frac{1}{f\sqrt{1+f_u^2}} \quad (3.88)$$

elde edilir. (2.1.28) ifadesinde (3.78) ve (3.83) yerine yazılarak gerekli işlemler yapılarak

$$h = \frac{uf_u - f}{\sqrt{1+f_u^2}} \quad (3.89)$$

bulunur. (2.1.60) ifadesinde (3.78) yerine yazılarak

$$\rho^2 = u^2 + f^2 \quad (3.90)$$

dir. Burada (3.78), (3.83), (3.89), (3.90) ifadeleri (2.3.5) yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa  $\bar{N} = 2 \frac{h}{\rho^2} X - N$  için

$$\bar{N} = \frac{1}{(u^2+f^2)\sqrt{1+f_u^2}} \begin{pmatrix} [2uf + u^2 + f^2] \sin v, \\ 2u^2f - (u^2 + f^2)f_u, \\ [2uf + u^2 + f^2] \cos v \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

elde edilir. (2.2.7) ifadesinde (3.77), (3.88) (3.90), (3.91) ifadeleri yerine yazılarak sırasıyla

$$\bar{k}_1 = - \left( \frac{2(uf_u - f)(1 + f_u^2) - (u^2 + f^2)f_{uu}}{(1 + f_u^2)^{3/2}} \right) \quad (3.92)$$

$$\bar{k}_2 = - \frac{(2uff_u + u^2 - f^2)}{f\sqrt{1 + f_u^2}} \quad (3.93)$$

elde edilir. Buradan da bulunan (3.78), (3.98), (3.99) ve (3.100) değerleri (3.1) denkleminde yazılarak sırasıyla

$$\tilde{R}_1(u, v) = \frac{1}{[2(uf_u - f)(1 + f_u^2) - (u^2 + f^2)f_{uu}]} \begin{pmatrix} [-ff_{uu} - (1 + f_u^2)] \sin v, \\ ((1 + f_u^2)f_u - uf_{uu}), \\ [-ff_{uu} - (1 + f_u^2)] \cos v \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

ve

$$\tilde{R}_2(u, v) = \frac{1}{(2uff_u + u^2 - f^2)} \begin{pmatrix} 0, \\ u + ff_u, \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

elde edilir.

Özel olarak  $f(u) = u^2$  alınır

$$M \dots X = X(u, v) = (u^2 \sin v, u, u^2 \cos v) \quad (3.103)$$

ve

$$\bar{M} \dots \bar{X}(u, v) = \frac{1}{u^2(1 + u^2)} (u^2 \sin v, u, u^2 \cos v,) \quad (3.104)$$

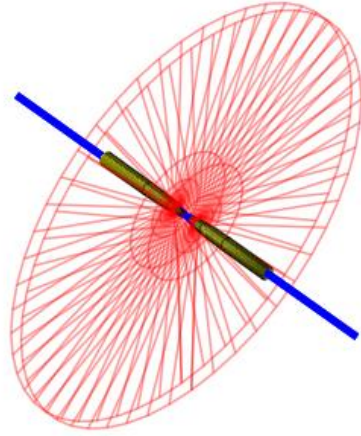
elde edilir. Bu durumda  $\bar{M}$  invers yüzeyinin  $\tilde{M}_1$  ve  $\tilde{M}_2$  fokallerinin denklemleri için (3.103) ifadesi (2.3.5), (2.2.6), (2.2.7) denklemlerinde yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılarak, sırasıyla

$$\tilde{R}_1(u, v) = \frac{1}{[2u^2(1 + 3u^2)]} \begin{pmatrix} (-6u^2 - 1) \sin v, \\ (8u^3), \\ (-6u^2 - 1) \cos v \end{pmatrix}$$

ve

$$\tilde{R}_2(u, v) = \frac{1}{(u^3 + u)} \begin{pmatrix} 0, \\ 1 + 2u^2, \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.



Şekil 3. 3 : İnversonun Fokal yüzeyleri



#### 4. SONUÇLAR

Sonuç olarak fokal yüzeylerinin , sırasıyla birim normal vektörünü, destek fonksiyonu, birinci, ikinci temel formlarının katsayılarını ile bu katsayılara karşılık gelen temel formleri, asli eğrilikleri, Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikleri gibi bazı karakteristik özelliklerini diferensiyel geometrinin yöntemlerini kullanarak elde edilmiştir. Yani bu özellikler invers yüzeylerin karakteristik özellikleri bağlı olarak bulunmuştur ve  $E^3$  de verilen bir yüzeyin inverslerinin fokal yüzeylerin denklemleri elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR

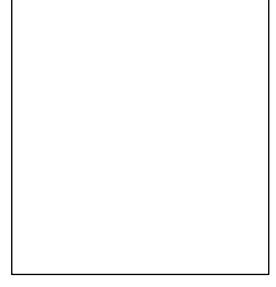
- Abbena, E., Salamon, S. and Gray A. 2017, Modern Differential Geometry Of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/Crc, 3. Ed, 267-719, New York.
- Alexiou, D., Tsagas, D., and Frangakis, C. 2001, Conditions for Normal The Rectilinear Congruences whose Focal Surfaces are Minimal, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 77, Issue 3, 335-345.
- Amur, K, 1962, Congruence Geometry in Ordinary Three Dimensional Space and İn a Riemannian Space, PhD Thesis, Kartarnak University,1-125.
- Behari, R. 1934, A Significiant Invariant in the Theory of Rectilinear Congruences, Journal of Indian Mathematical Society, Vol.1,135-142.
- Bellavitis, G., 1836, Teoria della figure inverse, e loro uso nella geometria elementare, Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto,6, 126-141.
- Blair, D. E. 2000, Inversion Geometry and Conformal Mapping, American Mathematical Society, 1-118, Rhode Island
- Blaschke, W., 1945. Differential Geometrie and Geometrischke Grundlagenven Einsteins Relativitasttheorie.D over, New York.
- Gay, K. M. 1978, Inversion Geometry and Its Applcations on the Inversive Plane, MSc Thesis, Southeastern Louisiana University, Hammond- Louisiana, 1- 61.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1980. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No. 2, 170-450, Malatya.
- Hagen, H., Hahmann, S., Schreiber, T., Yasuo, N., Wardenweber, B., and Hollemann, P., 1992a, Surface Interrogation Algorithms, IEEE Computer Graphics and Applications, 5, 53- 60.
- Hagen, H., Müller, H., and Nielson, G. M., 1993b, Focus on Scientific Visualization, Springer, 393, Berlin.
- Hagen, H., Hahmann, S., Schreiber, T,1995c, Visiualization and Computation of curvature behaviour of free curves and surfaces, Computer-Aided Design,27,5, 545—552.

- Hahmann, S., 1999 , Visualization Techniques for surface analysis, Data visualization techniques, 49-74.
- Joo, H. K., Yazaki, T., Takezawa, M., and Maekawa, T., 2014, Differential Geometry Properties of Lines of Curvature of Parametric Surfaces and Their Visualization, Graphical Models, 20, 224-238.
- Maekawa, T., 1999, An Overview of Offset Curves and Surfaces, Computer-Aided Design, 165-173.
- Monge, G. 1807, Applications de L'Analyse à la Géométrie, A L'usage de J'Ecole Imperiale Polytechnique, Paris, 123-175ö
- Nirmala, K. 1963, Congruenc Geometry in Riemannanian Space, Phd Thesis, Kartarnak University,1-189.
- Ogura, K. ,1918, On the Differential Geometry of a Line Congruence, Science Reports, Tohoku Imp. Univ., 5.
- Papadoulou, D. 2003, On Special Classes of Rectilinear Congruences, Results in Mathematics, 43, 318-330.
- Patrikalakis, N. M., and Maekawa, T., 2009, Shape Interrogation for Computer-Aided Design and Manufacturing, Springer, 293- 353, London.
- Plücker, J. 1834, Analytisch-geometrie Aphorismen, J. Reine Angew. Math., 11, 219-225.
- Rosenfeld, B. A. 1988, A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space, Springer – Verlag, New York, 114-145.
- Röthe, R. 1912, Über die Inversion einer Fläche und die Konforme Abbildung zeweier Flächen aufeinander mit Erhaltung der Krümmungslinien, Mathematische Annalen,72 (1), 57.
- Sarıoğlugil, A. 1994, Hiperinvers Yüzeylelerin Bazı Karakteristik Özellikleri, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniveritesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 1-58.
- Şemin, F., 1987, Diferensiyel Geometri II, Marmara Üniversitesi Yayınları, No: 441,1-557, İstanbul.
- Taliaferro, T. H. 1901, The Focal Surfaces of the Congruence Formed by the Tangents to the Lines of Curvature of a Given Surface, Phd Thesis, John Hopkins University,1-24.

Tul, S., Bayar, F., and Sarıoğlugil, A., 2021, On Inverse of a Regular Surface with respect to the Unit Sphere in  $E^3$ , Journal of Science and Art.

Weatherburn, C. E, 1955, Differential Geometry of Three Dimension, Vol. I, Cambridge University Press, 1-279, London.

## ÖZ GEÇMİŞ



Samsun Yeşilkent Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'nden 2015 yılında Matematik bölümünden mezun oldu. 2019 yılından bu yana Ağrı'nın Patnos ilçesine atanması gerçekleşmiş olup burada Lise Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır ve orta seviyede İngilizce bilmektedir.

### İletişim Bilgileri

E mail : fsmehmet55@gmail.com

ORCID ID: 0000-0002-2370-1067