

## Ortak Bertrand-B Isoasimptotik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri

Gülnur ŞAFFAK ATALAY<sup>\*1</sup>, Kebire Hilal AYVACI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Bölümü, 55420, Samsun, Türkiye

<sup>2</sup>Şehit Metehan Atmaca Anadolu Lisesi, Milli Eğitim Bakanlığı, 05500, Amasya, Türkiye

(Alınış / Received: 21.10.2020, Kabul / Accepted: 07.04.2021, Online Yayınlanma / Published Online: 15.08.2021)

### Anahtar Kelimeler

Asimptotik eğri,  
Bertrand-B eğri,  
Bishop-2 çatısı,  
Parametrik yüzey

**Özet:** Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk olarak çalışmanın amacı ve daha önce yapılan çalışmalara yer verildi. İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında temel tanım ve teoremler verilerek, Bertrand-B eğri tanımı ve konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere değinildi. Üçüncü kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğrinin Bertrand B-çiftinin bu yüzey üzerinde isoasimptotik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilerek, ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey aileleri problemi ele alındı. Çalışmayı destekleyen örnekler ise Mapple-12 programı kullanılarak bu bölümde verildi. Dördüncü ve son kısımda ise elde edilen sonuçlar tartışılarak yapılabilecek diğer çalışmalar üzerinde duruldu.

## Surface Family with A Common Bertrand-B Isoasymptotic Curve

### Keywords

Asymptotic curve,  
Bertrand B-curves,  
Bishop-2 frame,  
Parametric surface

**Abstract:** This study consists of four sections. In the first section, objective of the study and background are given. Second section is devoted to basic definitions and theorems related to 3-dimensional Euclidean spaces. Bertrand-B curve definition given the basic theorems related to the subject was mentioned. In the third chapter of the section, common Bertrand-B isoasymptotic surface families were examine, so we obtain the necessary and sufficient condition for a given curve (with Bishop 2-frame) such that its Bertrand-B pair is both isoparametric and asymptotic on a parametric surfaces. In the last section, results of this study and future studies are discussed and we present some interesting examples to show the validity of this study.

### 1. Giriş

İyi bilinen bağlantılı eğrilerden biri Bertrand eğrileridir. Bu eğriler ilk olarak 1850'de Joseph Louis François Bertrand tarafından ifade edildi [1]. Bir yüzey üzerindeki en önemli eğrilerden biri asimptotik eğridir [2-4]. 3-boyutlu Öklid uzayında, belirli bir karakteristik eğriye sahip yüzeyler ailesi kavramı ilk olarak Wang ve diğerleri tarafından tanıtıldı [5]. Kasap ve diğerleri Wang'ın çalışmasını yeni tip sapma fonksiyonları sunarak genelleştirdi [6]. Son zamanda Bayram ve diğerleri ortak asimptotik eğriye sahip yüzey ailesini tanımlamıştır [7]. Ortak asimptotik eğriye sahip olan yüzey aileleri hakkında daha fazla sonuç Atalay ve Kasap'ın çalışmalarında bulunabilir [8, 9]. Atalay, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin Mannheim çiftinin, parametrik denklemi ile verilen bir yüzey üzerinde asimptotik eğri olması için gerekli ve yeterli koşulları verdi. Ayrıca konuyu özel bir yüzey çeşidi olan regle yüzeylere de genişletti [10]. 1975'te L.Bishop, eğriler üzerine alternatif bir çatı sundu [11]. Birçok

araştırmacı çeşitli alanlarda bu çatı ile ilişkisi olan birçok makale yayınlamıştır [12,13]. Ayvaci, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı ile verilen eğrinin Mannheim-B çiftinin yüzey üzerinde isogeodezik ve isoasimptotik eğri olması için gerekli ve yeterli şartları vererek konuyu regle yüzeylere de taşımıştır. Ayrıca, özel olarak bu regle yüzeyin açılabilir olması için gerekli ve yeterli şartları da incelemiştir [14]. Yılmaz ve Turgut, 2010 yılında Bishop-II çatısını tanımlamışlardır [15]. 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand B-çifti eğrileri ilk olarak Yerlikaya ve arkadaşları tarafından tanıtılmıştır [16]. Son zamanlarda, Masal ve Azak, Frenet çatısı ile tanımlanan Bertrand eğrisinin, Frenet eğriliklerine benzeyen Bishop eğriliklerinin geometrik anlamlarını ifade etmiştir [17].

### 2. Materyal ve Metot

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında  $X = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $Y = (y_1, y_2, y_3)$  olmak üzere

\*İlgili yazar: gulnur.saffak@omu.edu.tr

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan

$$\langle, \rangle: E^3 \times E^3 \rightarrow E \\ (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu  $E^3$  uzayında bir iç çarpım olup Öklid iç çarpımı veya doğal iç çarpım olarak adlandırılır. Ayrıca  $X = (x_1, x_2, x_3)$  vektörünün normu

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

ile tanımlıdır [3].

$\alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olmak üzere bu eğri için tanımlanan  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  Frenet çatısı için türev formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Burada  $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$  ve  $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$  şeklinde tanımlı olup  $\alpha(s)$  eğrisinin eğrilik ve burulması olarak adlandırılır [3].

$\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında verilen birim hızlı bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin Bishop-2 çatısı  $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$  olmak üzere türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \zeta_1' \\ \zeta_2' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\epsilon_1 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ B \end{bmatrix} \quad (2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\epsilon_1, \epsilon_2$  Bishop-2 eğrilikleri olarak adlandırılır.  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  Bishop-2 çatısı  $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin Frenet ve Bishop-2 çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta(s) & -\cos\theta(s) & 0 \\ \cos\theta(s) & \sin\theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ B \end{bmatrix} \quad (3)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{cases} \kappa = \theta'(s), \\ \tau = \sqrt{\epsilon_1^2(s) + \epsilon_2^2(s)} \end{cases} \quad (4)$$

ile tanımlı olup burada

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{\epsilon_2(s)}{\epsilon_1(s)}\right)$$

dır.  $\alpha$  eğrisinin Bishop-2 eğrilikleri için de

$$\begin{cases} \epsilon_1(s) = -\tau(s)\cos\theta(s) \\ \epsilon_2(s) = -\tau(s)\sin\theta(s) \end{cases} \quad (5)$$

eşitlikleri mevcuttur [15].

Yüzey üzerindeki bir eğri için eğer eğrinin hız vektörü asimptotik doğrultu ise eğri asimptotik eğri olarak adlandırılır [3].  $\alpha$  eğrisinin  $\Psi = \Psi(s, v)$  yüzeyi üzerinde isoparametrik bir eğri olması demek sabit  $s$  veya  $v$  parametre değerlerine sahip olması demektir.  $\alpha(s)$  eğrisinin  $\Psi$  yüzeyi üzerinde isoasimptotik olması ise, hem parametrik eğri hem de asimptotik eğri olması demektir [6].

Şimdi Bertrand-B eğrileri ve bu eğriler ile ilgili bazı tanım ve teoremleri verelim:

**Tanım2.1:**  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  birim hızlı eğriler olmak üzere  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin yay uzunluğu parametreleri sırasıyla  $s$  ve  $s^*$ , Bishop-2 çatısı  $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$  ve  $\{\zeta_1^*, \zeta_2^*, B^*\}$  olsun. Eğer  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin  $B$  Bishop-2 vektörü ile  $B^*$  Bishop-2 vektörü lineer bağımlıysa  $\alpha^*$  eğrisine,  $\alpha$  eğrisinin *Bertrand-B eş eğrisi*;  $(\alpha, \alpha^*)$  eğri ikilisine ise *Bertrand-B çifti* denir [16].

Bu tanımdan yola çıkarak  $(\alpha, \alpha^*)$  *Bertrand-B çifti* arasında

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)B(s) \quad (6)$$

eşitliği yazılır [16].

Ayrıca,  $\alpha$  eğrisinin Bishop-2 çatısı  $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$ ,  $\alpha^*$  eğrisinin Bishop-2 çatısı  $\{\zeta_1^*, \zeta_2^*, B^*\}$  olmak üzere bu çatılar arasındaki ilişki

$$\begin{cases} \zeta_1^* = \cos\mu\zeta_1 + \sin\mu\zeta_2 \\ \zeta_2^* = -\sin\mu\zeta_1 + \cos\mu\zeta_2 \end{cases} \quad (7)$$

şeklinde tanımlı olup burada  $\mu, \alpha$  ve  $\alpha^*$  in karşılıklı noktalarında  $\zeta_1$  ve  $\zeta_1^*$  vektörleri arasındaki açıdır [16].

**Teorem2.2:**  $E^3$  de Bertrand-B eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir [16].

**Teorem 2.3:**  $E^3$  de Bertrand -B eğri çiftinin karşılıklı noktalarında  $\zeta_1, \zeta_1^*$  ve  $\zeta_2, \zeta_2^*$  vektörleri arasındaki açı sabittir [16].

### 3. Bulgular

$\beta = \beta(s), G(s, t)$  yüzeyi üzerinde  $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$  Bishop-2 çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun.  $\|\beta''(s)\| \neq 0$  olarak alalım.  $\beta$  nın Bertrand-B eş eğrisi olan  $\beta^*$  eğrisinin  $G(s, t)$  yüzeyi üzerinde isoasimptotik olma şartları incelenecektir.

$\beta^*$  eğrisinin Bishop-2 çatısı  $\{\zeta_1^*, \zeta_2^*, B^*\}$  olmak üzere  $G(s, t)$  yüzeyi,

$$G(s, t) = \beta^*(s) + [p(s, t)\zeta_1^*(s) + q(s, t)\zeta_2^*(s) + r(s, t)B^*(s)] \quad (8)$$

şeklinde yazılır.

$\beta^*$ ,  $\beta$  nın Bertrand-B eş eğrisi olduğundan

$$\beta^* = \beta(s) + \lambda(s)B(s)$$

olup burada  $\lambda$  sıfırdan farklı bir sabittir.

(8) nolu denklemde (7) nolu eşitliğin kullanılmasıyla yüzey denklemi

$$G(s, t) = \beta(s) + (\lambda(s) + r(s, t))B(s) + (p(s, t)\cos\mu(s) - q(s, t)\sin\mu(s))\zeta_1(s) + (p(s, t)\sin\mu(s) + q(s, t)\cos\mu(s))\zeta_2(s) \quad (9)$$

şeklinde elde edilir. Burada Frenet ve Bishop çatıları arasındaki (3) nolu eşitlik kullanılırsa

$$G(s, t) = \beta(s) + \begin{pmatrix} p(s, t)\sin(\theta - \mu)(s) \\ -q(s, t)\cos(\theta - \mu)(s) \end{pmatrix} T(s) + \begin{pmatrix} p(s, t)\cos(\theta - \mu)(s) \\ +q(s, t)\sin(\theta - \mu)(s) \end{pmatrix} N(s) + (\lambda(s) + r(s, t))B(s) \quad (10)$$

elde edilir.

Şimdi  $\beta$  nın Bertrand-B eş eğrisi olan  $\beta^*$  eğrisinin  $G(s, t)$  yüzeyi üzerinde isoasimptotik olma şartlarını inceleyelim:

İlk olarak  $\beta^*$  Bertrand-B eş eğrisinin parametrik olması gerektiğinden, parametrik eğri tanımı gereğince [6],

$t = t_0 = \text{sabit}$  için  $G(s, t) = \beta(s)$  olması için

$t_0 \in [K_1, K_2]$  olmak üzere

$$p(s, t_0) = q(s, t_0) \equiv 0, r(s, t_0) = -\lambda, \quad L_1 \leq s \leq L_2$$

olmalıdır.

İkinci olarak, asimptotik teoremine göre [8],  $\beta^*$  eğrisinin  $G(s, t)$  yüzeyi üzerinde asimptotik olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{\partial n}{\partial s}(s, t_0) \cdot T(s) = 0 \quad (11)$$

olmasıdır. Burada “.” Öklid iç çarpımı olup  $n$  ise  $G = G(s, t)$  yüzeyinin normal vektörüdür.  $G(s, t)$  yüzeyinin normal vektörü

$$n(s, t) = \frac{\partial G(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial G(s, t)}{\partial t}$$

şeklinde tanımlı olup gerekli hesaplamalar yapılarak (4) ve (10) nolu denklemlerin kullanılmasıyla

$$n(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)T(s) + \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s) \quad (12)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \phi_1(s, t_0) = \lambda\tau \frac{\partial r(s, t_0)}{\partial t} \\ \phi_2(s, t_0) = -\frac{\partial r(s, t_0)}{\partial t} \\ \phi_3(s, t_0) = \frac{\partial p(s, t_0)}{\partial t} \cos(\theta - \mu)(s) + \frac{\partial q(s, t_0)}{\partial t} \sin(\theta - \mu)(s) \\ -\lambda\tau \frac{\partial p(s, t_0)}{\partial t} \sin(\theta - \mu)(s) + \lambda\tau \frac{\partial q(s, t_0)}{\partial t} \cos(\theta - \mu)(s) \end{cases} \quad (13)$$

dır. (11) nolu denklemin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial s}(s, t_0) \cdot T(s) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_1(s, t_0)}{\partial s} - \kappa \phi_1(s, t_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_1(s, t_0)}{\partial s} + \kappa \frac{\partial r(s, t_0)}{\partial t} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial r(s, t_0)}{\partial t} (\kappa + \lambda\tau') = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

elde edilir. Burada  $\kappa, \beta$  eğrisinin eğriliğidir.

$\kappa = \theta'$  olması ve (14) nolu denklemin kullanılmasıyla verilen  $\beta(s)$  eğrisinin Bertrand-B eş eğrisinin  $G = G(s, t)$  yüzeyi üzerinde asimptotik olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{\partial r(s, t_0)}{\partial t} = 0 \text{ ya da } \theta = -\lambda\tau + c \quad (15)$$

olmasıdır. Burada  $\lambda$  ve  $c$  reel değerli sabitlerdir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 3.1:**  $\beta(s)$ ,  $L_1 \leq s \leq L_2$  aralığında eğriliği sıfırdan farklı bir eğri ve  $\beta^*(s)$   $L_1 \leq s \leq L_2$  aralığında  $\beta(s)$  nın Bertrand-B eş eğrisi olsun.  $\beta^*(s)$  eğrisi yüzey üzerinde isoasimptotiktir ancak ve ancak

$$\begin{cases} p(s, t_0) = q(s, t_0) \equiv 0, \quad r(s, t_0) = -\lambda, \quad \lambda \neq 0 \\ \frac{\partial r(s, t_0)}{\partial t} = 0 \text{ veya } \theta = -\lambda\tau + c, \quad c = \text{sabit} \end{cases} \quad (16)$$

olmasıdır. Burada

$K_1 \leq t, t_0 \leq K_2$  ( $t_0$  sabit) ve  $\theta$  da  $\beta$  eğrisinin  $\zeta_1$  ve  $N$  vektörleri arasındaki açıdır.

Böylece (16) nolu şart ile verilen eğrinin Bertrand-B eş eğrisinin  $G$  yüzeyi üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilmiştir. Bu şartları sağlayan yüzeyler ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzeyleri oluşturmaktadır.

**Not:** Sapma fonksiyonlarının (16) nolu şartı sağlayacak şekilde her farklı seçilişinde ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir üyesi elde edilir.

**Örnek3.2.** Birim hızlı  $\beta(s) = (\cos s, \sin s, 0)$  çember eğrisini alalım.  $(\kappa(s) = 1, \tau(s) = 0)$  (8) nolu denklemden,  $\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds} = 1 \Rightarrow \theta(s) = s + c$ ,  $c = \text{sabit}$  dir. Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T(s) &= (-\sin s, \cos s, 0) \\ N(s) &= (-\cos s, -\sin s, 0) \\ B(s) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

şekindedir.

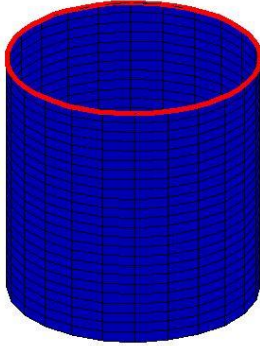
a) Eğer sapma fonksiyonları

$$p(s, t) = q(s, t) \equiv 0, \quad r(s, t) = -\lambda + t^2$$

Şeklinde ve  $t_0 = 0$  olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir üyesi

$$G_1(s, t) = (\cos s, \sin s, t^2)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:



**Şekil 1.** Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_1(s, t)$  yüzeyi

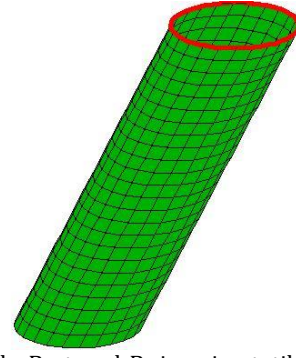
b) Sapma fonksiyonları

$$p(s, t) = q(s, t) = t, \quad r(s, t) = -\lambda + t^2$$

ve  $t_0 = 0$  olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece, ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$G_2(s, t) = (\cos s - t, \sin s - t, t^2)$$

şeklinde olup burada  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:



**Şekil 2.** Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_2(s, t)$  yüzeyi

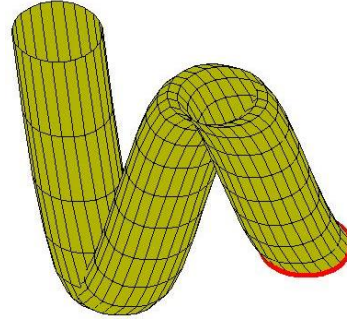
c) Eğer

$$p(s, t) = q(s, t) = t, \quad r(s, t) = -\lambda + tsint$$

ve  $t_0 = 0$  olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece, ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$G_3(s, t) = (\cos s - t, \sin s - t, tsint)$$

şeklinde elde edilir.  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:



**Şekil 3.** Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_3(s, t)$  yüzeyi

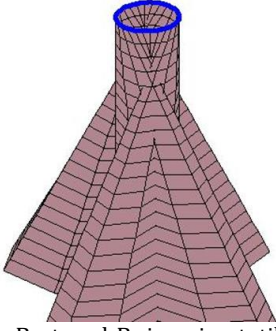
d) Son olarak sapma fonksiyonları

$$\begin{aligned} p(s, t) &= t \sin(2s) \sin(s), \\ q(s, t) &= -t \sin(2s) \cos(s), \\ r(s, t) &= -\lambda + t^2 \end{aligned}$$

ve  $t_0 = 0$  olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece, ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$G_4(s, t) = \begin{pmatrix} \cos s - t \sin(s) \sin(2s), \\ \sin s + t \cos(s) \sin(2s), \\ t \cos(s) \sin(2s) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup burada  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:



Şekil 4. Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_4(s,t)$  yüzeyi

Örnek 3.3. Aşağıda ifade edilen birim hızlı

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$$

eğrisini alalım.

$$\begin{cases} \beta_1(s) = \frac{25}{306} \sin 9s - \frac{9}{850} \sin 25s \\ \beta_2(s) = -\frac{25}{306} \cos 9s + \frac{9}{850} \cos 25s \\ \beta_3(s) = \frac{15}{136} \sin 8s \end{cases}$$

Gerekli hesaplamalar yapıldığında bu eğrinin eğrilik ve burulması

$$\kappa(s) = -15 \sin(8s), \quad \tau(s) = 15 \cos(8s)$$

şeklinde elde edilir.

(8) nolu eşitliğin kullanılmasıyla

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds} = -15 \sin(8s) \Rightarrow \theta(s) = \frac{15}{8} \cos(8s) + c, \quad (c=\text{sabit}) \text{ dır.}$$

$\beta = \beta(s)$  eğrisinin Frenet çatısı aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \begin{pmatrix} \frac{25}{34} \cos(9s) - \frac{9}{34} \cos(25s), \\ \frac{25}{34} \sin(9s) - \frac{9}{34} \sin(25s), \\ \frac{15}{17} \cos(8s) \end{pmatrix},$$

$$N(s) = \begin{pmatrix} \frac{15}{34} \csc(8s)(\sin(9s) - \sin(25s)), \\ -\frac{15}{34} \csc(8s)(\cos(9s) - \cos(25s)), \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix},$$

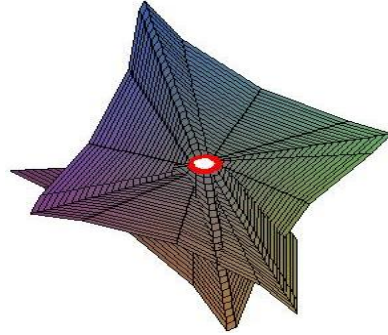
$$B(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{34} (25 \sin(9s) + 9 \sin(25s)), \\ \frac{1}{34} (-25 \cos(9s) - 9 \cos(25s)), \\ -\frac{15}{17} \sin(8s) \end{pmatrix}$$

a) Eğer sapma fonksiyonları

$p(s,t) = q(s,t) = t$ ,  $r(s,t) = -\lambda + t$  ve  $t_0 = 0, \lambda = -\frac{1}{8}, c = 0$  olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece, ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir üyesi

$$G_5(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{25}{306} \sin(9s)(1+9t) - \frac{9}{850} \sin(25s)(1+25t), \\ -\frac{25}{306} \cos(9s)(1+9t) + \frac{9}{850} \cos(25s)(1-25t), \\ \frac{15}{136} \sin(8s)(1-8t) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 5. Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_5(s,t)$  yüzeyi

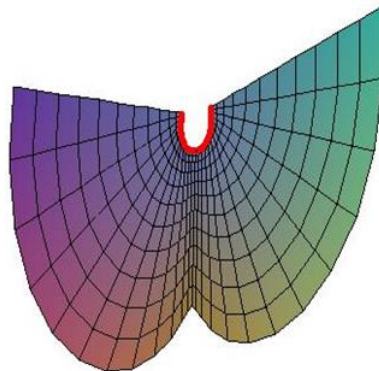
b) Eğer sapma fonksiyonları

$$p(s,t) = q(s,t) \equiv 0, \quad r(s,t) = -\lambda + tsint$$

ve  $t_0 = 0$  olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$G_6(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{25}{34} \sin(9s) \left( \frac{1}{9} + tsint \right) + \frac{9}{34} \sin(25s) \left( -\frac{1}{25} + tsint \right), \\ -\frac{25}{34} \cos(9s) \left( \frac{1}{9} + tsint \right) + \frac{9}{34} \cos(25s) \left( \frac{1}{25} - tsint \right), \\ \frac{5}{17} \sin(8s) \left( \frac{1}{8} - 3tsint \right) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.  $0 \leq s \leq \pi/8$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:



Şekil 6. Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_6(s,t)$  yüzeyi

c) Eğer sapma fonksiyonları

$$p(s, t) = t \sin\left(\frac{15}{8} \cos(8s)\right),$$

$$q(s, t) = -t \cos\left(\frac{15}{8} \cos(8s)\right), r(s, t) = -\lambda + t$$

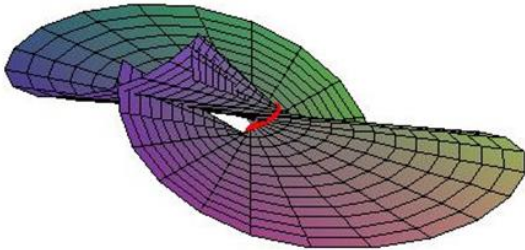
$$\text{ve } t_0 = 0, \lambda = -\frac{1}{8}, c = 0$$

olarak seçilirse (16) nolu şart sağlanmış olur. Böylece, ortak Bertrand-B isoasimptotikli yüzey ailesinin bir başka üyesi

$$G_7(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{25}{34} \sin(9s) \left(\frac{1}{9} + t\right) - \frac{9}{34} \sin(25s) \left(\frac{1}{25} + t\right) \\ + \frac{t}{34} (25 \cos(9s) + 9 \sin(25s)), \\ -\frac{25}{34} \cos(9s) \left(\frac{1}{9} + t\right) + \frac{9}{34} \cos(25s) \left(\frac{1}{25} - t\right), \\ + \frac{t}{34} (25 \sin(9s) - 9 \sin(25s)) \\ \frac{15}{17} \sin(8s) \left(\frac{1}{8} - t\right) + \frac{15}{17} t \cos(8s) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$-\pi/50 \leq s \leq \pi/9$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  alınarak bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:



Şekil 7. Ortak Bertrand-B isoasimptotik eğrili  $G_7(s,t)$  yüzeyi

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Parametrik denklemi ile ifade edilen bir yüzey üzerinde, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin Bertrand-B eş eğrisinden geçen ve bu eğriyi hem parametrik hem de asimptotik (isoasimptotik) eğri kabul eden yüzey ailesinin bulunması problemi incelenerek konu ile ilgili çeşitli örnekler Mapple 12 programı kullanılarak verilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar kullanılarak; Bertrand-B eğrilerinin hem Minkowski hem de çeşitli diğer uzaylar örneğin  $S^3$  küresi,  $H^3$  hiperbolik uzayı veya bu uzayların pseudo anlamdaki diğer uzayları ve yüksek boyutlu uzayları için tanımlanması durumunda benzer çalışmalar yapılabilir.

#### Etik Beyanı

Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında

uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

#### Kaynakça

- [1] Bertrand, J. (1850). Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 332-350.
- [2] O'Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry, Academic Press Inc., New York.
- [3] Do Carmo, M. P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Deng, B. 2011. Special Curve Patterns for Freeform Architecture. Ph.D. thesis, Eingereicht an der Technischen Universität Wien.
- [5] Wang, G. J., Tang, K., Tai, C. L. 2004. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. Computer-Aided Design, 36(5), 447-459.
- [6] Kasap, E., Akyildiz, F. T., Orbay, K., A. 2008. generalization of surfaces family with common spatial geodesic. Applied Mathematics and Computation, 201, 781-789.
- [7] Bayram, E., Güler, F., Kasap, E. 2012. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve. Computer-Aided Design, 44, 637-643.
- [8] Atalay, G. Ş., Kasap, E. 2016. Surfaces family with common Smarandache asymptotic curve according to Bishop frame in Euclidean space. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 34(1), 1-16.
- [9] Atalay, G. Ş., Kasap, E. 2016. Surfaces family with common Smarandache asymptotic curve. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 34(1), 9-20.
- [10] Atalay, G. Ş. 2018. Surfaces family with a common Mannheim asymptotic curve. Journal of Applied Mathematics and Computation, 2(4), 143-154.
- [11] Bishop, R. L. 1975. There is more than one way to Frame a curve. The American Mathematical Monthly, 82(3), 246.
- [12] Karacan, M. K., Bükçü, B. 2008. Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space. Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science, 3(1), 80-90.
- [13] Cetin, M., Tunçer, Y., Karacan, M. K. 2014. Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean space. Infinite Study, 20(2), 50-56.
- [14] Ayvaci, K. H. 2019. Ortak Mannheim-B İsogeodezikli ve İsoasimptotikli Yüzey Ailesi.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

- [15] Yılmaz, S., Turgut, M. 2010. A new version of Bishop frame and an application to spherical images. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2), 764.
- [16] Yerlikaya, F., Karaahmetoğlu, S., Aydemir, İ. 2016. On the bertrand B-PairCurve in 3-dimensional Euclidean space. *Journal of Science and Arts*, 3(36), 215-224.
- [17] Masal, M., Azak, A. Z. 2017. Bertrand curves and Bishop frame in the 3-dimensional Euclidean space. *Sakarya University Journal of Science*, 21(6), 1140-1145.