

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



FOKAL YÜZEYLERİN İNVERSLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Beyzanur VİDİNLİ

Danışman

Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Beyzanur VİDİNLİ tarafından, Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL danışmanlığında hazırlanan “Fokal Yüzeylerin İnversonları” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 26.2.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

| | Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı | İmza | Sonuç |
|--------------------------|--|------|--------------------------|
| Başkan | Prof. Dr. Ayhan TUTAR Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı | | <input type="checkbox"/> |
| | | | Kabul |
| | | | <input type="checkbox"/> |
| | | | Ret |
| Üye (Danışman) | Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı | | <input type="checkbox"/> |
| | | | Kabul |
| | | | <input type="checkbox"/> |
| | | | Ret |
| Üye | Dr. Öğr. Üyesi Feray BAYAR Samsun Üniversitesi Temel Bilimler Anabilim Dalı | | <input type="checkbox"/> |
| | | | Kabul |
| | | | <input type="checkbox"/> |
| | | | Ret |

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

.../.../...

Prof. Dr. Ali BOLAT

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

.../.../2021

Beyzanur VIDİNLİ

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : Fokal Yüzeyleerin İnvर्सleri

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 31.12.2020 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 15

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

... / ... / 2021

Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

ÖZET

FOKAL YÜZEYLERİN İNVERSLERİ

Beyzanur VİDİNLİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Şubat / 2021

Danışman: Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, E^3 de verilen bir yüzeyin fokal yüzeylerinin birim küreye göre invers yüzeylerini tanımlamak için diferansiyel geometri, fokal ve invers yüzeylerle ilgili tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bir yüzeyin fokal yüzeylerinin invers yüzeyleri araştırılmıştır ve bazı temel karakteristik özellikleri fokal yüzeylere bağlı ifade edilmiştir ve konuya ilişkin örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde, tezle ilgili sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Fokal yüzeyler, İncers yüzeyler, Diferansiyel geometri

ABSTRACT

INVERSIONS OF FOCAL SURFACES

Beyzanur VİDİNLİ

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, February / 2021

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

This master thesis consists of four parts. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, definitions related to differential geometry, focal and inverse surfaces are given in order to define the inverse surfaces of the focal surfaces of a surface given in E^3 with respect to the unit sphere. In the third chapter, the inverse surfaces of the focal surfaces of a surface were investigated and some basic characteristics were expressed in relation to the focal surfaces. Finally, examples related to the subject are given. In fourth chapter, results and suggestions related to the thesis are given.

Keywords: Focal surfaces, Inverse surfaces, Differential geometry

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Akademik eğitim sürecimin bir üst noktası olan yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL'e teşekkürü bir borç bilirim.

Beni bugünlere getirmek için hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Beyzanur VİDİNLİ

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|-----------|
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ | 2 |
| 2.1. Diferansiyel Geometriye Ait Temel Kavramlar..... | 2 |
| 2.2. E^3 Öklid Uzayında Fokal Yüzeyler | 21 |
| 2.3. E^3 Öklid Uzayında İnvrs Yüzeyler | 29 |
| 3. FOKAL YÜZEYLERİN İNVERSLERİNİN GEOMETRİSİ | 34 |
| 4. SONUÇ..... | 71 |
| KAYNAKLAR | 72 |
| ÖZ GEÇMİŞ | 75 |

SİMGELER VE KISALTMALAR

| | | |
|--------------------------|---|--|
| α | : | Alfa |
| β | : | Beta |
| τ | : | To |
| φ | : | Fi |
| ξ | : | Ksi |
| ψ | : | Psi |
| ρ | : | Ro |
| χ | : | Ki |
| M | : | E^3 de bir regüler yüzey |
| M_σ | : | M yüzeyinin σ . yıncı fokal yüzeyi ($\sigma = 1,2$) |
| N^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin birim normal vektörü ($\sigma = 1,2$) |
| g_{ij}^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları |
| b_{ij}^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları |
| n_{ij}^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin üçüncü temel formunun katsayıları |
| h^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin destek fonksiyonu |
| K^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin Gauss eğriliği |
| H^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin ortalama eğriliği |
| k_i^σ | : | M_σ fokal yüzeyinin i . yinci asli eğriliği |
| $(\Gamma_{ij}^k)^\sigma$ | : | M_σ fokal yüzeyinin ikinci tipten Christoffel sembolleri |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| Şekil 2.1.1. E^n 'de bir eğri..... | 4 |
| Şekil 2.1.2. C uzay eğrisinin oskütör, normal ve rektifyan düzlemleri..... | 6 |
| Şekil 2.1.3. E^n de bir eğri-hiperyüzey çifti..... | 8 |
| Şekil 2.1.4. Yüzey üzerinde parametre eğrileri..... | 10 |
| Şekil 2.1.5. Gauss dönüşümü..... | 13 |
| Şekil 2.1.6. Yüzey üzerinde Darboux çatısı..... | 19 |
| Şekil 2.2.1. Kongurans yüzeyi..... | 22 |
| Şekil 2.2.2. Genelleştirilmiş fokal yüzeyi..... | 23 |
| Şekil 2.3.1. $k \in \mathbb{R}^+$ için inversiyon merkezine göre invers noktaların konumu..... | 30 |
| Şekil 2.3.2. $k \in \mathbb{R}^-$ için inversiyon merkezine göre invers noktaların konumu..... | 30 |
| Şekil 2.3.3. $k \in \mathbb{R}^+$ için çembere göre invers noktaların konumu..... | 31 |
| Şekil 2.3.4. $k \in \mathbb{R}^-$ için çembere göre invers noktaların konumu..... | 31 |
| Şekil 2.3.5. Küresel inversiyon..... | 33 |
| Şekil 2.3.6. Bir yüzeyin birim küreye göre inversi..... | 34 |
| Şekil 3.1. M regüler yüzeyi ve fokal yüzeyleri..... | 61 |
| Şekil 3.2. M_1 ve M_2 fokal yüzeyleri ve invers yüzeyleri..... | 62 |
| Şekil 3.3. M regüler yüzeyi ve fokal yüzeyleri | 65 |
| Şekil 3.4. M_1 ve M_2 fokal yüzeyleri ve invers yüzeyleri | 66 |
| Şekil 3.5. M regüler yüzeyi ve fokal yüzeyleri | 69 |
| Şekil 3.6. M_1 ve M_2 fokal yüzeyleri ve invers yüzeyleri..... | 70 |

1.GİRİŞ

Bu bölüme geometri tarihine kısaca bir göz atarak başlayalım. Geometri kelimesi etimolojik açıdan eski Yunanca da “yer” ve “ölçüm” anlamlarına gelen “geo” ile “metron” kelimelerinden türetilmiştir. O halde kökleri antik çağa uzanan geometri matematiğin, içinde yaşanan fiziksel evrenin daha iyi kavranılmasına ve yorumlanmasına olanak sağlamak amacıyla geometrik nesnelerin fiziksel özelliklerini ve nesnelere arasındaki ilişkileri inceleyen bir alt dalıdır. Geometride asıl büyük gelişmeler 18. ve 19. yüzyıllarda yaşanmıştır. Bu dönemde uzayda eğri ve yüzeylerin geometrik özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalardan diferansiyel geometri doğmuştur. Diferansiyel geometri 19. yüzyılın başlarında G. Monge(1746-1818) ve C. F. Gauss(1777-1855) tarafından kurulmuştur.

19. yüzyılda G. F. B. Riemann(1826-1866), E. B. Christoffel(1829-1900) ve G. R. Curbastro(1853-1925) gibi önemli matematikçiler önemli katkılar yapmışlardır. 19. yüzyılın sonunda yapılan çalışmalar J. G. Darboux(1842-1917) ve L. Bianchi (1856-1928) tarafından toplandı ve sistemize edildi. Bu dönemde yapılan çalışmalar neticesinde yeni geometriler doğmuş ve diğer bilim dallarındaki gelişmelere de öncülük etmiştir(Wu, 2016). O halde geometrinin bir alt dalı olarak ortaya çıkan diferansiyel geometri ise, diferansiyellenebilir dönüşümler altında geometrik nesnelerin özelliklerini inceler.

Tezimize “Fokal Yüzeylerin İnversleri” isminin verilmesi tesadüf değildir. Çünkü hem fokal hem de inversiyon geometrinin her ikisi de, başta matematik olmak üzere diğer disiplinler arası bilim dalları ile imalat sanayinde yaygın bir kullanıma sahiptiler. Ayrıca kökleri M.S. 3000 yıllarında olan bir fokal geometri ile başlangıcı 18. yüzyıla dayanan inversiyon teorisini aynı çatı altında buluşturma fikri, sonuçları itibarı ile beklentilerin test edilmesi açısından ilginç bir deneyim olacaktır. Bu tespiti yaptıktan sonra bu tezin amacı, ilk olarak üç boyutlu Öklid uzayı E^3 de verilen bir yüzeyin fokal yüzeylerinin bir birim küreye göre invers yüzeylerini tanımlamak ve denklemlerini elde etmektir.

İkinci olarak, diferansiyel geometrinin yöntemlerini kullanarak invers yüzeylerinin bazı karakteristik özelliklerini fokal yüzeylerinin karakteristik özelliklerine bağlı olarak etmektir. Son olarak konuya ilişkin örnekler vererek grafiklerini maple yazılım programı ile çizmektir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde çalışmamız boyunca diferansiyel geometrinin yöntemlerini kullandığımızdan, hem diferansiyel geometriye hem de tezimizin konusu gereği fokal ve invers yüzeylerle ilgili kavramlara yer vereceğiz.

2.1. Diferansiyel Geometriye Ait Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 : $A \neq \emptyset$ ve V bir K cismi üzerinde $n -$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V \quad (2.1.1)$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir “afin uzay” denir(Hacısalıhoğlu, 1982).

$$(A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(A2) $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2 : V reel vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun.

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A \text{ için}$$

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

vektör sistemi V reel vektör uzayının bir bazı ise

$$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (2.1.2)$$

kümesine A afin uzayında başlangıç noktası P_0 olan bir “afin çatı” denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.1.3 : $n -$ boyutlu V reel iç çarpım uzayı ile birleşen afin uzaya “Öklid uzayı” denir ve E^n ile gösterilir(Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.1.4 : $n -$ boyutlu V reel iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı E^n olsun. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in E^n$ için

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

vektör sistemi V reel iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise

$$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (2.1.3)$$

kümesine, E^n Öklid uzayında başlangıç noktası P_0 olan bir “Öklid çatısı” denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.1.5 : $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} \quad (2.1.4)$$

limiti varsa bu limit değerine f 'nin $a \in E^n$ noktasındaki türevi denir. Bu durumda f 'ye $a \in E^n$ 'de "türevlenebilirdir" veya "diferansiyellenebilirdir" denir.

$a \in E^n$ de diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$$C(a, \mathbb{R}) = \{f \mid f: E^n \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ } a \in E^n \text{ de diferansiyellenebilir}\}$$

ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1982).

Ayrıca $\forall a \in E^n$ için $f \in C(a, \mathbb{R})$ ise diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C(E^n, \mathbb{R})$ şeklinde ifade edilir. Eğer f 'nin k . yuncı mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler " f ye C^k sınıfından diferansiyellenebilir fonksiyon" adı verilir ve bu fonksiyonların kümesi $C^k(E^n, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 : $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $V_P \in T_{E^3}(P)$ verilsin.

Bu durumda $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in E^n$ ve $V_P = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$V_P(f) = \frac{d}{dt} [f(p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_n + t(q_n - p_1))] \Big|_{t=0} \quad (2.1.5)$$

reel sayısına " f fonksiyonunun V_P tanjant vektörü yönündeki türevi" denir (Hacısalihoglu, 1982).

Teorem 2.1.1: $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, P \in E^n$ olmak üzere

$$f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir diferansiyellenebilir fonksiyonu verilsin.

Bu takdirde,

$$V_P(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P \quad (2.1.6)$$

dir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2.1.7: $X \in \chi(E^n)$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun. $\forall P \in E^n$

$$(X(f))(P) = X_P(f) \quad (2.1.7)$$

olmak üzere,

$$X(f) \in C(E^n, \mathbb{R})$$

fonksiyonuna “ f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevi” denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

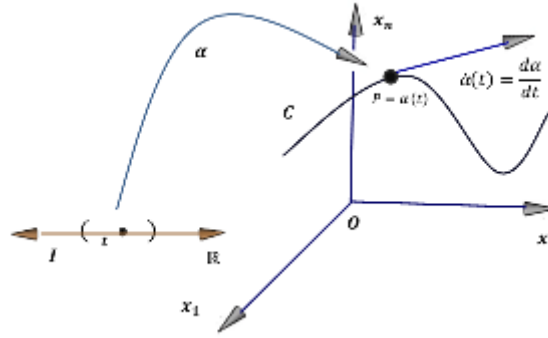
Tanım 2.1.8:

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \quad (2.1.8)$$

dönüşümü E^n 'de bir “eğri” veya “regüler eğri”, $I \subset \mathbb{R}$ “parametre aralığı” ve $t \in \mathbb{R}$ “parametre” adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1982).

E^n 'de lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere eğriyi aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 2.1.1. E^n de bir eğri

Burada

$$\dot{\alpha}(t) = \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_P = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \in T_{E^3}(P) \quad (2.1.9)$$

vektörüne C eğrisinin P noktasında ki “hız vektörü” ve $\|\dot{\alpha}(t)\| \in \mathbb{R}$ değerine de C eğrisinin P noktasında ki “hızı” denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Diğer taraftan hız vektörünün türevi alınırsa

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big|_P = \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right) \in T_{E^3}(P) \quad (2.1.10)$$

bulunur ve C eğrisinin P noktasında ki “ivme vektörü” adını alır.

Eğer $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ ise C eğrisine “birim hızlı eğri” ve $t \in \mathbb{R}$ parametresine de “yay parametresi” adı verilir. C eğrisinin yay parametresi “ s ” ile gösterilir. C eğrisinin yer vektörünün ardışık türevleri alınırsa

$$\{\dot{\alpha}, \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$$

lineer bağımsız vektör sistemi bulunur.

Bu sisteme Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$\{V_1, V_2, \dots, V_r\} \quad (2.1.11)$$

sistemi elde edilir. Bu vektör sistemine “Serret-Frenet r –ayaklısı” denir(Hacısalıhoğlu, 1982).

$n = 3$ için, bu vektör sistemi $\{T, n, B\}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.2: $C \dots \alpha = \alpha(t), E^3$ de bir eğri olsun. Bu durumda herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ parametresi için

$$\begin{cases} T = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \\ n = B \wedge T \\ B = \frac{1}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|} \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

dir.

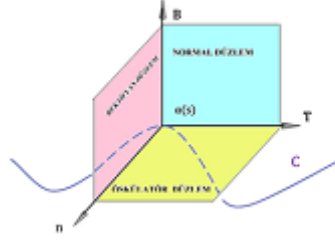
Aksi takdirde t bir yay parametresi, yani $t = s$ ise

$$\begin{cases} T = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\alpha} \\ n = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \ddot{\alpha} \\ B = T \wedge n \end{cases} \quad (2.1.13)$$

olarak elde edilir(Blaschke, 1945).

Tanım 2.1.9: $C \dots \alpha = \alpha(s), E^n$ ’de bir eğri olsun. $\{T, n, B\}$ Serret-Frenet çatısının ürettiği uzayın, 2 –boyutlu $Sp\{T, n\}$, $Sp\{T, B\}$ ve $Sp\{n, B\}$ alt uzaylarına, sırasıyla “oskületör düzlem”, “normal düzlem” ve “rektifyan düzlem” adı verilir

(Şekil 2.1.2),(Abbena, 2027).



Şekil 2.1.2. C uzay eğrisinin oskülatör, normal ve rektifyan düzlemleri

Tanım 2.1.10: $C \dots \alpha = \alpha(s), E^n$ 'de bir eğri olsun. Bu takdirde

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle \dot{V}_i, V_{i+1} \rangle \quad (2.1.14)$$

biçiminde tanımlanan k_i fonksiyonuna “ i .yinci eğrilik fonksiyonu”, $k_i(s) \in \mathbb{R}$ de C eğrisinin “ i .yinci eğriliği” denir(Hacısalıhoğlu, 1982).

$n = 3$ için, $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ ile gösterilir ve sırasıyla “eğrilik ve burulma” adı verilir.

Teorem 2.1.3: $C \dots \alpha = \alpha(s), E^3$ 'de bir eğri olsun. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{n} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ B \end{bmatrix} \quad (2.1.15)$$

dir. Bu formüllere “Serret-Frenet türev formülleri” denir(Hacısalıhoğlu, 1982).

Teorem 2.1.4: $C \dots \alpha = \alpha(t), E^3$ 'de bir eğri olsun.

Bu durumda herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ parametresi için

$$\begin{cases} \kappa = \frac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3} \\ \tau = \frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

dir(Hacısalıhoğlu, 1982).

Teorem 2.1.5: E^3 'de bir eğri C olsun. C nin bir doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır(Hacısalıhoğlu, 1982).

Teorem 2.1.6: E^3 'de bir eğri C olsun. C nin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır(Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.1.11: E^n , n-boyutlu Öklid uzayında, $\nabla f|_P \neq 0$ olmak üzere

$$f: U \subset E^n \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}$$

için

$$M = \{P \in E^n: f(P) = c\} \quad (2.1.17)$$

biçiminde tanımlanan kümeye E^n 'de “ $(n - 1) -$ boyutlu bir yüzey” veya kısaca “ $(n - 1) -$ yüzey” adı verilir(Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2.1.12: E^n 'de bir hiperyüzey ve lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ olmak üzere, $\forall P \in M$ için

$$f(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P)) = c = \text{sabit} \quad (2.1.18)$$

ise

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \quad (2.1.19)$$

veya

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.1.20)$$

denklemlerine M hiperyüzeyinin “kapalı formdaki denklemi” denir(Abbena, 2017).

Tanım 2.1.13: E^n 'de bir hiperyüzey ve lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $U \subset E^{n-1}$ olmak üzere, $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \in U \subset E^{n-1}$ için

$$\varphi: U \subset E^{n-1} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n \quad (2.1.21)$$

$$u \rightarrow \varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u))$$

dönüşümüne M hiperyüzeyinin “parametrik gösterimi” denir(Abbena, 2017).

Tanım 2.1.14 : E^n 'de bir M hiperyüzeyi

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

denklemleri ile verilsin. Bu denklemin çözümünden

$$x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_{n-1} = u_{n-1} \quad (2.1.22)$$

olmak üzere

$$x_n = h(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \quad (2.1.23)$$

elde edilir. (2.1.21), (2.1.22) ve (2.1.23) den

$$\varphi: U \subset E^{n-1} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n \quad (2.1.24)$$

$$u \rightarrow \varphi(u) = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, h(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}))$$

dönüşümüne de M hiperyüzeyinin ‘‘Monge gösterimi’’ denir(Abbena, 2017).

Tanım 2.1.15: E^n 'de C eğrisi

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

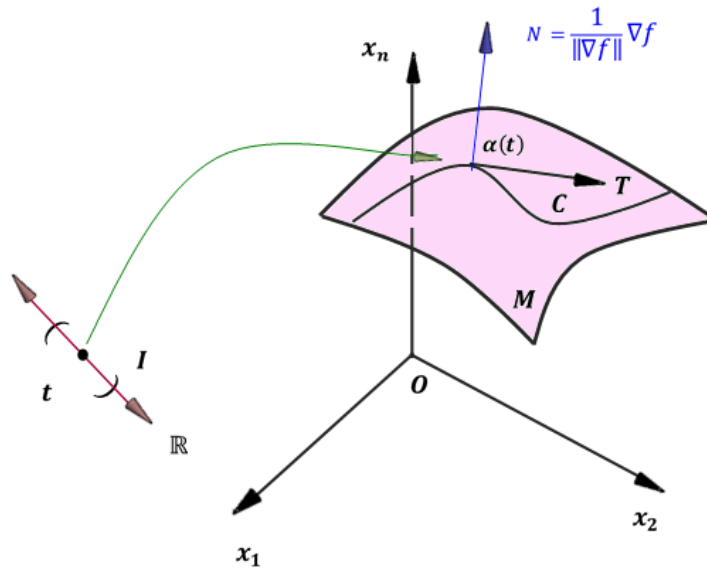
ile M hiperyüzeyi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

denklemleri ile verilsin. $\forall \alpha(t) \in C$ için

$$f(\alpha(t)) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) = c \quad (2.1.25)$$

ise C ye M ‘‘hiperyüzeyi üzerinde bir eğri’’ denir (Şekil 2.1.3), (Abbena, 2017).



Şekil 2.1.3. E^n de bir eğri-hiperyüzey çifti

Tanım 2.1.16: M hiperyüzeyi üzerinde bir eğri C olsun. C eğrisinin birim teğet vektörü $T \in F_M(\alpha(t))$ olmak üzere $\langle T, \nabla f \rangle = 0$ olup, $\nabla f \in T_M^\perp(\alpha(t))$ vektörüne M hiperyüzeyinin “normal vektörü” ve

$$N = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f \quad (2.1.26)$$

vektörüne de M hiperyüzeyinin “birim normal vektörü” denir (Abbena, 2017).

Tanım 2.1.17: E^n ’de bir M hiperyüzeyi, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ olmak üzere

$$\varphi: U \subset E^{n-1} \xrightarrow{\text{dif.bilir}} E^n$$

$$u \rightarrow \varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u))$$

parametrik ifadesi ile verilsin. u_i , $1 \leq i \leq n$, parametresi hariç diğer bütün parametreler sabit tutulduğunda φ fonksiyonu u_i değişkenine bağlı olup M hiperyüzeyi üzerinde bir eğri tanımlar ve bu eğriye “ u_i –parametre eğrisi” adı verilir, (Şekil 2.1.4), (Abbena, 2017).

$n = 3$ için, $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3: a \leq u_1 \leq b, c \leq u_2 \leq d\} \subset E^2$ olmak üzere

$$\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2), \varphi_3(u_1, u_2))$$

yüzey denklemini ele alalım.

$u_2 = \text{sabit}$ için, u_1 –parametre eğrisinin denklemi

$$(u_1, u_2 = \text{sabit}) = (\alpha_1(u_1), \alpha_2(u_1), \alpha_3(u_1,)) = \alpha(u_1)$$

ve $u_1 = \text{sabit}$ için, u_2 –parametre eğrisinin denklemi

$$\varphi(u_1 = \text{sabit}, u_2) = (\beta_1(u_2), \beta_2(u_2), f_3(u_2)) = \beta(u_2)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eğrilerin teğet vektörleri, sırasıyla

$$\dot{\alpha}(u_1) = \frac{d\alpha}{du_1} = \varphi_{u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \right) \in T_M(p)$$

ve

$$\dot{\beta}(u_2) = \frac{d\beta}{du_2} = \varphi_{u_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \right) \in T_M(p)$$

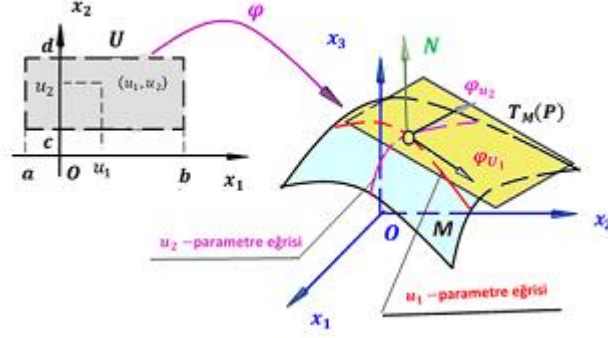
dir. Buradan

$$\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2} \perp T_M(p)$$

olacağından M yüzeyinin birim normal vektörü

$$N = \frac{1}{\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|} \varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2} \quad (2.1.27)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.1.4. Yüzey üzerinde parametre eğrileri

Tanım 2.1.18: M, E^n 'de hiperyüzey olsun. N ve X , sırasıyla M 'nin birim normal ve konum vektörleri olmak üzere

$$h: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow h(P) = \langle X_P, N_P \rangle \quad (2.1.28)$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonuna M hiperyüzeyinin “destek fonksiyonu” denir(Sarioğlugil, 1994).

Diğer bir ifadeyle, X konum vektörünün N birim normal vektörü üzerine dik izdüşümünün uzunluğudur.

Tanım 2.1.19: M, E^n 'de hiperyüzey olsun. N ve D sırasıyla M 'nin birim normal vektörü ve bir afin konneksiyonu olmak üzere, $\forall x \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \rightarrow \phi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = D_X N \quad (2.1.29)$$

dönüşümüne “şekil operatörü” denir(Hacısalihoglu, 1982).

Teorem 2.1.7 : M, E^n 'de hiperyüzey olsun. S dönüşümüne M üzerinde bir “şekil operatörü” denir. Şekil operatörü bir lineer ve self adjoint dönüşümdür (Hacısalihoglu, 1982).

O halde şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\|^3 \|\varphi_v\|} & -\frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2} \\ -\frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2} & -\frac{\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|^3} \end{bmatrix} \quad (2.1.30)$$

dir.

Tanım 2.1.20: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve S 'de M 'nin şekil operatörü olsun. S lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine M 'nin o noktadaki “asli eğrilikleri” denir. Yani; $P \in M$ için

$$S_P(X_P) = kX_P \quad (2.1.31)$$

olacak şekilde $X_P \neq 0$ varsa k 'ya $P \in M$ 'deki “asli eğrilik”, X_P ' ye de buna karşılık gelen “asli eğrilik doğrultusu” denir(Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2.1.21: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve α 'da M üzerinde bir eğri olsun. α eğrisinin T teğet vektörü bir karakteristik vektöre karşılık geliyorsa yani;

$$S(T) = kT \quad (2.1.32)$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ varsa α eğrisine M üzerinde bir “eğrilik çizgisi” denir(Hacısalihoglu, 1982).

$T_M(p) = Sp\{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$ uzayının elemanları birer asli doğrultu vektörü ise

$$\begin{cases} S(\varphi_{u_1}) = N_{u_1} = k_1 \varphi_{u_1} \\ S(\varphi_{u_2}) = N_{u_2} = k_2 \varphi_{u_2} \end{cases} \quad (2.1.33)$$

elde edilir. Bu eşitliklere “Olin de Rodrigues” formülleri denir (Hacısalihoglu, 1982).

Bu durumda şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.34)$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.1.22: M, E^n 'de hiperyüzey ve $S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ M 'nin şekil operatörü olsun. O halde, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} I^q: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

ile tanımlı I^q fonksiyonuna M üzerinde “ q -uncu temel form” denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Özel olarak; $n = 3$ için temel formları açık biçimde yazılırsa,

$q = 1$ için

$$\begin{aligned} I: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I(X, Y) = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

olup, M 'nin “birinci temel formu” adını alır.

$q = 2$ için

$$\begin{aligned} II: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle \end{aligned}$$

olup, M 'nin “ikinci temel formu” adını alır.

$q = 3$ için

$$\begin{aligned} III: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow III(X, Y) = \langle S^2(X), Y \rangle \end{aligned}$$

olup, M 'nin “üçüncü temel formu” adını alır.

$n = 3$ için; birinci, ikinci ve üçüncü temel formların katsayıları, sırasıyla

$$\begin{cases} g_{11} = \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_1} \rangle \\ g_{12} = \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \rangle \\ g_{22} = \langle \varphi_{u_2}, \varphi_{u_2} \rangle \end{cases} \quad (2.1.36)$$

$$\begin{cases} b_{11} = -\langle \varphi_{u_1}, N_{u_1} \rangle = \langle \varphi_{u_1 u_1}, N \rangle \\ b_{12} = -\langle \varphi_{u_1}, N_{u_2} \rangle = \langle \varphi_{u_1 u_2}, N \rangle \\ b_{22} = -\langle \varphi_{u_2}, N_{u_2} \rangle = \langle \varphi_{u_2 u_2}, N \rangle \end{cases} \quad (2.1.37)$$

ve

$$\begin{cases} n_{11} = \langle N_{u_1}, N_{u_1} \rangle \\ n_{12} = \langle N_{u_1}, N_{u_2} \rangle \\ n_{22} = \langle N_{u_2}, N_{u_2} \rangle \end{cases} \quad (2.1.38)$$

olarak yazılabilir. O halde (2.1.36), (2.1.37) ve (2.1.38) bağıntılarından

$$\begin{cases} I = g_{11}(du_1)^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}(du_2)^2 \\ II = b_{11}(du_1)^2 + 2b_{12}du_1du_2 + b_{22}(du_2)^2 \\ III = n_{11}(du_1)^2 + 2n_{12}du_1du_2 + n_{22}(du_2)^2 \end{cases} \quad (2.1.39)$$

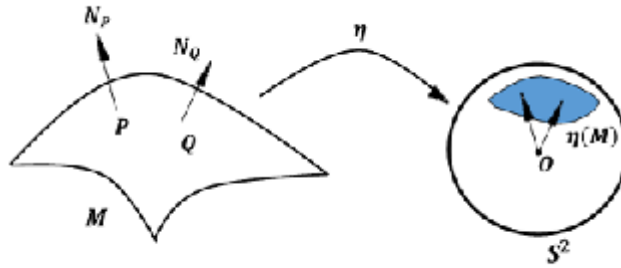
dir.

Teorem 2.1.8: M, E^3 'de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. M 'nin parametre eğrilerinin birer eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $g_{12} = b_{12} = 0$ olmasıdır (Abbena, 2017).

Tanım 2.1.23: M, E^n 'de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve N 'de M 'nin birim normal vektör alanı olsun. S^{n-1} birim hiperküre olmak üzere;

$$\begin{aligned} \eta: M &\rightarrow S^{n-1} \\ P &\rightarrow \eta(P) = N_P \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne ‘‘Gauss dönüşümü’’ denir(Hacısalihoğlu, 1982).



Şekil 2.1.5. Gauss dönüşümü

Tanım 2.1.24: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve S 'de M 'nin şekil operatörü olsun.

$$\begin{aligned} K: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S_P \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

fonksiyonuna ‘‘Gauss eğrilik fonksiyonu’’, $K(P) \in \mathbb{R}$ ye de $P \in M$ noktasındaki ‘‘Gauss eğriliği’’ denir(Abbena, 2017).

(2.1.34) ve (2.1.41) eşitliklerinden

$$K(P) = k_1 k_2 \quad (2.1.42)$$

elde edilir.

Eğer, M yüzeyinin Gauss eğriliği sıfıra eşit ise M ye “açılabilir yüzey” adı verilir.

Teorem 2.1.9: M, E^3 'de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. M 'nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \quad (2.1.43)$$

dir(Blaschke, 1945).

Tanım 2.1.25: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve S 'de M 'nin şekil operatörü olsun.

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \frac{1}{n-1} \text{İz } S_P \quad (2.1.44)$$

fonksiyonuna “ortalama eğrilik fonksiyonu”, $H(P) \in \mathbb{R}$ ye de $P \in M$ 'deki “ortalama eğriliği” denir(Spivak, 1999).

Ayrıca (2.1.34) ve (2.1.44) eşitliklerinden

$$H(P) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (2.1.45)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.10: M, E^3 'de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. M 'nin Ortalama eğriliği

$$H = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + g_{11}b_{22}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \quad (2.1.46)$$

dir(Blaschke, 1945).

Eğer, M yüzeyinin ortalama eğriliği sıfıra eşit ise M ye “minimal yüzey” adı verilir.

Tanım 2.1.26: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve M üzerinde lokal koordinat sistemi de $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ olsun. O halde M nin birinci temel formunun (metrik tensörünün) katsayıları $g_{ij}, 1 \leq i, j \leq n - 1$, olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h} \right), 1 \leq h, k \leq n - 1, \quad (2.1.47)$$

biçiminde tanımlanan $\Gamma_{ij}^k \in C(M, \mathbb{R})$ fonksiyonlarına “ikinci tipten Christoffel sembolleri” denir (Abbena, 2017).

Burada $[g^{ji}] = [g_{ij}]^{-1}$ dir.

Benzer şekilde

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right), 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.1.48)$$

biçiminde tanımlanan $\Gamma_{ij,k} \in C(M, \mathbb{R})$ fonksiyonlarına da “birinci tipten Christoffel sembolleri” denir.

Ayrıca Christoffel sembolleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\Gamma_{ij}^k = g^{kh} \Gamma_{ij,h}$ veya $\Gamma_{ij,h} = g_{hk} \Gamma_{ij}^k$.
2. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ve $\Gamma_{ij,h} = \Gamma_{ji,h}$.

Teorem 2.1.11: M, E^3 ’de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. M nin ikinci tipten Christoffel sembolleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{g_{22}(g_{11})_{u_1} - 2g_{12}(g_{12})_{u_1} + g_{12}(g_{11})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{g_{22}(g_{11})_{u_2} - g_{12}(g_{22})_{u_1}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} = \Gamma_{21}^1 \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22}(g_{22})_{u_1} - 2g_{22}(g_{12})_{u_1} + g_{12}(g_{22})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{g_{12}(g_{11})_{u_1} - 2g_{11}(g_{12})_{u_1} + g_{11}(g_{11})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \\ \Gamma_{12}^2 = -\frac{g_{12}(g_{11})_{u_2} - g_{11}(g_{22})_{u_2}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} = \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{g_{11}(g_{22})_{u_2} - 2g_{12}(g_{12})_{u_2} + g_{12}(g_{22})_{u_1}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \end{array} \right. \quad (2.1.49)$$

dir (Abbena, 2017).

Eğer M ’nin parametre eğrileri ortogonal ise, $g_{12} = 0$ olacağından

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{(g_{11})_{u_1}}{2g_{11}} \quad , \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{(g_{11})_{u_2}}{2g_{22}} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{(g_{11})_{u_2}}{2g_{11}} = \Gamma_{21}^1 \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{(g_{22})_{u_2}}{2g_{22}} = \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{(g_{22})_{u_1}}{2g_{11}} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{(g_{22})_{u_2}}{2g_{22}} \end{array} \right. \quad (2.1.50)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.27: M, E^n de bir hiperyüzey ve M 'nin birim normal vektörü N olsun. E^n ile M 'nin afin konneksiyonları D ve \tilde{D} olmak üzere, $\forall X, Y \in T_M(P)$ için

$$D_X Y = \tilde{D}_X Y + \langle S(X), Y \rangle N \quad (2.1.51)$$

ifadesine ‘‘Gauss denklemi’’ denir (Abbena, 2017).

$n = 3$ için; Gauss denklemleri $T_M(p) = Sp\{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$ bazına göre

$$\begin{cases} D_{\varphi_{u_1}} \varphi_{u_1} = \varphi_{u_1 u_1} = \Gamma_{11}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{u_2} + b_{11} N \\ D_{\varphi_{u_1}} \varphi_{u_2} = \varphi_{u_2 u_1} = \Gamma_{21}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{21}^2 \varphi_{u_2} + b_{21} N \\ D_{\varphi_{u_2}} \varphi_{u_1} = \varphi_{u_1 u_2} = \Gamma_{12}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \varphi_{u_2} + b_{12} N \\ D_{\varphi_{u_2}} \varphi_{u_2} = \varphi_{u_2 u_2} = \Gamma_{22}^1 \varphi_{u_1} + \Gamma_{22}^2 \varphi_{u_2} + b_{22} N \end{cases} \quad (2.1.52)$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.1.28 : M, E^n de bir hiperyüzey ve M üzerinde teğet vektörü T olan C^∞ sınıftan bir eğri (α) olsun. (α) eğrisi üzerinde olan bir $Y \in \chi(M)$ vektör alanı için eğri boyunca

$$\bar{D}_T Y = 0 \quad (2.1.53)$$

ise $Y \in \chi(M)$ vektör alanına C eğrisi boyunca ‘‘Levi- Civita anlamında paralel vektör alanı’’ denir (Abbena, 2017).

Tanım 2.1.29: M, E^n de bir hiperyüzey ve M üzerinde teğet vektörü T olan C^∞ sınıftan bir eğri (α) olsun. Gauss denkleminden

$$D_T T = \tilde{D}_T T + \langle S(T), T \rangle N$$

veya

$$\vec{k} = \vec{k}_{teğet} + \vec{k}_{normal} \quad (2.1.54)$$

elde edilir. (α) eğrisinin \vec{k} eğrilik vektörünün teğetsel bileşeni olan $\vec{k}_{teğet}$ vektörüne ‘‘jeodezik eğrilik vektörü’’ denir ve \vec{k}_g ile gösterilir. \vec{k}_g vektörünün büyüklüğüne de ‘‘jeodezik eğrilik’’ adı verilir ve

$$k_g = \|\vec{k}_g\| \quad (2.1.55)$$

biçiminde gösterilir (Aminov, 2001).

Eğer

$$k_g = 0 \quad (2.1.56)$$

ise (α) eğrisine M hiperyüzeyi üzerinde bir “jeodezik eğri” denir.

Benzer şekilde (α) eğrisinin \vec{k} eğrilik vektörünün normal bileşeni olan \vec{k}_{normal} vektörüne “normal eğrilik vektörü” denir ve \vec{k}_n ile gösterilir. \vec{k}_n vektörünün büyüklüğüne de “normal eğrilik” adı verilir ve

$$k_n = \|\vec{k}_n\| \quad (2.1.57)$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 2.1.12: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve M üzerinde teğet vektörü T olan C^∞ sınıfından bir eğri $C \dots \alpha = \alpha(s)$ olsun.

Bu takdirde C eğrisinin M üzerinde jeodezik olması için gerek ve yeter şart $\alpha_i = u_i(s)$ olmak üzere

$$\frac{d^2\alpha_k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_j}{ds} \frac{d\alpha_i}{ds}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n-1, \quad (2.1.58)$$

dır(Abbena, 2017).

Tanım 2.1.30: M, E^n 'de bir hiperyüzey ve M üzerinde teğet vektörü $X \in T_M(P)$ olmak üzere

$$k_n: T_M(P) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1.59)$$

$$X \rightarrow k_n(X) = \frac{\langle S(X), X \rangle}{\langle XX \rangle} = \frac{II(X, X)}{I(X, X)}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona “asimptotik(veya normal) eğrilik fonksiyonu” ve $k_n(P) \in \mathbb{R}$ değerine de $P \in M$ noktasındaki “asimptotik veya normal eğrilik” denir.

Ayrıca $P \in M$ noktasından geçen ve teğet vektörü $X \in T_M(P)$ regüler bir $C \dots \alpha: I \rightarrow M$ eğrisi için

$$k_n(X) = 0 \quad (2.1.60)$$

veya

$$\langle S(X), X \rangle = II(X; X) = 0 \quad (2.1.61)$$

ise C eğrisine M hiperyüzeyi üzerinde bir “asimptotik eğri” adı verilir (Guggenheimer, 1977).

Normal eğriliğin ekstremum (maksimum ve minimum) değerleri, M hiperyüzeyinin asli eğriliklerini verir. Bunun anlamı

$$\frac{\partial k_n}{\partial u_i} = 0, 1 \leq i \leq n - 1,$$

denkleminin çözümleri olan her bir k_i değeri k_n normal eğriliğinin ekstremumu olup bu değerler arasında maksimum ve minimum olanları M hiperyüzeyin asli eğrilikleri olması demektir.

Teorem 2.1.13: M , E^n 'de bir hiperyüzey olsun. M hiperyüzeyin asli eğriliklerinin karakteristik denklemi

$$\det[b_{ij} - k_n g_{ij}] = 0 \quad (2.1.62)$$

dir(Aminov, 2001).

$n = 3$ için karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_n g_{11} & b_{12} - k_n g_{12} \\ b_{12} - k_n g_{12} & b_{22} - k_n g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$(k_n)^2 - \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} k_n + \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = 0 \quad (2.1.63)$$

dir. (2.1.43) ve (2.1.46) eşitlikleri (2.1.62) de yerlerine yazılırsa

$$(k_n)^2 - 2Hk_n + K = 0 \quad (2.1.64)$$

elde edilir ve bu denklemin kökleri

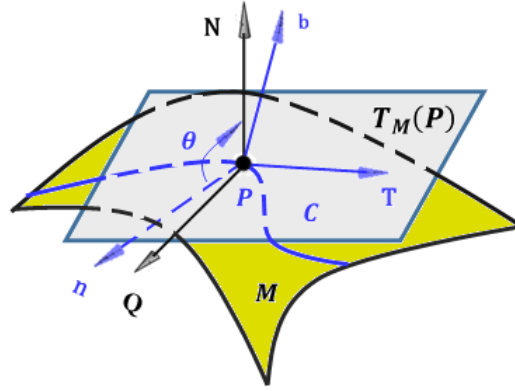
$$\begin{cases} k_1 = (k_n)_{max} = H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 = (k_n)_{min} = H - \sqrt{H^2 - K} \end{cases} \quad (2.1.65)$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.1.31: M , E^3 'de bir regüler yüzey ve M üzerinde C^∞ sınıfından birim teğet vektörü T olan birim hızlı bir eğri (C) olsun $Q = T \wedge N$ olmak üzere,

$$\{T, Q = T \wedge N, N\} \quad (2.1.66)$$

vektör sistemi M üzerinde bir çatı meydana getirir. Bu çatıya M yüzeyi üzerindeki (C) eğrisinin $P = \alpha(s)$ noktasındaki ‘‘Darboux çatısı’’ adı verilir(Blaschke, 1945).



Şekil 2.1.6. Yüzey üzerinde Darboux çatısı

$\angle(n, Q) = \theta$ olmak üzere, $\{T, n, b\}$ Serret-Frenet çatısı ile $\{T, Q = T \wedge N, N\}$ Darboux çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ Q \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.1.67)$$

matrisel ifadesiyle verilir.

Teorem 2.1.14: M, E^3 'de bir yüzey ve M üzerinde C^∞ sınıftan birim hızlı bir eğri $(C) \dots \alpha = \alpha(s)$ olsun. M yüzeyi üzerindeki (C) eğrisinin $P = \alpha(s)$ noktasındaki $\{T, Q = T \wedge N, N\}$ Darboux çatısı için

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{Q} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Q \\ N \end{bmatrix} \quad (2.1.68)$$

dir. Bu formüllere Darboux türev formülleri adı verilir (Blaschke, 1945).

Burada

$$\begin{cases} k_g = \kappa \sin\theta \\ k_n = \kappa \cos\theta \\ \tau_g = \tau + \theta \end{cases} \quad (2.1.69)$$

olup, sırasıyla k_g, k_n ve τ_g notasyonları ile (C) eğrisinin jeodezik eğriliğini, normal eğriliğini ve jeodezik burulmasını (veya torsiyonunu) göstermektedir.

Teorem 2.1.15: $M \dots X = X(u, v)$, E^3 'de bir regüler yüzey ve

$T_M(p) = Sp\{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$X = hN - \frac{\rho}{W^2} \{(\rho_v g_{12} - \rho_u g_{22})X_u + (\rho_u g_{12} - \rho_v g_{11})X_v\} \quad (2.1.70)$$

dir(Sarioğlugil, 1994).

Burada $\rho = \|X\|$, $h = \langle X, N \rangle$ ve $W^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$.

Eğer M yüzeyinin parametre eğrileri ortogonal ise, $g_{12} = 0$ olacağından

$$X = hN + \rho \left\{ \frac{\rho_u}{g_{11}} X_u + \frac{\rho_v}{g_{22}} X_v \right\} \quad (2.1.71)$$

dir.

Tanım 2.1.32: M regüler yüzeyinin birinci temel formu

$$I = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

olmak üzere

$$\overset{I}{\nabla}(h) = \frac{g_{11}h_v^2 - 2g_{12}h_u h_v + g_{22}h_u^2}{W^2} \quad (2.1.72)$$

biçiminde tanımlanan operatöre M yüzeyinin ‘‘birinci Beltrami diferansiyel operatörü’’ denir(Blaschke, 1945).

Eğer M yüzeyinin parametre eğrileri ortogonal ise, $g_{12} = 0$ olacağından

$$\overset{I}{\nabla}(h) = \frac{h_u^2}{g_{11}} + \frac{h_v^2}{g_{22}} \quad (2.1.73)$$

dir(Tul, 2020)

Teorem 2.1.16: M , E^3 'de bir regüler yüzey olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler mevcuttur(Şemin, 1987).

$$N \wedge X_u = \frac{1}{W} [g_{11}X_v - g_{12}X_u] \quad (2.1.74)$$

$$N \wedge X_v = \frac{1}{W} [g_{12}X_v - g_{22}X_u] \quad (2.1.75)$$

$$N \wedge [N \wedge X_u] = -X_u \quad (2.1.76)$$

$$N \wedge [N \wedge X_v] = -X_v \quad (2.1.77)$$

$$X_u \wedge [N \wedge X_u] = g_{11}N \quad (2.1.78)$$

$$X_v \wedge [N \wedge X_u] = g_{12}N \quad (2.1.79)$$

$$X_u \wedge [N \wedge X_v] = g_{12} N \quad (2.1.80)$$

$$X_v \wedge [N \wedge X_v] = g_{22} N \quad (2.1.81)$$

Teorem 2.1.17: M regüler yüzeyinin yer vektörünün uzunluğu

$$\rho^2 = \frac{h^2}{1 - \nabla(\rho)} \quad (2.1.82)$$

dir(Sarıoğlugil, 1994).

2.2. E^3 Öklid Uzayında Fokal Yüzeyler

Bu kesimde ilk olarak, fokal yüzeylerin tarihsel gelişimine göz atalım. Bilindiği gibi fokal yüzeyler birer doğrusal kongurans yüzeyleridir.

Kongurans yüzeyleri ile ilgili çalışmalar G. Monge(1850) ile başlamış olup, bu konuda (Taliaferro, 1901), (Eisenhart, 1904), (Ogura, 1918), (Behari, 1934)

(Mishra, 1951), (Srinivasiengar, 1951), (Amur, 1962), (Nirmala, 1963)

(Alexiou vd, 2001) ve (Papadopoulou, 2003) v.b. gibi çok sayıda geometrici çalışma yapmışlardır. Şimdi doğrusal kongurans yüzeylerinin genel bir tanımını verebiliriz

Tanım 2.2.1: M , E^3 'de parametrik ifadesi

$$X : D \subset E^2 \rightarrow X(D) \subset E^3 \quad (2.2.1)$$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

olan regüler yüzey olsun. O halde

$$\mathcal{F} = \{ \xi \in T_{E^3}(P) : \|\xi\| = 1 \}$$

ve $X(u, v)$ ve $R(u, v)$ noktaları arasındaki yönlü uzaklık fonksiyonu

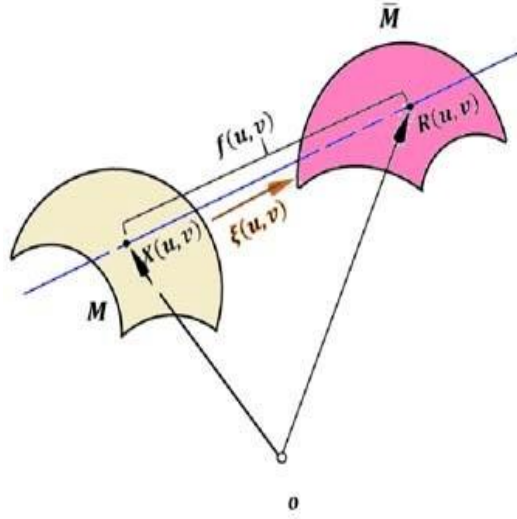
$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow f(u, v) = \|\overrightarrow{XR}\|$$

olmak üzere

$$M \dots R(u, v) = X(u, v) + f(u, v)\xi(u, v) \quad (2.2.2)$$

denklemiyle tanımlanan yüzeye ‘‘doğrusal kongurans yüzeyi’’ denir(Şekil 2.2.1).



Şekil 2.2.1. Kongurans yüzeyi

M yüzeyinin birim normal vektörü N olmak üzere, (2.22) denkleminde ξ birim vektörü yerine N alınırsa

$$\bar{M} \dots R(u, v) = X(u, v) + f(u, v)N(u, v) \quad (2.2.3)$$

elde edilir. Bu durumda \bar{M} ye normaller kongurans yüzeyi adı verilir

(Hagen et al, 1992a; Hagen et al, 1992b). Diğer taraftan k_1 ve k_2 , M yüzeyinin asli eğrilikleri olmak üzere,

$$f(u, v) = \pm \frac{1}{k_i(u, v)}, 1 \leq i \leq 2,$$

olarak alınırsa

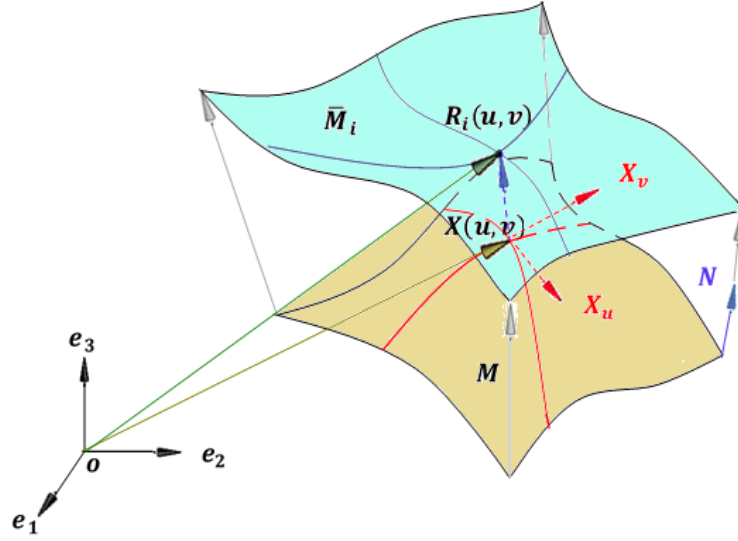
$$\bar{M}_i \dots R_i(u, v) = X(u, v) \pm \left(\frac{1}{k_i(u, v)} \right) N(u, v) \quad (2.2.4)$$

bulunur. Bu durumda \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 yüzeyleri M nin “fokal yüzeyleri” adını alır

(Hagen vd, 1992b). Bu klasik kavram Hagen ve arkadaşları tarafından

$$\bar{M}_i \dots R_i(u, v) = X(u, v) \pm s f(k_1, k_2)N(u, v), s \in \mathbb{R} \quad (2.2.5)$$

biçiminde genişletilmiştir (Şekil 2.2.2) (Hagen et al, 1992b; Hagen and Hahmann. 1992c; Hagen et al, 1995d).



Şekil 2.2.2. Genelleştirilmiş fokal yüzeyi

Bu bir yüzeye yaklaşım yöntemidir. Bilindiği gibi asli eğrilikler bize bir yüzeyin bir noktada farklı yönlerde ve farklı miktarlarda nasıl büküldüğü bilgisini verir. Bu yöntemle Hagen ve arkadaşları orijinal yüzeyi normalleri doğrultusunda eğip bükerek yeni oluşacak olan yüzeydeki değişimleri gözlemleme imkânına kavuşmuştur. Bu bize istediğimiz niteliklere sahip bir yüzeyin, bir diğer yüzeyi karakterize eden asli eğriliklerini kullanarak elde edilebileceğini ifade eder. Bu yaklaşım metodu ile fokal yüzeyler, optik, mimarlık, otomotiv ve bilgisayar destekli tasarım ve imalat sanayi vb. gibi birçok alanda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Yüzeylerin geometrisine farklı yaklaşım metotları da vardır. Örneğin Maekawa ve arkadaşları Monge parametrizasyonuna sahip yüzeylerin şekil analizi için, yüzeyin umbilik noktalarında asli eğrilik fonksiyonlarının davranışlarını esas alan bir yöntem kullanmışlardır(Maekawa et al,1006). Bu alanda yapılan çalışmalar artarak devam etmektedir.

Şimdi çalışmamız esnasında yararlanacağımız fokal yüzeylere ait bazı özellikleri verelim.

Tanım 2.2.2: $M \dots X = X(u, v)$, E^3 'de regüler yüzey ve $k_i, 1 \leq i \leq 2$ ile N sırasıyla M nin asli eğrilikleri ve birim normal vektörü olsun. Bu takdirde

$$M_1 \dots R_1(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{k_1(u, v)} N(u, v) \quad (2.2.6)$$

ve

$$M_2 \dots R_2(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{k_2(u, v)} N(u, v) \quad (2.2.7)$$

denklemleri ile tanımlı yüzeylere M 'nin "fokal yüzeyleri" denir(Abenna, 2017).

O halde

$$\rho_1^2 = \langle R_1, R_1 \rangle \quad (2.2.8)$$

ve

$$\rho_2^2 = \langle R_2, R_2 \rangle \quad (2.2.9)$$

eşitliklerinin "u" ve "v" parametrelerine göre kısmi türevleri alınır ve düzenlenirse

$$\begin{cases} \langle R_1, (R_1)_u \rangle = \rho_1 (\rho_1)_u \\ \langle R_1, (R_1)_v \rangle = \rho_1 (\rho_1)_v \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{cases} \langle R_2, (R_2)_u \rangle = \rho_2 (\rho_2)_u \\ \langle R_2, (R_2)_v \rangle = \rho_2 (\rho_2)_v \end{cases} \quad (2.2.11)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$T_{M_1}(P_1) = Sp\{(R_1)_u, (R_1)_v\}$$

ve

$$T_{M_2}(P_2) = Sp\{(R_2)_u, (R_2)_v\}$$

olduğundan

$$N^1 = \frac{1}{\|(R_1)_u \wedge (R_1)_v\|} ((R_1)_u \wedge (R_1)_v) \quad (2.2.12)$$

ve

$$N^2 = \frac{1}{\|(R_2)_u \wedge (R_2)_v\|} ((R_2)_u \wedge (R_2)_v) \quad (2.2.13)$$

yazabiliriz.

Bu durumda

$$T_{E^3}(P_1) = Sp\{(R_1)_u, (R_1)_v, N^1\} \quad (2.2.14)$$

ve

$$T_{E^3}(P_2) = Sp\{(R_2)_u, (R_2)_v, N^2\} \quad (2.2.15)$$

dir. O halde $R_1 \in T_{E^3}(P_1)$ ve $R_2 \in T_{E^3}(P_2)$ olduğundan

$$R_1 = a_1(R_1)_u + b_1(R_1)_v + c_1N^1 \quad (2.2.16)$$

ve

$$R_2 = a_2(R_2)_u + b_2(R_2)_v + c_2N^2 \quad (2.2.17)$$

olacak şekilde tek türlü yazılırlar.

İlk olarak (2.2.16) denklemini ele alalım. (2.2.16) denklemi, sırasıyla $(R_1)_u, (R_1)_v$ ve N^1 vektörleri ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$\rho_1 = \|R_1\|$ olmak üzere

$$\begin{cases} g_{11}^1 a_1 + g_{12}^1 b_1 = \rho_1(\rho_1)_u \\ g_{12}^1 a_1 + g_{22}^1 b_1 = \rho_1(\rho_1)_v \\ c_1 = h_1 \end{cases} \quad (2.2.18)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} g_{11}^1 = \langle (R_1)_u, (R_1)_u \rangle \\ g_{12}^1 = g_{21}^1 = \langle (R_1)_u, (R_1)_v \rangle \\ g_{22}^1 = \langle (R_1)_v, (R_1)_v \rangle \end{cases} \quad (2.2.19)$$

olup, M_1 fokal yüzeyinin birinci temel formunun katsayılarıdır.

O halde

$$\begin{cases} g_{11}^1 a_1 + g_{12}^1 b_1 = \rho_1(\rho_1)_u \\ g_{12}^1 a_1 + g_{22}^1 b_1 = \rho_1(\rho_1)_v \end{cases}$$

denklem sistemi çözülürse

$$(W^1)^2 = g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2 \neq 0 \quad (2.2.20)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\rho_1}{(W^1)^2} [(\rho_1)_u g_{22}^1 - (\rho_1)_v g_{12}^1] \\ b_1 = \frac{\rho_1}{(W^1)^2} [(\rho_1)_v g_{11}^1 - (\rho_1)_u g_{12}^1] \end{cases} \quad (2.2.21)$$

elde edilir. Böylece (2.2.16), (2.2.18) ve (2.2.21) denklemlerinden

$$R_1 = h_1 N^1 + \frac{\rho_1}{(W^1)^2} \left[\begin{array}{l} [(\rho_1)_u g_{22}^1 - (\rho_1)_v g_{12}^1] (R_1)_u \\ + [(\rho_1)_v g_{11}^1 - (\rho_1)_u g_{12}^1] (R_1)_v \end{array} \right]$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\begin{cases} g_{11}^2 = \langle (R_2)_u, (R_2)_u \rangle \\ g_{12}^2 = g_{21}^2 = \langle (R_2)_u, (R_2)_v \rangle \\ g_{22}^2 = \langle (R_2)_v, (R_2)_v \rangle \end{cases} \quad (2.2.22)$$

M_1 fokal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları olmak üzere

$$R_2 = h_2 N^2 + \frac{\rho_2}{(W^2)^2} \left[\begin{array}{l} [(\rho_2)_u g_{22}^2 - (\rho_2)_v g_{12}^2] (R_2)_u \\ + [(\rho_2)_v g_{11}^2 - (\rho_2)_u g_{12}^2] (R_2)_v \end{array} \right]$$

olarak elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.1: M, E^3 'de regüler yüzey olsun Bu takdirde, M_1 ve M_2 fokal yüzeylerinin konum vektörleri

$$R_1 = h_1 N^1 + \frac{\rho_1}{(W^1)^2} \left[\begin{array}{l} [(\rho_1)_u g_{22}^1 - (\rho_1)_v g_{12}^1] (R_1)_u \\ + [(\rho_1)_v g_{11}^1 - (\rho_1)_u g_{12}^1] (R_1)_v \end{array} \right] \quad (2.2.23)$$

ve

$$R_2 = h_2 N^2 + \frac{\rho_2}{(W^2)^2} \left[\begin{array}{l} [(\rho_2)_u g_{22}^2 - (\rho_2)_v g_{12}^2] (R_2)_u \\ + [(\rho_2)_v g_{11}^2 - (\rho_2)_u g_{12}^2] (R_2)_v \end{array} \right] \quad (2.2.24)$$

olacak şekilde E^3 Öklid uzayının $\{(R_1)_u, (R_1)_v, N^1\}$ ve $\{(R_2)_u, (R_2)_v, N^2\}$ bazları cinsinden tek türlü yazılır.

Şimdi R_1 ve R_2 konum vektörlerinin uzunluklarını bulalım.

(2.2.23), (2.2.8) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\rho_1^2 = (h_1)^2 + \frac{\rho_1^2}{(W^1)^4} \left[\begin{array}{l} (\rho_1)_u^2 (g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2) g_{22}^1 \\ - 2(\rho_1)_u (\rho_1)_v (g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2) g_{12}^1 \\ + (\rho_1)_v^2 (g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2) g_{11}^1 \end{array} \right]$$

bulunur. Ayrıca

$$(W^1)^2 = g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2$$

olduğundan

$$\rho_1^2 = (h_1)^2 + \frac{\rho_1^2}{(W^1)^2} [(\rho_1)_u^2 - 2(\rho_1)_u(\rho_1)_v + (\rho_1)_v^2]$$

elde edilir. (2.1.72) son denklemden yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$\nabla^i(\rho_1) \neq 1$ olmak üzere

$$\rho_1^2 = \frac{(h_1)^2}{1 - \nabla^i(\rho_1)}$$

bulunur.

Benzer şekilde, $\nabla^i(\rho_2) \neq 1$ olmak üzere

$$\rho_2^2 = \frac{(h_2)^2}{1 - \nabla^i(\rho_2)}$$

olarak elde edilir.

O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz

Teorem 2.2.2: M, E^3 'de reglüler yüzey olsun Bu takdirde, M_1 ve M_2 fokal yüzeylerinin konum vektörlerinin uzunlukları

$$\rho_1^2 = \frac{(h_1)^2}{1 - \nabla^i(\rho_1)} \quad (2.2.25)$$

ve

$$\rho_2^2 = \frac{(h_2)^2}{1 - \nabla^i(\rho_2)} \quad (2.2.26)$$

dir.

Ayrıca (2.1.28) den M_1 ve M_2 fokal yüzeylerinin destek fonksiyonları için

$$h_1 = \langle R_1, N^1 \rangle \quad (2.2.27)$$

ve

$$h_2 = \langle R_2, N^2 \rangle \quad (2.2.28)$$

yazılabilir. O halde (2.2.27) ve (2.2.28) eşitliklerinin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınır ve düzenlenirse

$$\begin{cases} (h_1)_u = \langle R_1, (N^1)_u \rangle \\ (h_1)_v = \langle R_1, (N^1)_v \rangle \end{cases} \quad (2.2.29)$$

ve

$$\begin{cases} (h_2)_u = \langle R_2, (N^2)_u \rangle \\ (h_2)_v = \langle R_2, (N^2)_v \rangle \end{cases} \quad (2.2.30)$$

Şimdi tezimizin orijinal kısmında kullanacağımız bazı eşitlikleri elde edelim.

(2.2.23) eşitliği, sırasıyla $(R_1)_u$ ve $(R_1)_v$ vektörleri ile çarpılır ve düzenlenirse

$$-(\rho_1)_u = \frac{1}{(W^1)^2} \left\{ ((\rho_1)_v g_{12}^1 - (\rho_1)_u g_{22}^1) g_{11}^1 \right\} \quad (2.2.31)$$

ve

$$-(\rho_1)_v = \frac{1}{(W^1)^2} \left\{ ((\rho_1)_v g_{12}^1 - (\rho_1)_u g_{22}^1) g_{12}^1 \right\} \quad (2.2.32)$$

bulunur.

Benzer şekilde (2.2.23) eşitliği, sırasıyla $(R_2)_u$ ve $(R_2)_v$ vektörleri ile çarpılır ve düzenlenirse

$$-(\rho_2)_u = \frac{1}{(W^2)^2} \left\{ ((\rho_2)_v g_{12}^2 - (\rho_2)_u g_{22}^2) g_{11}^2 \right\} \quad (2.2.33)$$

ve

$$-(\rho_2)_v = \frac{1}{(W^2)^2} \left\{ ((\rho_2)_v g_{12}^2 - (\rho_2)_u g_{22}^2) g_{12}^2 \right\} \quad (2.2.34)$$

bulunur.

2.3. E^3 Öklid Uzayında İncers Yüzeyle

Bu kesimde sentetik geometriden diferansiyel geometriye uzanan oldukça karmaşık tarihe sahip olan incersiyon dönüşümü ile ilgili temel kavramlara ve literatür bilgilerine yer verilecektir.

Şimdi bu kesime incersiyon geometrinin kısa bir tarihçesini vererek başlayalım. Geometri ile ilgilenenler, çember ve küre gibi iki geometrik nesnenin varlığını ve önemini iyi bilirler. Incersiyon geometri ile ilgili çalışmaların izlerine pergelli matematikçi Apollonios'un eserlerinde rastlıyoruz.

Rosenfeld 1988 yılında yayımlanan “A History of Non-Euclidean Space” adlı eserinde, Apollonios' un “On Plane Loci” isimli kayıp olan çalışmasında, çembere göre bir incersiyon dönüşümünün çemberleri çemberlere dönüştürdüğünü ispatladığını ifade etmektedir(Rosenfeld, 1988). Çemberin incersiyonuna ilişkin bir gelişme de Alman matematikçi ve fizikçi Julius Plücker' in 1834 yılında yayımlanan “Analytisch - geometrie Aphorismen” isimli çalışmasında verilmiştir (Plücker, 1834). J. Plücker probleme analitik yaklaşmak suretiyle, incersiyon dönüşümünün doğrular ve çemberler arasındaki açılarının büyüklüğünü koruduğunu, yani incersiyon dönüşümünün konformal bir dönüşüm olduğunu gösterdi. Ayrıca İsviçreli matematikçi Jacob Steiner göz önüne aldığı noktaları bir noktanın çembere göre kuvveti ile ifade etmiştir. Düzlemde konformal dönüşümler İsviçreli matematikçi Leonhard Euler' in 1770 yılında yayımlanan “Considerationes de Trajectoriis Orthogonalibus” isimli çalışmasında incelenmiştir(Euler, 1770). L. Euler bu çalışmasında karmaşık düzlemin lineer kesirsel dönüşümlerini göz önüne almıştır. Küresel incersiyon İtalyan matematikçi Giusto Bellavitis in 1836 yılında yayımlanan “Teoria della figure inverse, e loro uso nella geometria elementare” isimli makalesinde ele almış ve stereografik izdüşümün bir küreden bir düzlem üzerine bir incersiyon olduğunu göstermiştir. Alman matematikçi B. Riemann 1857 yılında yayımlanan “Theorie der Abel'schen Functionen” isimli çalışmasında Riemann küresini araştırmıştır.

Bir Alman matematikçi olan A. Ferdinand Mobius 1852 yılında yayımlanan “Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren” isimli çalışmasında düzlemde dört noktanın çifte oranı kavramını kullanmıştır. Akabinde 1955 yılında

yayımlanan ‘‘Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung’’ isimli çalışmasında da düzlemin Mobius dönüşümlerini ele almıştır.

Kısaca tarihsel gelişiminden bahsettiğimiz dairesel ve küresel inversiyon dönüşümleri geometrinin iyi bilinen Apollonius problemi, Steiner porizmi, Feuerbach teoremi, Pappus zincir teoremi, Ptolemy teoremi ve konstrüksiyon problemlerine uygulanmalarının yanında, tıp, mühendislik, fizik, geometrik modelleme ve astronomi v.b. bilim dallarında önemli uygulamalara sahiptir.

şimdi de inversiyon dönüşümleri ile ilgili bazı kavramlara göz atalım.

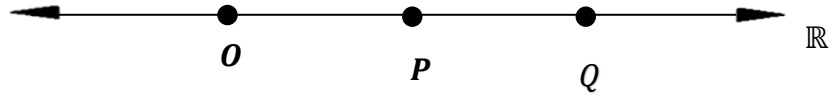
Tanım 2.3.1: E^2 'de doğrusal üç nokta O, P ve Q olsun. $k \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere

$$\overline{OP} \overline{OQ} = k \quad (2.3.1)$$

koşulu sağlanıyorsa, Q noktasına P noktasının O ya göre ‘‘inversi’’ ve O noktasına da ‘‘inversiyon merkezi’’ denir(Gay, 1912).

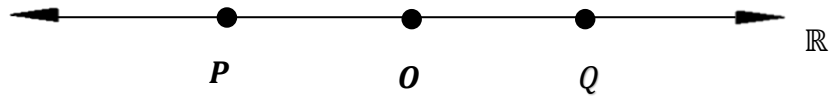
Burada P ve Q noktalarının konumları için iki durum söz konusudur.

P ve Q noktaları O noktasına göre aynı tarafta yer alıyorsa $k \in \mathbb{R}^+$ dır.



şekil 2.3.1. $k \in \mathbb{R}^+$ için invers noktaların konumu

P ve Q noktaları O noktasına göre aynı tarafta yer almıyorsa $k \in \mathbb{R}^-$ dır.



şekil 2.3.2. $k \in \mathbb{R}^-$ için invers noktaların konumu

Tanım 2.3.2: E^2 'de doğrusal üç nokta O, P ve Q olmak üzere, O merkezli r yarıçaplı bir ember

$$S_r^1 = \{X \in E^2: \overline{OX} = \|\overrightarrow{OX}\| = r = \sqrt{k}\} \quad (2.3.2)$$

olsun. O, P ve Q noktaları için

$$\overline{OP} \overline{OQ} = r^2 \quad (2.3.3)$$

koşulu sağlanıyorsa Q noktasına P 'nin S_r^1 çemberine göre “inversi”, S_r^1 e “inversiyon çemberi”, O noktasına “inversiyon çemberinin merkezi” ve $r \in \mathbb{R}$ sayısına da “inversiyon çemberinin yarıçapı” denir(Şekil 2.3.3), (Gay, 1912).

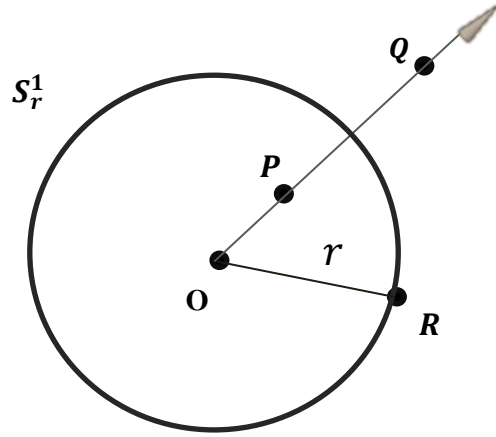
Aksi halde P, O ve Q noktaları için

$$\overline{PO} \overline{OQ} = -r^2 \quad (2.3.4)$$

dir(Şekil 2.3.4).

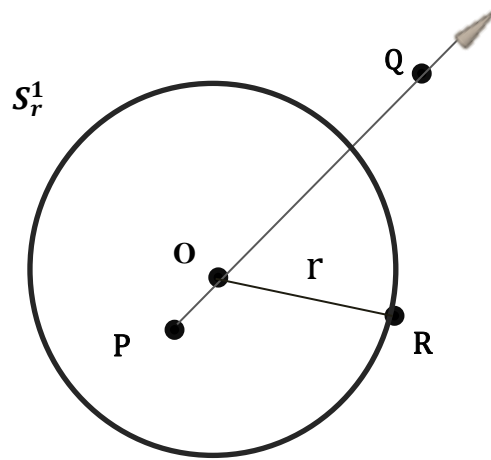
Burada P ve Q noktalarının konumları için iki durum söz konusudur.

P ve Q noktaları O noktasına göre aynı tarafta yer alıyorsa $k \in \mathbb{R}^+$ dır.



Şekil 2.3.3. $k \in \mathbb{R}^+$ için çembere göre invers noktaların konumu

P ve Q noktaları O noktasına göre aynı tarafta yer almıyorsa $k \in \mathbb{R}^-$ dır.



Şekil 2.3.4. $k \in \mathbb{R}^-$ için çembere göre invers noktaların konumu

İnversiyon dönüşümünün bazı önemli özelliklerini verebiliriz

P , S_r^1 çemberinin bir iç noktası ise P 'nin Q invers noktası çemberin dışındadır. Tersine P , S_r^1 çemberinin dışında ise Q invers noktası çemberin içindedir. S_r^1 çemberinin üzerindeki her noktanın inversi kendisidir. P noktası inversiyon merkezine yaklaştıkça Q invers noktası sonsuza doğru uzaklaşır. Yani merkezin inversi sonsuzdadır.

Tanım 2.3.3: $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ için

$$f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$P \rightarrow f(P) = \left(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) \quad (2.3.5)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona

$$S_r^1 = \{X = (x, y) \in E^2: \|\overrightarrow{OX}\| = r\}$$

çemberine göre “inversiyon dönüşümü” denir(Blair, 2000).

Benzer şekilde küresel inversiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.3.4: $P = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ için

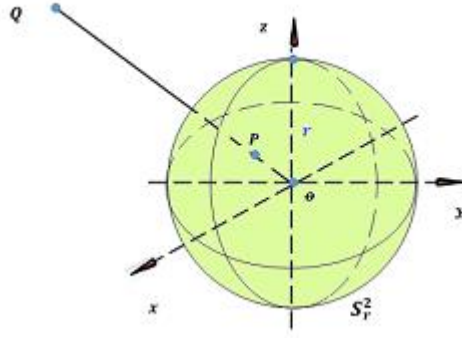
$$f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P \rightarrow f(P) = \left(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \frac{r^2 z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right) \quad (2.3.6)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona

$$S_r^2 = \{X = (x, y, z) \in E^3: \|\overrightarrow{OX}\| = r\}$$

küresine göre “inversiyon dönüşümü” denir(Blair, 2000).



Şekil 2.3.5. Küresel inversiyon

Şimdi aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.3.5: M, E^3 'de

$$X: D \subset E^2 \mapsto E^3$$

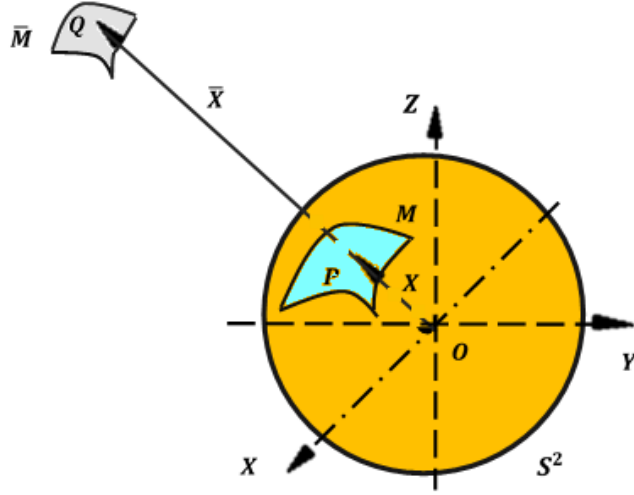
$$(u, v) \mapsto X = X(u, v)$$

parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. $P \in M$ ve $\rho = \|X\|$ olmak üzere konum vektörü

$$\bar{X} = \frac{1}{\rho^2} X \tag{2.3.7}$$

olan yüzeye M 'nin S^2 birim küresine göre inversi denir ve \bar{M} ile gösterilir.

(Sarioğlugil, 1994).



Şekil 2.3.6. Bir yüzeyin birim küreye göre inversi

3. FOKAL YÜZEYLERİN İNVERSLERİNİN GEOMETRİSİ

Bu bölüm de tezimizin de konusu olan E^3 'de regüler bir yüzeyin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerini araştırdık ve bazı temel karakteristik özelliklerini fokal yüzeylere bağlı olarak ifade edilmiştir.

Şimdi Tanım 2.2.2 ve Tanım 2.3.5 den yararlanarak bir yüzeyin fokal yüzeylerinin bir birim küreye göre invers yüzeylerini tanımlayacağız.

Tanım 3.1: M , E^3 'de $X = X(u, v)$ parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. $k_i, 1 \leq i \leq 2$ ve N sırasıyla M yüzeyinin asli eğrilikleri ve birim normal vektörü olmak üzere

$$M_1 \dots R_1(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{k_1(u, v)} N(u, v)$$

ve

$$M_2 \dots R_2(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{k_2(u, v)} N(u, v)$$

denklemleri ile tanımlı yüzeylere M 'nin "fokal yüzeyleri" denir(Abenna, 2017).

Tanım 2.3.5 vasıtasıyla, $\rho_1 = \|OR_1\| = \|R_1\|$ ve $\rho_2 = \|OR_2\| = \|R_2\|$ olmak üzere konum vektörleri

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{\rho_1^2} R_1 \tag{3.1}$$

ve

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{\rho_2^2} R_2 \quad (3.2)$$

olarak verilen yüzeylere S^2 birim küresine göre M_1 ve M_2 fokal yüzeylerinin invers yüzeyleri denir, \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 ile gösterilirler.

Teorem 3.1: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin konum vektörlerinin uzunlukları

$$\bar{\rho}_1^2 = \frac{1 - \nabla^i(\rho_1)}{(h_1)^2} \quad (3.3)$$

ve

$$\bar{\rho}_2^2 = \frac{1 - \nabla^i(\rho_2)}{(h_2)^2} \quad (3.4)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin konum vektörlerinin uzunlukları için

$$\bar{\rho}_1^2 = \langle \bar{R}_1, \bar{R}_1 \rangle \quad (3.5)$$

ve

$$\bar{\rho}_2^2 = \langle \bar{R}_2, \bar{R}_2 \rangle \quad (3.6)$$

yazılabilir. (3.1), (3.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1^2 &= \left\langle \frac{1}{\rho_1^2} R_1, \frac{1}{\rho_1^2} R_1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\rho_1^2} \end{aligned}$$

bulunur. (2.2.25) son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\bar{\rho}_1^2 = \frac{1 - \nabla^i(\rho_1)}{(h_1)^2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\bar{\rho}_2^2 = \frac{1 - \nabla(\rho_2)}{(h_2)^2}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin birim normal vektörleri

$$\bar{N}^1 = 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} R_1 - N^1 \quad (3.7)$$

ve

$$\bar{N}^2 = 2 \frac{h_2}{\rho_2^2} R_2 - N^2 \quad (3.8)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin birim normal vektörleri için

$$\bar{N}^1 = \frac{1}{\|(\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v\|} ((\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v) \quad (3.9)$$

ve

$$\bar{N}^2 = \frac{1}{\|(\bar{R}_2)_u \wedge (\bar{R}_2)_v\|} ((\bar{R}_2)_u \wedge (\bar{R}_2)_v) \quad (3.10)$$

yazılabilir.

İlk olarak (3.1) ve (3.2) eşitliklerinin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} (\bar{R}_1)_u = -\frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^3} R_1 + \frac{1}{\rho_1^2} (R_1)_u \\ (\bar{R}_1)_v = -\frac{2(\rho_1)_v}{\rho_1^3} R_1 + \frac{1}{\rho_1^2} (R_1)_v \end{cases} \quad (3.11)$$

ve

$$\begin{cases} (\bar{R}_2)_u = -\frac{2(\rho_2)_u}{\rho_2^3} R_2 + \frac{1}{\rho_2^2} (R_2)_u \\ (\bar{R}_2)_v = -\frac{2(\rho_2)_v}{\rho_2^3} R_2 + \frac{1}{\rho_2^2} (R_2)_v \end{cases} \quad (3.12)$$

bulunur.

Şimdi $(\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v$ ve $(\bar{R}_2)_u \wedge (\bar{R}_2)_v$ vektörlerini bulabiliriz.

(3.11) eşitliği $(\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v$ ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v &= -\frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^5} R_1 \wedge (R_1)_v - \frac{2(\rho_1)_v}{\rho_1^5} (R_1)_u \wedge R_1 \\ &\quad + \frac{1}{\rho_1^4} W^1 N^1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir.

Şimdi de $R_1 \wedge (R_1)_v$ ve $(R_1)_u \wedge R_1$ vektörlerini bulmalıyız.

O halde (2.2.23) eşitliği yardımıyla

$$R_1 \wedge (R_1)_v = h_1 N^1 \wedge (R_1)_v + \frac{\rho_1}{(W^1)^2} [(\rho_1)_u g_{22}^1 - (\rho_1)_v g_{12}^1] (R_1)_u \wedge (R_1)_v$$

ve

$$(R_1)_u \wedge R_1 = h_1 (R_1)_u \wedge N^1 + \frac{\rho_1}{(W^1)^2} [(\rho_1)_v g_{11}^1 - (\rho_1)_u g_{12}^1] (R_1)_u \wedge (R_1)_v$$

olarak elde edilir.

(2.1.74), (2.1.75) ve (2.2.10) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} R_1 \wedge (R_1)_v &= \frac{h_1}{W^1} [g_{12}^1 (R_1)_v - g_{22}^1 (R_1)_u] \\ &\quad + \frac{\rho_1}{(W^1)^2} [(\rho_1)_u g_{22}^1 - (\rho_1)_v g_{12}^1] W^1 N^1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (R_1)_u \wedge R_1 &= \frac{h_1}{W^1} [g_{12}^1 (R_1)_u - g_{11}^1 (R_1)_v] \\ &\quad + \frac{\rho_1}{(W^1)^2} [(\rho_1)_v g_{11}^1 - (\rho_1)_u g_{12}^1] W^1 N^1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

bulunur.

(3.14) ve (3.15) eşitlikleri (3.13) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$(\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v = \frac{W^1}{\rho_1^3} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} R_1 - N^1 \right] \quad (3.16)$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$\|(\bar{R}_1)_u \wedge (\bar{R}_1)_v\| = \frac{\bar{W}^1}{\rho_1^8} \quad (3.17)$$

dir.

(3.16) ve (3.17), (3.9) da yerlerine yazılırsa

$$\bar{N}^1 = 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} R_1 - N^1$$

elde edilir.

Benzer şekilde M_2 yüzeyinin birim normal vektörü

$$\bar{N}^2 = 2 \frac{h_2}{\rho_2^2} R_2 - N^2$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.3: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin destek fonksiyonları

$$\bar{h}_1 = \frac{h_1}{\rho_1^2} \quad (3.18)$$

ve

$$\bar{h}_2 = \frac{h_2}{\rho_2^2} \quad (3.19)$$

dir.

İspat: (2.1.18) eşitliği kullanılarak, \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin destek fonksiyonları için

$$\bar{h}_1 = \langle \bar{R}_1, \bar{N}^1 \rangle \quad (3.20)$$

ve

$$\bar{h}_2 = \langle \bar{R}_2, \bar{N}^2 \rangle \quad (3.21)$$

yazılabilir.

(3.1) ve (3.7) eşitlikleri (3.20) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1 &= 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} \langle R_1, R_1 \rangle - \frac{1}{\rho_1^2} \langle R_1, N^1 \rangle \\
&= 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} \rho_1^2 - \frac{1}{\rho_1^2} h_1 \\
&= \frac{h_1}{\rho_1^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (3.2) ve (3.8) eşitlikleri (3.21) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{h}_2 = \frac{h_2}{\rho_2^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.4: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{11}^1 \\ \bar{g}_{12}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{12}^1 \\ \bar{g}_{22}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{22}^1 \end{cases} \quad (3.22)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{11}^2 \\ \bar{g}_{12}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{12}^2 \\ \bar{g}_{22}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{22}^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları için

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^1 = \langle (\bar{R}_1)_u, (\bar{R}_1)_u \rangle \\ \bar{g}_{12}^1 = \langle (\bar{R}_1)_u, (\bar{R}_1)_v \rangle \\ \bar{g}_{22}^1 = \langle (\bar{R}_1)_v, (\bar{R}_1)_v \rangle \end{cases} \quad (3.24)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^2 = \langle (\bar{R}_2)_u, (\bar{R}_2)_u \rangle \\ \bar{g}_{12}^2 = \langle (\bar{R}_2)_u, (\bar{R}_2)_v \rangle \\ \bar{g}_{22}^2 = \langle (\bar{R}_2)_v, (\bar{R}_2)_v \rangle \end{cases} \quad (3.25)$$

yazılabilir. (3.11) eşitliği (3.24) de yerlerine yazılırsa, sırası ile

$$\bar{g}_{11}^1 = \frac{4(\rho_1)_u^2}{\rho_1^6} \langle R_1, R_1 \rangle - \frac{4(\rho_1)_u}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_u \rangle + \frac{1}{\rho_1^4} \langle (R_1)_u, (R_1)_u \rangle \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{12}^1 &= \frac{4(\rho_1)_u(\rho_1)_v}{\rho_1^6} \langle R_1, R_1 \rangle - \frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_v \rangle - \frac{2(\rho_1)_v}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_u \rangle \\ &+ \frac{1}{\rho_1^4} \langle (R_1)_u, (R_1)_v \rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

ve

$$\bar{g}_{22}^1 = \frac{4(\rho_1)_v^2}{\rho_1^6} \langle R_1, R_1 \rangle - \frac{4(\rho_1)_v}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_v \rangle + \frac{1}{\rho_1^4} \langle (R_1)_v, (R_1)_v \rangle \quad (3.28)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.10) ve (2.2.19) eşitlikleri (3.26), (3.27) ve (3.28) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} \mathbf{g}_{11}^1 \\ \bar{g}_{12}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} \mathbf{g}_{12}^1 \\ \bar{g}_{22}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} \mathbf{g}_{22}^1 \end{cases}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} \mathbf{g}_{11}^2 \\ \bar{g}_{12}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} \mathbf{g}_{12}^2 \\ \bar{g}_{22}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} \mathbf{g}_{22}^2 \end{cases}$$

bulunur. Buradan aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3. 1:

$$(\bar{W}^1)^2 = \bar{g}_{11}^1 \bar{g}_{22}^1 - (\bar{g}_{12}^1)^2 = \frac{1}{\rho_1^4} (W^1)^2 \quad (3.29)$$

ve

$$(\bar{W}^2)^2 = \bar{g}_{11}^2 \bar{g}_{22}^2 - (\bar{g}_{12}^2)^2 = \frac{1}{\rho_2^4} (W^2)^2 \quad (3.30)$$

dir.

Sonuç 3. 2: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin birinci temel formları sırasıyla

$$\bar{I}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} I^1 \quad (3.31)$$

ve

$$\bar{I}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} I^2 \quad (3.32)$$

dir.

Sonuç 3. 3: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin parametre eğrileri ortogonal ise

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{11}^1 \\ \bar{g}_{12}^1 = 0 \\ \bar{g}_{22}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{22}^1 \end{cases} \quad (3.33)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{11}^2 \\ \bar{g}_{12}^2 = 0 \\ \bar{g}_{22}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{22}^2 \end{cases} \quad (3.34)$$

dir.

Teorem 3.5: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right] \\ \bar{b}_{12}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1} g_{12}^1 + b_{12}^1 \right] \\ \bar{b}_{22}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right] \end{cases} \quad (3.35)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right] \\ \bar{b}_{12}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{12}^2 + b_{12}^2 \right] \\ \bar{b}_{22}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right] \end{cases} \quad (3.36)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci temel formun katsayıları için

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^1 = -\langle (\bar{R}_1)_u, (\bar{N}^1)_u \rangle \\ \bar{b}_{12}^1 = -\langle (\bar{R}_1)_u, (\bar{N}^1)_v \rangle \\ \bar{b}_{22}^1 = -\langle (\bar{R}_1)_v, (\bar{N}^1)_v \rangle \end{cases} \quad (3.37)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^2 = -\langle (\bar{R}_2)_u, (\bar{N}^2)_u \rangle \\ \bar{b}_{12}^2 = -\langle (\bar{R}_2)_u, (\bar{N}^2)_v \rangle \\ \bar{b}_{22}^2 = -\langle (\bar{R}_2)_v, (\bar{N}^2)_v \rangle \end{cases} \quad (3.38)$$

yazılabilir.

İlk olarak (3.7) ve (3.8) eşitliklerinin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınır

$$\begin{cases} (\bar{N}^1)_u = 2 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} R_1 + 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} (R_1)_u - (N^1)_u \\ (\bar{N}^1)_v = 2 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} R_1 + 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} (R_1)_v - (N^1)_v \end{cases} \quad (3.39)$$

ve

$$\begin{cases} (\bar{N}^2)_u = 2 \frac{(h_2)_u \rho_2 - 2h_2(\rho_2)_u}{\rho_2^3} R_2 + 2 \frac{h_2}{\rho_2^2} (R_2)_u - (N^2)_u \\ (\bar{N}^2)_v = 2 \frac{(h_2)_v \rho_2 - 2h_2(\rho_2)_v}{\rho_2^3} R_2 + 2 \frac{h_2}{\rho_2^2} (R_2)_v - (N^2)_v \end{cases} \quad (3.40)$$

bulunur.

İlk olarak \bar{M}_1 yüzeyinin ikinci temel formunun katsayılarını hesap edelim.

O halde (3.11) ve (3.39) eşitlikleri (3.35) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{11}^1 &= 4 \frac{(h_1)_u (\rho_1)_u \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_u^2}{\rho_1^6} \langle R_1, R_1 \rangle + 4 \frac{h_1 (\rho_1)_u}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_u \rangle \\
&\quad - \frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \langle R_1, (N^1)_u \rangle - 2 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_u}{\rho_1^5} \langle (R_1)_u, R_1 \rangle \\
&\quad - 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} \langle (R_1)_u, (R_1)_u \rangle + \frac{1}{\rho_1^2} \langle (R_1)_u, (N^1)_u \rangle
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{12}^1 &= 4 \frac{(h_1)_v (\rho_1)_u \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_u (\rho_1)_v}{\rho_1^6} \langle R_1, R_1 \rangle + 4 \frac{h_1 (\rho_1)_u}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_v \rangle \\
&\quad - \frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \langle R_1, (N^1)_v \rangle - 2 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_v}{\rho_1^5} \langle (R_1)_u, R_1 \rangle \\
&\quad - 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} \langle (R_1)_u, (R_1)_v \rangle + \frac{1}{\rho_1^2} \langle (R_1)_u, (N^1)_v \rangle
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{22}^1 &= 4 \frac{(h_1)_v (\rho_1)_v \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_v^2}{\rho_1^6} \langle R_1, R_1 \rangle + 4 \frac{h_1 (\rho_1)_v}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_v \rangle \\
&\quad - \frac{2(\rho_1)_v}{\rho_1^3} \langle R_1, (N^1)_v \rangle - 2 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_v}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_v \rangle \\
&\quad - 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} \langle (R_1)_v, (R_1)_v \rangle + \frac{1}{\rho_1^2} \langle (R_1)_v, (N^1)_v \rangle
\end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.10), (2.2.19) ve (2.2.29) eşitlikleri ile M_1 fokal yüzeyinin ikinci temel formunun katsayılarını veren

$$\begin{cases}
b_{11}^1 = -\langle (R_1)_u, (N^1)_u \rangle \\
b_{12}^1 = -\langle (R_1)_u, (N^1)_v \rangle \\
b_{22}^1 = -\langle (R_1)_v, (N^1)_v \rangle
\end{cases}$$

formülü göz önüne alınırsa (3.39), (3.40) ve (3.41) den

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{11}^1 &= 4 \frac{(h_1)_u (\rho_1)_u \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_u^2}{\rho_1^6} \rho_1^2 + 4 \frac{h_1 (\rho_1)_u}{\rho_1^5} \rho_1 (\rho_1)_u - \frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^3} (h_1)_u \\
&\quad - 2 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1 (\rho_1)_u}{\rho_1^5} \rho_1 (\rho_1)_u - 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} g_{11}^1 - \frac{1}{\rho_1^2} b_{11}^1 \\
&= -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{12}^1 &= 4 \frac{(h_1)_v(\rho_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u(\rho_1)_v}{\rho_1^6} \rho_1^2 + 4 \frac{h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^5} \rho_1(\rho_1)_v - \frac{2(\rho_1)_u}{\rho_1^3} (h_1)_v \\
&\quad - 2 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^5} \rho_1(\rho_1)_u - 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} g_{12}^1 - \frac{1}{\rho_1^2} b_{12}^1 \\
&= -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{12}^1 + b_{12}^1 \right] \tag{3.45}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{22}^1 &= 4 \frac{(h_1)_v(\rho_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v^2}{\rho_1^6} \rho_1^2 + 4 \frac{h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^5} \rho_1(\rho_1)_v - \frac{2(\rho_1)_v}{\rho_1^3} (h_1)_v \\
&\quad - 2 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^5} \rho_1(\rho_1)_v - 2 \frac{h_1}{\rho_1^4} g_{22}^1 - \frac{1}{\rho_1^2} b_{22}^1 \\
&= -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right] \tag{3.46}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç olarak (3.44), (3.45) ve (3.46) eşitlikleri birleştirilirse

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right] \\ \bar{b}_{12}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{12}^1 + b_{12}^1 \right] \\ \bar{b}_{22}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right] \end{cases}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right] \\ \bar{b}_{12}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{12}^2 + b_{12}^2 \right] \\ \bar{b}_{22}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right] \end{cases}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci temel formları sırasıyla

$$\bar{II}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} I + II \right] \quad (3.47)$$

ve

$$\bar{II}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} I + II \right] \quad (3.48)$$

dir.

Sonuç 3.5: M_1 ve M_2 fokal yüzeylerinin parametre eğrileri birer eğrilik çizgisi olsunlar. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right] \\ \bar{b}_{12}^1 = 0 \\ \bar{b}_{22}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right] \end{cases} \quad (3.49)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{b}_{11}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right] \\ \bar{b}_{12}^2 = 0 \\ \bar{b}_{22}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right] \end{cases} \quad (3.50)$$

dir.

Teorem 3.6: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin üçüncü temel formun katsayıları

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right) + n_{11}^1 \\ \bar{n}_{12}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{12}^1 + b_{12}^1 \right) + n_{12}^1 \\ \bar{n}_{22}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right) + n_{22}^1 \end{cases} \quad (3.51)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right) + n_{11}^2 \\ \bar{n}_{12}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{12}^2 + b_{12}^2 \right) + n_{12}^2 \\ \bar{n}_{22}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right) + n_{22}^2 \end{cases} \quad (3.52)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin üçüncü temel formlarının katsayıları için

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^1 = \langle (\bar{N}^1)_u, (\bar{N}^1)_u \rangle \\ \bar{n}_{12}^1 = \langle (\bar{N}^1)_u, (\bar{N}^1)_v \rangle \\ \bar{n}_{22}^1 = \langle (\bar{N}^1)_v, (\bar{N}^1)_v \rangle \end{cases} \quad (3.53)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^2 = \langle (\bar{N}^2)_u, (\bar{N}^2)_u \rangle \\ \bar{n}_{12}^2 = \langle (\bar{N}^2)_u, (\bar{N}^2)_v \rangle \\ \bar{n}_{22}^2 = \langle (\bar{N}^2)_v, (\bar{N}^2)_v \rangle \end{cases} \quad (3.54)$$

yazılabilir. (3.37) eşitliği (3.46) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, sırası ile

$$\begin{aligned} \bar{n}_{11}^1 &= 4 \left[\frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \right]^2 \langle R_1, R_1 \rangle + 8 \frac{h_1(h_1)_u \rho_1 - 2h_1^2(\rho_1)_u}{\rho_1^5} \langle R_1, (R_1)_u \rangle \\ &\quad - 4 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \langle R_1, (N^1)_u \rangle + 4 \frac{h_1^2}{\rho_1^4} \langle (R_1)_u, (R_1)_u \rangle \\ &\quad + 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \langle (R_1)_u, (N^1)_u \rangle + \langle (N^1)_u, (N^1)_u \rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_{12}^1 &= 4 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} \langle R_1, R_1 \rangle + 8 \frac{h_1}{\rho_1^2} \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \langle R_1, (R_1)_v \rangle \\ &\quad - 4 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \langle R_1, (N^1)_v \rangle + 4 \frac{h_1^2}{\rho_1^4} \langle (R_1)_u, (R_1)_v \rangle + 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \langle (R_1)_u, (N^1)_v \rangle \\ &\quad + \langle (N^1)_u, (N^1)_v \rangle \end{aligned} \quad (3.56)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{n}_{22}^1 &= 4 \frac{((h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v)^2}{\rho_1^7} \langle R_1, R_1 \rangle + 8 \frac{h_1}{\rho_1^2} \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} \langle R_1, (R_1)_v \rangle \\ &\quad - 4 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} \langle R_1, (N^1)_v \rangle + 4 \frac{h_1^2}{\rho_1^4} \langle (R_1)_v, (R_1)_v \rangle \\ &\quad + 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \langle (R_1)_v, (N^1)_v \rangle + \langle (N^1)_v, (N^1)_v \rangle \end{aligned} \quad (3.57)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.10), (2.2.19) ve (2.2.29) eşitlikleri ile M_1 fokal yüzeyinin üçüncü temel formunun katsayılarını veren

$$\begin{cases} n_{11}^1 = \langle (N^1)_u, (N^1)_u \rangle \\ n_{12}^1 = \langle (N^1)_u, (N^1)_v \rangle \\ n_{22}^1 = \langle (N^1)_v, (N^1)_v \rangle \end{cases}$$

formülü göz önüne alınırsa (3.48), (3.49) ve (3.50) den

$$\begin{aligned}
\bar{n}_{11}^1 &= 4 \left[\frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \right]^2 \rho_1^2 + 8 \frac{h_1(h_1)_u \rho_1 - 2h_1^2(\rho_1)_u}{\rho_1^5} \rho_1(\rho_1)_u \\
&\quad - 4 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} (h_1)_u + 4 \frac{h_1^2}{\rho_1^4} g_{11}^1 + 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} b_{11}^1 + n_{11}^1 \\
&= 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right) + n_{11}^1 \tag{3.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{n}_{12}^1 &= 4 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} \rho_1^2 + 8 \frac{h_1}{\rho_1^2} \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} \rho_1(\rho_1)_v \\
&\quad - 4 \frac{(h_1)_u \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_u}{\rho_1^3} (h_1)_v + 4 \frac{h_1^2}{\rho_1^4} g_{12}^1 + 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} b_{12}^1 + n_{12}^1 \\
&= 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{12}^1 + b_{12}^1 \right) + n_{12}^1 \tag{3.59}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{n}_{22}^1 &= 4 \frac{((h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v)^2}{\rho_1^7} \rho_1^2 + 8 \frac{h_1}{\rho_1^2} \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} \rho_1(\rho_1)_v \\
&= 4 \frac{(h_1)_v \rho_1 - 2h_1(\rho_1)_v}{\rho_1^3} (h_1)_v + 4 \frac{h_1^2}{\rho_1^4} g_{22}^1 + 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} b_{22}^1 + n_{22}^1 \\
&= 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right) + n_{22}^1 \tag{3.60}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.58), (3.59) ve (3.60) birleştirilirse

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right) + n_{11}^1 \\ \bar{n}_{12}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{12}^1 + b_{12}^1 \right) + n_{12}^1 \\ \bar{n}_{22}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right) + n_{22}^1 \end{cases}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right) + n_{11}^2 \\ \bar{n}_{12}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{12}^2 + b_{12}^2 \right) + n_{12}^2 \\ \bar{n}_{22}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right) + n_{22}^2 \end{cases}$$

bulunur.

Sonuç 3.6: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin parametre eğrileri eğrilik çizgisi ise

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right) + n_{11}^1 \\ \bar{n}_{12}^1 = 0 \\ \bar{n}_{22}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right) + n_{22}^1 \end{cases} \quad (3.61)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{n}_{11}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right) + n_{11}^2 \\ \bar{n}_{12}^2 = 0 \\ \bar{n}_{22}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right) + n_{22}^2 \end{cases} \quad (3.62)$$

dir.

Sonuç 3.7: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin üçüncü temel formları

$$\bar{III}^1 = 4 \frac{h_1}{\rho_1^2} \left(\frac{h_1}{\rho_1^2} I^1 + II^1 \right) + III^1 \quad (3.63)$$

ve

$$\bar{III}^2 = 4 \frac{h_2}{\rho_2^2} \left(\frac{h_2}{\rho_2^2} I^2 + II^2 \right) + III^2 \quad (3.64)$$

dir.

Teorem 3.7: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin Gauss eğrilikleri sırasıyla

$$\bar{K}^1 = 4(h_1)^2 + 4h_1\rho_1^2H^1 + \rho_1^4K^1 \quad (3.65)$$

ve

$$\bar{K}^2 = 4(h_2)^2 + 4h_2\rho_2^2H^2 + \rho_2^4K^2 \quad (3.66)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin Gauss eğrilikleri için

$$\bar{K}^1 = \frac{\bar{b}_{11}^1 \bar{b}_{22}^1 - (\bar{b}_{12}^1)^2}{\bar{g}_{11}^1 \bar{g}_{22}^1 - (\bar{g}_{12}^1)^2} \quad (3.67)$$

ve

$$\bar{K}^2 = \frac{\bar{b}_{11}^2 \bar{b}_{22}^2 - (\bar{b}_{12}^2)^2}{\bar{g}_{11}^2 \bar{g}_{22}^2 - (\bar{g}_{12}^2)^2} \quad (3.68)$$

yazılabilir. (3.29) ve (3.33) eşitlikleri (3.67) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{K}^1 = \frac{\rho_1^4}{(W^1)^2} \left[\begin{array}{c} 4 \frac{(h_1)^2}{\rho_1^4} (g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2) \\ + 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} (g_{11}^1 b_{22}^1 - 2g_{12}^1 b_{12}^1 + 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 b_{11}^1) \\ + b_{11}^1 b_{22}^1 - (b_{12}^1)^2 \end{array} \right] \quad (3.69)$$

elde edilir.

(2.2.20) eşitliği ile M_1 fokal yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik

$$K^1 = \frac{b_{11}^1 b_{22}^1 - (b_{12}^1)^2}{g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2} \quad (3.70)$$

ve

$$H^1 = \frac{b_{11}^1 g_{22}^1 - 2b_{12}^1 g_{12}^1 + g_{11}^1 b_{22}^1}{2(g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2)} \quad (3.71)$$

formülleri göz önüne alınırsa (3.69) dan

$$\begin{aligned} \bar{K}^1 &= \frac{\rho_1^4}{(W^1)^2} \left[4 \frac{(h_1)^2}{\rho_1^4} (W^1)^2 + 2 \frac{h_1}{\rho_1^2} (W^1)^2 H^1 + K^1 (W^1)^2 \right] \\ &= 4(h_1)^2 + 4h_1 \rho_1^2 H^1 + \rho_1^4 K^1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\bar{K}^2 = 4(h_2)^2 + 4h_2 \rho_2^2 H^2 + \rho_2^4 K^2$$

bulunur.

Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.8: M_1 ve M_2 açılabilir fokal yüzeylerin invers yüzeyleri açılabilir yüzeyler değildir. Bu önermenin tersi de doğrudur.

Teorem 3.8: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\bar{H}^1 = -[2h_1 + \rho_1^2 H^1] \quad (3.72)$$

ve

$$\bar{H}^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 H^2] \quad (3.73)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ortalama eğrilikleri için

$$\bar{H}^1 = \frac{\bar{g}_{11}^1 \bar{b}_{22}^1 - 2\bar{g}_{12}^1 \bar{b}_{12}^1 + \bar{g}_{22}^1 \bar{b}_{11}^1}{2(\bar{W}^1)^2} \quad (3.74)$$

ve

$$\bar{H}^2 = \frac{\bar{g}_{11}^2 \bar{b}_{22}^2 - 2\bar{g}_{12}^2 \bar{b}_{12}^2 + \bar{g}_{22}^2 \bar{b}_{11}^2}{2(\bar{W}^2)^2} \quad (3.75)$$

yazılabilir. (3.22), (3.29) ve (3.33) eşitlikleri (3.74) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{H}^1 = \frac{-\frac{1}{\rho_1^6} \left[4 \frac{h_1}{\rho_1^2} [g_{11}^1 g_{22}^1 - (g_{12}^1)^2] + b_{22}^1 g_{11}^1 - 2b_{12}^1 g_{12}^1 + b_{11}^1 g_{22}^1 \right]}{2 \frac{1}{\rho_1^4} (W^1)^2} \quad (3.76)$$

elde edilir. (2.2.20), (3.70) ve (3.71) eşitlikleri göz önüne alınırsa (3.76) dan

$$\begin{aligned} \bar{H}^1 &= \frac{-\frac{1}{\rho_1^6} \left[4 \frac{h_1}{\rho_1^2} (W^1)^2 + 2H^1 (W^1)^2 \right]}{2 \frac{1}{\rho_1^4} (W^1)^2} \\ &= -[2h_1 + \rho_1^2 H^1] \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\bar{H}^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 H^2]$$

bulunur.

Sonuç 3.9: M_1 ve M_2 minimal fokal yüzeylerin invers yüzeyleri minimal yüzeyler değildir. Bu önermenin tersi de doğrudur.

Teorem 3.9: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin asli eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{cases} \bar{k}_1^1 = -[2h_1 + \rho_1^2 k_1^1] \\ \bar{k}_2^1 = -[2h_1 + \rho_1^2 k_2^1] \end{cases} \quad (3.77)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{k}_1^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 k_1^2] \\ \bar{k}_2^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 k_2^2] \end{cases} \quad (3.78)$$

dir.

İspat: (2.1.65) den \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin asli eğrilikleri için, $1 \leq i \leq 2$

$$\bar{k}_i^1 = \bar{H}^1 \pm \sqrt{(\bar{H}^1)^2 - \bar{K}^1} \quad (3.79)$$

ve

$$\bar{k}_i^2 = \bar{H}^2 \pm \sqrt{(\bar{H}^2)^2 - \bar{K}^2} \quad (3.80)$$

yazılır. (3.65) ve (3.72) eşitlikleri (3.79) da yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \bar{k}_1^1 &= -[2h_1 + \rho_1^2 H^1] - \sqrt{[2h_1 + \rho_1^2 H^1]^2 - 4(h_1)^2 - 4h_1 \rho_1^2 H^1 - \rho_1^4 K^1} \\ &= -[2h_1 + \rho_1^2 H^1] - \rho_1^2 \sqrt{(H^1)^2 - K^1} \\ &= -\left[2h_1 + \rho_1^2 \left(H^1 + \sqrt{(H^1)^2 - K^1}\right)\right] \\ &= -[2h_1 + \rho_1^2 k_1^1] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{k}_2^1 &= -[2h_1 + \rho_1^2 H^1] + \sqrt{[2h_1 + \rho_1^2 H^1]^2 - 4(h_1)^2 - 4h_1 \rho_1^2 H^1 - \rho_1^4 K^1} \\ &= -[2h_1 + \rho_1^2 H^1] + \rho_1^2 \sqrt{(H^1)^2 - K^1} \\ &= -\left[2h_1 + \rho_1^2 \left(H^1 - \sqrt{(H^1)^2 - K^1}\right)\right] \\ &= -[2h_1 + \rho_1^2 k_2^1] \end{aligned}$$

dir

Benzer şekilde (3.66) ve (3.73) eşitlikleri (3.80) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\bar{k}_1^2 &= -[2h_2 + \rho_2^2 H^2] - \sqrt{[2h_2 + \rho_2^2 H^2]^2 - 4(h_2)^2 - 4h_2 \rho_2^2 H^2 - \rho_2^4 K^2} \\
&= -[2h_2 + \rho_2^2 H^2] - \rho_3^2 \sqrt{(H^2)^2 - K^2} \\
&= -\left[2h_2 + \rho_2^2 \left(H^2 + \sqrt{(H^2)^2 - K^2}\right)\right] \\
&= -[2h_2 + \rho_2^2 k_1^2]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{k}_2^2 &= -[2h_2 + \rho_2^2 H^2] + \sqrt{[2h_2 + \rho_2^2 H^2]^2 - 4(h_2)^2 - 4h_2 \rho_2^2 H^2 - \rho_2^4 K^2} \\
&= -[2h_2 + \rho_2^2 H^2] + \rho_3^2 \sqrt{(H^2)^2 - K^2} \\
&= -\left[2h_2 + \rho_2^2 \left(H^2 - \sqrt{(H^2)^2 - K^2}\right)\right] \\
&= -[2h_2 + \rho_2^2 k_2^2]
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu ise ispatı tamamlar.

Eğer M regüler yüzeyinin parametre eğrileri, eğrilik çizgisi ise $g_{12} = b_{12} = 0$ yazılır. O halde (3.22) ve (3.23)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_{11}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{11}^1 \\ \bar{g}_{12}^1 = 0 \\ \bar{g}_{22}^1 = \frac{1}{\rho_1^4} g_{22}^1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{11}^1 + b_{11}^1 \right] \\ \bar{b}_{12}^1 = 0 \\ \bar{b}_{22}^1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \left[2 \frac{h_1}{\rho_1^2} g_{22}^1 + b_{22}^1 \right] \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_{11}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{11}^2 \\ \bar{g}_{12}^2 = 0 \\ \bar{g}_{22}^2 = \frac{1}{\rho_2^4} g_{22}^2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_{11}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{11}^2 + b_{11}^2 \right] \\ \bar{b}_{12}^2 = 0 \\ \bar{b}_{22}^2 = -\frac{1}{\rho_2^2} \left[2 \frac{h_2}{\rho_2^2} g_{22}^2 + b_{22}^2 \right] \end{array} \right.$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler Olin de Rodriquez formüllerinde yerlerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_1^1 = -[2h_1 + \rho_1^2 k_1^1] \\ \bar{k}_1^2 = -[2h_1 + \rho_1^2 k_1^2] \end{array} \right.$$

ve

$$\begin{cases} \bar{k}_1^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 k_1^2] \\ \bar{k}_2^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 k_2^2] \end{cases}$$

elde edilir.

Ayrıca burada parametre eğrilerinin birer eğrilik çizgisi olma özelliğinin korunduğu söylenebilir.

Teorem 3.10: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin normal eğrilikleri

$$\bar{k}_n^1 = -[2h_1 + \rho_1^2 k_n^1] \quad (3.81)$$

ve

$$\bar{k}_n^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 k_n^2] \quad (3.82)$$

dir.

İspat: (2.1.59) den \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin normal eğrilikleri için

$$\bar{k}_n^1 = \frac{\bar{\Pi}^1}{\bar{I}^1} \quad (3.83)$$

ve

$$\bar{k}_n^2 = \frac{\bar{\Pi}^2}{\bar{I}^2} \quad (3.84)$$

yazılır. (3.31), (3.32), (3.47) ve (3.48) eşitlikleri (3.83) ve (3.84) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{k}_n^1 = -[2h_1 + \rho_1^2 k_n^1]$$

ve

$$\bar{k}_n^2 = -[2h_2 + \rho_2^2 k_n^2]$$

elde edilir.

Teorem 3.11: E^3 'de bir M regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri M_1 ve M_2 olsun. Bu takdirde

$$\begin{cases} \sigma_1^1 = g_{12}^1(\rho_1)_u - g_{11}^1(\rho_1)_v \\ \sigma_2^1 = g_{12}^1(\rho_1)_v - g_{22}^1(\rho_1)_u \end{cases} \quad (3.85)$$

ve

$$\begin{cases} \delta_1^2 = g_{12}^2(\rho_2)_u - g_{11}^1(\rho_2)_v \\ \delta_2^2 = g_{12}^2(\rho_2)_v - g_{22}^2(\rho_2)_u \end{cases} \quad (3.86)$$

olmak üzere, \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci tipten Christoffel sembolleri

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_u - \frac{\sigma_1^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_v + \frac{\sigma_2^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^1 - \frac{2\sigma_2^1}{\rho_1(W^1)^2} g_{22}^1 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^1 - \frac{2\sigma_1^1}{\rho_1(W^1)^2} g_{11}^1 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_u + \frac{\sigma_1^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_v - \frac{\sigma_2^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3.87)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_u - \frac{\delta_1^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_v + \frac{\delta_2^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^2 - \frac{2\delta_2^2}{\rho_2(W^2)^2} g_{22}^2 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^2 - \frac{2\delta_1^2}{\rho_2(W^2)^2} g_{11}^2 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_u + \frac{\delta_1^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_v - \frac{\delta_2^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3.88)$$

dir.

İspat: \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci tipten Christoffel sembolleri için

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^1 = \frac{\bar{g}_{22}^1(\bar{g}_{11}^1)_u - 2\bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{12}^1)_u + \bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{11}^1)_v}{2(\bar{W}^1)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^1 = \frac{\bar{g}_{22}^1(\bar{g}_{11}^1)_v - \bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{22}^1)_u}{2(\bar{W}^1)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^1 = -\frac{\bar{g}_{22}^1(\bar{g}_{22}^1)_u - 2\bar{g}_{22}^1(\bar{g}_{12}^1)_v + \bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{22}^1)_v}{2(\bar{W}^1)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^1 = -\frac{\bar{g}_{11}^1(\bar{g}_{11}^1)_v - 2\bar{g}_{11}^1(\bar{g}_{12}^1)_u + \bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{11}^1)_u}{2(\bar{W}^1)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^1 = \frac{\bar{g}_{11}^1(\bar{g}_{22}^1)_u - \bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{11}^1)_v}{2(\bar{W}^1)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^1 = \frac{\bar{g}_{11}^1(\bar{g}_{22}^1)_v - 2\bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{12}^1)_v + \bar{g}_{12}^1(\bar{g}_{22}^1)_u}{2(\bar{W}^1)^2} \end{array} \right. \quad (3.89)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^2 = \frac{\bar{g}_{22}^2(\bar{g}_{11}^2)_u - 2\bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{12}^2)_u + \bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{11}^2)_v}{2(\bar{W}^2)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 = \frac{\bar{g}_{22}^2(\bar{g}_{11}^2)_v - \bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{22}^2)_u}{2(\bar{W}^2)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^2 = -\frac{\bar{g}_{22}^2(\bar{g}_{22}^2)_u - 2\bar{g}_{22}^2(\bar{g}_{12}^2)_v + \bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{22}^2)_v}{2(\bar{W}^2)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^2 = -\frac{\bar{g}_{11}^2(\bar{g}_{11}^2)_v - 2\bar{g}_{11}^2(\bar{g}_{12}^2)_u + \bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{11}^2)_u}{2(\bar{W}^2)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^2 = \frac{\bar{g}_{11}^2(\bar{g}_{22}^2)_u - \bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{11}^2)_v}{2(\bar{W}^2)^2} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^2 = \frac{\bar{g}_{11}^2(\bar{g}_{22}^2)_v - 2\bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{12}^2)_v + \bar{g}_{12}^2(\bar{g}_{22}^2)_u}{2(\bar{W}^2)^2} \end{array} \right. \quad (3.90)$$

yazılabilir.

İlk olarak (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{g}_{11}^1)_u = -4 \frac{(\rho_1)_u}{(\rho_1)^5} g_{11}^1 + \frac{1}{(\rho_1)^4} (g_{11}^1)_u \\ (\bar{g}_{11}^1)_v = -4 \frac{(\rho_1)_v}{(\rho_1)^4} g_{11}^1 + \frac{1}{(\rho_1)^4} (g_{11}^1)_v \\ (\bar{g}_{12}^1)_u = -4 \frac{(\rho_1)_u}{(\rho_1)^4} g_{12}^1 + \frac{1}{(\rho_1)^4} (g_{11}^1)_u \\ (\bar{g}_{12}^1)_v = -4 \frac{(\rho_1)_v}{(\rho_1)^4} g_{12}^1 + \frac{1}{(\rho_1)^4} (g_{11}^1)_v \\ (\bar{g}_{22}^1)_u = -4 \frac{(\rho_1)_u}{(\rho_1)^4} g_{22}^1 + \frac{1}{(\rho_1)^4} (g_{22}^1)_u \\ (\bar{g}_{22}^1)_v = -4 \frac{(\rho_1)_v}{(\rho_1)^4} g_{22}^1 + \frac{1}{(\rho_1)^4} (g_{22}^1)_v \end{array} \right. \quad (3.91)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{g}_{11}^2)_u = -4 \frac{(\rho_2)_u}{(\rho_2)^5} g_{11}^2 + \frac{1}{(\rho_2)^4} (g_{11}^2)_u \\ (\bar{g}_{11}^2)_v = -4 \frac{(\rho_2)_v}{(\rho_2)^5} g_{11}^2 + \frac{1}{(\rho_2)^4} (g_{11}^2)_v \\ (\bar{g}_{12}^2)_u = -4 \frac{(\rho_2)_u}{(\rho_2)^5} g_{12}^2 + \frac{1}{(\rho_2)^4} (g_{11}^2)_u \\ (\bar{g}_{12}^2)_v = -4 \frac{(\rho_2)_v}{(\rho_2)^5} g_{12}^2 + \frac{1}{(\rho_2)^4} (g_{11}^2)_v \\ (\bar{g}_{22}^2)_u = -4 \frac{(\rho_2)_u}{(\rho_2)^5} g_{22}^2 + \frac{1}{(\rho_2)^4} (g_{22}^2)_u \\ (\bar{g}_{22}^2)_v = -4 \frac{(\rho_2)_v}{(\rho_2)^5} g_{22}^2 + \frac{1}{(\rho_2)^4} (g_{22}^2)_v \end{array} \right. \quad (3.92)$$

bulunur. (3.22) ve (3.91) eşitlikleri (3.89) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\bar{\Gamma}_{11}^1)^1 = \frac{1}{2(W^1)^2} \left[-\frac{4(\rho_1)_u}{(\rho_1)^5} (W^1)^2 + \frac{4}{(\rho_1)^5} [((\rho_1)_u g_{12}^1 - (\rho_1)_v g_{11}^1) g_{12}^1] + \frac{2}{(\rho_1)^4} (W^1)^2 (\Gamma_{11}^1)^1 \right]$$

bulunur.

Bu eşitlikte

$$\sigma_2^1 = g_{12}^1(\rho_1)_u - g_{11}^1(\rho_1)_v$$

olarak alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\bar{\Gamma}_{11}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_u - \frac{\sigma_1^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \quad (3.93)$$

elde edilir.

Benzer yol izlenerek

$$(\bar{\Gamma}_{12}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_v + \frac{\sigma_2^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \quad (3.94)$$

$$(\bar{\Gamma}_{22}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^1 - \frac{2\sigma_2^1}{\rho_1(W^1)^2} g_{22}^1 \right\} \quad (3.95)$$

$$(\bar{\Gamma}_{11}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^1 - \frac{2\sigma_1^1}{\rho_1(W^1)^2} g_{11}^1 \right\} \quad (3.96)$$

$$(\bar{\Gamma}_{12}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_u + \frac{\sigma_1^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \quad (3.97)$$

$$(\bar{\Gamma}_{22}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_v - \frac{\sigma_2^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \quad (3.98)$$

elde edilir. Burada

$$\sigma_2^1 = g_{12}^1(\rho_1)_v - g_{22}^1(\rho_1)_u$$

dir.

Böylece

$$\begin{cases} \sigma_1^1 = g_{12}^1(\rho_1)_u - g_{11}^1(\rho_1)_v \\ \sigma_2^1 = g_{12}^1(\rho_1)_v - g_{22}^1(\rho_1)_u \end{cases}$$

olmak üzere (3.93), (3.94), (3.95), (3.96), (3.97) ve (3.98) eşitlikleri birleştirilirse

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_u - \frac{\sigma_1^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_v + \frac{\sigma_2^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^1 - \frac{2\sigma_2^1}{\rho_1(W^1)^2} g_{22}^1 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^1 - \frac{2\sigma_1^1}{\rho_1(W^1)^2} g_{11}^1 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_u + \frac{\sigma_1^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^1 - \frac{2}{\rho_1} \left[(\rho_1)_v - \frac{\sigma_2^1}{(W^1)^2} g_{12}^1 \right] \right\} \end{array} \right.$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.23) ve (3.92) eşitlikleri (3.90) da yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\bar{\Gamma}_{11}^1)^2 = \frac{1}{2(W^2)^2} \left[-\frac{4(\rho_2)_u}{(\rho_2)^5} (W^2)^2 + \frac{4}{(\rho_2)^5} [(\rho_2)_u g_{12}^2 - (\rho_2)_v g_{11}^2] g_{12}^2 \right] + \frac{2}{(\rho_2)^4} (W^2)^2 (\Gamma_{11}^2)^1$$

bulunur.

Bu eşitlikte

$$\delta_1^2 = g_{12}^2 (\rho_2)_u - g_{11}^2 (\rho_2)_v$$

alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\bar{\Gamma}_{11}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_u - \frac{\delta_1^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \quad (3.99)$$

elde edilir.

Benzer düşünce ile

$$(\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_v + \frac{\delta_2^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \quad (3.100)$$

$$(\bar{\Gamma}_{22}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^2 - \frac{2\delta_2^2}{\rho_2(W^2)^2} g_{22}^2 \right\} \quad (3.101)$$

$$(\bar{\Gamma}_{11}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^2 - \frac{2\delta_1^2}{\rho_2(W^2)^2} g_{11}^2 \right\} \quad (3.102)$$

$$(\bar{\Gamma}_{12}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_u + \frac{\delta_1^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \quad (3.103)$$

$$(\bar{\Gamma}_{22}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_v - \frac{\delta_2^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \quad (3.104)$$

elde edilir. Burada

$$\delta_2^2 = g_{12}^2(\rho_2)_v - g_{22}^2(\rho_2)_u$$

dır. Bu durumda

$$\begin{cases} \delta_1^2 = g_{12}^2(\rho_2)_u - g_{11}^2(\rho_2)_v \\ \delta_2^2 = g_{12}^2(\rho_2)_v - g_{22}^2(\rho_2)_u \end{cases}$$

olmak üzere (3.99), (3.100), (3.101), (3.102), (3.103) ve (3.104) eşitlikleri birleştirilirse

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_u - \frac{\sigma_1^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_v + \frac{\sigma_2^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^2 - \frac{2\sigma_2^2}{\rho_2(W^2)^2} g_{22}^2 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^2 - \frac{2\sigma_1^2}{\rho_2(W^2)^2} g_{11}^2 \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_u + \frac{\sigma_1^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^2 - \frac{2}{\rho_2} \left[(\rho_2)_v - \frac{\sigma_2^2}{(W^2)^2} g_{12}^2 \right] \right\} \end{array} \right.$$

bulunur.

Eğer M_1 ve M_2 fokal yüzeylerin parametre eğrileri ortogonal iseler $g_{12}^1 = 0$ ve $g_{12}^2 = 0$ olacağından

$$\begin{cases} \sigma_1^1 = -g_{11}^1(\rho_1)_v \\ \sigma_2^1 = -g_{22}^1(\rho_1)_u \end{cases} \quad (3.105)$$

ve

$$\begin{cases} \delta_1^2 = -g_{11}^2(\rho_2)_v \\ \delta_2^2 = -g_{22}^2(\rho_2)_u \end{cases} \quad (3.106)$$

elde edilir.

O halde buradan \bar{M}_1 ve \bar{M}_2 invers yüzeylerinin ikinci tipten Christoffel sembolleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^1 - \frac{2(\rho_1)u}{\rho_1} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^1 - \frac{2(\rho_1)v}{\rho_1} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^1 - \frac{2(\rho_1)u}{\rho_1} \frac{g_{22}^1}{g_{11}^1} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^1 - \frac{2(\rho_1)v}{\rho_1} \frac{g_{11}^1}{g_{22}^1} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^1 - \frac{2(\rho_1)u}{\rho_1} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^1 = \frac{1}{(\rho_1)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^1 - \frac{2(\rho_1)v}{\rho_1} \right\} \end{array} \right. \quad (3.107)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_{11}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^1)^2 - \frac{2(\rho_2)u}{\rho_2} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^1)^2 - \frac{2(\rho_2)v}{\rho_2} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^1)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^1)^2 + \frac{2(\rho_2)v}{\rho_2^2} \frac{g_{22}^2}{g_{11}^2} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{11}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{11}^2)^2 + \frac{2(\rho_2)v}{\rho_2} \frac{g_{11}^2}{g_{22}^2} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{12}^2)^2 - \frac{2(\rho_2)v}{\rho_2} \right\} \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)^2 = \frac{1}{(\rho_2)^4} \left\{ (\Gamma_{22}^2)^2 - \frac{2(\rho_2)v}{\rho_2} \right\} \end{array} \right. \quad (3.108)$$

bulunur.

Şimdi iddialarımızı gerçekleyen örnekler verelim.

Örnek 3.1: E^3 'de

$$X(u, v) = (ucosv, usinv, v) \quad (3.109)$$

parametrizasyonu ile verilen bir M yüzeyinin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerini araştıralım. İlk olarak (3.109) denkleminin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} X_u = (cosv, sinv, 0) \\ X_v = (-usinv, ucosv, 1) \end{array} \right. \quad (3.110)$$

bulunur. O halde M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = 1 \\ g_{12} = 0 \\ g_{22} = 1 + u^2 \end{array} \right. \quad (3.111)$$

bulunur. M yüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & -u \cos v & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\sin v, -\cos v, u) \end{aligned}$$

ve

$$\| X_u \wedge X_v \| = \sqrt{1 + u^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} (\sin v, -\cos v, u) \quad (3.112)$$

dir. (3.110) denkleminin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınır

$$\begin{cases} X_{uu} = (0, 0, 0) \\ X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \\ X_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{cases} \quad (3.113)$$

dir. Böylece M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} b_{11} = 0 \\ b_{12} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ b_{22} = 0 \end{cases} \quad (3.114)$$

dir. (2.1.43) ve (2.1.46) eşitlikleri kullanılarak M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2} \quad (3.115)$$

ve

$$H = 0 \quad (3.116)$$

bulunur.

Bu durumda asli eğrilikler

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{1+u^2} \\ k_2 = -\frac{1}{1+u^2} \end{cases} \quad (3.117)$$

olarak elde edilir.

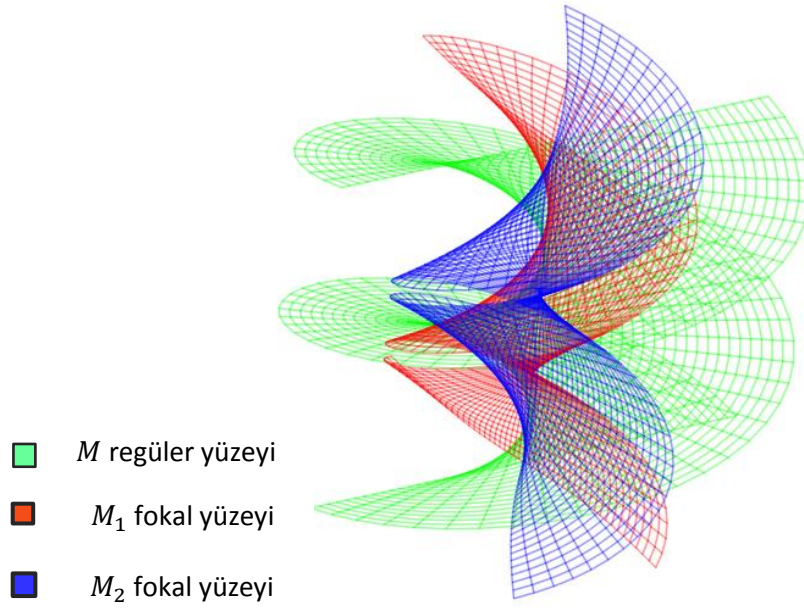
M yüzeyinin fokal yüzeylerinin denklemleri, sırasıyla

$$M_1 \dots R_1(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos v + \sqrt{1 + u^2} \sin v \\ u \sin v - \sqrt{1 + u^2} \cos v \\ v + u\sqrt{1 + u^2} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

ve

$$M_2 \dots R_2(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos v - \sqrt{1 + u^2} \sin v \\ u \sin v + \sqrt{1 + u^2} \cos v \\ v - u\sqrt{1 + u^2} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

dir(Şekil 3.1).



Şekil 3.1. M regüler yüzeyi ve fokal yüzeyleri

M yüzeyinin fokal yüzeylerinin yer vektörünün uzunlukları, sırasıyla

$$\rho_1^2 = \|R_1\|^2 = 1 + 2u^2 + (v + u\sqrt{1 + u^2})^2 \quad (3.120)$$

ve

$$\rho_2^2 = \|R_2\|^2 = 1 + 2u^2 + (v - u\sqrt{1 + u^2})^2 \quad (3.121)$$

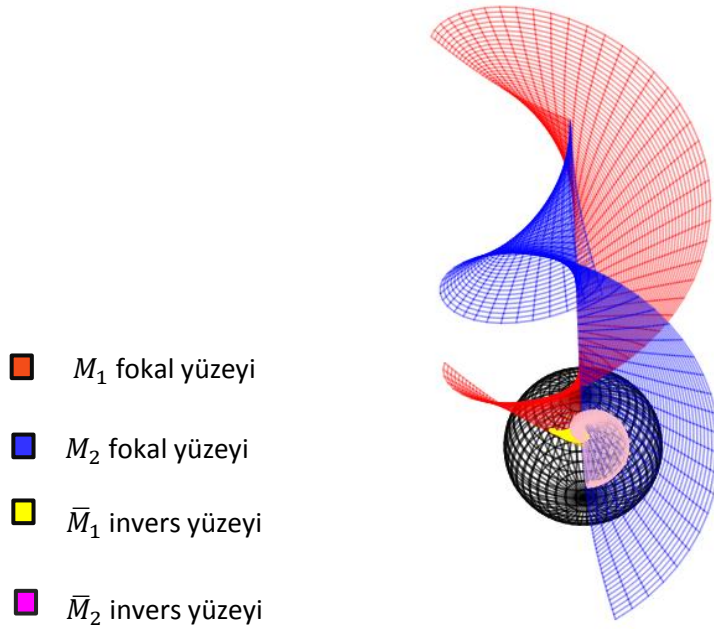
olmak üzere, M yüzeyinin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerinin denklemleri

$$\bar{M}_1 \dots \bar{R}_1(u, v) = \frac{1}{1+2u^2+(v+u\sqrt{1+u^2})^2} \begin{bmatrix} u \cos v + \sqrt{1+u^2} \sin v \\ u \sin v - \sqrt{1+u^2} \cos v \\ v + u\sqrt{1+u^2} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

ve

$$\bar{M}_2 \dots \bar{R}_2(u, v) = \frac{1}{1+2u^2+(v-u\sqrt{1+u^2})^2} \begin{bmatrix} u \cos v - \sqrt{1+u^2} \sin v \\ u \sin v + \sqrt{1+u^2} \cos v \\ v - u\sqrt{1+u^2} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

dir(Şekil 3.2).



Şekil 3.2. M_1 ve M_2 fokal yüzeyleri ve invers yüzeyleri

Örnek 3.2: E^3 'de

$$X(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + u^2v, u^2 - v^2 \right) \quad (3.124)$$

parametrizasyonu ile verilen bir M yüzeyinin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerini araştıralım. Bu yüzey ‘‘Enneper minimal yüzeyi’’ olarak bilinir.

İlk olarak (3.124) denkleminin ‘‘ u ’’ ve ‘‘ v ’’ parametrelerine göre kısmi türevleri alınır

$$\begin{cases} X_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \\ X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \end{cases} \quad (3.125)$$

bulunur. O halde M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} g_{11} = (1 + u^2 + v^2)^2 \\ g_{12} = 0 \\ g_{22} = (1 + u^2 + v^2)^2 \end{cases} \quad (3.126)$$

bulunur.

M yüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 - v^2 + u^2 & -2v \end{vmatrix} \\ &= (1 + u^2 + v^2) (-2u, 2v, 1 - (u^2 + v^2)) \end{aligned}$$

ve

$$\| X_u \wedge X_v \| = 1 + u^2 + v^2$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{1+u^2+v^2} (-2u, 2v, 1 - (u^2 + v^2)) \quad (3.127)$$

dir. (3.125) denkleminin ‘‘ u ’’ ve ‘‘ v ’’ parametrelerine göre kısmi türevleri alınır

$$\begin{cases} X_{uu} = (-2u, 2v, 2) \\ X_{uv} = (2v, 2u, 0) \\ X_{vv} = (2v, -2v, -2) \end{cases} \quad (3.128)$$

dir. Böylece M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} b_{11} = 2 \\ b_{12} = 0 \\ b_{22} = -2 \end{cases} \quad (3.129)$$

dir. O halde (3.126) ve (3.129) eşitliklerinden M yüzeyinin parametre eğrilerinin birer eğrilik çizgisi olduğu söylenebilir. Bu durumda M yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \\ k_2 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{cases} \quad (3.130)$$

olarak elde edilir.

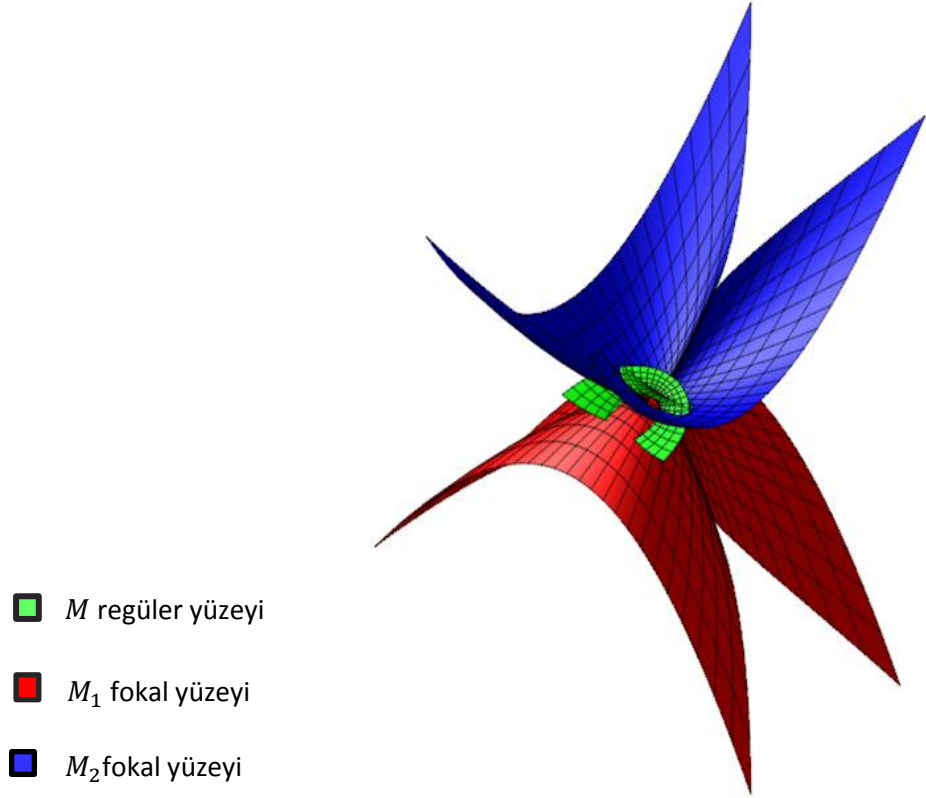
M yüzeyinin fokal yüzeylerinin denklemleri, sırasıyla

$$M_1 \dots R_1(u, v) = \left(\begin{array}{c} -\frac{4}{3}u^3, \frac{2}{3}v^3 + 2v + 2u^2v, \\ \frac{1}{2} [2[u^2 - v^2] + [1 - (u^2 + v^2)^2]] \end{array} \right) \quad (3.131)$$

ve

$$M_2 \dots R_2(u, v) = \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3}u^3 + 2u + 2uv^2, -\frac{4}{3}v^3 \\ \frac{1}{2} [2[u^2 - v^2] - [1 - (u^2 + v^2)^2]] \end{array} \right) \quad (3.132)$$

dir(Şekil 3.3).



Şekil 3.3. M regüler yüzeyi ve fokal yüzeyleri

M yüzeyinin fokal yüzeylerinin yer vektörünün uzunlukları, sırasıyla

$$\begin{aligned}
 \|R_1\|^2 = \rho_1^2 &= \frac{16}{9}u^6 + \left(\frac{2}{3}v^3 + 2v + 2u^2v\right)^2 \\
 &+ \frac{1}{4} \left[2[u^2 - v^2] + [(u^2 + v^2)^2 - 1] \right]^2
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|R_2\|^2 = \rho_2^2 &= \left(\frac{4}{3}u^3 + 2u + 2uv^2\right)^2 + \frac{16}{9}v^6 \\
 &+ \frac{1}{4} \left[2[u^2 - v^2] - [(u^2 + v^2)^2 - 1] \right]^2
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

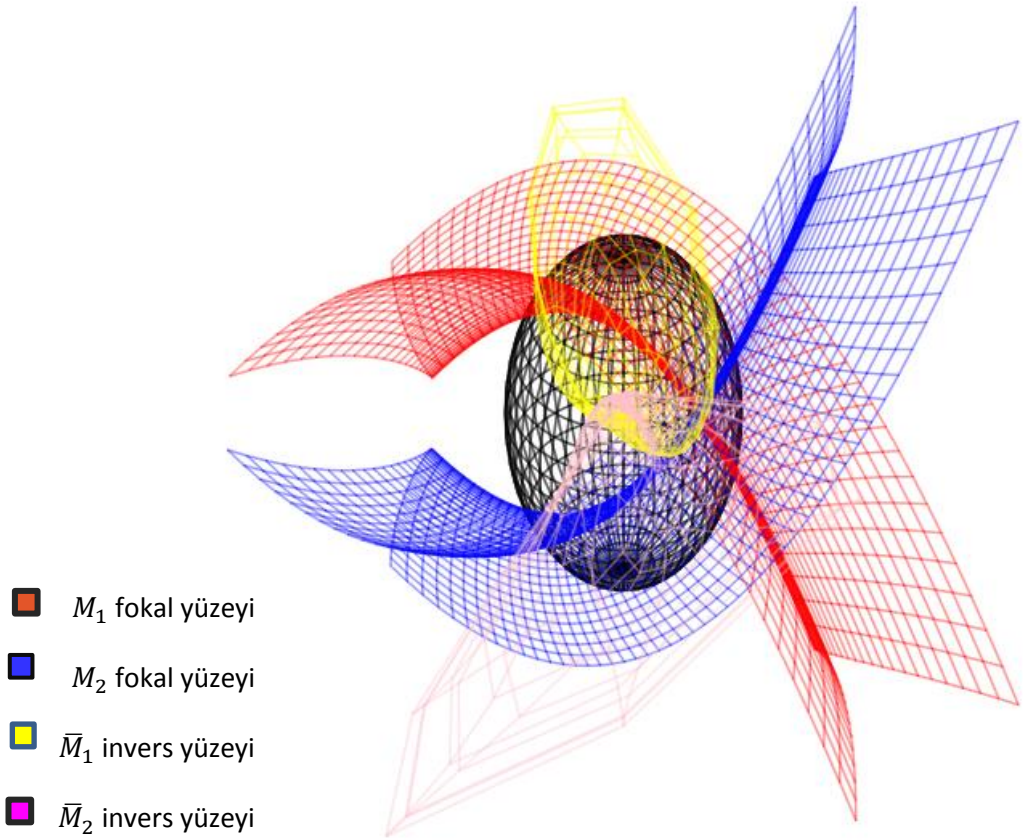
olmak üzere M yüzeyinin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerinin denklemleri sırasıyla

$$\bar{R}_1(u, v) = \frac{1}{\rho_1^2} \left(\begin{array}{c} -\frac{4}{3}u^3, \frac{2}{3}v^3 + 2v + 2u^2v, \\ \frac{1}{2} [2 [u^2 - v^2] + [1 - (u^2 + v^2)^2]] \end{array} \right) \quad (3.135)$$

ve

$$\bar{R}_2(u, v) = \frac{1}{\rho_2^2} \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3}u^3 + 2u + 2uv^2, -\frac{4}{3}v^3 \\ \frac{1}{2} [2 [u^2 - v^2] - [1 - (u^2 + v^2)^2]] \end{array} \right) \quad (3.136)$$

dir(Şekil 3.4).



Şekil 3.4. M_1 ve M_2 fokal yüzeyleri ve invers yüzeyleri

Örnek 3.3: E^3 de

$$X(u, v) = (u, v, uv) \quad (3.137)$$

parametrizasyonu ile verilen bir M yüzeyinin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerini araştıralım. İlk olarak (3.137) denkleminin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} X_u = (1, 0, v) \\ X_v = (0, 1, u) \end{cases} \quad (3.138)$$

bulunur. O halde M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} g_{11} = 1 + v^2 \\ g_{12} = uv \\ g_{22} = 1 + u^2 \end{cases} \quad (3.139)$$

bulunur. M yüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} \\ &= (-v, -u, 1) \end{aligned}$$

ve

$$\| X_u \wedge X_v \| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} (-v, -u, 1) \quad (3.140)$$

dir.

(3.138) denkleminin “ u ” ve “ v ” parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} X_{uu} = (0, 0, 0) \\ X_{uv} = (0, 0, 1) \\ X_{vv} = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (3.141)$$

dir. Böylece M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} b_{11} = 0 \\ b_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ b_{22} = 0 \end{cases} \quad (3.142)$$

dir. (2.1.43) ve (2.1.46) eşitlikleri kullanılarak M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = - \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \quad (3.143)$$

ve

$$H = \frac{-uv}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.144)$$

bulunur.

Bu durumda asli eğrilikler

$$\begin{cases} k_1 = \frac{-uv + \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \\ k_2 = \frac{-uv - \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (3.145)$$

olarak elde edilir.

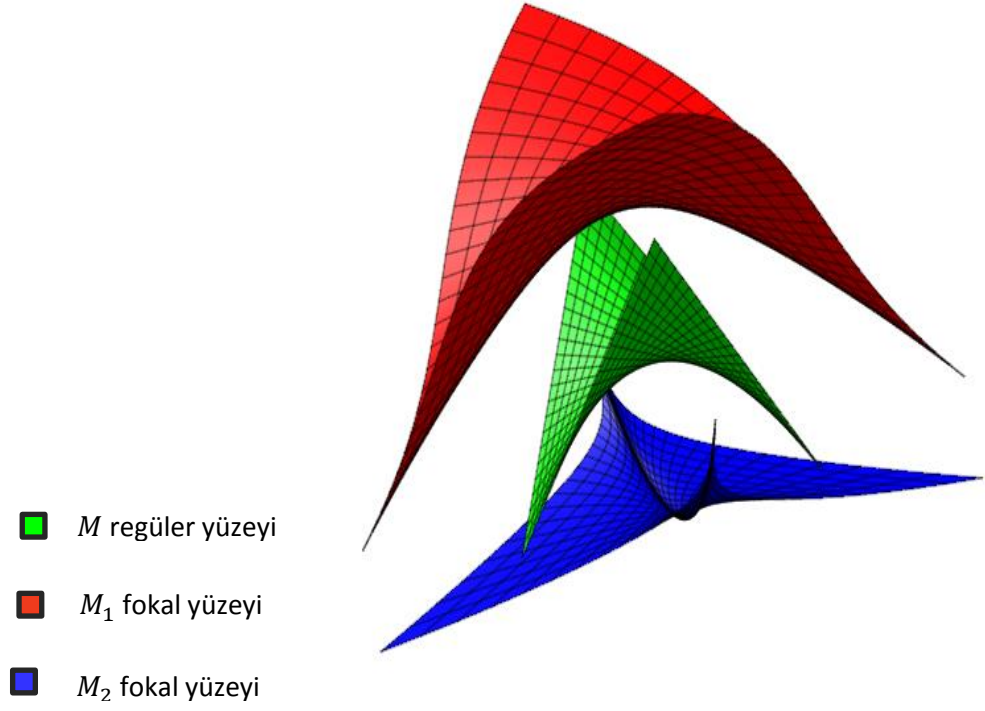
Böylece M yüzeyinin fokal yüzeylerinin denklemleri, sırasıyla

$$M_1 \dots R_1(u, v) = \begin{bmatrix} u - \frac{v+u^2v+v^3}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ v - \frac{u+u^3+uv^2}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ uv + \frac{1+u^2+v^2}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

ve

$$M_2 \dots R_2(u, v) = \begin{bmatrix} u + \frac{v+u^2v+v^3}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ v + \frac{u+u^3+uv^2}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ uv - \frac{1+u^2+v^2}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

dir(Şekil 3.5).



Şekil 3.5. M regüler yüzeyi ve fokal yüzeyleri

M yüzeyinin fokal yüzeylerinin yer vektörünün uzunlukları, sırasıyla

$$\begin{aligned}
 \rho_1^2 = & \left[u - \frac{v+u^2v+v^3}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \right]^2 + \left[v - \frac{u+u^3+uv^2}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \right]^2 \\
 & + \left[uv + \frac{1+u^2+v^2}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \right]^2
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \rho_2^2 = & \left[u + \frac{v+u^2v+v^3}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \right]^2 + \left[v + \frac{u+u^3+uv^2}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \right]^2 \\
 & + \left[uv - \frac{1+u^2+v^2}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \right]^2
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

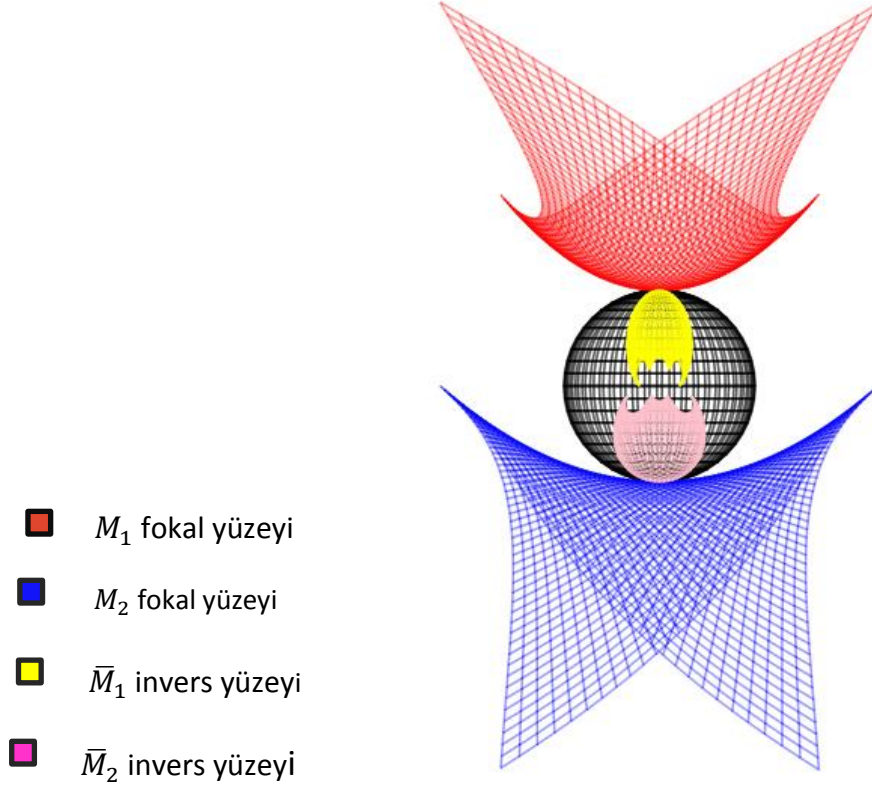
olmak üzere, M yüzeyinin fokal yüzeylerinin invers yüzeylerinin denklemleri sırasıyla

$$\bar{M}_1 \dots \bar{R}_1 = \frac{1}{\rho_1^2} \begin{bmatrix} u - \frac{v+u^2v+v^3}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ v - \frac{u+u^3+uv^2}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ uv + \frac{1+u^2+v^2}{-uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

ve

$$\bar{M}_2 \dots \bar{R}_2 = \frac{1}{\rho_2^2} \begin{bmatrix} u + \frac{v+u^2v+v^3}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ v + \frac{u+u^3+uv^2}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \\ uv - \frac{1+u^2+v^2}{uv+\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}} \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

dir(Şekil 3.6).



Şekil 3.6. M_1 ve M_2 fokal yüzeyleri ve invers yüzeyleri

SONUÇ

Fokal yüzeyler ve invers yüzeyler; özellikle yüzeyler teorisinin kökleri eskide olmasına karşın, son zamanlarda çok sayıda bilim adamı tarafından çalışılan ve birçok bilim dalında önemli uygulamalara sahip iki güzide konusudur.

Bu önemli geometrik yapıyı, tezimizde çalışma konusu olarak ele aldık ve tezde E^3 de verilen bir regüler yüzeyin fokal yüzeylerinin S^2 birim küresine göre invers yüzeylerinin tanımı verildi ve bazı karakteristik özellikleri fokal yüzeylerin konum vektörlerinin uzunlukları ve destek fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edildi. Akabinde, bazı özel yüzeylerin fokal yüzeylerinin invers yüzeyleri elde edilerek bilgisayar ortamında Maple yazılım programı yardımıyla grafikleri çizdirildi. Ayrıca tezimize koyamadığımız yüzeyler üzerindeki eğrilere ait birçok geometrik özellikte makale formatında hazırlanarak, değerlendirilmek üzere dergilere gönderilmiştir. Ayrıca bu tez de elde edilen sonuçlar tarafımızdan Lorentz ve Galilei uzaylarına da aktarılmıştır.

Bu tezde elde edilen bir çok sonuç bu alanda yapılacak olan çalışmalara da esin kaynağı olacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

- Abbena, E., Salamon, S. and Gray A. 2017, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/Crc, 3. Ed, 267- 719, New York.
- Alexiou, D., Tsagas, D., and Frangakis, C. 2001, Conditions for the Normal Rectilinear Congruences whose Focal Surfaces are Minimal, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 77, Issue 3, 335-345.
- Aminov, Y, 2001, The Geometry of Submanifolds, Gordon and Breach Science Publishers, 31-63, Amsterdam.
- Amur, K, 1962, Congruence Geometry in Ordinary Three Dimensional Space and in a Riemannian Space, PhD Thesis, Kartarnak University,1-125.
- Behari, R. 1934, A Significiant Invariant in the Theory of Rectilinear Congruences, Journal of Indian Mathematical Society, Vol. 1,135-142.
- Blair, D. E. 2000, Inversion Geometry and Conformal Mapping, American Mathematical Society, 1-118, Rhode Island.
- Blaschke, W. 1945, Vorlesungen Über Differential Geometrie, Springer-Verlag, 67-120, Berlin.
- Eisenhart, L. P. 1904, Three Particular Systems of Lines on a Surface, Transactions of the American Mathematical Society, 5, 421-437.
- Euler, L 1770., Considerationes de Trajectoriis Orthogonalibus, Novi Comment Acad. Sci.Petrop., 14, 46-71.
- Gay, K. M. 1978, Inversion Geometry and Its Applcations on the Inversive Plane, MSc Thesis, Southeastern Louisiana University, Hammond- Louisiana, 1- 61.
- Guggenheimer, H. W. 1977, Differential Geometry, Dover Publications,Inc.,210-300, New York.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1982, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat No.2, 170-405, Malatya.
- Hagen, H., Müller, H. and Nielson, G. M. 1992a, Focus on Scientific Visualization, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Hagen, H., Hahmann, S., Schreiber, T., Nakajima, Y., Wördenweber, B. and Hollemann-Grundstedt, P. 1992b, Surface Interrogation Algorithms, IEEE Computer Graphics & Applications, 12: 5, 53-60.
- Hagen, H. and Hahmann, S. 1992c, Generalized Focal Surfaces: a New Method for Surface Interrogation, IEEE Proceedings Visualization'92, Boston, 70-76.

- Hagen, H., Hahmann, S. and Schreiber, T. 1995d, Visualization and Computation of Curvature Behaviour of Freeform Curves and Surfaces, *Computer-Aided Design*, 27(7), 545-552.
- Maekawa, T., Patrikalakis, N. M., and Wolter, F. E. 1996, Umbilics and Lines of Curvature for Shape Interrogation, *Computer-Aided Geometric Design*, 13, 133-161.
- Mishra, R. S. 1951, Modifications of Sannia's Theory of Line Congruences and Some Deductions, *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mecmuası*, 16(2), 1-7.
- Monge, G. 1807, Applications de L'Analyse à la Géométrie, A L'usage de J'Ecole Imperiale Polytechnique, Paris, 123-175.
- Nirmala, K. 1963, Congruence Geometry in Riemannian Space, Phd Thesis, Kartarnak University, 1-189.
- Ogura, K. 1918, On the Differential Geometry of a Line Congruence, *Science Reports, Tohoku Imp. Univ.*, 5.
- Papadoulou, D. 2003, On Special Classes of Rectilinear Congruences, *Results in Mathematics*, 43, 318-330.
- Plücker, J. 1834, Analytisch-geometrie Aphorismen, *J. Reine Angew. Math.*, 11, 219-225.
- Ratcliffe, J. G. 1994, Foundations of Hyperbolic Manifolds, 3th Edition, Springer, New York, 97 – 142.
- Riemann, B. 1857, Theorie der Abel'schen Functionen, *J. Reine Angew Math.*, 54, 115-155.
- Rosenfeld, B. A. 1988, A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space, Springer – Verlag, New York, 114-145.
- Röthe, R. 1912, Über die Inversion einer Fläche und die Konforme Abbildung zweier Flächen aufeinander mit Erhaltung der Krümmungslinien, *Mathematische Annalen*, 72 (1), 57.
- Sarioğlugil, A. 1994, Hiperinvers Yüzeylerin Bazı Karakteristik Özellikleri, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 1-58.
- Smart, J. R. 1998, Modern Geometries, 4th Edition, Books/Cole Publishing Company, New York, 243-261.
- Spivak, M. 1999, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 4, Third Edition, Publish or Perish Inc., Houston- Texas, 60-125.
- Srinivasiengar, C. N. 1951, Some Properties of Rectilinear Congruences, *Proc. Indian Ac. Soc.*, 12, 350-355.
- Şemin, F. 1987, Diferansiyel Geometri II, Marmara Üniversitesi Yayınları, No:441, İstanbul, 88-100.
- Taliaferro, T. H. 1901, The Focal Surfaces of the Congruence Formed by the Tangents to the Lines of Curvature of a Given Surface, Phd Thesis, John Hopkins University, 1-24.

- Tul, S., Bayar, F., and Sarioğlugil, A., 2020, On Inverse of a Regular Surface with respect to the Unit Sphere S^2 in E^3 , Journal of Science and Art, (Under Review).
- Wu, L. 2016, Origin, Development, and Dissemination of Differential Geometry in Mathematical History, Point Loma Nazarene University San Diego, California, 1-21.

ÖZ GEÇMİŞ



Beyzanur VİDİNLİ, 08.08.1996 tarihinde Ünye’de doğdu. Ünye Mustafa Rakım Anadolu Lisesi’ni bitirdikten sonra, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi’nden 2018 yılında mezun oldu. 2019 yılından itibaren Canik Fen Bilimleri Özel Öğretim Kursu’nda görev almaktadır. İyi derecede İngilizce bilmektedir.

İletişim Bilgileri

E mail : beyzanur.vidinli.5201@gmail.com

Telefon : 05454318920

Orcid No:

